راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

گام اول — فیلم آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Codeهای صفحه بعد را اسکن کنید.
۲. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۳. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

گام دوم — درسنامه آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژهٔ علاقمندان آورده شده است که ویژهٔ آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعهٔ آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.

گام سوم — پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

گام چهارم — پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌های فراتر از کتاب درسی با عنوان «ویژهٔ علاقمندان» مشخص شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

FILM

درسنامه آموزشی

پرسش‌های تشریحی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فهرست فصل‌ها

۱

بخش اول

آموزش

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.

۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.

۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.

۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژهٔ علاقمندان آورده شده است که ویژهٔ آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعهٔ آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.

مثال ۲۵۵

تست ۱۹۳

Mathematics

فصل ۱

قسمت اوّل

مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مفهوم مجموعه

در ابتدای این درس، قصد داریم مطالب و مفاهیمی را در مورد مجموعه‌ها که در سال نهم با آن آشنا شده‌اید، یادآوری کنیم:

در ریاضیات برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای **مشخص** و دوبه‌دو **متمایز** (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌شود.

به هر یک از اشیای مجموعه یک عضو مجموعه می‌گوییم.

قرارداد: اگر A یک مجموعه و a عضوی از آن باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر b عضوی از مجموعهٔ A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$

به‌عنوان مثال، اگر $A = \{۱,۲,۵\}$ ، آن‌گاه $۵ \in A$ و $۳ \notin A$

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نام دارد و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

تذکر مجموعهٔ تهی را نباید با مجموعه‌های $\{\varnothing\}$ و $\{۰\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، اشتباه بگیریم.

مثال: اگر $A = \{-۱,۰,\{-۱\},\{۰\},\{\{۰\}\}\}$ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) $\{\{۰\}\} \in A$ ب) $\{-۱,۰\} \in A$ پ) $\{\{-۱\}\} \notin A$ ت) $\{۰\} \notin A$

پاسخ: A یک مجموعهٔ ۵ عضوی است که اعضای آن ۱- ، ۰، $\{-۱\}$، $\{۰\}$ و $\{\{۰\}\}$ می‌باشند، بنابراین:

آ) درست است. ب) نادرست است. پ) درست است. ت) نادرست است.

دو مجموعهٔ مساوی: دو مجموعهٔ A و B برابرند هرگاه هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A = B$

نتیجه اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که در A نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$

تست: دو مجموعهٔ $\{۴,\{x,۲\}\}$ و $\{y,\{z,۳\}\}$ با هم برابرند. مقدار $xy+z$ کدام است؟

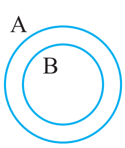
۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: در دو مجموعهٔ مساوی، اعضای آن‌ها یکسان است. بنابراین اگر $\{۴,\{x,۲\}\} = \{y,\{z,۳\}\}$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} y = ۴ \\ \{x,۲\} = \{z,۳\} \Rightarrow x = ۳, z = ۲ \end{cases} \Rightarrow xy + z = ۱۲ + ۲ = ۱۴ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

زیرمجموعه: اگر هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$

نمایش $B \subseteq A$ با نمودار وِن به‌صورت مقابل است:



تست: اگر $A = \{۱,۲\}$ ، $B = \{۱,\{۱,۲\}\}$ و $C = \{۱,۲,\{۱,\{۱,۲\}\}\}$ سه مجموعه باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A \in B$ ۲) $A \subseteq B$ ۳) $A \subseteq C$ ۴) $B \in C$

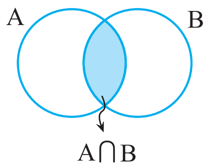
پاسخ: مجموعهٔ B به‌صورت $B = \{۱,A\}$ است، پس $A \in B$ می‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۱) درست است. مجموعهٔ B دارای دو عضو ۱ و A است، پس مجموعهٔ B دارای زیرمجموعه‌های مقابل است: $\varnothing$, $\{۱\}$, $\{A\} = \{\{۱,۲\}\}$, B

مشاهده می‌شود که A زیرمجموعهٔ B نمی‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۲) نادرست است.

اگر دو عضو ۱ و ۲ از مجموعهٔ C را در یک مجموعه قرار دهیم، یکی از زیرمجموعه‌های C به‌دست می‌آید. این زیرمجموعه، همان مجموعهٔ A است و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است. از طرفی مجموعهٔ C به‌صورت $C = \{۱,۲,B\}$ است که درستی گزینهٔ (۴) نتیجه می‌شود.

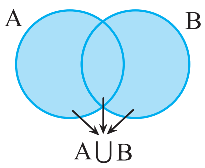
بنابراین گزینهٔ (۲) جواب است.

نکته تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر ۲^n می‌باشد. به‌عنوان مثال، یک مجموعهٔ ۳ عضوی، $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه دارد.



اشتراک دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B هستند. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد:

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\ ,\ x\in B\}$$



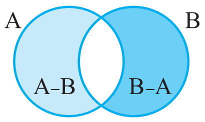
اجتماع دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هستند. این مجموعه را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اجتماع دو مجموعهٔ A و B را نشان می‌دهد:

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

تفاضل دو مجموعه: مجموعهٔ $A-B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند ولی عضو مجموعهٔ B نیستند.

$$A-B=\{x \mid x\in A\ ,\ x\notin B\}$$

نکته برای مشخص کردن مجموعهٔ $A-B$، باید اعضای مشترک A و B را از A حذف کنیم و بقیهٔ اعضای A را بنویسیم.



در نمودار مقابل، مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ رنگی هستند:

مثال: اگر $A=\{x \mid x\in \mathbb{Z}, -۱\le x\le ۴\}$ و $B=\{۲x \mid x\in A, ۰<x\le ۳\}$، مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ:

$$A=\{x \mid x\in \mathbb{Z}, -۱\le x\le ۴\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\} \quad , \quad B=\{۲x \mid x\in A\ ,\ ۰<x\le ۳\}=\{۲,۴,۶\}$$

$$\Rightarrow A\cup B=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۶\} \quad , \quad A\cap B=\{۲,۴\}$$

$$\Rightarrow (A\cup B)-(A\cap B)=\{-۱,۰,۱,\cancel{۲},۳,\cancel{۴},۶\}-\{۲,۴\}=\{-۱,۰,۱,۳,۶\}$$

نکته (قوانین جبر مجموعه‌ها) برای هر سه مجموعهٔ A، B و C روابط زیر برقرار است:

$$۱)\begin{cases}A\cup A=A\\A\cap A=A\end{cases} \qquad ۲)\begin{cases}A\cup B=B\cup A\\A\cap B=B\cap A\end{cases}$$

$$۳)\begin{cases}A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C\\A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\end{cases} \qquad ۴)\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$$

$$۵)\begin{cases}A,B\subseteq A\cup B\\A\cap B\subseteq A,B\end{cases} \qquad ۶)\ A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=B\\A\cap B=A\end{cases}$$

مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح که به ترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\ldots\} \quad , \quad \mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\ldots\} \quad , \quad \mathbb{Z}=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\}$$

مجموعهٔ اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم و به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in \mathbb{Z}, n\neq ۰\right\}$$

تذکر اعداد گویا به دو صورت کسر متعارفی و نماد یا بسط اعشاری، نمایش داده می‌شوند. به‌طور مثال داریم $\frac{۳}{۵}=۰/۶$ که در آن $\frac{۳}{۵}$ کسر متعارفی و $۰/۶$ نماد اعشاری این عدد گویا است.

نمایش اعشاری عددهای گویا

نمایش اعشاری عددهای گویا به دو صورت است: ۱- مختوم (یا متناهی) ۲- نامتناهی و متناوب

۱) مختوم (تحقیقی یا پایان‌پذیر): این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده به صفر می‌رسد و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. به‌طور مثال کسرهای $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۹}{۲۰}$ مختوم هستند، زیرا در مخرج این کسرها فقط عامل ۲ یا ۵ وجود دارد و داریم $\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$، $\frac{۱}{۵}=۰/۲$ و $\frac{۹}{۲۰}=۰/۴۵$

۲) متناوب (پایان‌ناپذیر): این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها حداقل یک شمارندهٔ اول به جز ۲ و۵ وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده هرگز به صفر نمی‌رسد و در خارج قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به طور متناوب تکرار می‌شود. به‌طور مثال کسرهای $\frac{۴}{۳۳}$ و $\frac{۷}{۶}$ متناوب هستند، زیرا در مخرج این کسرها حداقل یک شمارندهٔ اول به‌جز ۲ و۵ وجود دارد و داریم:

$$\frac{۴}{۳۳}=۰/۱۲۱۲....=۰/\overline{۱۲} \qquad , \qquad \frac{۷}{۶}=۱/۱۶۶۶.......=۱/۱\overline{۶}$$

مجموعهٔ اعداد گنگ: مجموعهٔ اعدادی را که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد، مجموعهٔ اعداد گنگ می‌نامیم.

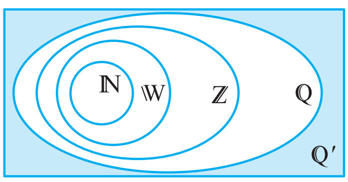
مجموعهٔ اعداد گنگ را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^C$ نشان می‌دهیم.

نکته در نمایش اعشاری عددهای گنگ، تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار بوده ولی متناوب نیست. بـه عنـوان مثـال، اعـداد $\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳...$ و $۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱...$ که نمایش اعشاری آن‌ها بی‌پایان و غیرمتناوب است، اعدادی گنگ هستند.

مجموعهٔ اعداد حقیقی: اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای گنگ را مجموعهٔ عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. در واقع داریم:

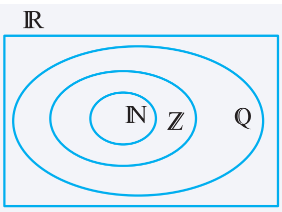
$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$$

رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ می‌باشد.

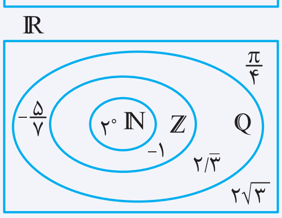


مثال اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.

$$۲\sqrt{۳}\ ,\ -۱\ ,\ -\frac{۵}{۷}\ ,\ \frac{\pi}{۴}\ ,\ ۲^{۰}\ ,\ ۲/۳۳۳...$$



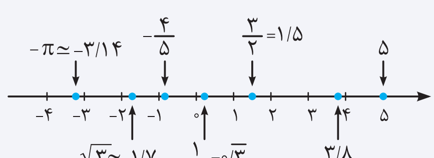
پاسخ: $۲^{۰}=۱$ عددی طبیعی، -۱ عددی صحیح، $-\frac{۵}{۷}$ و $۲/\overline{۳}$ اعدادی گویا و $۲\sqrt{۳}$ و $\frac{\pi}{۴}$ اعدادی گنگ هستند. بنابراین:



نکته هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و همچنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

مثال هر یک از اعداد $۳/۸$ ، $-\pi$ ، $\frac{۳}{۲}$ ، ۵ ، $-\sqrt{۳}$ ، $-\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$ را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام‌یک از آن‌ها گنگ هستند؟

پاسخ:



اعداد $-\sqrt{۳}$ و $-\pi$ گنگ هستند.

بازه (فاصله)

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه یا برشی از محور اعداد حقیقی باشند، «بازه» یا «فاصله» نام دارند. در ادامه به معرفی انواع بازه‌ها می‌پردازیم.

بازه‌های محدود

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین -۱ و ۲ به همراه خود این دو عدد، به‌صورت $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱\leq x\leq ۲\}$ است. برای نمایش چنین مجموعه‌هایی از نماد ساده‌تری استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ A که شامل هر دو نقطهٔ انتهایی خود می‌باشد را به‌صورت $[-۱,۲]$ می‌نویسیم و آن را بازهٔ بسته از -۱ تا ۲ می‌نامیم.
حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه، یعنی -۱ و ۲ را حذف کنیم، آن‌گاه مجموعه‌ای مانند $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱<x<۲\}$ به‌دست می‌آید که آن را بازهٔ باز بین -۱ و ۲ می‌نامیم و با نماد $(-۱,۲)$ نمایش می‌دهیم. همچنین بازه‌هایی مثل $[۱,۴)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۱\leq x<۴\}$ و $(۲,۵]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۲<x\leq ۵\}$ که فقط شامل یکی از نقاط انتهایی خود باشد را بازه‌های نیم‌باز (نیم‌بسته) می‌نامیم.

در حالت کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد، آن‌گاه انواع بازه‌های محدود، هم‌چنین نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول زیر خلاصه شده است:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a,b)	باز
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	$[a,b]$	بسته
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	$[a,b)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	$(a,b]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)

مثال: کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست می‌باشند؟چرا؟

آ) $\frac{۳}{۲} \in (\frac{۵}{۴},\frac{۸}{۵}]$ ب) $\{-۱,۰\} \subseteq (-۲,۱)$ پ) $-\sqrt{۵} \in [-۳,-۲)$ ت) $[-۱,۱] \subseteq (-۱,۱)$

پاسخ: آ) درست است، زیرا: $\frac{۵}{۴} = ۱/۲۵ , \frac{۸}{۵} = ۱/۶ , \frac{۳}{۲} = ۱/۵ \Rightarrow \frac{۳}{۲} \in (\frac{۵}{۴},\frac{۸}{۵}]$

ب) درست است، زیرا بازهٔ $(-۲,۱)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین -۲ و ۱ می‌باشد، پس بازهٔ $(-۲,۱)$ شامل دو عدد -۱ و ۰ می‌باشد. پس داریم: $\{-۱,۰\} \subseteq (-۲,۱)$

پ) درست است، زیرا: $-\sqrt{۵} \simeq -۲/۲ \Rightarrow -\sqrt{۵} \in [-۳,-۲)$

ت) نادرست است، زیرا به‌طور مثال $-۱ \in [-۱,۱]$ ولی $-۱ \notin (-۱,۱)$

نکته هر بازه یک مجموعه است، پس اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها تعریف می‌شود.

مثال: اگر $A=[-۲,۳)$ و $B=(۰,۴)$ باشد:

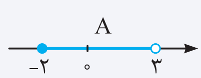
آ) نمایش مجموعه‌ای A و B را بنویسید.

ب) نمایش هندسی هر یک از مجموعه‌های A و B را رسم کنید.

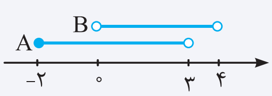
پ) $A \cap B$، $A \cup B$ و $A-B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ: آ) $A=[-۲,۳)=\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \le x < ۳\}$, $B=(۰,۴)=\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۴\}$

ب)

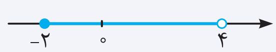


پ) مجموعه‌های A و B را روی یک محور نمایش می‌دهیم و سپس اجتماع، اشتراک و تفاضل آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

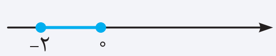


$A \cap B = (۰,۳)$

$A \cup B = [-۲,۴)$



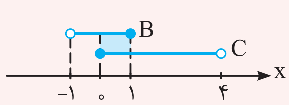
$A - B = [-۲,۰]$



تست: اگر $A=[-۲,۱)$، $B=(-۱,۱]$ و $C=[۰,۴)$ باشند، مجموعهٔ $A-(B \cap C)$ کدام است؟

۱) $[-۲,-۱]$ ۲) $[-۲,-۱)$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۲,۰)$

پاسخ: گزینهٔ (۴) صحیح است. $B \cap C = [۰,۱] \Rightarrow A-(B \cap C) = [-۲,۱) - [۰,۱] = [-۲,۰) \Rightarrow$



طول و نقطهٔ میانی در بازه‌های محدود

طول بازه = انتهای بازه − ابتدای بازه ، طول نقطهٔ میانی = $\frac{\text{انتهای بازه} + \text{ابتدای بازه}}{۲}$

تست: اگر $A = [-۱,۲]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \le -x + ۳ \le ۵\}$ باشد، طول بازهٔ $A \cup B$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $۲ \le -x + ۳ \le ۵$، حدود x و درنتیجه مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

$$۲ \le -x+۳ \le ۵ \xrightarrow{-۳} -۱ \le -x \le ۲ \xrightarrow{\div(-۱)} -۲ \le x \le ۱ \Rightarrow B=[-۲,۱]$$

$A \cup B = [-۱,۲] \cup [-۲,۱] = [-۲,۲] \Rightarrow$ طول بازهٔ $A \cup B$ = انتهای بازه − ابتدای بازه $= ۲-(-۲) = ۴ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

بازه‌های بی‌کران (نامحدود)

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲ به صورت $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le ۲\}$ است. از نماد $(-\infty,۲]$ برای نمایش مجموعهٔ A استفاده می‌کنیم و آن را بازهٔ نیم‌باز $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) تا ۲ می‌نامیم.

از نمادهای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌های نامحدود استفاده می‌کنیم. اگر حداقل در یک طرف بازه یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ به‌کار رفته باشد، آن بازه را بی‌کران (نامحدود) می‌خوانیم.

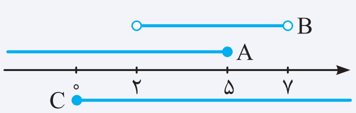
فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. انواع بازه‌های نامحدود، نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول مقابل خلاصه شده است:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	a
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(-\infty,a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	a
باز	$(a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	a
باز	$(-\infty,a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	a

نکته بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر: $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

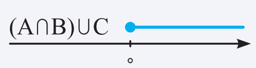
مثال: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le ۵\}$، $B = (۲,۷)$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge ۰\}$ باشد، حاصل $(A \cap B) \cup C$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

پاسخ: هر یک از مجموعه‌های A، B و C را روی یک محور مشخص می‌کنیم و با توجه به آن، مجموعهٔ $(A \cap B) \cup C$ را به‌صورت بازه می‌نویسیم:



$$A \cap B = (-\infty,۵] \cap (۲,۷) = (۲,۵] \Rightarrow (A \cap B) \cup C = (۲,۵] \cup [۰,+\infty) = [۰,+\infty)$$

نمایش هندسی مجموعهٔ $(A \cap B) \cup C$ به‌صورت مقابل است:



تست: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ < x \le ۳\}$، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{x}{۲} > ۱\}$ و $C = [-۴,+\infty)$ باشند، مجموعهٔ $A \cup (B \cap C)$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: مجموعهٔ B از حل نامعادلهٔ $-\frac{x}{۲} > ۱$ به‌دست می‌آید:

$$-\frac{x}{۲} > ۱ \xrightarrow{\times ۲} -x > ۲ \xrightarrow{\div(-۱)} x < -۲ \Rightarrow B = (-\infty,-۲)$$

$$B \cap C = (-\infty,-۲) \cap [-۴,+\infty) = [-۴,-۲) \quad , \quad A = (-۲,۳] \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (-۲,۳] \cup [-۴,-۲) = [-۴,۳] - \{-۲\}$$

بنابراین مجموعهٔ اعداد صحیح واقع در مجموعهٔ $A \cup (B \cap C)$ به صورت زیر است:

$\{-۴,-۳,-۱,۰,۱,۲,۳\} \Rightarrow$ تعداد اعداد صحیح $= ۷ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: اگر $A=[-۱,۴]$ ، $B=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{-x+a}{۲}\le ۳\}$ ، $C=[۰,۴]$ و $C=A\cap B$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۳- ۴) ۲-

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $\frac{-x+a}{۲}\le ۳$ ، مجموعهٔ B به‌دست می‌آید:

$$\frac{-x+a}{۲}\le ۳ \xrightarrow{\times ۲} -x+a\le ۶ \Rightarrow -x\le ۶-a \xrightarrow{\times(-۱)} x\ge a-۶ \Rightarrow B=[a-۶,+\infty) \ , \ A=[-۱,۴]\Rightarrow A\cap B=[a-۶,۴]$$

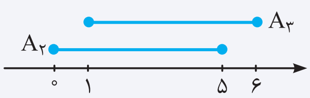
از طرفی $C=A\cap B=[۰,۴]$ ، پس $a-۶=۰$ و از آن‌جا $a=۶$. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال: اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=[n-۲\ ,\ n+۳]$ بازه باشد، مجموعه‌های $A_۲$ ، $A_۳$ ، $A_۲\cap A_۳$ و $A_۲-A_۳$ را مشخص کنید.

پاسخ: با قرار دادن اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... به جای n در رابطهٔ $A_n=[n-۲\ ,\ n+۳]$ ، هر یک از بازه‌های $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ و ... مشخص می‌شوند:

$A_۲=[۲-۲\ ,\ ۲+۳]=[۰\ ,\ ۵] \quad , \quad A_۳=[۳-۲\ ,\ ۳+۳]=[۱\ ,\ ۶]$

بازه‌های $A_۲$ و $A_۳$ روی محور به‌صورت روبه‌رو می‌باشند:



$A_۲\cap A_۳=[۰,۵]\cap[۱,۶]=[۱,۵]$

$A_۲-A_۳=[۰,۵]-[۱,۶]=[۰,۱)$

تست: اگر n یک عدد طبیعی و $A_n=[(-۱)^n n, ۲n]$ بازه باشد، مجموعهٔ $(A_۱\cup A_۲)-A_۱$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ:

$A_۱=[(-۱)^۱(۱),۲(۱)]=[-۱,۲] \ , \ A_۲=[(-۱)^۲\times ۲,۲(۲)]=[۲,۴]$

$\Rightarrow A_۱\cup A_۲=[-۱,۲]\cup[۲,۴]=[-۱,۴]$

$\Rightarrow (A_۱\cup A_۲)-A_۱=[-۱,۴]-[-۱,۲]=(۲,۴]$

مجموعهٔ $(۲,۴]=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲<x\le ۴\}$ شامل دو عدد صحیح ۳ و ۴ است و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ متناهی (باپایان) : مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد مجموعهٔ متناهی می‌نامیم.

مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان): مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد و در واقع تعداد اعضای آن از هر عددی که درنظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد، مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم. به‌عبارت دیگر مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم.

مثال: فرض کنید A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ و B مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی ۴ باشد، کدام‌یک از مجموعه‌های A و B متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

پاسخ: نمایش اعضای هر یک از مجموعه های A و B به صورت زیر می‌باشد:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\} \quad , \quad B=\{۴,۸,۱۲,۱۶,...\}$

مجموعهٔ A، ۶ عضو دارد بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است، اما تعداد عضوهای مجموعهٔ B را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس B یک مجموعهٔ نامتناهی است.

قرارداد: اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

نکته مجموعهٔ تهی ($\varnothing$) یک مجموعهٔ متناهی است، زیرا تعداد اعضای آن صفر است و صفر نیز یک عدد حسابی می‌باشد: $n(\varnothing)=۰ \ , \ ۰\in\mathbb{W}$

تذکر تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد.

به عنوان مثال، مجموعهٔ درخت‌های شهر تهران، مجموعه‌ای با تعداد عضوهای زیاد است ولی یک مجموعهٔ متناهی است.

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام‌یک نامتناهی است؟

آ) مجموعهٔ اعداد مربع کامل دورقمی

ب) مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱

پ) مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های شمال

ت) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ < x \leq ۴\}$

ث) مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج

پاسخ: آ) مجموعهٔ اعداد مربع کامل دورقمی به صورت $A = \{۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱\}$ می‌باشد که یک مجموعهٔ متناهی است.

ب) بین دو عدد ۰ و ۱ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد، بنابراین مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱، یک مجموعهٔ نامتناهی است.

پ) هر چند تعداد درخت‌های جنگل‌های شمال بسیار زیاد است ولی تعداد آن‌ها را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس این مجموعه یک مجموعهٔ متناهی است.

ت) مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ < x \leq ۴\} = \{-۴, -۳, \dots, ۳, ۴\}$ یک مجموعهٔ متناهی ۹ عضوی است.

ث) تعداد دانش‌آموزان کشور را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، اگر چه مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور، مجموعه‌ای با تعداد اعضای بسیار زیاد است ولی متناهی می‌باشد.

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج $E = \{۲, ۴, ۶, \dots\}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است، زیرا تعداد اعضای آن را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان نمود.

تست: اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۲ - x \leq ۲x - ۱ < ۷\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{۱}{x} < ۰\}$ ، در این‌صورت کدام مجموعهٔ زیر نامتناهی است؟

۱) A ۲) $A - B$ ۳) $A \cap B$ ۴) $B - A$

پاسخ: هریک از مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$۲ - x \leq ۲x - ۱ < ۷ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۱ < ۷ \Rightarrow ۲x < ۸ \Rightarrow x < ۴ \\ ۲ - x \leq ۲x - ۱ \Rightarrow ۳ \leq ۳x \Rightarrow ۱ \leq x \end{cases} \Rightarrow ۱ \leq x < ۴ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} A = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$\frac{۱}{x} < ۰ \xrightarrow{۱ > ۰} x < ۰ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{\dots, -۳, -۲, -۱\}$$

مجموعه‌های A، $A - B = A$ و $A \cap B = \varnothing$ متناهی و مجموعهٔ $B - A = B$ یک مجموعهٔ نامتناهی است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه‌های $A \cap B$ و $A - B$، متناهی و مجموعه‌های $A \cup B$ و $B - A$، نامتناهی هستند.

نکته اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه:

۱) اگر B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A حتماً متناهی است.

۲) اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۳) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B حتماً نامتناهی است.

Mathematics Questions

فصل ۱

[مجموعه، الگو و دنباله]

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$　ب) $\mathbb{N}\nsubseteq\mathbb{Q}'$　پ) $-\sqrt{۴}\notin\mathbb{Q}$

ت) $\pi-۳/۱۴\in\mathbb{Q}$　ث) $-۴\in\{-۵,۱\}$　ج) $۰\in\{۰,۱\}$

چ) $-۱\in(-۱,۲]$　ح) $\frac{۲}{۳}\in(۰,۱)$　خ) $\sqrt{۳}\in(۲,۳)$

د) $(n\in\mathbb{N})\ \frac{n}{n+۱}\in(۰,۱)$　ذ) $(۰,۱]=[۰,۱)$　ر) $\varnothing\subseteq(-\infty,۰]$

ز) $[-۱,۱]\subseteq[-۱,۲)$　ژ) $\{۰,۱,۲\}\subseteq[-۱,۴)$　س) $(-۱,۱)\subseteq\mathbb{Q}$

ش) $۶/۰۲۳\times۱۰^{۲۳}\in(۱۰۰,+\infty)$　ص) $-۶\times۱۰^{-۴}\in(-۱,۰)$　ض) $\{x\in\mathbb{Q}\mid -۱<x<۰\}=(-۱,۰)$

۲. یک نمودار ون مناسب رسم کرده و اعداد زیر را روی آن و در محل مناسب قرار دهید.

$$-\frac{۷}{۲}\ ,\ \sqrt{۵}\ ,\ \frac{\sqrt{۱۶}}{۲}\ ,\ -\frac{\pi}{۲}\ ,\ \sqrt{۲}-۱/۴\ ,\ ۱/۰۵۱۲۱۲۱۲...\ ,\ -۱/۰۲\times۱۰^{۴}$$

۳. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را رسم کنید.

آ) $[-۱,۴)$　ب) $(۰,۲]$　پ) $(۰,۲)$　ت) $[-۲,-۱]$

ث) $[-۲,+\infty)$　ج) $(-\infty,۱]$　چ) $(۱,+\infty)$　ح) $(-\infty,۲)$

۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت بازه بنویسید.

آ) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\le x<۲\}$　ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>-۲\}$　پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid -۱\le x<۲\}$　ت) $\{x\in\mathbb{Q}'\mid x<۱\}$

۵. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید.

آ) $(-۲,۵]\cap(-۱,۷)$　ب) $[-۴,۰]\cap[-۱,+\infty)$　پ) $[-۲,۴)\cup(۰,۵]$　ت) $(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)$

ث) $(-\infty,۲)-(۰,۳)$　ج) $(۰,۵]-[۲,+\infty)$　چ) $(-۱,۰]\cap[۰,۲)$　ح) $(-\infty,-۱)\cup(-\infty,۳)$

۶. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱<x<۳\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۰\}$ باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ تعریف شده‌اند مشخص کنید.

۷. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le-۱\}$، $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x\le۳\}$ و $C=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{-x+۳}{۲}\le۱\right\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

آ) C　ب) $A\cup B$　پ) $B\cap C$

ت) $A-B$　ث) $B-(A\cup C)$　ج) $(A\cap B)\cup C$

۸. مجموعه‌های $\mathbb{R}-\{۰\}$ ، $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$ ، $[۲,۵]-\{۳,۴\}$ و $[-۱,۴]-[۰,۱)$ را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به‌صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۹. اگر $\frac{۲x+۱}{۳}\in[-۲,۱)$ باشد، حدود x را مشخص کنید.

۱۰. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام‌یک نامتناهی است؟

آ) مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲　ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی پنج رقمی

پ) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰　ت) مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱

ث) مجموعهٔ ارقام بعد از ممیز عدد $\sqrt{۵}$　ج) مجموعهٔ روستاهای ایران

چ) مجموعهٔ اعداد اول

ح) بازهٔ $(-۱,۲)$

خ) مجموعهٔ کسرها با مخرج ۲

د) مجموعهٔ اعداد اول زوج و دو رقمی

ذ) مجموعهٔ مولکول‌های آب در یک مول آب

ر) $\{۱+(-۱)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۱۱. فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی ۶ باشد.

آ) مجموعهٔ U را با اعضای آن نمایش دهید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی و یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از U مانند A و B بنویسید که $A \subseteq B$ باشد.

ث) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از U مانند C و D بنویسید که $U = C \cup D$ و $C \cap D = \varnothing$

۱۲. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

آ) مجموعهٔ $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ متناهی است یا نامتناهی؟

ب) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

پ) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ متناهی باشد.

ت) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ نامتناهی باشد.

ث) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟

ج) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟

چ) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟

ح) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟

قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۱۳. اگر $U = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{۱,۲,۴,۵\}$ ، $B = \{۲,۳,۶\}$ و $C = \{۱,۵,۶\}$، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

آ) $A \cap B'$ ب) $A' \cup C'$ پ) $B \cap (A \cup C)'$ ت) $A' - B'$

۱۴. مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۴ و ۱۵ را به‌ترتیب A و B بنامید. اگر $U = \{۱,۲,\cdots,۲۵\}$ باشد، ابتدا هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نشان دهید و سپس تعداد عضوهای هریک را به‌دست آورید.

آ) A' ب) $A \cup B$ پ) $B \cap A'$

ت) $A' \cup B'$ ث) $A' \cap B'$

۱۵. اگر A زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشد، سادهٔ شدهٔ عبارت $(A' \cap \varnothing')' \cup (A' - (A \cap A'))$ را بنویسید.

۱۶. $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید و متمم هریک از مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

آ) $(-۱,۰]$ ب) $\mathbb{W}$ پ) $(-\infty,۲)$

ت) $(-۱,+\infty)$ ث) $[۰,۴]-[۱,۲)$ ج) $(-۱,۳) \cup (۵,+\infty)$

۱۷. $\mathbb{Z}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید.

آ) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A ارائه کنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B ارائه کنید که B' متناهی باشد.

پ) اگر C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، C' متناهی است یا نامتناهی؟

ت) اگر D مجموعه‌ای متناهی باشد، D' متناهی است یا نامتناهی؟

۱۸. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشد به‌طوری‌که $n(U) = ۸۰$ ، $n(A) = ۲۱$ ، $n(B) = ۳۵$ و $n(A \cap B) = ۱۲$. مطلوب است:

آ) $n(B')$ ب) $n(A \cup B)$ پ) $n(A - B)$ ت) $n(B \cap A')$

ث) $n(A' \cup B')$ ج) $n(A' \cap B')$ چ) $n((A-B) \cup (B-A))$

۱۹. اگر $3n(A)=2n(B)=6n(A\cap B)$ باشد، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\dfrac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ ب) $\dfrac{n(A\cup B)-n(A\cap B)}{n(A-B)}$

۲۰. به‌وسیلهٔ نمودار وِن نشان دهید:

آ) اگر $A\subseteq B\subseteq U$، آن‌گاه $B'\subseteq A'\subseteq U$ ب) $A'-B'=B-A$

۲۱. در یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر مشخص شده است که ۵۰ نفر به سریال‌های طنز و ۶۰ نفر به سریال‌های خانوادگی علاقمند هستند. اگر ۸۰ نفر به حداقل یکی از این دو نوع سریال علاقمند باشند، مطلوب است تعداد افرادی که:

آ) به هر دو نوع سریال علاقمند باشند.

ب) به سریال‌های طنز علاقمندند ولی به سریال‌های خانوادگی علاقمند نیستند.

پ) نه به سریال‌های طنز علاقمند هستند و نه به سریال‌های خانوادگی.

۲۲. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ) چند نفر در هر دو رشتهٔ فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند. ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند.

پ) چند نفر فوتبال بازی می‌کنند ولی والیبال بازی نمی‌کنند. ت) چند نفر فقط در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی

۲۳. به تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل‌های مقابل توجه کنید:

شکل(۳) شکل(۲) شکل(۱)

اگر a_n تعداد چوب کبریت‌های شکل nاُم باشد، آن‌گاه:

آ) a_1، a_2، a_3 و a_4 را بنویسید.

ب) تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در مرحلهٔ nاُم را بر حسب n بنویسید.

پ) در شکل سی‌اُم چند چوب کبریت به کار رفته است؟

۲۴. دریک الگوی خطی، جملات پنجم ویازدهم به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می باشند.

آ) جملهٔ عمومی الگو را بنویسید. ب) جملهٔ سی‌اُم را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم الگو برابر ۴۱۵ می‌باشد؟

۲۵. پنج دنباله و پنج جملهٔ عمومی به صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جملهٔ عمومی مربوطه به کدام دنباله است؟

• $t_n=\dfrac{2+(-1)^n n^2}{n^2+1}$ • $d_n=2-n$ • $c_n=n^2+2n$ • $b_n=\dfrac{(-1)^n}{n+2}$ • $a_n=\dfrac{4n}{2n-1}$

$4,\dfrac{8}{3},\dfrac{12}{5},\dots$ $3,8,15,\dots$ $\dfrac{1}{2},\dfrac{6}{5},-\dfrac{7}{10},\dots$ $-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{5},\dots$ $1,0,-1,\dots$

۲۶. در هر قسمت، سه جملهٔ بعدی دنباله را بنویسید. هم‌چنین در سه قسمت اول، جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

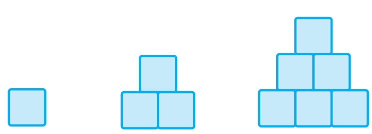
آ) $-1,3,7,\dots$ ب) $1,-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{9},\dots$ پ) $3,1,\dfrac{1}{3},\dots$ ت) $1,2,4,7,\dots$

۲۷. جملهٔ عمومی‌یک دنباله به صورت $a_n=\dfrac{3n+2}{n+4}$ است.

آ) چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید. ب) چند جملهٔ این دنباله کوچک‌تر از ۲ می‌باشند؟

پ) جملهٔ چندم دنباله، برابر $\dfrac{5}{2}$ است؟

۲۸. الگوی مقابل را در نظر بگیرید:

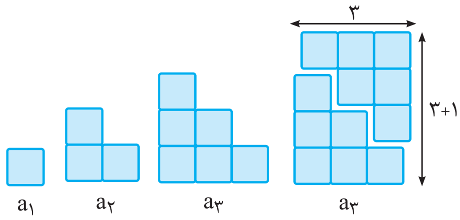


شکل(۳) شکل(۲) شکل(۱)

آ) شکل بعدی را رسم و سپس تعداد مربع‌های هر شکل را به صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

ب) آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل کنید. با توجه به تصویر حاصل، a_n را برحسب n به‌دست آورید.



ت) به کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت $1+2+3+\dots+n$ را به‌دست آورید.

۲۹. جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هریک از آن‌هایک الگوی هندسی نظیر کنید.

آ) $a_n = ۳n$ ب) $b_n = ۴n + ۲$ پ) $c_n = n^۲ + ۱$ ت) $d_n = n^۲ + ۲n$

۳۰. برای دنباله‌های درجه دوم زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جملهٔ عمومی هر دنباله را بیابید.

آ) ... ,۱۹ ,۹ ,۳ ب) ... ,۱۲ ,۶ ,۲

۳۱. از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هریک از آن‌ها قدرنسبت را تعیین کنید.

آ) ...,۱۳,۸,۳ ب) ...,۱۱,۷,۴,۲ پ) ...,۴-,۰,۴,۸ ت) $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\dots$

ث) $\frac{۱}{۷},\frac{۲}{۷},\frac{۳}{۷},\dots$ ج) ...,۱-,۱-,۱-,۱- چ) $\sqrt{۲},۲\sqrt{۲},۳\sqrt{۲},۴\sqrt{۲},\dots$

۳۲. یک دنبالهٔ حسابی مثال بزنید که:

آ) قدرنسبت آن مثبت و جملهٔ سوم آن ۵ باشد. ب) قدرنسبت آن منفی و جملهٔ پنجم آن ۳- باشد.

پ) فقط سه جملهٔ مثبت داشته باشد. ت) فقط چهار جملهٔ منفی داشته باشد.

۳۳. در یک دنبالهٔ حسابی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۲ و ۴۴ می‌باشند. جملهٔ سی ویکم دنباله را مشخص کنید.

۳۴. در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ‌یازدهم، ۱۲ واحد کم‌تر از جملهٔ هفتم آن است. اگر جملهٔ پنجم آن ۱۷- باشد، دنباله را مشخص کنید.

۳۵. در یک دنبالهٔ حسابی مجموع چهار جملهٔ اول ۲۶ و جملهٔ هفتم دنباله برابر ۲۹ می‌باشد. جملهٔ نوزدهم دنباله را مشخص کنید.

۳۶. در یک دنبالهٔ حسابی مجموع چهار جملهٔ اول ۱۰- و مجموع پنج جملهٔ بعدی ۵۵ می‌باشد. جملهٔ اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

۳۷. در دنبالهٔ حسابی ...,۲۰۱,۱۹۸,۱۹۵:

آ) جملهٔ هفدهم دنباله را مشخص کنید. ب) دنباله چند جملهٔ مثبت دارد؟

پ) چند جملهٔ دنباله، عددی سه رقمی می‌باشد؟

۳۸. در دنبالهٔ حسابی ...,۹۳-,۱۰۰-,۱۰۷-:

آ) جملهٔ سی و یکم دنباله را مشخص کنید. ب) کدام جملهٔ دنباله برابر ۱۴۵ است؟

پ) دنباله چند جملهٔ منفی دارد؟

۳۹. بین دو عدد ۳- و ۳۳، پنج واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ها را مشخص کنید.

۴۰. در دنبالهٔ حسابی $۴x , x+۳ , -۱۰ , \dots$، واسطهٔ حسابی جملات بیست و پنجم و چهل و دوم را به‌دست آورید.

۴۱. در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی t_n، حاصل $\frac{-t_۷+۲t_۵-t_{۱۰}}{t_۶-t_{۱۱}}$ را به‌دست آورید.

۴۲. پنج عدد که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند را طوری مشخص کنید که مجموع آن‌ها برابر ۸۰ و بزرگ‌ترین عدد، دو برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر باشد.

۴۳. زوایای یک شش‌ضلعی محدب که اندازهٔ کوچک‌ترین آن‌ها ۸۰° می‌باشد، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اندازهٔ زوایای شش‌ضلعی را به‌دست آورید.

قسمت چهارم: دنبالهٔ هندسی

۴۴. کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنبالهٔ هندسی است؟ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی را مشخص کنید.

آ) ...,۵۴-,۱۸,۶-,۲ ب) $\sqrt{۳} , ۳\sqrt{۳} , ۵\sqrt{۳} , ۷\sqrt{۳} , \dots$ پ) ...,۴,۴,۴,۴

۴۵. در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ دوم و پنجم به ترتیب ۳۶ و $\frac{۹}{۱۶}$ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

۴۶. جملات دوم و هشتم دنبالهٔ حسابی ...,۱۲,۵ به ترتیب جملات اول و دوم یک دنبالهٔ هندسی می‌باشند. جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی را مشخص کنید.

۴۷. در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و دوم برابر ۱۶ و تفاضل جملهٔ دوم از جملهٔ چهارم برابر ۹۶ می باشد. دنباله را مشخص کنید.

۴۸. در یک دنباله با جملهٔ عمومی t_n، $t_{n+۱}=\frac{۱}{۳}t_n$ و $t_۲=۹$ می باشند. جملهٔ هفتم دنباله را مشخص کنید.

۴۹. واسطهٔ هندسی بین دو عدد $\sqrt{۵}-۳$ و $\sqrt{۵}+۳$ را به‌دست آورید.

۵۰. در دنبالهٔ هندسی $x-۳ , ۳-x , x+۶ , \dots$، جملهٔ پانزدهم چند برابر جملهٔ هفتم آن است؟

۵۱. در دنبالهٔ هندسی $۱ , x , ۲x+۳ , y^۲+۲ , ۸۱ , \dots$، اگر همهٔ جملات مثبت باشند، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

۵۲. جملات چهارم، دهم و هجدهم یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی می‌باشند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را به‌دست آورید.

۵۳. اگر جمله‌های اول، دوم و ششم از یک دنبالهٔ حسابی با سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی برابر باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را به‌دست آورید.

۵۴. در یک دنبالهٔ هندسی، حاصل ضرب سه جملهٔ اول ۸ و جملهٔ چهارم آن ۳۲ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

۵۵. بین دو عدد $\frac{۱}{۶}$ و ۲۱۶ سه عدد چنان درج کنید که پنج عدد حاصل، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی شوند.

۵۶. شخصی ده میلیون تومان پول را در یک بانک با نرخ سود مشارکت ۲۰ درصد سرمایه گذاری کرده است.

آ) پول این شخص بعد از ۵ سال چقدر می‌شود؟

ب) سرمایهٔ این شخص بعد از n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

۵۷. جمعیت شهری ۱۰۰۰۰۰۰ نفر می‌باشد. اگر هر سال ۴ درصد به جمعیت این شهر اضافه شود، جمعیت شهر بعد از n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

۵۸. اگر جملات دو دنبالهٔ هندسی را نظیر به نظیر در هم ضرب کنیم، آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ هندسی خواهد بود؟ چرا؟

پاسخ فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

۱

آ) درست است، زیرا اجتماع دو مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ برابر $\mathbb{R}$ است و هیچ عضو مشترکی ندارند.

ب) درست است، زیرا هیچ عدد طبیعی، گنگ نیست. بنابراین هیچ عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ در $\mathbb{Q}'$ قرار ندارد، پس $\mathbb{N}\nsubseteq\mathbb{Q}'$

پ) نادرست است، زیرا $-\sqrt{۴}=-۲\in\mathbb{Q}$

ت) نادرست است، زیرا π یک عدد گنگ است و ارقام اعشاری آن بی‌پایان است و داریم: $\pi=۳/۱۴۱۵...\Rightarrow\pi-۳/۱۴=۰/۰۰۱۵...\in\mathbb{Q}'$

توجه کنید که ارقام اعشاری در عدد $۰/۰۰۱۵...$ نه متناوب است و نه مختوم.

ث) نادرست است، زیرا مجموعهٔ $\{-۵,۱\}$ فقط شامل دو عضو ۵- و ۱ است، پس $-۴\notin\{-۵,۱\}$

ج) درست است.

چ) نادرست است، زیرا بازهٔ نیم‌باز $(-۱,۲]$ شامل عدد ۱- نمی‌باشد، پس $-۱\notin(-۱,۲]$

ح) درست است، زیرا $۰<\frac{۲}{۳}<۱$، پس $\frac{۲}{۳}\in(۰,۱)$

خ) نادرست است، زیرا $\sqrt{۳}\simeq۱/۷$ و درنتیجه $\sqrt{۳}\notin(۲,۳)$

د) درست است، زیرا به‌ازای هر عدد طبیعی n، $۰<n<n+۱$ و در نتیجه $۰<\frac{n}{n+۱}<۱$، پس $\frac{n}{n+۱}\in(۰,۱)$

ذ) نادرست است، زیرا به‌طور مثال $۱\in(۰,۱]$ ولی $۱\notin[۰,۱)$

ر) درست است، زیرا $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

ز) درست است، زیرا هر عضوی که در مجموعهٔ $[-۱,۱]$ قرار دارد، به مجموعهٔ $[-۱,۲)$ نیز تعلق دارد.

ژ) درست است، زیرا مجموعهٔ $[-۱,۴)$ شامل اعداد صحیح ۰، ۱ و ۲ می‌باشد.

س) نادرست است، زیرا مجموعهٔ $(-۱,۱)$ شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۱- و ۱ می‌باشد و اعداد گنگ واقع در این بازه متعلق به $\mathbb{Q}$ نیستند. به عنوان مثال $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\in(-۱,۱)$ ولی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یک عدد گویا نمی‌باشد.

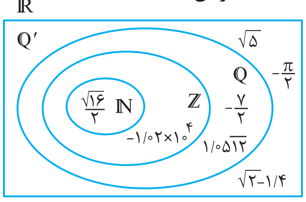
ش) درست است، زیرا $۶/۰۲۳\times۱۰^{۲۳}>۱۰۰$

ص) درست است، زیرا $-۱<-۶\times۱۰^{-۴}=-۰/۰۰۰۶<۰$ می‌باشد.

ض) نادرست است، زیرا بازهٔ $(-۱,۰)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۱- و ۰ است، نه فقط شامل اعداد گویای بین ۱- و ۰

۲

عدد $۲=\frac{۴}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶}}{۲}$ یک عدد طبیعی، عدد $-۱۰۲۰۰=-۱/۰۲\times۱۰^{۴}$ یک عدد صحیح منفی، اعداد $-\frac{۷}{۲}$ و $۱/۰۵\overline{۱۲}$ گویا و اعداد $\sqrt{۵}$، $-\frac{\pi}{۲}$ و $\sqrt{۲}-۱/۱۴$ گنگ هستند. بنابراین:



۳

آ) $[-۱,۴)=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\le x<۴\}$

ب) $(۰,۲]=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰<x\le۲\}$

پ) $(۰,۲)=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰<x<۲\}$

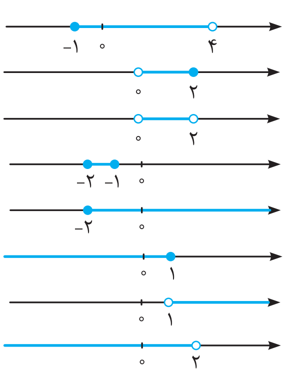
ت) $[-۲,-۱]=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x\le-۱\}$

ث) $[-۲,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge-۲\}$

ج) $(-\infty,۱]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le۱\}$

چ) $(۱,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۱\}$

ح) $(-\infty,۲)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<۲\}$



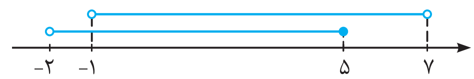
۴

آ) $[-۱,۲)$ ب) $(-۲,+\infty)$

پ و ت) امکان‌پذیر نیست. زیرا بازه شامل تمام اعداد گویا و گنگ می‌باشد نه فقط اعداد گویا یا گنگ. توجه کنید که مجموعهٔ (پ) را می‌توان به‌صورت $[-۱,۲)\cap\mathbb{Q}$ و مجموعهٔ (ت) را می‌توان به‌صورت $(-\infty,۱)\cap\mathbb{Q}'$ نمایش داد اما هیچ یک از این‌ها، یک بازه نیستند.

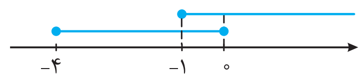
۵

آ)



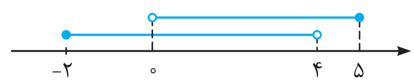
$(-۲,۵]\cap(-۱,۷)=(-۱,۵]$

ب)



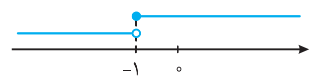
$[-۴,۰]\cap[-۱,+\infty)=[-۱,۰]$

پ)



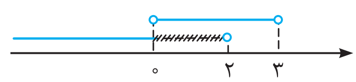
$[-۲,۴)\cup(۰,۵]=[-۲,۵]$

ت)



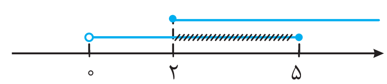
$(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

ث)



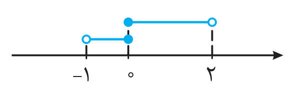
$(-\infty,۲)-(۰,۳)=(-\infty,۰]$

ج)



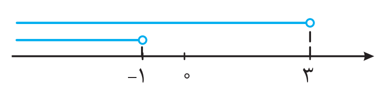
$(۰,۵]-[۲,+\infty)=(۰,۲)$

چ)



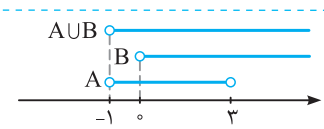
$(-۱,۰]\cap[۰,۲)=\{۰\}$

ح)

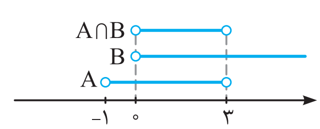


$(-\infty,-۱)\cup(-\infty,۳)=(-\infty,۳)$

۶



$A=(-۱,۳), B=(۰,+\infty)\Rightarrow A\cup B=(-۱,۳)\cup(۰,+\infty)=(-۱,+\infty)$



$A\cap B=(-۱,۳)\cap(۰,+\infty)=(۰,۳)$

۷

آ) با حل نامعادلهٔ درجه اول $\frac{-x+۳}{۲}\le ۱$، حدود x و درنتیجه مجموعهٔ C را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{-x+۳}{۲}\le ۱\Rightarrow -x+۳\le ۲\Rightarrow -x\le -۱\Rightarrow x\ge ۱$$
$$\Rightarrow C=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge ۱\}=[۱,+\infty)$$

ب) $A\cup B=(-\infty,-۱]\cup[-۲,۳]=(-\infty,۳]$

پ) $B\cap C=[-۲,۳]\cap[۱,+\infty)=[۱,۳]$

ت) $A-B=(-\infty,-۱]-[-۲,۳]=(-\infty,-۲)$

ث) $A\cup C=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)\Rightarrow B-(A\cup C)=(-۱,۱)$

ج) $A\cap B=(-\infty,-۱]\cap[-۲,۳]=[-۲,-۱]$

$$\Rightarrow (A\cap B)\cup C=[-۲,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

۸

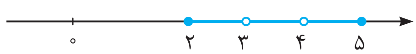
در نمایش هندسی مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ باید عدد صفر را از روی محور حذف کنیم:

$\mathbb{R}-\{۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$

با حذف اعداد ۱- و ۲ از روی محور، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$ به‌دست می‌آید:

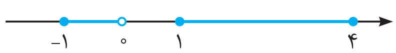
$\mathbb{R}-\{-۱,۲\}=(-\infty,-۱)\cup(-۱,۲)\cup(۲,+\infty)$

با حذف اعداد ۳ و ۴ از بازهٔ $[۲,۵]$، مجموعهٔ $[۲,۵]-\{۳,۴\}$ به‌دست می‌آید:



$[۲,۵]-\{۳,۴\}=[۲,۳)\cup(۳,۴)\cup(۴,۵]$

با حذف بازهٔ $[۰,۱)$ از بازهٔ $[-۱,۴]$، مجموعهٔ $[-۱,۴]-[۰,۱)$ به‌دست می‌آید:



$[-۱,۴]-[۰,۱)=[-۱,۰)\cup[۱,۴]$

۹

$$\frac{۲x+۱}{۳}\in[-۲,۱)\Rightarrow -۲\le\frac{۲x+۱}{۳}<۱\xrightarrow{\times ۳} -۶\le ۲x+۱<۳$$
$$\xrightarrow{-۱} -۷\le ۲x<۲\xrightarrow{\div ۲} -\frac{۷}{۲}\le x<۱\Rightarrow x\in[-\frac{۷}{۲},۱)$$

۱۰

آ) مجموعهٔ $\{...,-۱,۰,۱,...\}$ بی‌شمار عضو دارد، بنابراین یک مجموعهٔ نامتناهی است.

ب) مجموعهٔ $\{۱۰۰۰۰,۱۰۰۰۱,\cdots,۹۹۹۹۹\}$ یک مجموعهٔ متناهی است.

پ) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰، یعنی مجموعهٔ $\{۱,۲,۴,۵,۱۰,۲۰\}$ یک مجموعهٔ متناهی است.

ت) بی‌شمار عدد گنگ بین ۰ و ۱ مثل $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$، $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ و ... وجود دارد. بنابراین مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱ نامتناهی است.

ث) مجموعهٔ ارقام بعد از ممیز عدد $\sqrt{۵}$، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,...,۹\}$ می‌باشد که یک مجموعهٔ متناهی است. توجه کنیم که تعداد ارقام بعد از ممیز در اعداد گنگ نامتناهی است.

ج) متناهی است، زیرا تعداد روستاهای ایران را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد.

چ) نامتناهی است، زیرا بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

ح) نامتناهی است، زیرا بازه‌ها شامل بی‌شمار عدد گویا و گنگ می‌باشند.

خ) نامتناهی است، زیرا بی‌شمار کسر با مخرج ۲ مثل $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۲}$، $\frac{۳}{۲}$ و ... وجود دارد.

د) متناهی است، زیرا هیچ عدد اول زوج و دو رقمی وجود ندارد. بنابراین مجموعهٔ اعداد اول زوج و دو رقمی مجموعهٔ تهی است و مجموعهٔ تهی یک مجموعهٔ متناهی است.

ذ) متناهی است، زیرا تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب برابر $۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}$ است که با داشتن امکانات و ابزار لازم و صرف وقت کافی می‌توان آن را شمرد.

ر) متناهی است، زیرا اگر n زوج باشد، آن‌گاه $۱+(-۱)^n=۲$ و چنانچه n فرد باشد، آن‌گاه $۱+(-۱)^n=۰$. پس $\{۱+(-۱)^n \mid n\in\mathbb{N}\}=\{۰,۲\}$

۱۱

آ) $U=\{۶,۱۲,۱۸,۲۴,...\}$

ب) مجموعهٔ U بی‌شمار عضو دارد، پس U مجموعه‌ای نامتناهی است.

پ) $B=\{۱۸,۲۴,۳۰,...\}\subseteq U$ (نامتناهی) و $A=\{۶,۱۲\}\subseteq U$ (متناهی)

ت) $B=\{۶,۱۸,۲۴,۳۰,...\}\subseteq U$ و $A=\{۱۸,۲۴,۳۰,...\}\subseteq U$.
A و B دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $A\subseteq B$

ث) می‌توان مجموعه‌های C و D را به‌صورت زیر درنظر گرفت:
$$C=\{۱۲,۲۴,۳۶,...\},\ D=\{۶,۱۸,۳۰,...\}\Rightarrow U=C\cup D$$

۱۲

آ) متناهی است، زیرا: $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰,\cancel{۱},\cancel{۲},...\}-\{۱,۲,۳,...\}=\{۰\}$

ب) $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ دو مجموعهٔ متمایز نامتناهی‌اند و $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$

پ) $A=\mathbb{N},\ B=\mathbb{W}\Rightarrow A\subseteq B,\ B-A=\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$

ت) $A=\mathbb{N},\ B=\mathbb{Z}$
$\Rightarrow A\subseteq B,\ B-A=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{...,-۲,-۱,۰\}$

ث) A متناهی است، زیرا B متناهی است و درنتیجه تعداد عضوهای هر زیرمجموعهٔ آن که کم‌تر یا مساوی تعداد عضوهای B است نیز متناهی خواهد بود.

ج) A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. به‌عنوان مثال اگر $B=\mathbb{Z}$، آن‌گاه $A=\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ نامتناهی است و $A=\{-۱,۰,۱\}\subseteq\mathbb{Z}$ متناهی است.

چ) B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. با فرض $A=\{۱,۲\}$، اگر $B=\{۱,۲,۳\}$، آن‌گاه B متناهی و اگر $B=\mathbb{N}$ باشد، آن‌گاه B نامتناهی است.

ح) B نامتناهی است، زیرا B، تمام بی‌شمار عضو مجموعهٔ A را دارد.

۱۳

ابتدا متمم هریک از مجموعه‌های A، B و C را مشخص می‌کنیم:
$$A'=U-A=\{\cancel{۱},\cancel{۲},۳,\cancel{۴},\cancel{۵},۶\}-\{۱,۲,۴,۵\}=\{۳,۶\}$$
$$B'=U-B=\{۱,\cancel{۲},\cancel{۳},۴,۵,\cancel{۶}\}-\{۲,۳,۶\}=\{۱,۴,۵\}$$
$$C'=U-C=\{\cancel{۱},۲,۳,۴,\cancel{۵},\cancel{۶}\}-\{۱,۵,۶\}=\{۲,۳,۴\}$$

آ) $A\cap B'=\{۱,۲,۴,۵\}\cap\{۱,۴,۵\}=\{۱,۴,۵\}$

ب) $A'\cup C'=\{۳,۶\}\cup\{۲,۳,۴\}=\{۲,۳,۴,۶\}$

پ) $A\cup C=\{۱,۲,۴,۵,۶\}\Rightarrow (A\cup C)'=U-(A\cup C)=\{۳\}$
$\Rightarrow B\cap(A\cup C)'=\{۲,۳,۶\}\cap\{۳\}=\{۳\}$

ت) $A'-B'=\{۳,۶\}-\{۱,۴,۵\}=\{۳,۶\}$

۱۴

$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\}$: مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی ۲۴

$B=\{۱,۳,۵,۱۵\}$: مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی ۱۵

آ) $A'=U-A=\{۱,۲,\cdots,۲۵\}-\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\}$
$=\{۵,۷,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲,۲۳,۲۵\}$
$\Rightarrow n(A')=۱۷$

ب) $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸,۱۲,۱۵,۲۴\}\Rightarrow n(A\cup B)=۱۰$

پ) $B\cap A'=\{۵,۱۵\}\Rightarrow n(B\cap A')=۲$

ت) $A'\cup B'=(A\cap B)'=U-(A\cap B)$
$=U-\{۱,۳\}=\{۲,۴,۵,۶,\cdots,۲۵\}\Rightarrow n(A'\cup B')=۲۳$

ث) $A'\cap B'=(A\cup B)'=U-(A\cup B)$
$=\{۷,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲,۲۳,۲۵\}$
$\Rightarrow n(A'\cap B')=۱۵$

۱۵

می‌دانیم $\varnothing'=U$ و $A\cap A'=\varnothing$ پس داریم:
$$(A'\cap\varnothing')'\cup(A'-(A\cap A'))=(\underbrace{A'\cap U}_{A'})'\cup(A'-\varnothing)$$
$$=(A')'\cup A'=A\cup A'=U$$

۱۶

آ) $(-۱,۰]'=\mathbb{R}-(-۱,۰]=(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$

ب)
$\mathbb{W}'=\mathbb{R}-\{۰,۱,۲,۳,\cdots\}=(-\infty,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,۲)\cup(۲,۳)\cup\cdots$

پ) $(-\infty,۲)'=\mathbb{R}-(-\infty,۲)=[۲,+\infty)$

ت) $(-۱,+\infty)'=\mathbb{R}-(-۱,+\infty)=(-\infty,-۱]$

ث) $[۰,۴]-[۱,۲)=[۰,۱)\cup[۲,۴]$
$\Rightarrow([۰,۱)\cup[۲,۴])'=(-\infty,۰)\cup[۱,۲)\cup(۴,+\infty)$

ج) $((-۱,۳)\cup(۵,+\infty))'=(-\infty,-۱]\cup[۳,۵]$

۱۷

آ) اگر $A=\mathbb{N}$، آن‌گاه $A'=\{\cdots,-۲,-۱,۰\}$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

ب) اگر $B=\{\pm۱,\pm۲,\pm۳,\cdots\}$، آن‌گاه $B'=\mathbb{Z}-B=\{۰\}$ یک مجموعهٔ متناهی است.

پ) C' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
$C=\{\pm۱,\pm۲,\cdots\}\Rightarrow C'=\{۰\}$ (C' متناهی است.)
$C=\mathbb{W}\Rightarrow C'=\{...,-۲,-۱\}$ (C' نامتناهی است.)

ت) D' حتماً نامتناهی است، زیرا D فقط تعداد محدودی از بی‌شمار عضو مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را شامل می‌شود.

۱۸

آ) $n(B')=n(U)-n(B)=۸۰-۳۵=۴۵$

ب) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۲۱+۳۵-۱۲=۴۴$

پ) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۲۱-۱۲=۹$

ت) $n(B\cap A')=n(B)-n(A\cap B)=۳۵-۱۲=۲۳$

ث) بنابر قانون دمورگان $A'\cup B'=(A\cap B)'$ می‌باشد، پس:

$$n(A'\cup B')=n((A\cap B)')=n(U)-n(A\cap B)=۸۰-۱۲=۶۸$$

ج) بنابر قانون دمورگان $A'\cap B'=(A\cup B)'$ است، پس:

$$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)\xrightarrow{\text{قسمت (ب)}}۸۰-۴۴=۳۶$$

چ) $A-B$ و $B-A$ دو مجموعهٔ جدا از هم‌اند و در نتیجه داریم:

$$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)$$
$$=(n(A)-n(A\cap B))+(n(B)-n(A\cap B))$$
$$=(۲۱-۱۲)+(۳۵-۱۲)=۳۲$$

۱۹

تعداد عضوهای هر مجموعه را برحسب تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B$ به‌دست می‌آوریم:

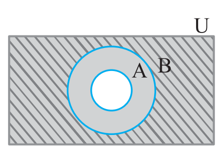
$$۳n(A)=۲n(B)=۶n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(A)=۲n(A\cap B) \text{ و } n(B)=۳n(A\cap B)$$

آ)
$$\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(A\cap B)}$$
$$=\frac{۲n(A\cap B)+۳n(A\cap B)-n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=\frac{۴\cancel{n(A\cap B)}}{\cancel{n(A\cap B)}}=۴$$

ب) بنابر قسمت (آ)، داریم:

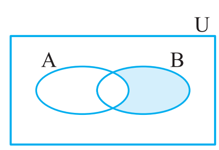
$$\frac{n(A\cup B)-n(A\cap B)}{n(A-B)}=\frac{۴n(A\cap B)-n(A\cap B)}{n(A)-n(A\cap B)}$$
$$=\frac{۳n(A\cap B)}{۲n(A\cap B)-n(A\cap B)}=\frac{۳\cancel{n(A\cap B)}}{\cancel{n(A\cap B)}}=۳$$

۲۰

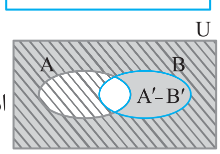


آ) فرض کنیم $A\subseteq B$ باشد، در این‌صورت اگر A' را رنگ کرده و B' را هاشور بزنیم، طبق نمودار وِن تمام قسمت‌های هاشورزده جزئی از قسمت‌های رنگی می‌باشد، پس: $B'\subseteq A'$

ب) نمودار وِن مجموعهٔ $A-B$ به‌صورت



و نمودار وِن مجموعهٔ $A'-B'$ به‌صورت



است.

باید از قسمت رنگ‌شده (A')، قسمت‌های هاشورزده (B') را حذف کنیم.

۲۱

مجموعهٔ تمام افرادی که در نظرسنجی شرکت کرده‌اند را با U، مجموعهٔ افرادی که به سریال‌های طنز علاقمند هستند را با A و مجموعهٔ افرادی که به سریال‌های خانوادگی علاقمندند را با B نشان می‌دهیم. طبق فرض داریم:

$$n(U)=۱۰۰,\ n(A)=۵۰,\ n(B)=۶۰,\ n(A\cup B)=۸۰$$

آ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B$ مطلوب است:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow ۸۰=۵۰+۶۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۳۰$$

ب) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A-B=A\cap B'$ مطلوب است:

$$n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۵۰-۳۰=۲۰$$

پ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A'\cap B'=(A\cup B)'$ مطلوب است:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰-۸۰=۲۰$$

۲۲

طبق فرض داریم:

$A\Rightarrow n(A)=۴۰$: مجموعهٔ اعضای تیم فوتبال

$B\Rightarrow n(B)=۲۵$: مجموعهٔ اعضای تیم والیبال

$n(A\cup B)=۵۵$

آ) باید $n(A\cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow ۵۵=۴۰+۲۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$$

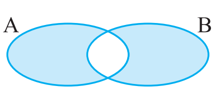
ب) باید تعداد اعضای مجموعهٔ $A'\cap B'=(A\cup B)'$ را به‌دست آوریم:

$$n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۷۰-۵۵=۱۵$$

پ) باید تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ را به‌دست آوریم:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۴۰-۱۰=۳۰$$

ت) طبق نمودار وِن روبه‌رو، باید تعداد عضوهای مجموعهٔ رنگی را مشخص کنیم:



تعداد عضوهای مجموعهٔ رنگی برابر است با:

$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=۵۵-۱۰=۴۵$$

۲۳

آ) $a_1=۴\ ,\ a_2=۷\ ,\ a_3=۱۰\ ,\ a_4=۱۳$

ب) هر شکل نسبت به شکل قبل خود، سه چوب کبریت بیش‌تر دارد، می‌توان جملات الگو را به‌صورت زیر نوشت:

$$a_1=۳(۱)+۱\ ,\ a_2=۳(۲)+۱\ ,\ a_3=۳(۳)+۱\ ,\cdots,\ a_n=۳n+۱$$

پ) با قرار دادن $n=۳۰$ در $a_n=۳n+۱$، تعداد چوب کبریت‌های شکل سی اُم به‌دست می‌آید:

$$a_{30}=۳(۳۰)+۱=۹۱$$

۲۴

جملهٔ عمومی الگوی خطی به‌صورت $t_n=an+b$ می‌باشد.

آ) طبق فرض $t_5=۳۰$ و $t_{11}=۷۲$ می‌باشد، پس داریم:

$$\begin{cases}t_5=۵a+b=۳۰\\ t_{11}=۱۱a+b=۷۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۵a-b=-۳۰\\ ۱۱a+b=۷۲\end{cases}\Rightarrow ۶a=۴۲\Rightarrow a=۷$$

$$\xrightarrow{۵a+b=۳۰}۵(۷)+b=۳۰\Rightarrow b=-۵\Rightarrow t_n=۷n-۵$$

ب) با قرار دادن عدد ۳۰ به جای n در t_n، جملهٔ سی‌اُم دنباله به‌دست می‌آید:

$t_{30}=7(30)-5=210-5=205$

پ) با حل معادلهٔ $t_n=415$، مقدار n به‌دست می‌آید:

$t_n=7n-5=415 \Rightarrow 7n=420 \Rightarrow n=60$

بنابراین جملهٔ شصتم الگو برابر ۴۱۵ می‌باشد.

۲۵

با قرار دادن اعداد ۱، ۲ و ۳ به جای n در جمله‌های عمومی داده شده، سه جملهٔ اول هر دنباله را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به دنباله‌های داده شده، جملهٔ عمومی متناظر با آن را مشخص می‌کنیم:

$a_n=\frac{4n}{2n-1}: 4,\frac{8}{3},\frac{12}{5},\dots$

$b_n=\frac{(-1)^n}{n+2}: -\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\dots$

$c_n=n^2+2n: 3,8,15,\dots$

$d_n=2-n: 1,0,-1,\dots$

$t_n=\frac{2+(-1)^n n^2}{n^2+1}: \frac{1}{2},\frac{6}{5},-\frac{7}{10},\dots$

۲۶

آ) $-1,3,7,11,15,19,\dots \Rightarrow a_n=4n-5$

ب) $1,-\frac{1}{4},\frac{1}{9},-\frac{1}{16},\frac{1}{25},-\frac{1}{36},\dots \Rightarrow a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

پ) $3,1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\dots \Rightarrow a_n=3^{2-n}$

ت) $1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ 16\ ,\ 22\ ,\ \dots$

$+1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \quad +6$

۲۷

آ) $a_1=\frac{3(1)+2}{1+4}=1$, $a_2=\frac{3(2)+2}{2+4}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$a_3=\frac{3(3)+2}{3+4}=\frac{11}{7}$, $a_4=\frac{3(4)+2}{4+4}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$

ب) با حل نامعادلهٔ $a_n<2$، حدود n را مشخص می‌کنیم:

$a_n<2 \Rightarrow \frac{3n+2}{n+4}<2 \xrightarrow[\text{مثبت است}]{n+4\ \text{عددی}} 3n+2<2(n+4)$

$\Rightarrow 3n-2n<8-2 \Rightarrow n<6 \Rightarrow n\le 5$

بنابراین به‌ازای پنج مقدار از n، $a_n<2$ می‌باشد، یعنی پنج جملهٔ اول دنباله کوچک‌تر از ۲ می‌باشند.

پ) با حل معادلهٔ $a_n=\frac{5}{2}$، مقدار n به‌دست می‌آید:

$a_n=\frac{5}{2}=\frac{3n+2}{n+4} \Rightarrow 5(n+4)=2(3n+2)$

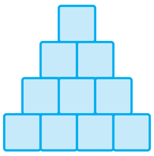
$\Rightarrow 5n+20=6n+4 \Rightarrow n=16$

پس جملهٔ شانزدهم دنباله برابر $\frac{5}{2}$ است.

۲۸

آ) شکل (۴) و دنباله تا جملهٔ هفتم به‌صورت مقابل می‌باشد: دنباله: ۱ , ۳ , ۶ , ۱۰ , ۱۵ , ۲۱ , ۲۸

ب) خیر، زیرا اختلاف هر دو جملهٔ متوالی عدد ثابت نیست.



شکل (۴)

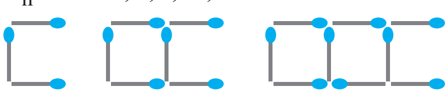
پ) در الگوی جدید، می‌توان دو شکل n اُم را طوری کنار هم قرار داد که شکل حاصل یک مستطیل با $(n+1)\times n$ مربع به‌دست آید.

بنابراین: $2a_n=n(n+1) \Rightarrow a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

ت) حاصل عبارت $1+2+\dots+n$ تعداد مربع‌های به‌کار رفته در شکل nاُم یا همان a_n است (در ردیف اول، n مربع، در ردیف دوم، $n-1$ مربع، ... و در ردیف nاُم،یک مربع قرار دارند.) پس: $1+2+\dots+n=a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

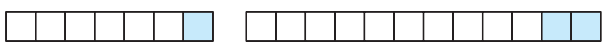
۲۹

آ) $a_n=3n: 3,6,9,12,\dots$



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

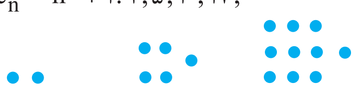
ب) $b_n=4n+2: 6,10,14,18,\dots$



شکل (۱) شکل (۲)

تعداد کل مربع‌ها، $5n+2$ و تعداد مربع‌های سفید شکل nاُم، برابر $b_n=4n+2$ می‌باشد.

پ) $c_n=n^2+1: 2,5,10,17,\dots$



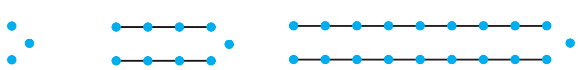
شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

ت) $d_n=n^2+2n: 3,8,15,24,\dots$

شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۳۰

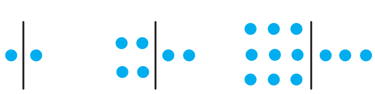
آ) تعداد نقطه‌ها در الگوی هندسی زیر، جملات دنبالهٔ $3,9,19,\dots$ می‌باشند.



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

جملهٔ عمومی دنباله، $a_n=2n^2+1$ است.

ب) تعداد نقطه‌ها در الگوی هندسی زیر، جملات دنبالهٔ $2,6,12,\dots$ می‌باشند:



جملهٔ عمومی دنباله، $a_n=n^2+n$ است.

۳۱

هر دنباله‌ای که اختلاف هر دو جملهٔ متوالی آن، مقدار ثابتی باشد، یک دنبالهٔ حسابی است.

آ) دنبالهٔ ۳، ۸، ۱۳، ... دنبالهٔ حسابی است، زیرا:

$$۸-۳=۱۳-۸=\cdots=۵=d$$

ب) دنبالهٔ ۲،۴،۷،۱۱،... دنبالهٔ حسابی نیست، زیرا:

$$۴-۲=۲\ ,\ ۷-۴=۳$$

پ) دنبالهٔ ۸،۴،۰،−۴،... دنبالهٔ حسابی است، زیرا:

$$۴-۸=۰-۴=-۴-۰=\cdots=-۴=d$$

ت) دنبالهٔ $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\cdots$ دنبالهٔ حسابی نیست، زیرا:

$$\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۶}\ ,\ \frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳}=-\frac{۱}{۱۲}$$

ث) دنبالهٔ $\frac{۱}{۷},\frac{۲}{۷},\frac{۳}{۷},\cdots$ دنبالهٔ حسابی است، زیرا:

$$\frac{۲}{۷}-\frac{۱}{۷}=\frac{۳}{۷}-\frac{۲}{۷}=\cdots=\frac{۱}{۷}=d$$

ج) دنبالهٔ ‎−۱، −۱، −۱، ...‎ دنبالهٔ حسابی است، زیرا:

$$-۱-(-۱)=-۱-(-۱)=\cdots=۰=d$$

چ) دنبالهٔ $\sqrt{۲},۲\sqrt{۲},۳\sqrt{۲},\cdots$ دنبالهٔ حسابی است، زیرا:

$$۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}=\cdots=\sqrt{۲}=d$$

۳۲

آ) با درنظر گرفتن $d=۴$ و $t_۳=۵$، دو جملهٔ قبل از آن را می‌نویسیم:

$$-۳ \xleftarrow{-۴} ۱ \xleftarrow{-۴} ۵\ ,\ \cdots$$

ب) با درنظر گرفتن $d=-۲$ و $t_۵=-۳$، چهار جملهٔ قبل از آن را می‌نویسیم:

$$۵ \xleftarrow{+۲} ۳ \xleftarrow{+۲} ۱ \xleftarrow{+۲} -۱ \xleftarrow{+۲} -۳$$

پ) $۷,۴,۱,-۲,\cdots$

ت) $-۱۱,-۸,-۵,-۲,۱,\cdots$

۳۳

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $t_n=t_۱+(n-۱)d$ است و داریم:

$$\begin{cases}t_۵=۲\\t_{۱۲}=۴۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_۱+۴d=۲\\t_۱+۱۱d=۴۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-t_۱-۴d=-۲\\t_۱+۱۱d=۴۴\end{cases}\Rightarrow ۷d=۴۲$$

$$\Rightarrow d=۶ \xrightarrow{t_۱+۴d=۲} t_۱+۲۴=۲\Rightarrow t_۱=-۲۲$$

$$t_{۳۱}=t_۱+۳۰d=-۲۲+۳۰\times ۶=۱۵۸$$

۳۴

هر دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول و قدرنسبت آن مشخص می‌شود. طبق فرض داریم:

$$t_{۱۱}-t_۷=-۱۲\Rightarrow (t_۱+۱۰d)-(t_۱+۶d)=۴d=-۱۲\Rightarrow d=-۳$$

$$t_۵=-۱۷\Rightarrow t_۱+۴d=-۱۷\Rightarrow t_۱-۱۲=-۱۷\Rightarrow t_۱=-۵$$

بنابراین دنباله به صورت مقابل است: $-۵,-۸,-۱۱,-۱۴,\cdots$

۳۵

جملهٔ عمومی دنباله $t_n=t_۱+(n-۱)d$ است و طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}t_۱+t_۲+t_۳+t_۴=۲۶\\t_۷=۲۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_۱+(t_۱+d)+(t_۱+۲d)+(t_۱+۳d)=۲۶\\t_۱+۶d=۲۹\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴t_۱+۶d=۲۶\\t_۱+۶d=۲۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴t_۱+۶d=۲۶\\-t_۱-۶d=-۲۹\end{cases}\Rightarrow ۳t_۱=-۳\Rightarrow t_۱=-۱$$

$$\xrightarrow{t_۱+۶d=۲۹} -۱+۶d=۲۹\Rightarrow ۶d=۳۰\Rightarrow d=۵$$

$$t_{۱۹}=t_۱+۱۸d=-۱+۱۸\times ۵=۸۹$$

۳۶

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}t_۱+t_۲+t_۳+t_۴=-۱۰\\t_۵+t_۶+t_۷+t_۸+t_۹=۵۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_۱+(t_۱+d)+(t_۱+۲d)+(t_۱+۳d)=-۱۰\\(t_۱+۴d)+(t_۱+۵d)+(t_۱+۶d)+(t_۱+۷d)+(t_۱+۸d)=۵۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴t_۱+۶d=-۱۰\\۵t_۱+۳۰d=۵۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲۰t_۱-۳۰d=۵۰\\۵t_۱+۳۰d=۵۵\end{cases}\Rightarrow -۱۵t_۱=۱۰۵\Rightarrow t_۱=\frac{۱۰۵}{-۱۵}=-۷$$

$$\xrightarrow{۴t_۱+۶d=-۱۰} ۴(-۷)+۶d=-۱۰\Rightarrow ۶d=۱۸\Rightarrow d=\frac{۱۸}{۶}=۳$$

۳۷

جملهٔ عمومی دنباله را می‌نویسیم: $t_۱=۲۰۱\ ,\ d=۱۹۸-۲۰۱=-۳$

$$\Rightarrow t_n=t_۱+(n-۱)d=۲۰۱-۳(n-۱)=-۳n+۲۰۴$$

آ) $t_{۱۷}=-۳\times ۱۷+۲۰۴=۲۰۴-۵۱=۱۵۳$

ب) با حل نامعادلهٔ $t_n>۰$، تعداد جملات مثبت دنباله به‌دست می‌آید:

$$t_n>۰\Rightarrow -۳n+۲۰۴>۰\Rightarrow ۳n<۲۰۴\Rightarrow n<\frac{۲۰۴}{۳}=۶۸\Rightarrow n\le ۶۷$$

بنابراین شصت و هفت جملهٔ دنباله مثبت است.

پ) با حل نامعادلهٔ $۱۰۰\le t_n<۱۰۰۰$ حدود n و درنتیجه تعداد جملات سه‌رقمی دنباله مشخص می‌شود:

$$۱۰۰\le -۳n+۲۰۴<۱۰۰۰ \xrightarrow{-۲۰۴} -۱۰۴\le -۳n<۷۹۶$$

$$\xrightarrow{\div(-۳)} \frac{۷۹۶}{-۳}<n\le\frac{۱۰۴}{۳} \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} ۱\le n\le ۳۴$$

بنابراین سی و چهار جملهٔ دنباله، سه رقمی‌اند.

۳۸

جملهٔ عمومی دنباله را با مشخص بودن جملهٔ اول و قدرنسبت به‌دست می‌آوریم:

$$t_۱=-۱۰۷\ ,\ d=-۱۰۰-(-۱۰۷)=۷$$

$$t_n=t_۱+(n-۱)d=-۱۰۷+۷(n-۱)=۷n-۱۱۴$$

آ) $t_{۳۱}=۷\times ۳۱-۱۱۴=۲۱۷-۱۱۴=۱۰۳$

ب) با حل معادلهٔ $t_n=۱۴۵$، مقدار n را به‌دست می‌آوریم:

$$t_n=۷n-۱۱۴=۱۴۵\Rightarrow ۷n=۱۴۵+۱۱۴=۲۵۹\Rightarrow n=\frac{۲۵۹}{۷}=۳۷$$

پس سی و هفتمین جملهٔ دنباله برابر ۱۴۵ است.

پ) با حل نامعادلهٔ $t_n<۰$، حدود n را به‌دست می‌آوریم:

$$t_n=۷n-۱۱۴<۰\Rightarrow ۷n<۱۱۴\Rightarrow n<\frac{۱۱۴}{۷}=۱۶/\cdots\Rightarrow n\le ۱۶$$

بنابراین شانزده جملهٔ اول دنباله منفی است.

۳۹

اگر بین دو عدد ۳- و ۳۳، پنج عدد قرار دهیم، آن‌گاه:

$d=\frac{۳۳-(-۳)}{۵+۱}=\frac{۳۶}{۶}=۶$ ؛ پنج واسطهٔ حسابی: $۳,۹,۱۵,۲۱,۲۷$

۴۰

اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه: $۲b=a+c$

$x+۳$، $۴x$ و -۱۰ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس:

$$۲(x+۳)=-۱۰+۴x\Rightarrow ۲x+۶=-۱۰+۴x\Rightarrow ۲x=۱۶\Rightarrow x=۸$$

دنباله: $۳۲,۱۱,-۱۰,\dots\Rightarrow t_۱=۳۲, d=۱۱-۳۲=-۲۱$

واسطهٔ حسابی دو جملهٔ بیست و پنجم و چهل و دوم برابر است با:

$$\frac{t_{۲۵}+t_{۴۲}}{۲}=\frac{(t_۱+۲۴d)+(t_۱+۴۱d)}{۲}$$
$$=\frac{۲t_۱+۶۵d}{۲}=\frac{۶۴-۱۳۶۵}{۲}=\frac{-۱۳۰۱}{۲}=-۶۵۰/۵$$

۴۱

فرض کنیم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی، $t_n=t_۱+(n-۱)d$ باشد. داریم:

$$\frac{-t_۷+۲t_۵-t_{۱۰}}{t_۶-t_{۱۱}}=\frac{-(t_۱+۶d)+۲(t_۱+۴d)-(t_۱+۹d)}{(t_۱+۵d)-(t_۱+۱۰d)}=\frac{-۷d}{-۵d}=\frac{۷}{۵}$$

۴۲

فرض کنیم کوچک‌ترین عدد $t_۱$ و قدرنسبت دنبالهٔ حسابی d باشد، در این صورت پنج عدد به‌صورت زیر می‌باشند:

$t_۱, t_۱+d, t_۱+۲d, t_۱+۳d, t_۱+۴d$

مجموع پنج عدد $=۸۰$

$$\Rightarrow t_۱+(t_۱+d)+(t_۱+۲d)+(t_۱+۳d)+(t_۱+۴d)=۸۰$$
$$\Rightarrow ۵t_۱+۱۰d=۸۰\xrightarrow{\div ۵}t_۱+۲d=۱۶\quad(۱)$$

از طرفی $t_۱+۴d$، دو برابر مجموع دو عدد $t_۱$ و $t_۱+d$ می‌باشد، پس داریم:

$$t_۱+۴d=۲(t_۱+(t_۱+d))\Rightarrow t_۱+۴d=۴t_۱+۲d\Rightarrow ۲d=۳t_۱\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\begin{cases}t_۱+۲d=۱۶\\ ۲d=۳t_۱\end{cases}\Rightarrow t_۱+۳t_۱=۱۶$$

$$\Rightarrow t_۱=۴\xrightarrow{(۱)}۴+۲d=۱۶\Rightarrow ۲d=۱۲\Rightarrow d=۶$$

بنابراین پنج عدد به‌صورت روبه‌رو می‌باشند: $۴,۱۰,۱۶,۲۲,۲۸$

۴۳

مجموع زوایای داخلی شش‌ضلعی محدب برابر $(n-۲)\times۱۸۰^\circ=(۶-۲)\times۱۸۰^\circ=۷۲۰^\circ$ است. فرض کنیم d قدرنسبت دنبالهٔ اندازهٔ زوایا باشد. در این‌صورت اندازهٔ زوایای شش‌ضلعی به‌صورت زیر است:

$۸۰^\circ, ۸۰^\circ+d, ۸۰^\circ+۲d, ۸۰^\circ+۳d, ۸۰^\circ+۴d, ۸۰^\circ+۵d$

مجموع $=۸۰^\circ+(۸۰^\circ+d)+\dots+(۸۰^\circ+۵d)=۷۲۰^\circ$

$$\Rightarrow ۴۸۰^\circ+۱۵d=۷۲۰^\circ\Rightarrow ۱۵d=۷۲۰^\circ-۴۸۰^\circ=۲۴۰^\circ\Rightarrow d=۱۶^\circ$$

بنابراین اندازهٔ زوایای شش‌ضلعی به‌صورت زیر است:

$۸۰^\circ, ۹۶^\circ, ۱۱۲^\circ, ۱۲۸^\circ, ۱۴۴^\circ, ۱۶۰^\circ$

۴۴

اگر حاصل تقسیم هر دو جملهٔ متوالی برابر مقدار ثابتی باشد $(\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{t_۳}{t_۲}=\dots=r)$، آن‌گاه دنباله، یک دنبالهٔ هندسی است.

آ) $\frac{-۶}{۲}=\frac{۱۸}{-۶}=\frac{-۵۴}{۱۸}=\dots=-۳=r\ ,\ t_۱=۲$

$$\Rightarrow t_n=t_۱\times r^{n-۱}=۲\times(-۳)^{n-۱}$$

ب) دنبالهٔ هندسی نیست، زیرا:

$$\frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۳\neq\frac{۵\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۳}$$

پ) $\frac{۴}{۴}=\frac{۴}{۴}=\dots=۱=r\ ,\ t_۱=۴\Rightarrow t_n=t_۱\times r^{n-۱}=۴\times ۱^{n-۱}=۴$

۴۵

با به‌دست آوردن r و $t_۱$، دنبالهٔ هندسی مشخص می‌شود.

فرض می‌کنیم جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $t_n=t_۱r^{n-۱}$ باشد. طبق فرض داریم:

$$t_۵=t_۱r^۴=\frac{۹}{۱۶}\quad,\quad t_۲=t_۱\times r=۳۶$$

$$\Rightarrow\frac{t_۵}{t_۲}=\frac{t_۱\times r^۴}{t_۱\times r}=r^۳=\frac{\frac{۹}{۱۶}}{\frac{۳۶}{۱}}=\frac{\cancel{۹}}{_۴\cancel{۳۶}\times۱۶}=\frac{۱}{۶۴}=(\frac{۱}{۴})^۳\Rightarrow r=\frac{۱}{۴}$$

$$t_۲=t_۱\times r=۳۶\Rightarrow\frac{۱}{۴}t_۱=۳۶\Rightarrow t_۱=۴\times۳۶=۱۴۴$$

۴۶

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $t_n=t_۱+(n-۱)d$ می‌باشد. جملهٔ هشتم دنبالهٔ حسابی $۵,۱۲,\dots$ را به‌دست می‌آوریم:

$$d=۱۲-۵=۷\ ,\ t_۱=۵\ ,\ t_۸=t_۱+۷d\Rightarrow t_۸=۵+۷\times۷=۵۴$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی به‌صورت $۱۲\ ,\ ۵۴\ ,\dots$ می‌باشد و داریم:

$$r=\frac{۵۴}{۱۲}=\frac{۹}{۲}\ ,\ t_۱=۱۲\Rightarrow t_n=t_۱\times r^{n-۱}=۱۲\times(\frac{۹}{۲})^{n-۱}$$

۴۷

در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $t_n=t_۱\times r^{n-۱}$، داریم:

$$t_۱+t_۲=۱۶\Rightarrow t_۱+t_۱\times r=۱۶\Rightarrow t_۱(۱+r)=۱۶\quad(۱)$$
$$t_۴-t_۲=۹۶\Rightarrow t_۱\times r^۳-t_۱\times r=۹۶\Rightarrow t_۱r(r^۲-۱)=۹۶\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{\cancel{t_۱}r(r^۲-۱)}{\cancel{t_۱}(۱+r)}=\frac{\overset{۶}{\cancel{۹۶}}}{\cancel{۱۶}}\Rightarrow\frac{r(r-۱)\cancel{(r+۱)}}{\cancel{r+۱}}=۶\Rightarrow r(r-۱)=۶$$

$$\Rightarrow r^۲-r-۶=۰\Rightarrow(r-۳)(r+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}r-۳=۰\Rightarrow r=۳\\ r+۲=۰\Rightarrow r=-۲\end{cases}$$

اگر $r=-۲$ باشد، آن‌گاه:

$$\xrightarrow{(۱)}t_۱(۱-۲)=۱۶\Rightarrow t_۱=-۱۶$$

جملات دنباله: $-۱۶,۳۲,-۶۴,\dots$

اگر $r=۳$ باشد، آن‌گاه:

$$\xrightarrow{(۱)}t_۱(۱+۳)=۱۶\Rightarrow t_۱=۴$$

جملات دنباله: $۴,۱۲,۳۶,\dots$

۴۸

در دنبالهٔ t_n، حاصل تقسیم هر دو جملهٔ متوالی $(\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{1}{3})$، مقدار ثابت $r=\frac{1}{3}$ است. پس این دنباله، یک دنبالهٔ هندسی است و داریم:

$$t_2=t_1\times r=9\Rightarrow t_1\times\frac{1}{3}=9\Rightarrow t_1=27$$

$$\Rightarrow t_7=t_1\times r^6=27\times(\frac{1}{3})^6=3^3\times\frac{1}{3^6}=3^{3-6}=3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$$

۴۹

عددهای $\pm\sqrt{ac}$ را واسطهٔ هندسی دو عدد a و c می‌گوییم. بنابراین عددهای $\pm\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\sqrt{9-5}=\pm 2$ واسطهٔ هندسی دو عدد $3-\sqrt{5}$ و $3+\sqrt{5}$ می‌باشند.

۵۰

اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن گاه $b^2=ac$. $x-3$، $-x$ و $x+6$ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند، پس:

$$x^2=(x+6)(x-3)\Rightarrow \cancel{x^2}=\cancel{x^2}+3x-18\Rightarrow 3x=18\Rightarrow x=6$$

پس دنباله به‌صورت زیر است:

$$3,-6,12,\dots\Rightarrow r=\frac{-6}{3}=-2\Rightarrow\frac{t_{15}}{t_7}=\frac{t_1\times r^{14}}{t_1\times r^6}=r^8=(-2)^8=256$$

۵۱

۱، x و $2x+3$ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی با جملات مثبت‌اند، پس:

$$x^2=1\times(2x+3)\Rightarrow x^2-2x-3=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x-3=0\Rightarrow x=3\\ x+1=0\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

$x=-1$ غیرقابل قبول است، زیرا در این‌صورت جملهٔ دوم دنباله منفی خواهد شد و در نتیجه $x=3$ است و داریم:

دنباله: $1,3,9,y^2+2,81,\dots\Rightarrow t_4=y^2+2=t_1\times r^3=1\times 27$

$$\Rightarrow y^2=25\Rightarrow y=\pm 5$$

۵۲

جملات چهارم، دهم و هجدهم یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت d به ترتیب برابر t_1+3d، t_1+9d و t_1+17d می‌باشند. این سه عدد جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، بنابراین مربع جملهٔ وسط با حاصل‌ضرب دو جملهٔ کناری برابر است. پس داریم: $(t_1+9d)^2=(t_1+3d)(t_1+17d)$

$$\Rightarrow \cancel{t_1^2}+18t_1d+81d^2=\cancel{t_1^2}+17t_1d+3t_1d+51d^2$$

$$\Rightarrow 30d^2=2t_1d\Rightarrow t_1=15d$$

برای یافتن قدرنسبت دنبالهٔ هندسی، کافی است جملهٔ دوم آن را بر جملهٔ اول آن تقسیم کنیم:

$$t_1+3d=18d\ ,\ t_1+9d=24d,\dots\Rightarrow r=\frac{24d}{18d}=\frac{4}{3}$$

۵۳

جملات دنبالهٔ هندسی: $t_1\ ,\ t_1+d\ ,\ t_1+5d,\dots$

$$\xrightarrow[\text{دنبالهٔ هندسی‌اند.}]{\text{سه جملهٔ متوالی}}(t_1+d)^2=t_1(t_1+5d)$$

$$\Rightarrow \cancel{t_1^2}+2t_1d+d^2=\cancel{t_1^2}+5t_1d\Rightarrow d^2=3t_1d\Rightarrow d=3t_1$$

بنابراین جملات دنبالهٔ هندسی و قدرنسبت آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$t_1,4t_1,16t_1,\dots\Rightarrow r=\frac{4t_1}{t_1}=4$$

۵۴

جملات دنبالهٔ هندسی: $t_1,t_1r,t_1r^2,t_1r^3,\dots$

$$t_1\times(t_1r)\times(t_1r^2)=8\Rightarrow t_1^3r^3=8\Rightarrow(t_1r)^3=2^3\Rightarrow t_1r=2\ \ (*)$$

$$t_1r^3=32\Rightarrow t_1r\times r^2=32\xrightarrow{(*)}2\times r^2=32\Rightarrow r^2=16\Rightarrow r=\pm 4$$

$$r=4\xrightarrow{(*)}4t_1=2\Rightarrow t_1=\frac{1}{2}\xrightarrow[\text{دنباله}]{\text{جملات}}\frac{1}{2},2,8,\dots$$

$$r=-4\xrightarrow{(*)}-4t_1=2\Rightarrow t_1=-\frac{1}{2}\xrightarrow[\text{دنباله}]{\text{جملات}}-\frac{1}{2},2,-8,32,\dots$$

۵۵

طبق فرض جملهٔ اول $\frac{1}{6}$ و جملهٔ پنجم دنبالهٔ هندسی ۲۱۶ می‌باشد. پس:

$$t_1=\frac{1}{6}\ ,\ t_5=t_1r^4=216=6^3\Rightarrow\frac{1}{6}\times r^4=6^3\Rightarrow r^4=6^4\Rightarrow r=\pm 6$$

$t_1=\frac{1}{6}\ ,\ r=6\Rightarrow$ جملات دنباله: $\frac{1}{6},1,6,36,216$

$t_1=\frac{1}{6}\ ,\ r=-6\Rightarrow$ جملات دنباله: $\frac{1}{6},-1,6,-36,216$

۵۶

آ) فرض کنیم t_n سرمایهٔ شخص بعد از n سال باشد، داریم: $(10000000=10^7)$

$t_1=$ مقدار پول اولیه + ۰/۲ (مقدار پول اولیه)

$$=10^7+0/2\times 10^7=1/2\times 10^7=12\times 10^6=12000000$$

$$t_2=t_1+0/2t_1=1/2t_1=1/2\times(1/2\times 10^7)$$

$$=(1/2)^2\times 10^7=1/44\times 10^7=14400000$$

$$t_3=t_2+0/2t_2=1/2t_2=1/2\times(1/2)^2\times 10^7$$

$$=(1/2)^3\times 10^7=1/728\times 10^7=17280000$$

$$t_4=t_3+0/2t_3=1/2t_3=1/2\times(1/2)^3\times 10^7=(1/2)^4\times 10^7=20736000$$

$$t_5=t_4+0/2t_4=1/2t_4=1/2\times(1/2)^4\times 10^7=(1/2)^5\times 10^7=24883200$$

ب) با توجه به حل قسمت (آ)، الگوی دنباله به‌صورت $t_n=(1/2)^n\times 10^7$ می باشد.

۵۷

فرض کنیم جمعیت اولیه $t_0=10^6$ باشد، اگر جمعیت بعد از n سال، t_n باشد، در این‌صورت:

$$t_1=t_0+0/04t_0=1/04t_0$$

$$\Rightarrow t_2=t_1+0/04t_1=1/04t_1=1/04\times 1/04t_0=(1/04)^2t_0$$

$$\Rightarrow\dots\Rightarrow t_n=(1/04)^nt_0=(1/04)^n\times 10^6$$

۵۸

بله. فرض کنیم $a_1,a_2,\dots$ یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{a_n}{a_{n-1}}=r$ و $b_1,b_2,\dots$ یک دنبالهٔ هندسی دیگر با قدرنسبت $\frac{b_n}{b_{n-1}}=r'$ باشد.

دنبالهٔ جدید: $a_1b_1,a_2b_2,\dots$

$$\Rightarrow\frac{a_2b_2}{a_1b_1}=\dots=\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}=\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)=rr'$$

پس دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت حاصل‌ضرب آن‌ها می‌باشد.

Mathematics Test

فصل ۱
[مجموعه، الگو و دنباله]

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها

۱. مجموعهٔ $\{a,b,\{a,b\},\{b,a\},\varnothing,\{\}\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲. اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$ باشد، کدام نادرست است؟

۱) $\{۱\}\in A$ ۲) $\varnothing\subseteq A$ ۳) $\{۱,۲\}\in A$ ۴) $\{۱,۲\}\subseteq A$

۳. اگر $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\varnothing\subseteq A$ ۲) $\{\varnothing\}\in A$ ۳) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq A$ ۴) $n(A)=۲$

۴. اگر مجموعهٔ C به صورت $\{x+۲\mid x\in P\ ,\ ۴\le x-۱<۳۰\}$ تعریف شده باشد که در آن منظور از P مجموعهٔ اعداد اول می‌باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $۳۱\in C$ ۲) $۵\in C$ ۳) $۱۳\notin C$ ۴) $۲۹\in C$

۵. اگر $A=\{۴,۲x-y,۳\}$ و $B=\{۳,۲^{۲x+۳y},-۱۴\}$ دو مجموعه باشند و $A=B$، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۶

۶. کدام‌یک از اعداد زیر به مجموعهٔ $A=\{۲^x\times ۳^y\mid x,y\in\mathbb{N},x+y=۵\}$ متعلق است؟

۱) ۸۱ ۲) ۴۸ ۳) ۱۶۴ ۴) ۱۴۴

۷. کدام‌یک از اعداد زیر به مجموعهٔ $A=\{۵,-۱,-۷,\dots,-۴۳\}$ متعلق نیست؟

۱) -۲۵ ۲) -۱۳ ۳) -۳۷ ۴) -۲۱

۸. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲-x-۲=۰\}$، $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۳-۲x=۰\}$ و $C=\{x\in\mathbb{Z}\mid -۱\le x\le ۲\}$ باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A\subseteq C$ ۲) $B\not\subseteq C$ ۳) $A\not\subseteq B$ ۴) $B\notin C$

۹. اگر $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{\{۱,۲,\{۱,۲\}\},۱\}$ باشند. کدام بیان در مورد این مجموعه‌ها نادرست است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

۱) $B\subseteq C$ ۲) $A\in B$ ۳) $A\subseteq B$ ۴) $B\in C$

۱۰. مجموعه‌های $A=\{۲\}$، $B=\{۳,۵,\{۲\}\}$ و $C=\{\{\{۲\},۳,۵\},۲\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $A\in B$ ۲) $A\in C$ ۳) $B\in C$ ۴) $A\subset C$

۱۱. اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$، $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{۱,۲,۳\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $A-B=C$ ۲) $B-C=\varnothing$ ۳) $B-C=\{۱,۲\}$ ۴) $A-B=\{C\}$

۱۲. هرگاه $\{۱,۲,۳,۴,۵\}\cup X=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، برای مجموعهٔ X چند جواب وجود دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۱۳. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۵\}$ باشد، به جای X در رابطهٔ $A\cap B\subseteq X\subseteq A\cup B$ چند مجموعهٔ متفاوت می‌توان قرار داد؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

بازه‌ها

۱۴. کدام گزینه درست است؟

۱) $-۲\in\{-۳,۲\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{Q}\mid ۰<x<۱\}=(۰,۱)$ ۳) $\sqrt{۲}\in(۱,۳)\cap[۲,+\infty)$ ۴) $\{-۱,\pi\}\subseteq[-۱,۴)$

۱۵. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $[\frac{۱}{n},\frac{n}{n+۱}]\subseteq(۰,۱)\ ,\ (n\in\mathbb{N},n\ge ۲)$

۲) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le -۱$ یا $x\ge ۳\}=\mathbb{R}-(-۱,۳)$

۳) $(-۳,۰)\cup(-۲,۵]=(-۳,۵]$

۴) $[۲,۴)-(۳,+\infty)=[۴,+\infty)$

۱۶. حاصل عبارت $(-۲,۱] \cap [-۱,۲)$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,۲)$ ۳) $[-۲,-۱]$ ۴) $[-۲,۲)$

۱۷. حاصل عبارت $[-۲,۳)-(۰,۲]$ کدام است؟

۱) $[-۲,-۱]\cup[۲,۳)$ ۲) $[-۲,۰)\cup(۲,۳)$ ۳) $[-۲,۰)\cup[۲,۳]$ ۴) $[-۲,۰]\cup(۲,۳)$

۱۸. اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid ۱\le ۲x-۱<۷\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid ۳x+۲<۸\}$ باشد،حاصل $A-B$ کدام است؟

۱) $(۲,۴)$ ۲) $[۲,۴)$ ۳) $(-\infty,۱)$ ۴) $(-\infty,۱]$

۱۹. اگر $A=(-۲,۵]$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -x\in A\}$ ، در این صورت مجموعهٔ $A-B$ برابر کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(۲,۵]$ ۴) $[۲,۵]$

۲۰. اگر $A=(-\infty,۲]$ ، $B=[-۳,۱)$ و $C=(-۱,+\infty)$ باشد، حاصل $B\cup(A\cap C)$ کدام است؟

۱) $[-۳,۲]$ ۲) $(-۳,۲)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $[-۳,۱)$

۲۱. اگر $۲m+۱\in[-۱,۵]$ ، حدود m کدام است؟

۱) $۰\le m\le ۳$ ۲) $-۱\le m\le ۲$ ۳) $-۳\le m\le ۰$ ۴) $۱\le m\le ۴$

۲۲. اگر عدد ۱ به بازهٔ $(۲m-۱,۳m+۴]$ تعلق داشته باشد، آن‌گاه:

۱) $m\in[-۲,۴)$ ۲) $m\in[-۱,۱)$ ۳) $m\in(۰,۴]$ ۴) $m\in(-۲,۰]$

۲۳. بازهٔ $[۵,b)$ شامل فقط سه عدد مربع کامل است. حداکثر مقدار طبیعی b کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۳۶ ۴) ۳۷

۲۴. اگر بازهٔ $(-۱,۲a-۱)$ شامل پنج عدد صحیح باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $۲/۵\le a\le ۳$ ۲) $۲/۵<a<۳$ ۳) $۲/۵<a\le ۳$ ۴) $۲/۵\le a<۳$

۲۵. اگر $[۱,a]\cup[b,۵)=[-۱,۷]$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۶. اگر $A_n=(n-۲,n+۳), n\in\mathbb{N}$ باشد، $A_۱-(A_۲\cap A_۳)$ کدام است؟

۱) $(۴,۵)$ ۲) $(۴,۵]$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(-۱,۱]$

۲۷. اگر $A_n=(-\frac{۲}{n},\frac{n-۲}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعهٔ $(A_۳\cup A_۶)-A_۳$ برابر کدام بازه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۶)

۱) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۲) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۳) $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۴) $[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

۲۸. اگر $i\in\{۱,۲,۳,\cdots,۹\}$ ، $A_i=\left[-i,\frac{۹-i}{۲}\right]$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_۲\cap A_۵)-(A_۱\cap A_۷)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۹۲)

۱) $[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$ ۲) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\varnothing$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲۹. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

۱) مجموعهٔ سلول‌های عصبی مغز یک انسان
۲) مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون
۳) مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت ۱
۴) مجموعهٔ مقسوم علیه‌های یک عدد طبیعی

۳۰. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر بی‌پایان است؟

۱) مجموعهٔ تمام افراد روی کرهٔ زمین
۲) مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های موجود در جهان
۳) مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۵
۴) مجموعهٔ تمام اعداد اول زوج

۳۱. اگر $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ به‌ترتیب مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح باشند، کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ ۲) $\mathbb{W}\cap\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{W}$ ۴) $\mathbb{W}-\mathbb{N}$

۳۲. اگر A مجموعهٔ متناهی و B مجموعهٔ نامتناهی باشد، مجموعهٔ $A-B$ چگونه است؟

۱) باپایان ۲) بی‌پایان ۳) تهی ۴) غیرقابل تعریف

۳۳. کدام مجموعه متناهی (باپایان) است؟

۱) $\{x\mid x\in\mathbb{N}\,;\,x^۲>۱۶\}$ ۲) $\{x\mid x\in\mathbb{N}\,;\,x\le ۲^{۱۲}\}$ ۳) $\{x\mid x\in\mathbb{Z}\,;\,x>۱۰۰۰\}$ ۴) $\{x\mid x\in\mathbb{Z}\,;\,x<۱۰۰۰\}$

۳۴. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A=\left\{\frac{۱}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$
۲) مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ $(۱,۲)$
۳) $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۲<۱۰۰۰\}$
۴) مجموعهٔ اعداد اول فرد

۳۵. کدام گزینه نادرست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۵}$، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

۲) اگر مجموعهٔ A یک زیرمجموعهٔ نامتناهی داشته باشد، آن‌گاه A نیز نامتناهی است.

۳) اگر هر زیرمجموعهٔ A متناهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A متناهی است.

۴) اگر مجموعه‌ای نامتناهی را به‌صورت اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم بنویسیم که یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، آن‌گاه دیگری حتماً متناهی است.

قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و ...

مجموعه‌های مرجع و متمم

۳۶. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع، E مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و O مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد باشد،کدام رابطه نادرست است؟

۱) $E \cap O = O$ ۲) $E \cup O = \mathbb{N}$ ۳) $(E \cup O)' = \varnothing$ ۴) $E' \cap O = O$

۳۷. اگر مجموعه‌های A و B هردو زیرمجموعهٔ اعداد صحیح باشند به‌طوری‌که A مجموعه‌ای نامتناهی، B مجموعه‌ای متناهی و $C \subseteq A$ باشد، در این صورت کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

۱) $A \cap B'$ ۲) $B - A$ ۳) $B \cup C$ ۴) $A \cap C'$

۳۸. اگر A مجموعهٔ متناهی و B مجموعهٔ نامتناهی باشد،آن‌گاه کدام مجموعه لزوماً متناهی است؟

۱) $A \cup B$ ۲) $A' \cup B$ ۳) $A \cap B'$ ۴) $A' \cap B$

۳۹. اگر A بازهٔ متناظر با مجموعه جواب نامعادلهٔ $x < ۲x + ۳ \le ۶ - x$ و $B = (-\infty, -۲) \cup [۴, +\infty)$ و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، حاصل $A \cap B'$ کدام است؟

۱) $(-۳, ۴)$ ۲) $(-۳, -۲)$ ۳) $[-۲, ۱]$ ۴) $(-۲, ۱]$

۴۰. اگر مجموعهٔ اعداد حسابی $(\mathbb{W})$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{۲x \mid x \in \mathbb{W}\}$، آن‌گاه A' برابر کدام است؟

۱) $\{۲x \mid x \in \mathbb{W}'\}$ ۲) $\{۲x - ۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$ ۳) $\{۲x + ۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$ ۴) $\{x - ۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$

۴۱. اگر $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < ۴۰\}$ و $A = \{x \in U \mid ۷ \le x \le ۲۵\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A' \cup U$ چند عضو دارد؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۹ ۳) ۲۳ ۴) ۱۹

۴۲. اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع، $A' = \{x \mid x \ge ۲\}$ و $B' = \{x \mid x \ge ۵\}$ باشد، مجموعهٔ $A \cup B$ کدام است؟

۱) $\{۱, ۲\}$ ۲) $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ ۳) $\{۲, ۳, ۴, ۵\}$ ۴) $\varnothing$

۴۳. اگر $A' = \{۱, ۲, ۴\}$ ، $B' = \{۲, ۳\}$ و مجموعهٔ مرجع اعداد طبیعی فرض شود، آن‌گاه $(A \cap B)'$ کدام است؟

۱) $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ ۲) $\{۱, ۴, ۳\}$ ۳) $\{۱, ۴\}$ ۴) $\{۲\}$

۴۴. اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{x \mid x \ge ۴\}$ و $B = \{x \mid x < ۲\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A \cup B)'$ برابر کدام است؟

۱) $\{۱, ۲\}$ ۲) $\{۳\}$ ۳) $\{۲, ۳\}$ ۴) $\{۱, ۲, ۳\}$

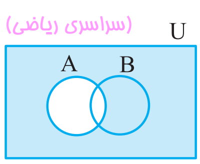
۴۵. اگر $U = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۹\}$ ، $A \cap B = \{۲, ۳\}$ ، $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۹\}$ ، $\{۱, ۴\} \subseteq A$ و $\{۵, ۷, ۹\} \subseteq B$ باشند، مجموعهٔ A' کدام است؟

۱) $\{۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ ۲) $\{۱, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ ۳) $\{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ ۴) $\{۵, ۷, ۸, ۹\}$

۴۶. اگر $U = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰\}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{۳k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ، B مجموعهٔ اعداد فرد و C مجموعهٔ اعداد مربع کامل باشند، مجموعهٔ $(C \cup A') - (C' - B)$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۷. با توجه به نمودار وِن مقابل، مجموعهٔ رنگی کدام است؟ (سراسری ریاضی)



۱) A' ۲) $B - A$ ۳) $B' - A$ ۴) $A' \cup B$

جبر مجموعه‌ها

۴۸. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، حاصل $(A \cap B') - A$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) B ۴) $\varnothing$

۴۹. حاصل $[A \cup (A' \cap U)] \cup B$ در کدام گزینه آمده است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) A ۲) U ۳) B ۴) $\varnothing$

۵۰. اگر U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از آن باشد، سادهٔ شدهٔ مجموعهٔ $((A\cap U)'\cup A)-(A'-U')'$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) U ۴) $\varnothing$

۵۱. اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و $B-A=B$ باشد، حاصل $(A\cap B)'\cup(A-B)$ کدام است؟

۱) B ۲) U ۳) $\varnothing$ ۴) A

۵۲. متمم مجموعهٔ $[(A\cap B')\cup(A'\cup B)]$ کدام است؟

۱) $A-B$ ۲) U ۳) $B-A$ ۴) $\varnothing$

۵۳. متمم مجموعهٔ $(B-A)'-A$، نسبت به مجموعهٔ مرجع کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) A ۴) B

۵۴. اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه کدام گزاره نادرست است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $B'\subseteq A'$ ۲) $A'\cup B=U$ ۳) $A\cap B'=\varnothing$ ۴) $A'\cap B=\varnothing$

۵۵. اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $(A\cap B')-(B-A)$ برابر کدام مجموعه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$

شمارش اعضای مجموعه‌ها

۵۶. اگر $n(U)=۳۰$، $n(A)=۱۲$، $n(B)=۲۰$ و $n(A\cap B)=۷$ باشد، حاصل $n(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۳

۵۷. اگر $n(A)+n(B)=۳n(A\cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

۵۸. اگر $n(A-B)=۲n(A\cap B)$ و $n(B)=۲n(A\cap B)$ باشند، حاصل $\frac{n(A\cup B)}{n(B-A)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۴

۵۹. اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ ۲۰ عضوی U باشند به طوری‌که $n(A-B)=۶$، $n(B\cap A')=۴$ و $n(A'\cap B')=۷$ باشد، مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۶۰. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۴ نفر به فوتبال و ۱۸ نفر به والیبال علاقمندند و ۴ نفر نیز به هیچ‌یک از دو بازی علاقه‌ای ندارند. در این کلاس چند نفر فقط به والیبال علاقمند هستند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۶ ۴) ۲

۶۱. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۲. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (سراسری ریاضی- ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۶۳. در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۶۴. از یک کلاس ۲۳ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۳ نفر عضو تیم والیبال می‌باشند. با فرض آن‌که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو باشد، چند نفر دقیقاً عضو یکی از این دو تیم هستند؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۶۵. در یک مجموعه با ۴۱ نفر، اگر یک نفر از افرادی که ورزش می‌کنند ولی فعالیت هنری ندارند، کم کنیم و $\frac{۳}{۵}$ آن‌ها را در نظر بگیریم، حاصل برابر تعداد افرادی است که فعالیت هنری دارند ولی ورزش نمی‌کنند. اگر ۳ نفر در هیچ‌یک از این دو رشته فعالیت نکنند و ۵ نفر در هر دو رشته فعالیت کنند، چند نفر در رشتهٔ ورزشی فعالیت می‌کنند؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۶ ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۶۶. مجموعه‌های $A\cup B$، $A\cap B$ و $A-B$ به‌ترتیب ۵، ۲ و ۲ عضو دارند. مجموعهٔ $B-A$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۱

۶۷. اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، تعداد اعضای $A\cup B$ سه برابر تعداد اعضای B، تعداد اعضای A، $\frac{5}{2}$ برابر تعداد اعضای B و تعداد اعضایی که به هر دو مجموعهٔ A و B تعلق دارند برابر ۳ باشد، آن‌گاه تعداد اعضایی که حداقل به یکی از دو مجموعهٔ A یا B تعلق دارد کدام است؟

۱) ۶ ‏ ۲) ۱۲ ‏ ۳) ۱۸ ‏ ۴) ۲۴

۶۸. اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعهٔ اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ جدید کدام است؟

۱) ۲۲ ‏ ۲) ۲۳ ‏ ۳) ۲۴ ‏ ۴) ۲۶

۶۹. اجتماع دو مجموعهٔ A و B، ۲۵ عضو دارد. به مجموعهٔ A، ۱۰ عضو جدید اضافه کرده‌ایم، به اشتراک آن‌ها ۹ عضو اضافه شده است. اجتماع مجموعهٔ B و مجموعهٔ جدید حاصل از A چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۲۵ ‏ ۲) ۲۶ ‏ ۳) ۳۴ ‏ ۴) ۳۵

۷۰. مجموعهٔ A دارای ۳۶ عضو و مجموعهٔ B دارای ۲۸ عضو است.اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعهٔ A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعهٔ جدید با مجموعهٔ B کدام است؟

۱) ۴۰ ‏ ۲) ۴۱ ‏ ۳) ۴۲ ‏ ۴) ۴۵

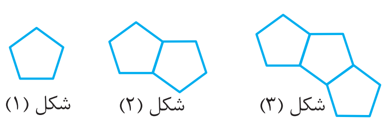
۷۱. اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ باشد، چند عدد وجود دارد که نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیر است؟

۱) ۴۵ ‏ ۲) ۴۷ ‏ ۳) ۵۰ ‏ ۴) ۵۳

قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی

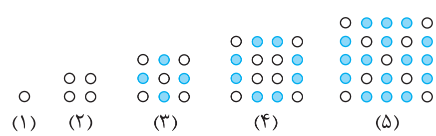
الگویابی

۷۲. با توجه به الگوی مقابل، در شکل چندم این الگو، ۴۹ پاره‌خط وجود دارد؟



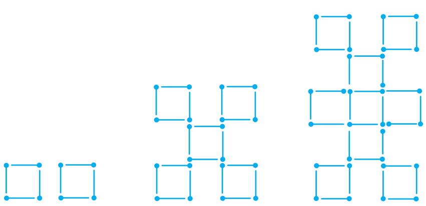
۱) ۱۰ ‏ ۲) ۱۱ ‏ ۳) ۱۲ ‏ ۴) ۱۳

۷۳. با توجه به الگوی مقابل، تعداد دایره‌های توخالی در مرحلهٔ دهم کدام است؟



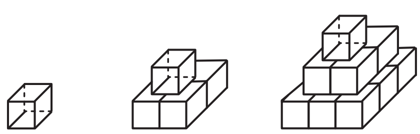
۱) ۲۰ ‏ ۲) ۱۹ ‏ ۳) ۱۸ ‏ ۴) ۱۷

۷۴. طبق الگوی مقابل، تعداد چوب کبریت‌های مرحلهٔ دوازدهم کدام است؟



۱) ۹۷
۲) ۱۰۳
۳) ۱۴۰
۴) ۱۲۸

۷۵. با توجه به الگوی مقابل، در شکل ششم چند مکعب وجود دارد؟

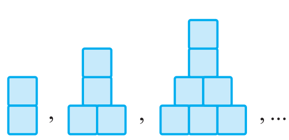


۱) ۹۶ ‏ ۲) ۹۱ ‏ ۳) ۱۳۹ ‏ ۴) ۱۳۶

۷۶. با توجه به الگوی مقابل، در شکل پانزدهم چند ستاره وجود دارد؟

۱) ۲۰۱ ‏ ۲) ۲۱۹ ‏ ۳) ۲۲۹ ‏ ۴) ۲۴۹

۷۷. در الگوی مقابل، جملهٔ بیستم از چند مربع تشکیل‌یافته است؟



۱) ۲۰۰ ‏ ۲) ۲۰۱ ‏ ۳) ۲۱۰ ‏ ۴) ۲۱۱

Answers

پاسخ فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

۱ — ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص و دوبه‌دو متمایز از مجموعه استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نام دارد و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان داده می‌شود.

در مجموعه‌ها، تکرار عضو بی‌تأثیر است و با توجه به این‌که دو عضو $\{b,a\}$ و $\{a,b\}$ یکسان و همچنین $\varnothing$ و $\{\}$ یکی می‌باشند، بنابراین مجموعه به‌صورت $\{a,b,\{a,b\},\varnothing\}$ درمی‌آید که یک مجموعهٔ ۴ عضوی می‌باشد.

۲ — **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر هر عضو مجموعهٔ A، عضوی از مجموعهٔ B باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ B است و می‌نویسیم: $A\subseteq B$

مجموعهٔ A دارای ۳ عضو $(۱,۲,\{۱,۲\})$ می‌باشد که $\{۱\}$ عضو مجموعهٔ A نیست، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۳ — ۱ ۲ ۳ **۴**

مجموعهٔ A دارای سه عضو $\varnothing$، $\{\varnothing\}$ و $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ می‌باشد. یعنی تعداد اعضای A برابر ۳ است پس $n(A)=۳$. می‌دانیم مجموعهٔ $\varnothing$(تهی) زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است، پس گزینهٔ (۱) درست است و چون $\{\varnothing\}$ عضوی از مجموعهٔ A است، پس گزینهٔ (۲) نیز درست است و چون اعضای $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ به A تعلق دارند، پس $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq A$

۴ — ۱ **۲** ۳ ۴

مجموعهٔ C را می‌توان به صورت $C=\{x+۲\,|\,x\in P\ ,\ ۵\le x<۳۱\}$ نوشت. برای نوشتن اعضای مجموعهٔ C ابتدا تمام اعداد اول که در رابطهٔ $۵\le x<۳۱$ صدق می کنند را می‌نویسیم و سپس به هر یک از آن‌ها ۲ واحد اضافه می کنیم. اما اعداد اولی که در رابطهٔ $۵\le x<۳۱$ صدق می‌کنند عبارتند از: $۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹$

در نتیجه مجموعهٔ C عبارت است از: $C=\{۷,۹,۱۳,۱۵,۱۹,۲۱,۲۵,۳۱\}$

در نتیجه با توجه به گزینه‌ها رابطهٔ $۳۱\in C$ درست است و بقیهٔ گزینه‌ها نادرست هستند.

۵ — ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: دو مجموعهٔ A و B برابرند، هرگاه هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A=B$

برای مساوی بودن دو مجموعهٔ A و B باید $۲x-y$ برابر -۱۴ و $۲^{۲x+۳y}$ با عدد ۴ برابر باشد، پس داریم:

$$۲x-y=-۱۴\ ,\ ۲^{۲x+۳y}=۴=۲^{۲}\Rightarrow ۲x+۳y=۲$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases}۲x-y=-۱۴\\ ۲x+۳y=۲\end{cases}$، مقادیر x و y را به‌دست می‌آوریم:

$$۳\times\begin{cases}۲x-y=-۱۴\\ ۲x+۳y=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۶x-\cancel{۳y}=-۴۲\\ ۲x+\cancel{۳y}=۲\end{cases}\Rightarrow ۸x=-۴۰\Rightarrow x=-۵$$

$$\xrightarrow{۲x-y=-۱۴}۲(-۵)-y=-۱۴\Rightarrow y=۴\Rightarrow x+y=-۱$$

۶ — ۱ **۲** ۳ ۴

تمام اعداد طبیعی که مجموع آن‌ها برابر ۵ باشد، عبارتند از:

$$\begin{cases}x=۱\\ y=۴\end{cases}\ \text{و}\ \begin{cases}x=۲\\ y=۳\end{cases}\ \text{و}\ \begin{cases}x=۳\\ y=۲\end{cases}\ \text{و}\ \begin{cases}x=۴\\ y=۱\end{cases}$$

در نتیجه مجموعهٔ A عبارت است از:

$$A=\{۲^{۱}\times۳^{۴}\ ,\ ۲^{۲}\times۳^{۳}\ ,\ ۲^{۳}\times۳^{۲}\ ,\ ۲^{۴}\times۳^{۱}\}=\{۱۶۲,۱۰۸,۷۲,۴۸\}$$

با توجه به گزینه‌ها، عدد ۴۸ در مجموعهٔ A قرار دارد.

۷ — ۱ ۲ ۳ **۴**

مجموعهٔ A شامل مضارب ۶ منهای یک، از ۵ تا ۴۳- می‌باشد. لذا مجموعهٔ A عبارت است از:

$$A=\{۵,-۱,-۷,-۱۳,-۱۹,-۲۵,-۳۱,-۳۷,-۴۳\}$$

بنابراین عدد ۲۱- متعلق به مجموعهٔ A نیست.

۸ — ۱ **۲** ۳ ۴

هر یک از مجموعه‌های A، B و C را با اعضا می‌نویسیم:

$$x^{۲}-x-۲=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=-۱,۲\Rightarrow A=\{-۱,۲\}$$

$$x^{۳}-۲x=۰\Rightarrow x(x^{۲}-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^{۲}-۲=۰\Rightarrow x^{۲}=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}B=\{۰\}$$

همچنین $C=\{-۱,۰,۱,۲\}$ می‌باشد. با توجه به مجموعه‌های A، B و C داریم: $A\subseteq C\ ,\ B\subseteq C$

۹ — **۱** ۲ ۳ ۴

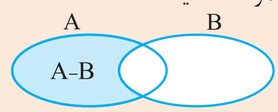
مجموعهٔ B دارای سه عضو ۱، ۲ و $A=\{۱,۲\}$ و مجموعهٔ C دارای دو عضو $B=\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$ و ۱ است، بنابراین دو عضو ۲ و A از مجموعهٔ B در مجموعهٔ C قرار ندارند، پس B زیرمجموعهٔ C نمی‌باشد.

۱۰ — ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به مجموعهٔ A، مجموعهٔ B به‌صورت $B=\{۳,۵,A\}$ است. بنابراین A عضوی از مجموعهٔ B است و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است. با توجه به مجموعهٔ B، مجموعهٔ C به‌صورت $C=\{B,۲\}$ است. بنابراین A عضوی از مجموعهٔ C نمی‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۲) نادرست است. توجه کنید که B عضوی از C است و مجموعهٔ تک‌عضوی $\{۲\}$ که همان مجموعهٔ A است، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ C است.

۱۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نکته: مجموعهٔ $A-B$، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند ولی عضو مجموعهٔ B نیستند.



$A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}$

هر یک از مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:

$A-B=\{\{۱,۲,۳\}\}\neq C$, $B-C=\{\{۱,۲\}\}\neq\varnothing,\{۱,۲\}$

$A-B=\{\{۱,۲,۳\}\}=\{C\}$

۱۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

مجموعهٔ X باید عضو ۶ را داشته باشد و اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را نیز می‌تواند اختیار کند یا نه، لذا برای هر یک از اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دو حالت وجود دارد که به X تعلق داشته باشند یا خیر. لذا تعداد مجموعه‌های X که در معادلهٔ داده شده صدق کنند برابر تعداد زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، یعنی $۳۲=۲^۵$ می‌باشد.

۱۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

مجموعهٔ X باید اعضای مجموعهٔ $A\cap B$ یعنی ۳ را شامل باشد. همچنین هریک از اعضای $A\cup B$، یعنی ۱، ۲، ۴،۳ و۵ به جز ۳ می‌توانند در X باشند، لذا تعداد مجموعه‌هایی مانند X که در رابطهٔ مذکور صدق می‌کنند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۴,۵\}$ می‌باشد که برابر $۱۶=۲^۴$ است.

۱۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $\{-۳,۲\}$ مجموعه‌ای فقط با دو عضو ۳- و ۲ می‌باشد، بنابراین $-۲\not\subset\{-۳,۲\}$

گزینهٔ (۲): بازه‌ها زیرمجموعه‌ای از تمام اعداد گویا و گنگ می‌باشند و شامل فقط اعداد گویا نمی‌باشند، در واقع: $(۰,۱)=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰<x<۱\}$

گزینهٔ (۳): $(۱,۳)\cap[۲,+\infty)=[۲,۳),\ \sqrt{۲}<۲\Rightarrow\sqrt{۲}\notin[۲,۳)$

گزینهٔ (۴): $-۱\le\pi=۳/۱۴۱۵\cdots<۴\Rightarrow\pi\in[-۱,۴)$

همچنین $-۱\in[-۱,۴)$ ، پس: $\{-۱,\pi\}\subseteq[-۱,۴)$

۱۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با فرض $A_n=[\frac{۱}{n},\frac{n}{n+۱}]$ چون $n\in\mathbb{N}$ و $n\ge۲$، می‌توان نوشت:

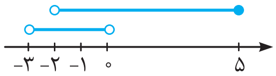
$A_۲=[\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳}]$, $A_۳=[\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۴}]$, $A_۴=[\frac{۱}{۴},\frac{۴}{۵}]$,$\cdots$

بدیهی است که با افزایش n، ابتدای بازه‌ها به عدد صفر و انتهای بازه‌ها به عدد ۱ نزدیک می‌شود ولی هرگز به این اعداد نمی‌رسند. پس برای هر عدد طبیعی $n\ge۲$، $A_n\subseteq(۰,۱)$. لذا این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۲): نمایش هندسی مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le-۱$ یا $x\ge۳\}$ روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر است:

روشن است که این مجموعه را می‌توان به صورت $\mathbb{R}-(-۱,۳)$ نیز نمایش داد. پس این گزینه نیز صحیح است.

گزینهٔ (۳): با توجه به شکل داریم:



پس این گزینه نیز صحیح است. $(-۳,۰)\cup(-۲,۵]=(-۳,۵]$

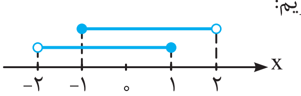
گزینهٔ (۴): برای محاسبهٔ حاصل $[۲,۴)-(۳,+\infty)$، باید از بازهٔ $[۲,۴)$، اعضایی را که در بازهٔ $(۳,+\infty)$ نیز قرار دارند، حذف شود. در واقع داریم:

$[۲,۴)-(۳,+\infty)=[۲,۳]$

پس این گزینه نادرست می‌باشد و جواب تست نیز همین گزینه است.

۱۶ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

با نمایش هندسی هریک از دو بازه، داریم:



$\Rightarrow(-۲,۱]\cap[-۱,۲)=[-۱,۱]$

۱۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

تمام اعضای بازهٔ $(۰,۲]$ را باید از بازهٔ $[-۲,۳)$ حذف کنیم. توجه کنید که عدد صفر عضو مجموعهٔ $(۰,۲]$ نیست، پس صفر را از $[-۲,۳)$ حذف نمی‌کنیم ولی چون $۲\in(۰,۲]$، پس عدد ۲ را باید از بازهٔ $[-۲,۳)$ حذف کنیم، پس: $[-۲,۳)-(۰,۲]=[-۲,۰]\cup(۲,۳)$

۱۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

ابتدا هریک از مجموعه‌های A و B را به صورت بازه نمایش داده و سپس حاصل $A-B$ را می‌یابیم:

(۱) $۱\le۲x-۱<۷\Rightarrow۲\le۲x<۸\Rightarrow۱\le x<۴\Rightarrow A=[۱,۴)$

(۲) $۳x+۲<۸\Rightarrow۳x<۶\Rightarrow x<۲\Rightarrow B=(-\infty,۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow A-B=[۱,۴)-(-\infty,۲)=[۲,۴)$

۱۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

بنابر تعریف مجموعهٔ B، اعضای آن، قرینهٔ اعضای مجموعهٔ A هستند. پس:

$x\in B\Rightarrow-x\in A\Rightarrow-x\in(-۲,۵]\Rightarrow-۲<-x\le۵$

$\xrightarrow{\times(-۱)}-۵\le x<۲\Rightarrow x\in[-۵,۲)\Rightarrow B=[-۵,۲)$

$A-B=(-۲,۵]-[-۵,۲)=[۲,۵]$

۲۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$A\cap C=(-\infty,۲]\cap(-۱,+\infty)=(-۱,۲]$

$B\cup(A\cap C)=[-۳,۱)\cup(-۱,۲]=[-۳,۲]$

۲۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$۲m+۱\in[-۱,۵]\Rightarrow-۱\le۲m+۱\le۵$

$\xrightarrow{-۱}-۲\le۲m\le۴\xrightarrow{\div۲}-۱\le m\le۲$

۲۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$۱\in(۲m-۱,۳m+۴]\Rightarrow۲m-۱<۱\le۳m+۴\Rightarrow\begin{cases}۱\le۳m+۴\\۲m-۱<۱\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}-۳\le۳m\\۲m<۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۱\le m\\m<۱\end{cases}\xrightarrow{\cap}-۱\le m<۱\Rightarrow m\in[-۱,۱)$

۲۳ ۱ ۲ **۳** ۴

اولین سه عدد مربع کامل بزرگ‌تر از ۵ عبارتند از ۹، ۱۶ و ۲۵. پس بازهٔ $[۵,b)$ باید شامل این سه عدد بوده و شامل هیچ عدد مربع کامل دیگری نباشد و نیز b بیش‌ترین مقدار را داشته باشد. چون عدد مربع کامل بعدی برابر ۳۶ بوده و بازه از طرف b باز است، پس بیش‌ترین مقدار b برابر ۳۶ است. در واقع بازهٔ $[۵,۳۶)$ دارای سه عدد مربع کامل بوده و انتهای بازه، بیش‌ترین مقدار ممکن را دارا است.

۲۴ ۱ ۲ **۳** ۴

پنج عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱−، عبارتاند از ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴. با توجه به باز بودن بازه، برای این‌که این بازه شامل پنج عدد مذکور باشد، $۲a-۱$ باید از ۴ بیش‌تر ولی کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$۴<۲a-۱\le ۵\Rightarrow ۵<۲a\le ۶\Rightarrow ۲/۵<a\le ۳$$

۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴

چون اجتماع دوبازهٔ $[۱,a]$ و $[b,۵)$ برابر یک بازه شده است، پس این بازه‌ها حتماً با هم اشتراک دارند. هم‌چنین چون اجتماع این بازه‌ها برابر هیچ یک از آن‌ها نشده است، پس هیچ کدام زیرمجموعهٔ دیگری نیست.

از طرفی چون ابتدای بازهٔ جواب، $-۱<۱$ است، پس قطعاً $b<۱$ می‌باشد.

پس نمایش هندسی این بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی می‌بایست به‌صورت روبه‌رو باشد:

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$[۱,a]\cup[b,۵)=[b,a]$$

پس بنابر فرض داریم:

$$[b,a]=[-۱,۷]\Rightarrow b=-۱,a=۷\Rightarrow a-b=۷-(-۱)=۸$$

۲۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

با قرار دادن اعداد ۱، ۲ و ۳ به جای n در $A_n=(n-۲,n+۳)$، مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را مشخص می‌کنیم:

$$A_۱=(۱-۲,۱+۳)=(-۱,۴)\ ,\ A_۲=(۰,۵)\ ,\ A_۳=(۱,۶)$$

$$\Rightarrow A_۲\cap A_۳=(۰,۵)\cap(۱,۶)=(۱,۵)$$

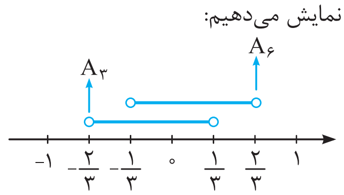
$$\Rightarrow A_۱-(A_۲\cap A_۳)=(-۱,۴)-(۱,۵)=(-۱,۱]$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A_n=(-\frac{۲}{n},\frac{n-۲}{n})\Rightarrow A_۳=(-\frac{۲}{۳},\frac{۳-۲}{۳})=(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳})$$

$$A_۶=(-\frac{۲}{۶},\frac{۶-۲}{۶})=(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$$

بازه‌های $A_۳$ و $A_۶$ را روی محور نمایش می‌دهیم:



$$A_۳\cup A_۶=(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$$

$$\Rightarrow(A_۳\cup A_۶)-A_۳=(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})-(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳})=[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$$

۲۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A_i=\left[-i,\frac{۹-i}{۲}\right]$$

$$A_۱=[-۱,۴]\ ,\ A_۲=\left[-۲,\frac{۷}{۲}\right]\ ,\ A_۵=[-۵,۲]\ ,\ A_۷=[-۷,۱]$$

$$A_۲\cap A_۵=\left[-۲,\frac{۷}{۲}\right]\cap[-۵,۲]=[-۲,۲]\ ,\ A_۱\cap A_۷=[-۱,۱]$$

$$\Rightarrow(A_۲\cap A_۵)-(A_۱\cap A_۷)=[-۲,۲]-[-۱,۱]=[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$$

۲۹ ۱ ۲ **۳** ۴

در مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت کسر ۱، در مخرج کسر می‌توان هر عدد طبیعی قرار داد و چون تعداد اعداد طبیعی نامتناهی است، این مجموعه نامتناهی است.

تعداد اعضای بقیهٔ مجموعه‌های ارائه شده در سایر گزینه‌ها برابر یک عدد حسابی بوده و در نتیجه همگی آن‌ها مجموعهٔ متناهی‌اند.

۳۰ ۱ ۲ **۳** ۴

مجموعهٔ تمام افراد روی کرهٔ زمین و هم‌چنین مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های موجود در جهان متناهی هستند گرچه تعداد آن‌ها زیاد است. هم‌چنین مجموعهٔ تمام اعداد اول زوج، یک مجموعهٔ تک عضوی $\{۲\}$است، لذا متناهی می‌باشد ولی مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۵، بی‌شمار عضو دارد و در نتیجه نامتناهی (بی‌پایان) است.

۳۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

بدیهی است که $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$ و مجموعهٔ تک عضوی $\{۰\}$ متناهی است.

توجه کنید که:

$$\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\dots,-۳,-۲,-۱\}$$

$$\mathbb{W}\cap\mathbb{N}=\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{Z}\cap\mathbb{W}=\mathbb{W}$$

۳۲ **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $A-B\subseteq A$ و چون مجموعهٔ A متناهی است، پس مجموعهٔ $A-B$ نیز همواره متناهی خواهد بود. توجه کنید که ممکن است $A-B=\varnothing$ باشد که در این صورت نیز مجموعهٔ $A-B$ متناهی است. زیرا تعداد اعضای $A-B$ در این حالت نیز برابر یک عدد حسابی می‌باشد.

۳۳ ۱ **۲** ۳ ۴

هریک از مجموعه‌های داده شده در گزینه‌ها را با اعضا نمایش می‌دهیم:

گزینهٔ (۱): $\{۵,۶,۷,۸,\dots\}$ گزینهٔ (۲): $\{۱,۲,\dots,۲^{۱۲}\}$

گزینهٔ(۳): $\{۱۰۰۱,۱۰۰۲,۱۰۰۳,\dots\}$ گزینهٔ (۴): $\{\dots,۹۹۷,۹۹۸,۹۹۹\}$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تنها مجموعهٔ مذکور در گزینهٔ (۲) متناهی است.

۳۴ ۱ ۲ **۳** ۴

داریم:

$$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۲<۱۰۰۰\}=\{-۳۱,-۳۰,\dots,۳۰,۳۱\}$$

بنابراین مجموعهٔ ارائه شده در گزینهٔ (۳) متناهی است. مجموعهٔ ارائه شده در سایر گزینه‌ها، نامتناهی هستند.

۳۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد و در نتیجه بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۵}$ نیز بی‌شمار عددگویا وجود دارد. پس گزینهٔ (۱) درست است.

اگر مجموعهٔ A دارای زیرمجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه تمام اعضای این زیرمجموعه در مجموعهٔ A قرار می‌گیرند و در نتیجه A نیز نامتناهی خواهد بود. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است. در گزینهٔ (۳)، هر زیرمجموعهٔ A یک مجموعهٔ متناهی است و می‌دانیم یکی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A، خود A است، پس A نیز یک مجموعهٔ متناهی است و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

گزینهٔ (۴) می‌تواند نادرست باشد، به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد طبیعی را می‌توان به‌صورت اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم و نامتناهی O و E نوشت.

۳۶ **۱** ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد هیچ اشتراکی با هم ندارند و بنابراین $E\cap O=\varnothing$ خواهد بود.

۳۷ **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $A\cap B'=A-B$ و از آن جایی که اگر از مجموعهٔ نامتناهی، مجموعه‌ای متناهی کم شود، حاصل مجموعه‌ای نامتناهی خواهد بود، پس مجموعهٔ $A\cap B'=A-B$ قطعاً مجموعه‌ای نامتناهی است.

در گزینهٔ (۲)، چون $B-A\subseteq B$ و مجموعهٔ B متناهی است، پس $B-A$ نیز متناهی است.

در گزینهٔ (۳)، اگر مجموعهٔ C که $C\subseteq A$ است، متناهی باشد، مجموعه $B\cup C$ متناهی خواهد بود. بنابراین این مجموعه الزاماً نامتناهی نیست.

در گزینهٔ (۴)، اگر مجموعهٔ C' متناهی باشد، از آن جایی که اشتراک یک مجموعهٔ متناهی و یک مجموعهٔ نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی است، پس این مجموعه نیز متناهی خواهد بود.

۳۸ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به این که $A\cap B'\subseteq A$ است و مجموعهٔ A مجموعه‌ای متناهی می‌باشد، پس مجموعهٔ $A\cap B'$ نیز متناهی است.

۳۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$x<۲x+۳\le ۶-x\Rightarrow\begin{cases}x<۲x+۳\\ ۲x+۳\le ۶-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۳<x\\ ۳x\le ۳\Rightarrow x\le ۱\end{cases}\Rightarrow -۳<x\le ۱\Rightarrow A=(-۳,۱]$$

$$B=(-\infty,-۲)\cup[۴,+\infty)\Rightarrow B'=[-۲,۴)$$

$$\Rightarrow A\cap B'=(-۳,۱]\cap[-۲,۴)=[-۲,۱]$$

۴۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$W=\{۰,۱,۲,۳,۴,\dots\}\qquad A=\{۰,۲,۴,۶,\dots\}$$

چون مجموعهٔ W را مرجع گرفته‌ایم، بنابراین متمم مجموعهٔ A زیرمجموعه‌ای از W است که اعضای A در آن نباشد، بنابراین $A'=\{۱,۳,۵,۷,\dots\}$، بنابراین A' تمام اعداد فرد با شروع از یک را شامل است که می‌توان آن را با نماد ریاضی به صورت $A'=\{۲x+۱\,|\,x\in W\}$ نمایش داد. توجه کنید که در گزینهٔ (۲) اعداد فرد از ۱- شروع می‌شوند و چون A و A' باید در داخل مجموعهٔ مرجع باشند، این گزینه نادرست است.

۴۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}U=\{۱,۲,۳,\dots,۳۹\}\\ A'=U-A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۲۶,۲۷,\dots,۳۹\}\end{array}\right\}\Rightarrow A'\cup U=U$$

بنابراین $A'\cup U$ دارای ۳۹ عضو می‌باشد.

۴۲ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به مجموعهٔ مرجع که برابر مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌باشد، ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A'=\{۲,۳,۴,\dots\}\Rightarrow A=\{۱\},\ B'=\{۵,۶,۷,\dots\}\Rightarrow B=\{۱,۲,۳,۴\}$$

بنابراین: $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴\}$

۴۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$(A\cap B)'\xlongequal{\text{دمورگان}}A'\cup B'=\{۱,۲,۴\}\cup\{۲,۳\}=\{۱,۲,۳,۴\}$$

۴۴ ۱ ۲ **۳** ۴

با استفاده از قوانین دمورگان می‌دانیم $(A\cup B)'=A'\cap B'$، داریم:

$$A'=\{۱,۲,۳\}\ ,\ B'=\{۲,۳,۴,\dots\}\Rightarrow A'\cap B'=\{۲,۳\}$$

۴۵ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم $A\cap B\subseteq A$ و $A\cap B\subseteq B$. چون $A\cap B=\{۲,۳\}$، پس مجموعه‌های A و B هر دو شامل اعضای ۲ و ۳ هستند. از سوی دیگر $\{۱,۴\}\subseteq A$ و $\{۵,۷,۹\}\subseteq B$، پس داریم:

$$A=\{۱,۴,۲,۳\}\ ,\ B=\{۵,۷,۹,۲,۳\}$$

از آن‌جایی که $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۹\}$، پس مجموعه‌های A و B عضو دیگری ندارند. بنابراین:

$$A'=U-A=\{۱,۲,\cdots,۹\}-\{۱,۲,۳,۴\}=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$$

۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

هر یک از مجموعه‌های A، B و C با اعضا به‌صورت زیر است:

$$A=\{۳,۶,۹\}\ ,\ B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}\ ,\ C=\{۱,۴,۹\}$$

$$C\cup A'=\{۱,۴,۹\}\cup\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰\}=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۹,۱۰\}\quad(۱)$$

$$C'-B=\{۲,\cancel{۳},\cancel{۵},۶,\cancel{۷},۸,۱۰\}-\{۱,۳,۵,۷,۹\}=\{۲,۶,۸,۱۰\}\quad(۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$(C\cup A')-(C'-B)=\{۱,\cancel{۲},۴,۵,۷,\cancel{۸},۹,\cancel{۱۰}\}-\{۲,۶,۸,۱۰\}$$

$$=\{۱,۴,۵,۷,۹\}$$

بنابراین مجموعهٔ $(C\cup A')-(C'-B)$، ۵ عضو دارد.

۴۷ **۱** ۲ ۳ ۴

خارج مجموعهٔ A رنگی است و طبق تعریف متمم، این قسمت مجموعهٔ A' است.

۴۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$(A\cap B')-A=(A\cap B')\cap A'=(A\cap A')\cap B'=\varnothing\cap B'=\varnothing$$

۴۹ ۱ **۲** ۳ ۴

چون U مجموعهٔ مرجع می‌باشد، لذا $A'\subseteq U$ و در نتیجه $A'\cap U=A'$، بنابراین $A\cup(A'\cap U)=A\cup A'=U$، پس:

$$[A\cup(A'\cap U)]\cup B=U\cup B=U$$

۵۰ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A\subseteq U\Rightarrow A\cap U=A\Rightarrow(A\cap U)'\cup A=A'\cup A=U\quad(۱)$$

$$U'=\varnothing\Rightarrow A'-U'=A'-\varnothing=A'$$

$$\Rightarrow(A'-U')'=(A')'=A\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow \text{مجموعه}=U-A=A'$$

۵۱ ۱ **۲** ۳ ۴

چون A و B ناتهی هستند و $B-A=B$، لذا A و B جدا از هم می‌باشند، یعنی $A\cap B=\varnothing$. بنابراین:

$$(A\cap B)'\cup(A-B)=\varnothing'\cup A=U\cup A=U$$

۵۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$[(A\cap B')\cup(A'\cup B)]=[(A\cap B')\cup((A'\cup B)')']$

$=[(A\cap B')\cup(A\cap B')']=U$

بنابراین متمم مجموعهٔ فوق، یعنی U برابر $\varnothing$ می‌باشد.

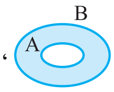
۵۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$(B-A)'-A=(B\cap A')'\cap A'=(B'\cup A)\cap A'$

$=(A'\cap B')\cup(A'\cap A)=(A'\cap B')\cup\varnothing=A'\cap B'$

$\Rightarrow ((B-A)'-A)'=(A'\cap B')'=A\cup B$

۵۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه به نمودار وِن 

، لزومی ندارد مجموعهٔ $B-A=B\cap A'$ یک مجموعهٔ تهی باشد.

۵۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: اگر $A\cap B=\varnothing$، آن‌گاه A و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند و داریم:

$A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\subseteq B', B\subseteq A', A-B=A, B-A=B$

$(A\cap B')-(B-A)=(A-B)-(B-A)\xrightarrow[\text{جدا از هم می‌باشند}]{B-A \text{ و } A-B}A-B$

۵۶ ۱ ۲ **۳** ۴

$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))$

$=۳۰-(۱۲+۲۰-۷)=۳۰-۲۵=۵$

۵۷ **۱** ۲ ۳ ۴

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\xrightarrow{n(A)+n(B)=۳n(A\cap B)}۳n(A\cap B)-n(A\cap B)=۲n(A\cap B)$

$\Rightarrow\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{۲n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=۲$

۵۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$, $n(A-B)=۲n(A\cap B)$

$\Rightarrow n(A)-n(A\cap B)=۲n(A\cap B)\Rightarrow n(A)=۳n(A\cap B)$

$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=۳n(A\cap B)+۲n(A\cap B)-n(A\cap B)=۴n(A\cap B)\quad(۱)$

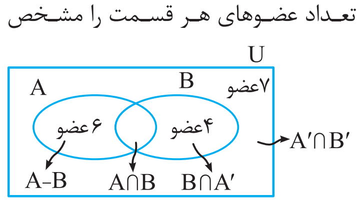
$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=۲n(A\cap B)-n(A\cap B)=n(A\cap B)\quad(۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{n(A\cup B)}{n(B-A)}=\frac{۴\cancel{n(A\cap B)}}{\cancel{n(A\cap B)}}=۴$

۵۹ ۱ **۲** ۳ ۴

از نمودار وِن استفاده می‌کنیم و تعداد عضوهای هر قسمت را مشخص می‌کنیم:



باید مجموع تعداد اعضای تمام قسمت‌های مشخص‌شده برابر ۲۰ شود:

$۶+n(A\cap B)+۴+۷=۲۰\Rightarrow n(A\cap B)+۱۷=۲۰$

$\Rightarrow n(A\cap B)=۳$

$\Rightarrow n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=۶+۳=۹$

۶۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

روش اول: در این مسئله اگر A مجموعهٔ افرادی که به فوتبال و B مجموعهٔ افرادی که به والیبال علاقه دارند باشد، آن‌گاه داریم $n(A)=۲۴$ و $n(B)=۱۸$ و چون از ۳۰ نفر ۴ نفر به هیچ یک از این دو ورزش علاقمند نیستند، لذا $n(A\cup B)=۲۶$. بنابراین داریم:

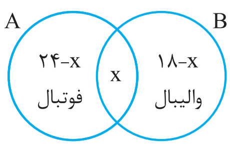
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow ۲۶=۲۴+۱۸-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۶$

در نتیجه تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقمندند برابر است با:

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۱۸-۱۶=۲$

روش دوم: به کمک نمودار وِن نیز می‌توان این مسئله را حل کرد:



$۲۴-x+x+۱۸-x=۲۶\Rightarrow x=۱۶$

$\Rightarrow$ تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقمندند $=۱۸-x=۱۸-۱۶=۲$

۶۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

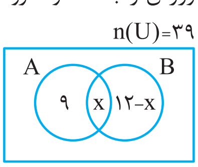
فرض کنیم A و B به‌ترتیب مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشند که در کلاس‌های ادبیات و عربی شرکت کرده‌اند. می‌خواهیم $n(A'\cap B')$ را به‌دست آوریم. داریم: $n(A)=۳۵$, $n(B)=۳۱$, $n(A\cap B)=۲۳$

$\Rightarrow n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$=۵۱-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))=۵۱-(۳۵+۳۱-۲۳)=۸$

۶۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

روش اول: از نمودار وِن استفاده می‌کنیم. اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامه‌دیواری را با B نمایش دهیم، داریم:



$۹+x=۱۶\Rightarrow x=۷$

بنابراین تعداد افرادی که در هیچ‌یک از این گروه‌ها نیستند، برابر است با:

$۳۹-(۹+۷+۵)=۱۸$

روش دوم: طبق فرض، $n(U)=۳۹$، $n(A)=۱۶$ و $n(B)=۱۲$ و $n(A-B)=۹$ و باید $n(A'\cap B')$ را بیابیم. داریم:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\Rightarrow ۹=۱۶-n(A\cap B)$

$\Rightarrow n(A\cap B)=۷$

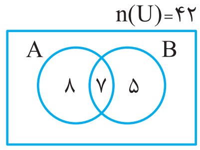
$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))$

$=۳۹-(۱۶+۱۲-۷)=۳۹-۲۱=۱۸$

۶۳ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: اگر گروه آزمایشگاهی را با A و گروه فوتبال را با B نمایش دهیم، با استفاده از نمودار ون داریم:



با توجه به نمودار ون، تعداد افرادی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند، برابر است با:

$$42-(8+7+5)=42-20=22$$

روش دوم: داریم:

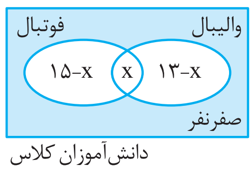
$$n(A)=15\ ,\ n(B)=12\ ,\ n(A\cap B)=7\ ,\ n(U)=42$$

پس:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))$$
$$=42-(15+12-7)=42-20=22$$

۶۴ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم که x نفر، هم عضو تیم فوتبال و هم عضو تیم والیبال باشند، با توجه به این‌که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو است، داریم:

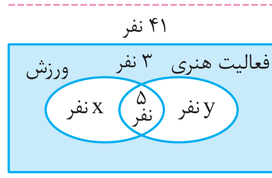


$$15-x+x+13-x=23\Rightarrow 28-x=23\Rightarrow x=5$$

بنابراین $13-5=8$ نفر فقط عضو تیم والیبال و $15-5=10$ نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند و درنتیجه $10+8=18$ نفر دقیقاً عضو یکی از تیم‌های فوتبال یا والیبال می‌باشند.

۶۵ ۱ ۲ ۳ ۴

طبق فرض، نمودار ون مقابل را داریم:



طبق فرض، اگر یک واحد از x کم کنیم و $\frac{3}{5}$ آن را در نظر بگیریم، برابر y است، بنابراین:

$$y=\frac{3}{5}(x-1)$$

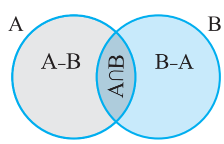
از طرفی داریم:

$$x+5+y+3=41$$
$$\Rightarrow x+y=33\ ,\ y=\frac{3}{5}(x-1)\Rightarrow x+\frac{3}{5}(x-1)=33$$
$$\Rightarrow 5x+3(x-1)=5\times 33=165\Rightarrow 8x=168\Rightarrow x=21$$

پس $x+5=21+5=26$ نفر در رشتۀ ورزشی فعالیت می‌کنند.

۶۶ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار ون می‌توان نوشت:



$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow 5=2+n(B-A)+2\Rightarrow n(B-A)=1$$

۶۷ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به فرض مسئله $n(A\cup B)=3n(B)$، $n(A)=\frac{5}{2}n(B)$ و $n(A\cap B)=3$، بنابراین خواهیم داشت:

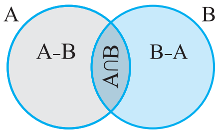
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow 3n(B)=\frac{5}{2}n(B)+n(B)-3\Rightarrow \frac{1}{2}n(B)=3\Rightarrow n(B)=6$$

تعداد اعضایی که حداقل به یکی از دو مجموعۀ A یا B تعلق دارد برابر $n(A\cup B)$ می‌باشد که با توجه به فرض داریم:

$$n(A\cup B)=3n(B)=3\times 6=18$$

۶۸ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار ون، می‌توان نوشت:



$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$
$$40=12+18+n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=10$$

با توجه به نمودار ون داریم:

$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=12+10=22$$
$$n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)=18+10=28$$

حال اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو حذف کنیم، داریم:

$$n(A_1)=n(A)-9=22-9=13$$
$$n(B_1)=n(B)-9=28-9=19$$
$$n(A_1\cap B_1)=n(A\cap B)-4=10-4=6$$

پس خواهیم داشت:

$$n(A_1\cup B_1)=n(A_1)+n(B_1)-n(A_1\cap B_1)=13+19-6=26$$

۶۹ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم A_1 مجموعۀ حاصل از اضافه کردن ۱۰ عضو جدید به مجموعۀ A باشد، در این صورت $n(A_1)=n(A)+10$ و طبق فرض $n(A_1\cap B)=9+n(A\cap B)$ می‌باشد، بنابراین:

$$n(B\cup A_1)=n(B)+n(A_1)-n(A_1\cap B)$$
$$=n(B)+n(A)+10-(9+n(A\cap B))$$
$$=\underbrace{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}_{n(A\cup B)}+1=25+1=26$$

۷۰ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر مجموعۀ جدید که از حذف ۱۶ عضو از مجموعۀ A به دست‌می‌آید را با A_1 نمایش دهیم، بنابر فرض، اطلاعات زیر را داریم:

$$n(A)=36\Rightarrow n(A_1)=36-16=20$$
$$n(B)=28\ ,\ n(A\cap B)=15\Rightarrow n(A_1\cap B)=15-9=6$$

اکنون باید حاصل $n(A_1\cup B)$ را بیابیم. پس:

$$n(A_1\cup B)=n(A_1)+n(B)-n(A_1\cap B)=20+28-6=42$$

۷۱ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم A و B به‌ترتیب زیرمجموعه‌هایی از مجموعۀ مرجع باشند به‌طوری که اعضای آن‌ها بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشند، در این‌صورت:

$$U=\{1,2,\dots,99\}\ ,\ A=\{3,6,9,\dots,99\}\Rightarrow n(A)=33$$
$$B=\{5,10,15,\dots,95\}\Rightarrow n(B)=19$$

هم مضرب ۳ و هم مضرب ۵ : $A\cap B=\{15,30,45,60,75,90\}$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=6$$

می‌خواهیم $n(A'\cap B')$ را به‌دست آوریم، داریم:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))=99-(33+19-6)=53$$

۷۲ ۱ ۲ **۳** ۴

تعداد پاره‌خط‌ها : $\overset{+۴\ \ +۴}{۵ , ۹ , ۱۳ , \cdots}$

$a_۲ = ۴\times ۱+۵ \ , \ a_۳ = ۴\times ۲+۵ , \cdots$

بنابراین جملهٔ nاُم به‌صورت $a_n = ۴(n-۱)+۵$ می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$a_n = ۴۹ \Rightarrow ۴(n-۱)+۵=۴۹ \Rightarrow ۴n-۴+۵=۴۹ \Rightarrow n=۱۲$

۷۳ **۱** ۲ ۳ ۴

تعداد دایره‌های توخالی: $\underset{+۳\ \ +۱\ \ +۳\ \ +۱}{۱ , ۴ , ۵ , ۸ , ۹ , \cdots}$

با توجه به روند فوق می‌توان تعداد دایره‌های توخالی در این الگو را به‌صورت دنبالهٔ زیر نوشت:

$\underset{+۳\ \ +۱\ \ +۳\ \ +۱\ \ +۳\ \ +۱\ \ +۳\ \ +۱\ \ +۳}{۱ , ۴ , ۵ , ۸ , ۹ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۶ , ۱۷ , ۲۰}$

پس تعداد دایره‌های توخالی در مرحلهٔ دهم ۲۰ می‌باشد.

۷۴ ۱ ۲ **۳** ۴

تعداد چوب‌کبریت‌ها را به‌صورت دنبالهٔ زیر می‌نویسیم: $\overset{+۱۲\ \ +۱۲}{۸ , ۲۰ , ۳۲ , \dots}$

در این‌صورت داریم:

تعداد چوب کبریت‌ها در مرحلهٔ (۲) $= ۱۲\times ۱+۸$

تعداد چوب کبریت‌ها در مرحلهٔ (۳) $= ۱۲\times ۲+۸$

$\vdots$

تعداد چوب کبریت‌ها در مرحلهٔ (n) $= ۱۲\times (n-۱)+۸$

$\Rightarrow a_n = ۱۲n-۴ \xrightarrow{n=۱۲} a_{۱۲} = ۱۴۰$

۷۵ ۱ **۲** ۳ ۴

تعداد مکعب‌ها را به‌صورت جدول زیر می‌نویسیم:

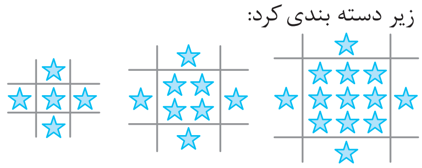
شمارهٔ شکل	۱	۲	۳
تعداد مکعب‌ها	$۱^۲$	$۱^۲+۲^۲$	$۱^۲+۲^۲+۳^۲$

پس تعداد مکعب‌ها در شکل ششم برابر است با:

$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+۵^۲+۶^۲ = ۱+۴+۹+۱۶+۲۵+۳۶ = ۹۱$

۷۶ ۱ ۲ **۳** ۴

الگو را می‌توان به صورت زیر دسته بندی کرد:



با توجه به دسته بندی فوق داریم:

$a_۱ = ۱^۲+۴ \ , \ a_۲ = ۲^۲+۴ \ , \ a_۳ = ۳^۲+۴$

بنابراین $a_n = n^۲+۴$ و در نتیجه $a_{۱۵} = ۱۵^۲+۴ = ۲۲۹$.

۷۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه به الگوی داده شده داریم: $a_۱ = ۱+۱ , a_۲ = ۳+۱ , a_۳ = ۶+۱$

می دانیم اعداد ۱، ۳ ، ۶ و ... همان جملات دنبالهٔ مثلثی هستند که جملهٔ عمومی آن‌ها از رابطهٔ $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ به‌دست می‌آید. پس می‌توان گفت جملهٔ عمومی این دنباله از رابطهٔ $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}+۱$ به دست می‌آید. بنابراین:

$a_{۲۰} = \frac{۲۰\times ۲۱}{۲}+۱ = ۲۱۱$

۷۸ **۱** ۲ ۳ ۴

دنبالهٔ تمام دایره‌های توپر و توخالی در آرایهٔ داده شده، یک دنبالهٔ مربعی است و جملات آن عبارت است از: $۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\cdots \Rightarrow a_n = n^۲$

با کمی دقت معلوم می‌شود که در شکل‌های با اندیس زوج، تعداد دایره‌های تو پر و توخالی با یکدیگر برابرند و در شکل‌های با اندیس فرد، تعداد دایره‌های توپر یکی از تعداد دایره‌های توخالی بیش‌تر است. بنابراین جملهٔ یازدهم کلاً از $۱۲۱ = ۱۱^۲$ دایره تشکیل شده است که چون شمارهٔ شکل فرد است، تعداد دایره‌های تو پر آن یک واحد از تعداد دایرهٔ توخالی آن بیش‌تر است. پس شکل یازدهم دارای ۶۰ دایرهٔ توخالی و ۶۱ دایرهٔ تو پر است.

۷۹ ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا تعداد مربع‌های رنگی شکل هشتم را به‌دست می‌آوریم. برای این کار تعداد مربع‌های رنگی را به‌صورت دنبالهٔ زیر می‌نویسیم:

$\underset{+۲\ \ \ +۴\ \ \ +۶\ \ \ +۸}{۰ , ۲ , ۲ , ۶ , ۶ , ۱۲ , ۱۲ , ۲۰}$

پس ۲۰ مربع شکل هشتم رنگی است.

حال کافی است تعداد کل مربع‌های شکل هشتم را به‌دست آوریم. برای این کار ابتدا دنبالهٔ زیر را که شامل تعداد کل مربع‌های تشکیل‌دهندهٔ شکل‌ها می‌باشد، می‌نویسیم: $۱,۳,۶,۱۰,\cdots$

واضح است که دنبالهٔ فوق، یک دنبالهٔ مثلثی می‌باشد، پس تعداد کل مربع‌های شکل هشتم برابر است با:

$$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲} \xrightarrow{n=۸} a_۸ = \frac{۸(۹)}{۲} = ۳۶$$

پس $\frac{۲۰}{۳۶}$ یا به‌عبارتی $\frac{۵}{۹}$ شکل هشتم رنگی است.

۸۰ **۱** ۲ ۳ ۴

اگر به تعداد نقطه‌ها در ردیف اول دقت کنیم، به‌صورت زیر است:

$۱ , ۳ , ۵ , ۷ , \cdots , ۲n-۱ , \cdots$

بنابراین در ردیف اول شکل نهم، تعداد نقطه‌ها برابر $۲(۹)-۱ = ۱۷$ است. اما در شکل نهم، ۹ ردیف نقطه خواهیم داشت که هر ردیف نسبت به ردیف پایین یک نقطه کم‌تر دارد. بنابراین تعداد نقطه‌ها در ردیف نهم برابر است با:

$۹+۱۰+\cdots+۱۶+۱۷$

$= ۹+(۹+۱)+(۹+۲)+\cdots+(۹+۸) = ۹\times ۹+(۱+۲+\cdots+۸)$

$= ۸۱+\frac{۸\times ۹}{۲} = ۸۱+۳۶ = ۱۱۷$

۸۱ ۱ ۲ **۳** ۴

در هر شکل، سه ردیف نقطه وجود دارد که دو ردیف پایینی دارای تعداد نقطه‌های یکسان و ردیف سوم، یک نقطه کم‌تر از ردیف‌های اول و دوم دارد. با توجه به الگو، در ردیف پایینی شکل دوازدهم، ۱۳ نقطه وجود دارد. بنابراین: تعداد نقطه‌های شکل دوازدهم $= ۱۳+۱۳+۱۲ = ۳۸$

۸۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

طول یکی از اضلاع قائمه در تمامی مثلث‌ها برابر ۱ واحد است و طول ضلع قائم دیگر در مثلث اول ۱، در مثلث دوم $\sqrt{۲}$، در مثلث سوم $\sqrt{۳}$ و ... و در مثلث نهم $۳ = \sqrt{۹}$ می‌باشد؛ پس مساحت مثلث نهم برابر است با: $S = \frac{۳\times ۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$

۸۳ ۱ ۲ **۳** ۴

با به‌دست آوردن چند جملهٔ اول هریک از دنباله‌های داده شده، مشخص می‌شود که جملات دنبالهٔ $a_n = \frac{۱+(-۱)^n}{n^۲}$ به‌صورت $۰, \frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۸}, ۰, \cdots$ می‌باشد.