

راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

فیلم آموزشی

گام

اول

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Code های صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

درسنامه آموزشی

گام

دوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش مخصوص، عمیق و کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. کلیه نکات کنکوری و راهکارهای میان‌بر و تستی مورد نیاز آورده شده است.
۴. تمام تیپ‌های مهم و کنکوری و نیز تمام مطالب کتاب درسی، اعم از فعالیت‌ها، تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها و ... در مثال‌های درسنامه پوشش داده شده است.
۵. در انتهای هر قسمت، خلاصه نکات آن قسمت به منظور مرور و جمع‌بندی، به ویژه برای ایام آزمون سراسری و کنکورهای آزمایشی ارائه شده است.
۶. در هر جا که لازم بوده است، به دانش‌آموزان عزیز، به زبان محاوره‌ای مشاوره داده شده است.

پرسش‌های تشریحی

گام

سوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. تمام تمرین‌ها، مثال‌ها و حتی متن کتاب درسی و نیز سؤالات امتحانات نهایی سال‌های قبل که با مباحث کنونی انطباق دارند، پوشش داده شده است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام

چهارم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تمام تمرین‌ها، مثال‌ها و حتی متن کتاب درسی به صورت تست آورده شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی بوده و تمامی نکات درسی دوباره در پاسخ تست‌ها گنجانده شده است.
۷. تست‌های واجب با علامت **★** و تست‌های دشوار با علامت **★** مشخص شده است.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

درسنامه آموزشی

فصل اول: تابع

- قسمت اول: تبدیل نمودار توابع ۱۰
قسمت دوم: تابع درجه سوم - توابع صعودی و نزولی ۱۹
قسمت سوم: بخش پذیری و تقسیم ۲۶

فصل دوم: مثلثات

- قسمت اول: یادآوری و تکمیل اتحادهای مثلثاتی ۳۳
قسمت دوم: تناوب و تابع تانژانت ۳۸
قسمت سوم: معادلات مثلثاتی ۴۸

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

- قسمت اول: مفهوم و قضایای حد ۵۷
قسمت دوم: حد چند تابع خاص - بررسی چند مفهوم ۶۴
قسمت سوم: محاسبه حدهای مبهم ۶۹
قسمت چهارم: حدهای نامتناهی ۸۰
قسمت پنجم: حد در بی نهایت ۸۸
قسمت ششم: مجانب‌ها ۱۰۰
قسمت هفتم: پیوستگی ۱۰۹

فصل چهارم: مشتق

- قسمت اول: آشنایی با مفهوم مشتق ۱۱۸
قسمت دوم: مشتق پذیری و پیوستگی ۱۲۲
قسمت سوم: تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری ۱۳۳
قسمت چهارم: مشتق تابع مرکب - مشتق مرتبه دوم ۱۴۲
قسمت پنجم: معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی ۱۴۶
قسمت ششم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۱۴۹

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

- قسمت اول: توابع صعودی و نزولی ۱۶۰
قسمت دوم: نقاط بحرانی ۱۶۵
قسمت سوم: اکسترم‌های مطلق ۱۶۹
قسمت چهارم: مسائل بهینه‌سازی ۱۷۷
قسمت پنجم: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی ۱۸۳
قسمت ششم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۱۹۳
قسمت هفتم: رسم نمودار توابع ۲۰۶

FILM

فصل اول: تابع

- جلسه اول: تبدیل نمودار توابع 118 min
جلسه دوم: تابع درجه سوم، توابع صعودی و نزولی، بخش پذیری و تقسیم 159 min

فصل دوم: مثلثات

- جلسه سوم: تناوب و تابع تانژانت 105 min
جلسه چهارم: معادلات مثلثاتی 50 min

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

- جلسه پنجم: حدهای نامتناهی 73 min
جلسه ششم: حد در بی نهایت 55 min

فصل چهارم: مشتق

- جلسه هفتم: آشنایی با مفهوم مشتق 80 min
جلسه هشتم: مشتق پذیری و پیوستگی 123 min
جلسه نهم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر 53 min

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

- جلسه دهم: اکسترم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی 113 min
جلسه یازدهم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن 54 min
جلسه دوازدهم: رسم نمودار توابع 68 min

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول: تابع

- قسمت اول: تبدیل نمودار توابع ۲۲۵
قسمت دوم: تابع درجه سوم - توابع صعودی و نزولی ۲۳۱
قسمت سوم: بخش پذیری و تقسیم ۲۳۳

فصل دوم: مثلثات

- قسمت اول: یادآوری و تکمیل اتحادهای مثلثاتی ۲۴۵
قسمت دوم: تناوب و تابع تانژانت ۲۴۷
قسمت سوم: معادلات مثلثاتی ۲۵۲

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

- قسمت اول: مفهوم و قضایای حد ۲۷۵
قسمت دوم: حد چند تابع خاص - بررسی چند مفهوم ۲۷۸
قسمت سوم: محاسبه حدهای مبهم ۲۸۲
قسمت چهارم: حدهای نامتناهی ۲۸۹
قسمت پنجم: حد در بی نهایت ۲۹۲
قسمت ششم: مجانب‌ها ۲۹۷
قسمت هفتم: پیوستگی ۳۰۳

فصل چهارم: مشتق

- قسمت اول: آشنایی با مفهوم مشتق ۳۶۳
قسمت دوم: مشتق پذیری و پیوستگی ۳۶۵
قسمت سوم: تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری ۳۶۸
قسمت چهارم: مشتق تابع مرکب - مشتق مرتبه دوم ۳۷۶
قسمت پنجم: معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی ۳۷۸
قسمت ششم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۳۸۱

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

- قسمت اول: توابع صعودی و نزولی ۴۱۱
قسمت دوم: نقاط بحرانی ۴۱۳
قسمت سوم: اکسترم‌های مطلق ۴۱۵
قسمت چهارم: مسائل بهینه‌سازی ۴۱۸
قسمت پنجم: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی ۴۲۰
قسمت ششم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۴۲۴
قسمت هفتم: رسم نمودار توابع ۴۳۱

پرسش‌های تشریحی

فصل اول: تابع

- قسمت اول: تبدیل نمودار توابع ۴۸۱
قسمت دوم: تابع درجه سوم - توابع صعودی و نزولی ۴۸۲
قسمت سوم: بخش پذیری و تقسیم ۴۸۳

فصل دوم: مثلثات

- قسمت اول: یادآوری و تکمیل اتحادهای مثلثاتی ۴۹۰
قسمت دوم: تناوب و تابع تانژانت ۴۹۰
قسمت سوم: معادلات مثلثاتی ۴۹۲

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

- قسمت اول: مفهوم و قضایای حد -
قسمت دوم: حد چند تابع خاص - بررسی چند مفهوم -
قسمت سوم: محاسبه حدهای مبهم -
قسمت چهارم: حدهای نامتناهی ۴۹۷
قسمت پنجم: حد در بی نهایت ۴۹۸
قسمت ششم: مجانب‌ها ۴۹۹
قسمت هفتم: پیوستگی -

فصل چهارم: مشتق

- قسمت اول: آشنایی با مفهوم مشتق ۵۰۵
قسمت دوم: مشتق پذیری و پیوستگی ۵۰۶
قسمت سوم: تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری ۵۰۷
قسمت چهارم: مشتق تابع مرکب - مشتق مرتبه دوم ۵۰۸
قسمت پنجم: معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی ۵۰۹
قسمت ششم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۵۰۹

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

- قسمت اول: توابع صعودی و نزولی ۵۲۰
قسمت دوم: نقاط بحرانی ۵۲۰
قسمت سوم: اکسترم‌های مطلق ۵۲۱
قسمت چهارم: مسائل بهینه‌سازی ۵۲۲
قسمت پنجم: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی ۵۲۲
قسمت ششم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۵۲۴
قسمت هفتم: رسم نمودار توابع ۵۲۵

فصل ۲

قسمت سوم

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی، مهم‌ترین مبحث مثلثات مصوب می‌شود. چرا که واسه حل اوتا می‌بایست به تمام روابط و اتادهای مثلثاتی مسلط باشیم. یعنی بسیاری از مطالبی که تا این‌جا تو مثلثات فوندریم ابزارهایی هستن که تو حل معادلات مثلثاتی به کار می‌رن. تقریباً هر سال یه تست کنکور تو رشته‌های ریاضی و تهری از معادلات مثلثاتی مطرح می‌شه.

معادله مثلثاتی

معادلاتی که پس از ساده شدن بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند، معادلات مثلثاتی نام دارند. به طور مثال معادلات $3 \sin^2 x + \sin x - 4 = 0$ و $2 \tan x + \cos 2x = 1$ ، معادلات مثلثاتی هستند.

صورت‌های مقدماتی معادلات مثلثاتی

اغلب معادلات مثلثاتی، پس از ساده کردن به یکی از چهار صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\cos u = \cos \alpha \quad (۲)$$

$$\sin u = \sin \alpha \quad (۱)$$

$$\cot u = \cot \alpha \quad (۴)$$

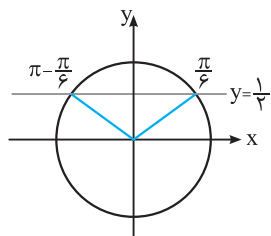
$$\tan u = \tan \alpha \quad (۳)$$

به معادلات فوق، صورت‌های مقدماتی معادلات مثلثاتی گفته می‌شود. در واقع در حل بسیاری از معادلات مثلثاتی، سعی می‌کنیم به کمک اتحادها و روابط مثلثاتی و گاهی اوقات جبری، معادله داده شده را به یکی از صورت‌های فوق تبدیل و سپس آن را حل کنیم. منظور از حل معادلات مثلثاتی، یافتن مقدارهایی از زاویه مجهول است که به ازای آن‌ها معادله برقرار باشد. در ادامه به حل هر یک از صورت‌های مقدماتی و برخی از معادلاتی که به آن‌ها تبدیل می‌شوند خواهیم پرداخت.

حل معادلات به شکل $\sin u = \sin \alpha$

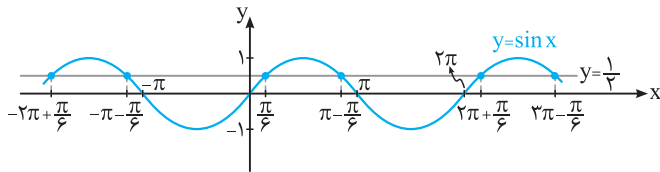
معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ یا به طور معادل معادله $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ را در نظر بگیرید.

برای حل این معادله، در دایره مثلثاتی مقابل، خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است را رسم می‌کنیم.



با توجه به دایره مثلثاتی، می‌توان گفت هر یک از زوایای $x_1 = \frac{\pi}{6}$ و $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6}$ جواب‌هایی از معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ هستند. اما همان‌طور که می‌دانیم، زوایای $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ ، $\frac{\pi}{6} + 4\pi$ و ... و به طور کلی $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)، با زاویه $\frac{\pi}{6}$ ، و زوایای $\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi$ ، $\pi - \frac{\pi}{6} + 4\pi$ و ... و به طور کلی $\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هم‌انتهای هستند. پس می‌توان گفت به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، هر یک از زوایای $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$ جواب‌های کلی معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ هستند.

تعبیر هندسی این مطلب در شکل مقابل نیز قابل مشاهده است:



با توجه به نمودار، طول نقاط برخورد خط $y = \frac{1}{4}$ با نمودار $y = \sin x$ ، ریشه‌های معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ هستند. در واقع داریم:

$$\sin x = \frac{1}{4} \begin{cases} x = \dots, -\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \dots \Rightarrow x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = \dots, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

در حالت کلی برای حل معادله $\sin u = a$ که در آن $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود. در این صورت معادله به شکل $\sin u = \sin \alpha$ درمی‌آید. جواب‌های کلی این معادله با توجه به دوران‌های مختلف به صورت $u = 2k\pi + \alpha$ و $u = 2k\pi + \pi - \alpha$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$. بنابراین به طور خلاصه نکته زیر را داریم:

$$\sin u = \sin \alpha \Rightarrow u = 2k\pi + \alpha, u = 2k\pi + \pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

نکته

مثال

جواب‌های کلی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید:

$$\sin 4x - \sin x = 0 \quad (\text{ب}) \quad \sqrt{3} \sin x = 2 \quad (\text{آ})$$

پاسخ: با توجه به نکته فوق، جواب‌های کلی هر یک از معادلات را به دست می‌آوریم:

(آ)

$$\sqrt{3} \sin x = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

(ب)

$$\sin 4x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin 4x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \\ 4x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}$$

نکته برای یافتن جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه، به جای k اعداد صحیح $0, \pm 1, \pm 2$ و ... را قرار داده و جواب‌هایی که در آن بازه قرار دارند را می‌پذیریم.

تست

مجموع جواب‌های معادله $2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$4\pi \quad (4)$$

$$\frac{7\pi}{2} \quad (3)$$

$$\frac{11\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{22\pi}{5} \quad (1)$$

پاسخ:

$$2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0 \Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر صحیح به جای k ، جواب‌های معادله را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست می‌آوریم:

k	0	1
x	$\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}$	$\pi + \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{7\pi}{12}$

توجه کنید که به ازای $k < 0$ ، جواب‌های معادله منفی می‌شوند و لذا در بازه $[0, 2\pi]$ قرار ندارند. همچنین به ازای $k \geq 2$ نیز جواب‌های معادله در خارج این بازه قرار می‌گیرند. بنابراین این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چهار جواب به صورت فوق بوده و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi + 7\pi + 12\pi + 3\pi + 12\pi + 7\pi}{12} = \frac{44\pi}{12} = \frac{11\pi}{3} \Rightarrow \text{گزینه (2) صحیح است.}$$

حالت‌های خاص

بین عزیزم، آکه از ما بفراوان معادله $3x^2 + 5x - 8 = 0$ رو حل کنیم، اگر چه می‌تونیم این معادله رو به روش Δ یا تمیزه حل کنیم، اما ساده‌تر اینه که بگیم چون مجموع ضرایب معادله درجه 2 صفر شده، پس یکی از جواب‌هاش 1 هست و دیگری $-\frac{8}{3}$. در واقع این‌ها از حالت خاص حل معادله درجه 2 استفاده کردیم. تو حل معادله‌های مثلثاتی هم به همین حالتی داریم که آکه این حالت‌ها رو بلد باشیم فیلی سریع می‌تونیم به جواب برسیم.

تست

معادله $\cos^2 x = \sin^2 x + \frac{1}{4}$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱) ۵ (۴)

پاسخ: می‌دانیم $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ بنابراین داریم:

$$\cos^2 x = \sin^2 x + \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

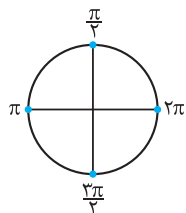
k	-1	0	1
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

بنابراین معادله در بازه $[-\pi, \pi]$ دارای چهار جواب بوده و گزینه (۳) صحیح است.

حالت‌های خاص

در معادله $\cos u = a$ ، اگر a یکی از اعداد $1, 0, -1$ و صفر باشد، حالت‌های خاص رخ می‌دهد که با توجه به دایره مثلثاتی، داریم: ($k \in \mathbb{Z}$)

۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$ ۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = (2k+1)\pi$



این‌ها هم موازی باشند که حالت‌های خاص واصله اعداد $0, 1, -1$ و 0 و 1 و -1 هس و ضمناً می‌تونی از همون راه کاری که قبلاً واسه سینوس گفتیم، این‌جا هم استفاده کنی. ریشه‌های معادلات $\cos u = \pm 1$ ، ریشه مضاعف می‌باشند.

تست

مجموع جواب‌های معادله $2\cos^2 x + 1 = 3\cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{14\pi}{3}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$ (۳) 5π (۲) 4π (۱)

$$2\cos^2 x + 1 = 3\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$$

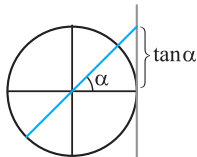
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

k	0	1
x	$0, \frac{\pi}{3}$	$2\pi, 2\pi - \frac{\pi}{3}$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ را یافته و مجموع آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\text{گزینه (۱) صحیح است. } \Rightarrow 4\pi = 0 + \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{3} = \text{مجموع جواب‌ها}$$

حل معادلات به شکل $\tan u = \tan \alpha$



برای حل معادله $\tan u = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری می‌یابیم که $\tan \alpha = a$. در این صورت معادله به شکل $\tan u = \tan \alpha$ درمی‌آید که با توجه به دایره مثلثاتی مقابل و این‌که دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر π است، جواب‌های کلی این معادله از نکته زیر به دست می‌آید:

$\tan u = \tan \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

نکته

مثال

جواب کلی معادلات زیر را به دست آورید.

آ) $\sqrt{3} \tan 3x - 1 = 0$ ب) $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2$

پاسخ: آ) $\sqrt{3} \tan 3x - 1 = 0 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 3x = \tan \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{نکته قبل}} 3x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$

ب) با استفاده از اتحادهای $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ و نیز $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ، معادله داده شده را ساده و سپس آن را حل می‌کنیم:

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2 \Rightarrow \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} - \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} - \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + \tan x)^2 - (1 - \tan x)^2}{1 - \tan^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 1$$

$$\Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{نکته قبل}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

معادله $\tan x + \cot x = 2$ در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ چند جواب دارد؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

$$\tan x + \cot x = 2 \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \xrightarrow{\times \tan x} \tan^2 x + 1 = 2 \tan x$$

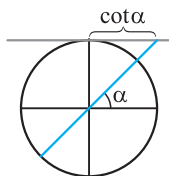
پاسخ:

$$\Rightarrow \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$

بنابراین معادله در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ دارای سه جواب بوده و گزینه (۳) صحیح است.

حل معادلات به شکل $\cot u = \cot \alpha$



برای حل معادله $\cot u = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری می‌یابیم که $\cot \alpha = a$. در این صورت معادله به شکل $\cot u = \cot \alpha$ درمی‌آید که با توجه به دایره مثلثاتی و این که دوره تناوب تابع $y = \cot x$ برابر π است، جواب‌های کلی این معادله از نکته زیر به دست می‌آید:

نکته

$$\cot u = \cot \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

جواب کلی معادله $\cot x - \tan x = 2\sqrt{3}$ کدام است؟

- $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۱) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ (۴)

پاسخ: می‌دانیم $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$. بنابراین داریم:

$$\cot x - \tan x = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2 \cot 2x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cot 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 2x = \cot \frac{\pi}{6}$$

گزینه (۴) صحیح است. $\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$ نکته قبل

نکته فرض کنید $k \in \mathbb{Z}$ باشد، در این صورت:

$$\begin{cases} \sin^2 u = \sin^2 \alpha \\ \cos^2 u = \cos^2 \alpha \\ \tan^2 u = \tan^2 \alpha \\ \cot^2 u = \cot^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow u = k\pi \pm \alpha$$

جواب کلی معادله $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi}{6} = 0$ کدام است؟

- $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴)

$$\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi}{6} = 0 \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - \frac{1}{4} \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = 0$$

پاسخ:

$$\Rightarrow \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2(\frac{\pi}{6})$$

گزینه (۲) صحیح است. $\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ نکته قبل

نکته همواره برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و نیز تانژانت به کتانژانت و بالعکس، می‌توان از زاویه متمم $\frac{\pi}{2} - \alpha$ استفاده نمود.

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

(ب) $\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \cot x$ (آ) $\sin 2x - \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0$

پاسخ: (آ)

$\sin 2x - \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$

قبلاً روش حل معادله $\sin u = \sin \alpha$ رو یاد گرفتیم. حالا باید کاری کنیم که طرف راست معادله هم سینوسی بشه. واسه همین از زاویه متمم استفاده می‌کنیم.

نکته قبل $\rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{3} - x)) \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{6} + x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{6} + x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 3x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{cases}$$

(ب) می‌دانیم $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ ، پس داریم:

$\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \cot x \Rightarrow \tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$

$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{3\pi}{16}$

نکته اگر طرفین معادله مثلثاتی هم‌جنس باشند ولی یک طرف آن منفی باشد، در مورد سینوس، تانژانت و کتانژانت، علامت منفی را به داخل کمان می‌بریم ولی در مورد کسینوس، علامت منفی را حذف کرده و زاویه α را به $\pi - \alpha$ تبدیل می‌کنیم.

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

(ب) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ (آ) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

پاسخ: (آ)

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ \rightarrow $\begin{cases} \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$
مجموع ضرایب صفر است.

بنابر نکته قبل، در معادله دوم، علامت منفی را به داخل کمان برده و آن را حل می‌کنیم:

$\sin x = -\sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

(ب) می‌دانیم $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ، پس داریم:

$\cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0$ یا $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos x = 0$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$

بنابر نکته قبل، در این قسمت علامت منفی را حذف کرده و زاویه $\frac{\pi}{3}$ را به $\pi - \frac{\pi}{3}$ تبدیل می‌کنیم، داریم:

$\cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

نکته در معادلات کسری و رادیکالی، جواب‌هایی که در دامنه معادله قرار ندارند را باید حذف نمود.

مشال

جواب‌های معادلات زیر در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

(آ) $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ (ب) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sin x} = 1$

به توان ۲ $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (پاسخ: آ)

k	۰	۱
x	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$

جواب‌های $\frac{\pi}{4}$ و $\pi + \frac{\pi}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ واقع هستند، اما جواب $\pi + \frac{\pi}{4}$ که در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، در دامنه معادله واقع نیست زیرا عبارت زیر رادیکال به ازای این جواب منفی می‌شود. پس $x = \frac{\pi}{4}$ تنها جواب این معادله، در بازه $[0, 2\pi]$ است.

(ب) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x + \sin 3x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
x	۰	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π

حالت خاص $\rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

حال باید توجه کرد که مخرج کسر نباید صفر شود. از بین جواب‌های به دست آمده، $x = 0$ ، $x = \pi$ ، $x = 2\pi$ ریشه‌های مخرج کسر هستند. پس این جواب‌ها را باید حذف نمود و لذا معادله داده شده در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چهار جواب $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ می‌باشد.

نکته (آ) اگر $\{0\} - (-1, 1) \in k$ باشد، معادله $\sin nx = k$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای $2n$ جواب و نیز در صورتی که $k \in (-1, 1)$ باشد، معادله $\cos nx = k$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای $2n$ جواب است.

(ب) اگر $\alpha \neq 0$ باشد، جواب کلی $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای n جواب و جواب کلی $\frac{k\pi}{n} + \alpha$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای $2n$ جواب است.

تست

معادله $(4 \sin x - 5)(3 \cos 3x - 2) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: ب

$$(4 \sin x - 5)(3 \cos 3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{5}{4} \\ \text{یا} \\ \cos 3x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

چون $\frac{5}{4} > 1$ ، پس $\sin x = \frac{5}{4}$ جواب ندارد. بر اساس نکته قبل معادله $\cos 3x = \frac{2}{3}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای $2n = 2 \times 3 = 6$ جواب بوده و گزینه (۳) صحیح است.

تست

معادله $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: ب می‌دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$. پس:

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow (2 \cos^2 x - 1) + 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

$$\xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1 = -\tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 2x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

بنابر نکته قبل، جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای $2 \times 2 = 4$ جواب بوده و بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

خلاصه قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی، طرفین معادله را آن قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از چهار حالت زیر برسیم. سپس به کمک دستوره‌های زیر، جواب‌های کلی معادله را تعیین می‌کنیم.

$$۱) \sin u = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}, \quad ۲) \cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha$$

$$۳) \tan u = \tan \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha, \quad ۴) \cot u = \cot \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

حالات خاص

در صورتی که به یکی از حالات زیر برسیم به کمک دستورات زیر، جواب معادلات را تعیین می‌کنیم.

$$۱) \sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, \quad ۲) \sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad ۳) \sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$۴) \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad ۵) \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi, \quad ۶) \cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi$$

۷) جواب کلی معادلات $\sin^2 u = \sin^2 \alpha$ ، $\cos^2 u = \cos^2 \alpha$ ، $\tan^2 u = \tan^2 \alpha$ و $\cot^2 u = \cot^2 \alpha$ عبارت است از: $u = k\pi \pm \alpha$

نکته ۱ همواره برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و نیز تانژانت به کتانژانت و بالعکس، از زاویه متمم یعنی $\frac{\pi}{2} - \alpha$ استفاده می‌کنیم.

نکته ۲ اگر طرفین معادله مثلثاتی، هم‌جنس باشند ولی یک طرف آن منفی باشد، در مورد سینوس، تانژانت و کتانژانت، علامت منفی را به داخل کمان می‌بریم ولی در مورد کسینوس، علامت منفی را حذف کرده و زاویه α را به $\pi - \alpha$ تبدیل می‌کنیم.

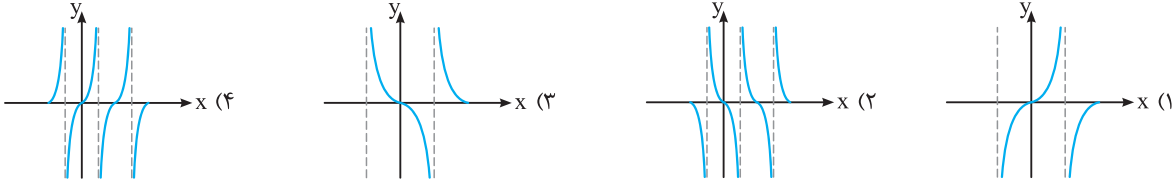
نکته ۳ در معادلات کسری و رادیکالی، جواب‌هایی که در دامنه معادله نیستند را حذف می‌کنیم.

نکته ۴ برای یافتن جواب‌های معادله در یک بازه، در معادله کلی به جای k ، مقادیر مختلف صحیح را قرار داده و مقادیری از جواب که در بازه مربوطه قرار دارند را به دست می‌آوریم.

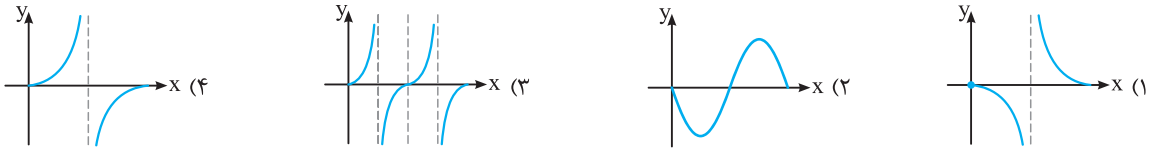
نکته ۵ اگر $k \in (-1, 1) - \{0\}$ باشد، معادله $\sin nx = k$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای $2n$ جواب و در صورتی که $k \in (-1, 1)$ باشد، معادله $\cos nx = k$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای $2n$ جواب است.

نکته ۶ اگر $\alpha \neq 0$ باشد، جواب کلی $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای n جواب و جواب کلی $\frac{k\pi}{n} + \alpha$ در این بازه دارای $2n$ جواب می‌باشد.

۱۷۴☆ نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tan 2x$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$ به کدام صورت است؟



۱۷۵☆ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ به کدام صورت است؟



قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

یافتن جواب کلی در معادلات مثلثاتی

۱۷۶☆ یک جواب کلی معادله $\sin 3x = \sin 2x$ کدام است؟

(۱) $k\pi$ (۲) $\frac{(2k+1)\pi}{3}$

۱۷۷☆ جواب کلی معادله $\sqrt{8} \cos 2x = 4$ کدام است؟

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۱۷۸☆ جواب کلی معادله $\tan x = \tan \delta x$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{k\pi}{4}$

۱۷۹☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 2x + \sin x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۸۰☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

۱۸۱☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

۱۸۲☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$

۱۸۳☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

۱۸۴☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$ به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (۳) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$

۱۸۵☆ جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$ به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

(برگرفته از کتاب درسی)

(۴) $\frac{k\pi}{3}$

(۳) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

(۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{8}$

(۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{8}$

(برگرفته از کتاب درسی)

(۴) $k\pi$

(۳) $\frac{k\pi}{3}$

(۲) $\frac{k\pi}{4}$

(۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۲) $k\pi$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی - ۹۳)

(۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

(۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۷)

(۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$

(۲) $\frac{2k\pi}{5}$

(۱) $\frac{k\pi}{5}$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

(۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

(۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(۳) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$

(۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$

(۱) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$

(سراسری تجربی - ۹۱)

(۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{2k\pi}{3}$

(۱) $\frac{k\pi}{3}$

☆ ۱۸۶. یکی از جواب‌های معادله $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{7\pi}{6}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

(سراسری تجربی- ۹۵)

☆ ۱۸۷. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی- ۸۶)

☆ ۱۸۸. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

☆ ۱۸۹. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

☆ ۱۹۰. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری ریاضی- ۸۶)

☆ ۱۹۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

☆ ۱۹۲. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ ، کدام است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی- ۹۴)

☆ ۱۹۳. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی- ۸۷)

☆ ۱۹۴. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cdot \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + x\right) + 3 \cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(سراسری تجربی- ۹۲)

☆ ۱۹۵. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

☆ ۱۹۶. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ ، کدام است؟

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

☆ ۱۹۷. جواب کلی معادله مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی- ۹۷)

☆ ۱۹۸. جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی- ۸۹)

☆ ۱۹۹. جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۰۰. یکی از جواب‌های کلی معادله $\sin x + \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(سراسری ریاضی- ۹۲)

۲۰۱ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۲۰۲ ☆ در معادلهٔ مثلثاتی $1 - \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$ ، یکی از صورت‌های کلی جواب کدام است؟

(۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی- ۹۶)

۲۰۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 x + 2 \cos x = 0$ کدام است؟

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲۰۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(-x)$ (که $k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟

(۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۰۵ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟ (که $k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۲۰۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۰۷ ☆ جواب‌های کلی معادلهٔ $0 = 1 - \cos(\frac{3\pi}{4} - x) + 3 \cos(\frac{3\pi}{4} - x) + 5 \sin x + 2k\pi = x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام‌اند؟

(۱) $\{1, 5\}$ (۲) $\{1, 7\}$ (۳) $\{5\}$ (۴) $\{1, 5, 7\}$

حالت‌های خاص در معادلات مثلثاتی

۲۰۸ ☆ جواب کلی معادلهٔ $\sin^3 x - \sin x = 0$ به کدام صورت است؟

(۱) $k\pi$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{k\pi}{2}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۲۰۹ ☆ نمودار تابع $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ ، روی بازهٔ $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ ، در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۱۰ اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = a \sin b\pi x$ برابر $\frac{1}{4}$ باشد، نمودار تابع در بازهٔ $[0, 1]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۲۱۱ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟ (که $k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی- ۸۵)

۲۱۲ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $1 + \sin(\frac{5\pi}{4} + x) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x)$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۲۱۳ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos \frac{3\pi}{4} \sin(\frac{3\pi}{4} - x) - \sin^2 x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی- ۹۰)

۲۱۴ جواب کلی معادلهٔ $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ (که $k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(سراسری ریاضی- ۸۷)

۲۱۵ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆ ۲۱۶. یکی از جواب‌های معادله $\sin 3x \cos x = 1 - \cos 3x \sin x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{8}$ (۴) $\frac{5\pi}{8}$

☆ ۲۱۷. جواب کلی معادله $\sin \Delta x (\cos 3x - \sin \Delta x) + \cos \Delta x (\sin 3x - \cos \Delta x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (۳) $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی- ۹۳)

☆ ۲۱۸. جواب کلی معادله $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی- ۹۶)

☆ ۲۱۹. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin x \sin 3x = \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{k\pi}{3}$

☆ ۲۲۰. تمام جواب‌های معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ کدام است؟

- (۱) $k\pi$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ (۴) $2k\pi$

☆ ۲۲۱. جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

- (۱) $\{7, 9\}$ (۲) $\{1, 3, 5\}$ (۳) $\{1, 4, 7\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$

(سراسری ریاضی- ۹۶)

☆ ۲۲۲. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{2}$ کدام است؟

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(سراسری ریاضی- ۹۷)

☆ ۲۲۳. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$ کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{k\pi}{6}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

☆ ۲۲۴. جواب کلی معادله $\sin 3x - \sin x + 4 \sin^2 x = 2$ با شرط $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

☆ ۲۲۵. جواب کلی معادله $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$ کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{5\pi}{4}$ (۴) $2k\pi - \frac{3\pi}{4}$

جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

☆ ۲۲۶. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin \Delta x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) 8π (۲) 9π (۳) 10π (۴) 11π

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۲۷. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن‌ها ۳ و ۴ سانتی‌متر و مساحت آن‌ها ۳ سانتی‌متر مربع باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

☆ ۲۲۸. یک فوتبالیست، توپ را با سرعت 60 km/h به سمت دروازه حریف که در ۳۶ متری او قرار گرفته، می‌فرستد. اگر رابطه بین سرعت توپ v

(بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه حرکت توپ θ ، به صورت $d = \frac{v^2}{5} \sin 2\theta$ باشد، زاویه حرکت

(برگرفته از کتاب درسی)

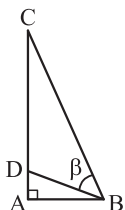
توپ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 15° (۲) 15° (۳) $22/5^\circ$ (۴) 30°

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۲۹. در شکل مقابل، اگر $AD = 0/5$ ، $CD = 2/5$ و $AB = 1$ باشد، زاویه β چند درجه است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۶۰ (۳) ۴۵ (۴) ۳۰



☆ ۲۳۰. معادله $\sin(\pi \cos x) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

☆ ۲۳۱. معادله $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

☆ ۲۳۲. معادله $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(سراسری تمبری فارغ از کشور- ۹۶)

☆ ۲۳۳. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

☆ ۲۳۴. معادله $\tan 2x - \cot(x - \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

☆ ۲۳۵. مجموع جواب‌های معادله $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8\pi}{3}$ (۲) $\frac{10\pi}{3}$ (۳) 3π (۴) $\frac{11\pi}{3}$

☆ ۲۳۶. معادله $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر

☆ ۲۳۷. معادله $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

☆ ۲۳۸. معادله $1 + \sin x = \cos^4 x - \sin^4 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

(سراسری ریاضی- ۹۵)

☆ ۲۳۹. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۵)

☆ ۲۴۰. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

☆ ۲۴۱. در معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) مثلث قائم‌الزاویه (۳) دوزنقه (۴) مستطیل

☆ ۲۴۲. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۱)

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

☆ ۲۴۳. مجموع جواب‌های معادله $2 \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 3 \cos(x - \frac{5\pi}{8}) = 5$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{3\pi}{8}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{8}$

☆ ۲۴۴. در معادله مثلثاتی $8 \sin^2 x + k \sin 2x = 1$ ، مجموع جواب‌های متمایز در فاصله $[0, \pi]$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ است. k کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) ۴

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin \frac{3x}{2} = -\sin x = \sin\left(\frac{-x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

اجتماع $\rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

۱۸۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (۲)$$

(۱)·(۲) $\rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۱۸۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x, \quad \frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

توجه کنیم که $x = k\pi$ غیرقابل قبول است، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

۱۸۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

کسری صفر می‌شود که صورت آن صفر و مخرج آن غیرصفر باشد:

$$\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0 \Rightarrow \sin 3x + \sin 2x = 0, \quad 1 + \cos x \neq 0$$

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

جواب کلی $x = 2k\pi + \pi$ ، ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند، پس $x = \frac{2k\pi}{5}$ را می‌پذیریم.

۱۸۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ ، داریم:

$$\tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۱۸۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

عبارت $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ با $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ برابر است، پس داریم:

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

۱۷۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

تابع $f(x) = -\frac{1}{2} \tan 2x$ به ازای $x = -\frac{\pi}{2}$ (نقطه ابتدایی بازه) صفر

می‌شود. پس یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) صحیح هستند. همچنین تابع $y = \tan ax$ ($a > 0$) در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی است و چون در این جا ضریب $\tan 2x$ منفی است، پس نمودار

$y = \frac{1}{2} \tan 2x$ نسبت به محور x ها قرینه شده و لذا در هر بازه که

تعریف شده است، نزولی می‌باشد و لذا گزینه (۲) صحیح است.

۱۷۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از روابط $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

و $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ داریم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

بنابراین باید ببینیم نمودار $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ به کدام

صورت است. واضح است که تابع f فقط به ازای $x = \pi$ از این بازه تعریف نمی‌شود، پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۴) صحیح هستند. از طرفی مقدار

$f(x) = \tan \frac{x}{2}$ به ازای $x = \frac{\pi}{2}$ برابر ۱ می‌شود. یعنی به ازای $x = \frac{\pi}{4}$

مقدار f مثبت بوده و باید نمودار آن بالای محور x ها باشد. پس گزینه (۴) صحیح است.

توجه کنید که با استفاده از تبدیل نمودارها نیز می‌توان این نمودار را رسم کرد.

۱۷۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته:

$$\sin u = \sin \alpha \Rightarrow u = 2k\pi + \alpha, u = 2k\pi + \pi - \alpha, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin 3x = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}$$

۱۷۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته:

$$\cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$4 \cos 2x = \sqrt{4} \Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}$$

۱۷۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته:

$$\begin{cases} \tan u = \tan \alpha \\ \cot u = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow u = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \Delta x = \tan x \Rightarrow \Delta x = k\pi + x \Rightarrow \Delta x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۷۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر طرفین معادله مثلثاتی، هم جنس باشند ولی یک طرف آن

منفی باشد، در مورد سینوس، تانژانت و کتانژانت، علامت منفی را به داخل کمان می‌بریم ولی در مورد کسینوس، علامت منفی را حذف

کرده و زاویه α را به $\pi - \alpha$ تبدیل می‌کنیم.

۱۹۱

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} \xrightarrow{\sin x \neq 0} \tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۱۹۲

عبارت $\cot x (4 \sin x + \tan x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\cot x (4 \sin x + \tan x) = 4 \sin x \cot x + \underbrace{\cot x \cdot \tan x}_1$$

$$= 4 \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} + 1 = 4 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 4 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 4A^2 - 4A - 3 = 0, \Delta = 64$$

$$A = \frac{4 \pm 8}{8} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} > 1 \text{ (غیرممکن)} \\ A = -\frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۹۳

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۱۹۴

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sin x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \times \sin x + 3 \cot x \times (-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \times \frac{\cos x}{\sin x} \times \sin x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow \cos x = -2, \frac{1}{2}$$

معادله $\cos x = -2$ جواب حقیقی ندارد، لذا:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۵

$$\sin^2 \frac{\Delta\pi}{4} = \left(\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(-\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۶

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow \cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos x \cos \frac{\pi}{4} \mp \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x \mp \sin x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۱۸۵

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = -\cos x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= -\cos 2x \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi & (1) \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

۱۸۶

با انتخاب $\sin x = A$ معادله به صورت $2A^2 - 3A - 2 = 0$ درمی‌آید:

$$2A^2 - 3A - 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow A = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 = \sin x \text{ (غیرممکن)} \\ A = -\frac{1}{2} = \sin x \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

۱۸۷

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-2) = 25 \Rightarrow \cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ (غیرممکن)} \\ \cos x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۸۸

با اتحاد $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ معادله را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:

$$2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{A = \cos x} 2A^2 + 3A - 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow A = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, -2 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} A = \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۸۹

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

۱۹۰

با توجه به رابطه مثلثاتی $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ داریم:

$$2 \sin^2 x - \sin 2x = 1 \Rightarrow -\sin 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow -\sin 2x = \cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} -\tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۲۰۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از اتحادهای $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ و $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ معادله را ساده و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{2} \times 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (x + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

توجه کنید که جواب کلی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ ، شامل جواب کلی $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ نیز می‌باشد. بنابراین از اجتماع این دو جواب کلی، $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید.

۲۰۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$-\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲۰۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ ، داریم:

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x + (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos 2x = -1$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۰۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: جواب کلی معادلات مثلثاتی $\sin^2 u = \sin^2 \alpha$

$\cos^2 u = \cos^2 \alpha$ ، $\tan^2 u = \tan^2 \alpha$ و $\cot^2 u = \cot^2 \alpha$ عبارت است از:

$$\sin^2 \frac{\Delta\pi}{6} = \sin^2(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin^2 \frac{\pi}{6} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sin(\frac{\pi}{6} + x) = \cos x, \cos(-x) = \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \cos x \times \cos x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cot x \cdot \cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (\sin x - \tan x) \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cot x - \underbrace{\tan x \cot x}_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\tan x \tan 3x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۹۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} + \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = \frac{(\tan x + 1)^2 + (\tan x - 1)(1 - \tan x)}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)}$$

$$= \frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3}$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ ، داریم:

$$\tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۲۰۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$$

نکته:

بنابر نکته فوق داریم:

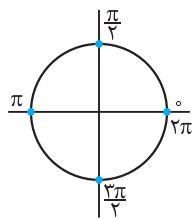
$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ممکنه این‌ها وسوسه بشی و طرفین رو به توان ۲ برسونی و بعدش هم به جواب $\frac{k\pi}{2}$ برسی. باید بگم که این جواب درست نیست. چون به ازای $k=2$ ، جواب $x = \pi$ به دست میاریم که تو معادله صدق نمی‌کنه. البته بی‌شمار جواب تو این جواب کلی هستن که تو معادله صدق نمی‌کنن.



اگر انتهای کمان‌های به‌دست آمده را روی دایره مثلثاتی نمایش دهیم، معلوم می‌شود که این جواب‌ها روی هم رفته، هر ۴ زاویهٔ مرزی را تولید می‌کنند. بنابراین اجتماع این جواب‌ها به‌صورت $x = \frac{k\pi}{2}$ خواهد بود.

۲۰۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [-\pi, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow -\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\pi \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$-\frac{9\pi}{8} \leq \frac{k\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{8} \Rightarrow -9 \leq 4k \leq 11$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{4} \leq k \leq \frac{11}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

۲۱۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{T = \frac{1}{2}} \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow a \sin b\pi x = 0 \Rightarrow a \sin(\pm 4\pi x) = 0$$

$$\Rightarrow \pm a \sin 4\pi x = 0 \Rightarrow 4\pi x = k\pi \Rightarrow 4x = k \Rightarrow x = \frac{k}{4}$$

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{k}{4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq k \leq 4$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

۲۱۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 \tan x \cdot \cos^2 x = 2 \times \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (*)$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(*)} x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۲۱۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = \cos x, \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos x - \sin x$$

$$\Rightarrow \cos x - \sin x = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x = -1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

۲۱۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin(3\pi - x) = \sin x \cdot \cos(\pi + x) = -\cos x, \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos 3x \sin x + \sin 3x \cos x = 0 \Rightarrow \sin(3x + x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 4x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

۲۱۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۲۰۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

با استفاده از روابط $\cos(\pi + 2x) = -\cos 2x$

$$\text{و } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \times (-\cos 2x) = 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\xrightarrow{\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1} 2 \cos^2 x = -2 \cos^2 x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۰۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی بالا داریم:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{3}{4} \sin^2 x = -\frac{1}{4} \times 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x = -2 \cos^2 x + 3 \sin^2 x$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = -2$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۰۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$\Delta \sin x + 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow \Delta \sin x - 3 \sin x = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}, i \in \{1, 5\}$$

۲۰۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

نکته: حالت‌های خاص:

$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, \sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ یا } u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}, \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$$

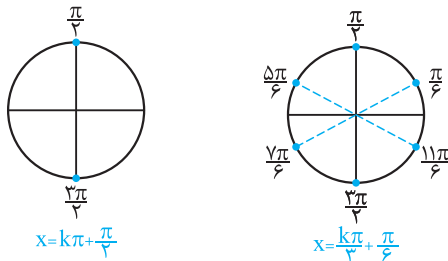
$$\cos u = -1 \Rightarrow u = (2k+1)\pi$$

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

با نمایش هر دو جواب به دست آمده روی دایره مثلثاتی، مشخص می‌شود که جواب کلی $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ ، شامل جواب کلی $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ نیز می‌باشد.



۲۲۰

با استفاده از اتحاد فرعی $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ داریم:
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$
 $\Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 \Rightarrow -2(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = 0$
 $\Rightarrow \sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

۲۲۱

می‌دانیم $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ پس:
 $\cos 2x = \sin x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
 $\xrightarrow{b=a+c} \sin x = -1$ یا $\sin x = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$
 $\sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{9\pi}{6}$
 $\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$
 با مقایسه جواب‌های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ، $x = 2k\pi + \frac{9\pi}{6}$ و $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ با جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ معلوم می‌شود که:
 $i \in \{1, 5, 9\}$

نکته: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
 $\Rightarrow \sin x + 2\sin x \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$
 $\Rightarrow 4\sin x + 2\sin x \cos x - 4\sin^3 x = 0$
 $\Rightarrow 2\sin x(2 + \cos x - 2\sin^2 x) = 0$
 $\Rightarrow 2\sin x(2(1 - \sin^2 x) + \cos x) = 0$
 $\Rightarrow 2\sin x(2\cos^2 x + \cos x) = 0$
 $2\sin x \cos x(2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0$
 $\Rightarrow \sin 2x = 0$ یا $\cos x = -\frac{1}{2}$
 $\sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ ((طبق فرض (غقوق))
 $\cos x = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{2\pi}{3})$
 $\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۲۱۵

$\sin(-\frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
 $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ ، $\sin(\pi + x) = -\sin x$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} - \sin x \cos x = 0 \xrightarrow{\times 2} 1 - 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1$
 $\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲۱۶

با یادآوری این‌که $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ می‌توان نوشت:
 $\sin 3x \cos x = 1 - \cos 3x \sin x$
 $\Rightarrow \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = 1$
 $\Rightarrow \sin(3x + x) = 1 \Rightarrow \sin 4x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{4k\pi + \pi}{8} = \frac{(4k+1)\pi}{8}$
 به ازای $k = 1$ ، به دست می‌آید $x = \frac{5\pi}{8}$ که در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۱۷

$\sin \Delta x (\cos 3x - \sin \Delta x) + \cos \Delta x (\sin 3x - \cos \Delta x) = 0$
 $\Rightarrow \sin \Delta x \cos 3x - \sin^2 \Delta x + \cos \Delta x \sin 3x - \cos^2 \Delta x = 0$
 $\Rightarrow \sin \Delta x \cos 3x + \cos \Delta x \sin 3x = \sin^2 \Delta x + \cos^2 \Delta x = 1$
 $\Rightarrow \sin(\Delta x + 3x) = 1 \Rightarrow \sin 4x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۲۱۸

$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2\cos^2 x \xrightarrow{\times \sin x \neq 0} \sin 3x = 2\sin x \cos^2 x$
 $\Rightarrow \sin(2x + x) = (2\sin x \cos x) \cos x$
 $\Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \sin 2x \cos x$
 $\Rightarrow \cos 2x \sin x = 0 \xrightarrow{\sin x \neq 0} \cos 2x = 0$
 $\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
 توجه کنید مقدار $\sin x$ به ازای جواب‌های به دست آمده صفر نمی‌شود.

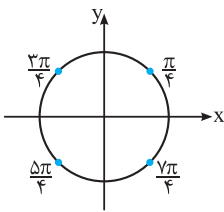
۲۱۹

$\sin x \sin 3x = \cos 2x \Rightarrow \sin x \sin 3x = \cos(3x - x)$
 $\Rightarrow \sin x \sin 3x = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$
 $\Rightarrow \cos 3x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0$ یا $\cos x = 0$
 $\cos 3x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
 $\cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

از $\sin x = 1$ ، با توجه به حالت خاص، نتیجه می‌شود که
 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، که با توجه به فرض قابل قبول نیست.

می‌دانیم اگر $\sin^2 u = \sin^2 \alpha$ ، آن‌گاه $u = k\pi \pm \alpha$ ، پس:

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$



مانند تست قبل، به ظاهر، این جواب کلی در
گزینه‌ها دیده نمی‌شود. پس باید بین این دو
جواب کلی اجتماع بگیریم. انتهای کمان مقابل
به زوایای $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ به ازای مقادیر
مختلف صحیح k به صورت مقابل است:

با توجه به گزینه‌ها، فقط انتهای جواب کلی $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ بر جواب‌های
روی دایره منطبق هستند.

۲۲۵

قرار می‌دهیم $\sin x + \cos x = y$. بنابراین:

$$(\sin x + \cos x)^2 = y^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = y^2$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2x = y^2 \Rightarrow \sin 2x = y^2 - 1$$

بنابراین:

$$3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2}y + (y^2 - 1) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 3\sqrt{2}y + 4 = 0, \Delta = 18 - 16 = 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2} \text{ یا } y = -2\sqrt{2}$$

پس $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ یا $\sin x + \cos x = -2\sqrt{2}$. واضح است
که حاصل $\sin x + \cos x$ نمی‌تواند برابر $-2\sqrt{2}$ باشد (چرا؟). بنابراین:

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$$

۲۲۶

نکته: برای یافتن جواب‌های اختصاصی معادله در یک بازه، در معادله
کلی به دست آمده، به جای k ، مقادیر مختلف صحیح را قرار داده و
مقادیری از جواب که در بازه مربوطه قرار دارند را به دست می‌آوریم.

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi = 0 \Rightarrow \sin 5x = -\sin 4x$$

$$\Rightarrow \sin 5x = \sin(-4x) \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \\ 5x = 2k\pi + (\pi - (-4x)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \dots, \frac{18\pi}{9} \\ x = \pi \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌های معادله} = \left(0 + \frac{2\pi}{9} + \dots + \frac{18\pi}{9}\right) + \pi = 11\pi$$

$$\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x (2\sin 2x \cos 2x) = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 2x \cos 2x = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 2(2\sin x \cos x)^2 \cos 2x = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 8\sin^2 x \cos^2 x \cos 2x - \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x (\lambda \sin^2 x \cos 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 0 \text{ یا } \lambda \sin^2 x \cos 2x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda \sin^2 x \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \lambda \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos 2x - 4\cos^2 2x - 1 = 0$$

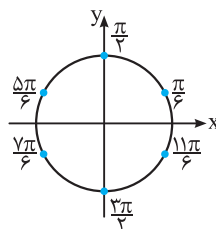
$$\Rightarrow -(2\cos 2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2\cos 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

چون جواب‌های کلی داده شده، به ظاهر، شبیه جواب‌های کلی به دست آمده

یعنی $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ نیست، پس باید بین این

جواب‌ها اجتماع بگیریم. برای این منظور جواب‌های معادله را در یک دوره
تناوب مثلاً در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورده و با جواب‌های



خاص گزینه‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ مقایسه

می‌کنیم. اگر به جای k در جواب‌های
کلی $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

اعداد صحیح قرار دهیم، انتهای کمان
مقابل به این زوایا به صورت نمایش

داده شده در دایره مقابل می‌باشند:

از بین گزینه‌ها، فقط انتهای کمان مقابل به جواب کلی $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

به ازای اعداد صحیح k بر زوایای به دست آمده منطبق هستند.

تست سفتی پور نه؟ حق با تونه. البته با اطلاعات کتاب شما سفته ولی آکه
فرمولای تبدیل ضرب به جمع رو بلد پوری، این تست تو رو سه فط به
راحتی حل می‌شد. این فرمولا تو کتاب بپه‌هایی که سال ۹۷ کنگور دادن،
اومره پور.

۲۲۴

با استفاده از اتحاد $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ، داریم:

$$\sin 3x - \sin x + 4\sin^2 x = 2$$

$$\Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x + 4\sin^2 x = 2$$

$$\Rightarrow (2\sin x - 4\sin^3 x) + (4\sin^2 x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) - 2(1 - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow (1 - 2\sin^2 x)(2\sin x - 2) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \text{ یا } \sin x = 1$$

با توجه به این که $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس معادله $\cos x = 2k - \frac{1}{4}$ تنها به ازای عدد صحیح $k = 0$ برقرار است. بنابراین داریم:

$$\cos x = -\frac{1}{4}$$

پس معادله $\cos x = -\frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای $2 \times 1 = 2$ جواب است.

۲۳۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، داریم:

$$2 \sin x \cos x + \sqrt{2} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \\ 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه $[-\pi, \pi]$ دارای ۴ جواب است.

۲۳۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ، داریم:

$$\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x = 1$$

همچنین با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ، داریم:

$$\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + (\pi + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ سه جواب دارد.

۲۳۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \sin x$$

$$\text{معادله: } \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ ، $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$ و 2π است. داریم:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = 0 + \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 5\pi$$

۲۲۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر a و b طول دو ضلع و θ زاویه بین این دو ضلع در یک مثلث باشند، آنگاه:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta, 0 < \theta < 180^\circ$$

فرض کنیم زاویه بین این دو ضلع θ باشد. پس:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{0 < \theta < 180^\circ} \theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}$$

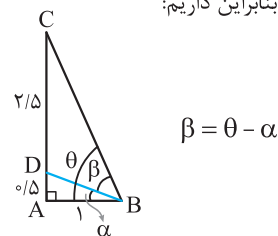
۲۲۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$d = \frac{\sqrt{2}}{5^\circ} \sin 2\theta \Rightarrow 36 = \frac{6^\circ}{5^\circ} \sin 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{36 \times 5^\circ}{6^\circ \times 60} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{0 \leq \theta \leq 180^\circ} \begin{cases} 2\theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ \\ 2\theta = 150^\circ \Rightarrow \theta = 75^\circ \end{cases}$$

۲۲۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کنیم $\hat{A}BC = \theta$ و $\hat{A}BD = \alpha$ ، بنابراین داریم:



از طرفی، با توجه به شکل، می‌توان نوشت:

$$\tan \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{1/5}{1} = 1/5, \tan \theta = \frac{AC}{AB} = 3$$

$$\beta = \theta - \alpha \Rightarrow \tan \beta = \tan(\theta - \alpha)$$

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{3 - 1/5}{1 + 3 \times 1/5} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \beta = 1 \Rightarrow \beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

چون β حاده است، پس تنها $\beta = \frac{\pi}{4}$ را که به ازای $k = 0$ به دست می‌آید، می‌پذیریم.

۲۳۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: معادله $\cos nx = k$ با شرط $k \in (-1, 1)$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ ، $2n$ جواب دارد.

$$\sin(\pi \cos x) = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \pi \cos x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = 2k - \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

۲۳۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

با استفاده از اتحادهای $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ و $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ معادله را ساده نموده و آن را حل می‌کنیم:

$$\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} -2 \sin 2x \cos 2x = 1$$

$$\Rightarrow -\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

می‌دانیم جواب کلی $\alpha + \frac{k\pi}{n}$ ($\alpha \neq 0$) در بازه $[0, 2\pi)$ ، $2n$ جواب دارد.

پس در این جا جواب کلی $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ، دارای $2 \times 1 = 2$ جواب در بازه $[0, 2\pi)$ می‌باشد.

۲۳۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: معادله $\sin nx = k$ با فرض $k \in (-1, 1) - \{0\}$ در بازه $[0, 2\pi)$ دارای $2n$ جواب است.

$$1 + \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2 \sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ یا } \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0 \text{ یا } x = \pi \text{ یا } x = 2\pi$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ نیز در بازه $[0, 2\pi)$ ، $2 \times 1 = 2$ جواب دارد. پس این معادله در کل 5 جواب در بازه $[0, 2\pi)$ دارد.

۲۳۹ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$$

$$\sin 4x = -\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \\ 4x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{4k\pi - \pi}{12} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{جواب‌های واقع در } [0, \pi]: \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$ است.

۲۳۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و کتانژانت به

تانژانت و بالعکس، از زاویه متمم $\frac{\pi}{2} - \alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\tan 2x - \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \tan 2x = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{3\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$

بنابراین این معادله در بازه $[0, \pi)$ سه جواب دارد.

۲۳۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -2 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{b=a+c} \cos x = -1 \text{ یا } \cos x = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = (2k+1)\pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

حال جواب‌های واقع در $[\pi, 2\pi)$ را می‌یابیم:

k	0	1
x	π	$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه $[\pi, 2\pi)$ برابر است با:

$$\pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

۲۳۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: اگر $\alpha \neq 0$ باشد، جواب کلی به شکل $\frac{k\pi}{n} + \alpha$ ، در

بازه $[0, 2\pi)$ ، $2n$ جواب و جواب کلی به شکل $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$ در این بازه، n جواب دارد.

می‌دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$. پس داریم:

$$\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

بنابراین نکته فوق، جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ در بازه $[0, 2\pi)$

دارای $2 \times 2 = 4$ جواب است.

۲۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + 3 \cos(x - \frac{\Delta\pi}{\lambda}) &= \Delta \\ \Rightarrow 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + 3 \cos((x - \frac{\pi}{\lambda}) - \frac{\pi}{\gamma}) - \Delta &= 0 \\ \text{می‌دانیم } \cos(\alpha - \frac{\pi}{\gamma}) &= \cos(\frac{\pi}{\gamma} - \alpha) = \sin \alpha \text{ بنابراین:} \\ 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + 3 \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) - \Delta &= 0 \\ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) &= 1 \text{ یا } \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = \frac{c}{a} = -\frac{\Delta}{\gamma} \\ \text{واضح است که } \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) &= -\frac{\Delta}{\gamma} \text{ غیرممکن است. پس:} \\ \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x - \frac{\pi}{\lambda} &= 2k\pi + \frac{\pi}{\gamma} \\ \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{\gamma} + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\Delta\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

k	۰
x	$\frac{\Delta\pi}{\lambda}$

$x = \frac{\Delta\pi}{\lambda}$ تنها جواب معادله در بازه $[0, 2\pi]$ است.

۲۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴

از رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lambda \sin^2 x + k \sin 2x &= 1 \\ \div \cos^2 x \rightarrow \lambda \tan^2 x + \frac{2k \sin x \cos x}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \Rightarrow \lambda \tan^2 x + 2k \tan x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \gamma \tan^2 x + 2k \tan x - 1 &= 0 \\ \text{فرض کنیم } x_1 \text{ و } x_2 \text{ جواب‌های متمایز این معادله در بازه } [0, \pi] \text{ باشد. در} \\ \text{این صورت } \tan x_1 \text{ و } \tan x_2 \text{ جواب‌های متمایز معادلهٔ اخیر خواهد بود.} \\ \tan x_1 \tan x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\gamma} \text{ و } \tan x_1 + \tan x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2k}{\gamma} \end{aligned}$$

پس $\tan x_1 \tan x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\gamma}$ و $\tan x_1 + \tan x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2k}{\gamma}$ داریم:

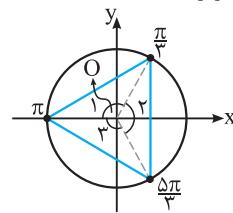
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \tan(x_1 + x_2) &= \tan \frac{3\pi}{4} \\ \Rightarrow \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2} = -1 \Rightarrow \frac{-\frac{2k}{\gamma}}{1 - (-\frac{1}{\gamma})} = -1 \Rightarrow -\frac{2k}{\lambda} &= -1 \\ \Rightarrow 2k = \lambda \Rightarrow k = \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

۲۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \cos(x - \frac{3\pi}{\lambda}) &= \cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x) \\ \text{بنابراین } x + \frac{\pi}{\lambda} \text{ و } \frac{3\pi}{\lambda} - x \text{ متمم یکدیگرند، بنابراین:} \\ \cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x) &= \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) \\ \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) + \cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) + \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) &= 1 \\ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{24} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{\lambda} + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{17\pi}{24} \end{cases} \\ \text{بنابراین مجموع جواب‌ها برابر } \frac{\pi}{24} + \frac{17\pi}{24} = \frac{18\pi}{24} = \frac{3\pi}{4} \text{ می‌باشد.} \end{aligned}$$

۲۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

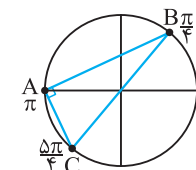
$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 \xrightarrow{A = \cos x} 2A^2 + A - 1 = 0 \\ \Rightarrow A = -1, A = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \\ \text{جواب‌های معادله بر روی دایرهٔ مثلثاتی به صورت زیر است:} \end{aligned}$$



$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = 120^\circ \Rightarrow$ مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۲۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ \Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x &= 0 \Rightarrow \sin x (\cos x - \sin x) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \\ \begin{cases} 1 - \cos x \neq 0 \Rightarrow x = \pi \\ \div \cos x \rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$



نقاط را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:
مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است،
زیرا زاویهٔ محاطی و روبه‌روی قطر BC از دایره
است: $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$