ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

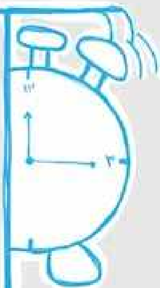
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰، شهریور ۱۴۰۰، دی ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۱ است، طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۱، خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ است.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۳) نیاز دارید، تنها در ۱۵ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بارم‌بندی درس هندسه (۳)

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اول		۱۰	۴	۶
فصل دوم	تا صفحهٔ ۴۶	۱۰	۳	۸
	بعد از صفحهٔ ۴۶	–	۵	
فصل سوم		–	۸	۶
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

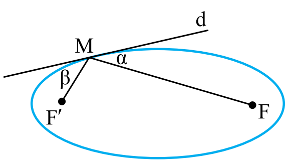
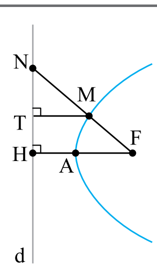
آزمون شمارهٔ ۱

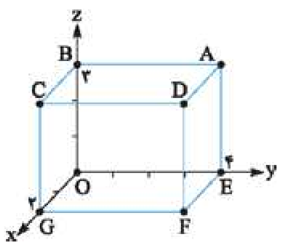
نوبت اول پایهٔ دوازدهم

ردیف	سؤال		نمره
	فصل اول		
۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه .... $= (A^{-1})^{-1}$.		۰/۲۵
۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر A، B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$. ب) اتحادهای جبری دربارهٔ ماتریس‌ها برقرار هستند. پ) ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۶\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر است. ت) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $\|BA\|=\|AB\|=\|A\|\|B\|$.		۱
۳	ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=۲i+۳j$ را به صورت آرایهٔ مستطیلی بنویسید. سپس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی را بیابید.	با توجه به سطر و ستون باید اعداد داخل ماتریس را مشخص کنی.	۱
۴	اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}$، نشان دهید: $A^۲-۴A-۵I_۳=\bar{O}$.	حواست باشه $I_۳$ یعنی $I_{۳\times۳}$.	۱/۵
۵	دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\bar{O}$ و $B\neq\bar{O}$ ولی $AB=\bar{O}$.	دقت کن که باید تمام درایه‌های ماتریس AB، صفر شوند.	۱/۵
۶	اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر از مرتبهٔ ۲×۲ باشد و $\|A\|=-۲$، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید. $\|A^۴\|-۴\|A^{-1}\|+۳$	دقت کن ضریب ۴ بیرون از دترمینان است ولی توان ۴ داخل دترمینان.	۱
۷	اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۱\\۳&۴\end{bmatrix}$، حاصل عبارت $۵A^{-1}+B^{-1}$ را به دست آورید.	ضریب ۵ فقط برای A^{-1} است.	۱/۲۵
۸	دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۵&۷\\۲&-۱&۳\\۴&۵&-۲\end{bmatrix}$ را یک بار به روش ساروس و یک بار برحسب ستون اول محاسبه کنید.	حواست باشه حاصل دترمینان از هر دو روش باید یکسان شود.	۱/۵
۹	مقدار a را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases}۲x+۳y=۴\\ax-y=۲a\end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد.	بی‌شمار جواب برای دستگاه، یعنی منطبق‌بودن دو خط.	۱
	فصل دوم		
۱۰	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر .... ب) رابطهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر .... پ) اگر در معادلهٔ تقاطع خط و دایره داشته باشیم $\Delta>۰$، آن‌گاه خط و دایره		۰/۷۵
۱۱	یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P عمود بر محور رویهٔ مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید.	دقت کن که صفحهٔ P از رأس مخروط نگذشته.	۰/۷۵
۱۲	مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ ثابت ۱ واحد باشند.»	خط L از طرفین نامحدود است.	۰/۷۵
۱۳	خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ L واحد باشد. (در مورد تعداد جواب‌ها بحث کنید.)		۱/۵
۱۴	الف) دایره به معادلهٔ $۴(x-۱)^۲+(۲y+۱)^۲=۱$ را رسم کنید. ب) مساحت این دایره چه‌قدر است؟	برای محاسبهٔ مساحت دایره فقط به شعاع نیاز داری.	۱/۵
۱۵	به روش مربع کامل کردن، شعاع و مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۰$ را بیابید.	راه‌حل تشریحی لازمه نه استفاده از فرمول.	۱/۵
۱۶	مقدار a را چنان بیابید که خط $y+۳x=a$ بر دایرهٔ $۲x^۲+۲y^۲-۳x+y=۰$ مماس باشد.	به ضریب ۲ برای $x^۲$ و $y^۲$ دقت کن.	۱/۵
۱۷	وضعیت دو دایرهٔ روبه‌رو را نسبت به هم بررسی کنید.	$\begin{cases}x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱=۰\\x^۲+y^۲+۴x+۲y+۱=۰\end{cases}$	۱/۷۵
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

آزمون شمارهٔ ۹

نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۱

ردیف	سؤال	نمره
۱	عبارت‌های زیر را کامل کنید. الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با .... است. ب) اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود کشیدگی بیضی کم‌تر شده و بیضی به .... نزدیک‌تر می‌شود. پ) نقطهٔ $A(1,-2)$ در .... دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ قرار دارد. ت) اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح بناشده توسط سه بردار برابر .... است.	۱
۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید. الف) اگر A یک ماتریس 3×3 و $\|A\|=5$ باشد، آن‌گاه $\|2A\|=40$ است. ب) اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک هذلولی است. پ) در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد، زاویهٔ $F\hat{M}F'=50^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\alpha=\beta=60^\circ$ است.  ت) برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$، حاصل‌ضرب خارجی $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{0}$ است.	۱/۵
۳	اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.	۱
۴	ماتریس A مربعی مرتبهٔ سه به صورت $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ 0 & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۵	دستگاه $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱/۲۵
۶	نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).	۱/۵
۷	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(1,-1)$ و بر خط $3x-4y+3=0$ مماس باشد.	۱
۸	در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است، الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید. ب) مختصات کانون‌ها (F',F)، مختصات دو سر قطر بزرگ (A',A) و دو سر قطر کوچک (B',B) را به دست آورید. پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.	۱/۵
۹	الف) معادلهٔ متعارف و فاصلهٔ کانونی سهمی به معادلهٔ $y^2-2y-8x+9=0$ را بیابید. ب) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید.	۱/۵
۱۰	در شکل روبه‌رو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\dfrac{FN}{FA}=\dfrac{2NT}{TH}$ 	۱/۲۵

ردیف	آزمون شمارهٔ ۹ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۱	نمره
۱۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $x^{۲} \le y \le ۲$ را رسم کنید.	۰/۵
۱۲	با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) نام وجه از شکل که معادلهٔ آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید. $x = ۲ , ۰ \le y \le ۴ , ۰ \le z \le ۳$ ب) معادلات مربوط به پاره‌خط (یال) AD را بنویسید. پ) مختصات نقطهٔ D را بنویسید. ت) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحهٔ xOz باشد و مکعب‌مستطیل را نصف کند. 	۱/۵
۱۳	سه بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (۰,۲,۱)$ را در نظر بگیرید. الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، $\cos\theta$ را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۱۴	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $\lvert\vec{a}\rvert = ۶$ و $\lvert\vec{b}\rvert = ۴$ و زاویهٔ بین آن‌ها ۳۰ درجه است، مقدار عبارت $\lvert ۲\vec{a} \times \vec{b} \rvert$ را محاسبه کنید.	۱
۱۵	اگر $A = (۲,-۱,۳)$ ، $B = (۳,۱,۴)$ و $C = (-۱,۱,۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.	۱/۵
۱۶	برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b} = ۰$.	۱
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- A

۲- الف) درست؛ خاصیت توزیع‌پذیری در ماتریس‌ها برقرار است.

ب) نادرست؛ زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. در نتیجه اتحادهای جبری برقرار نیستند.

پ) نادرست؛ زیرا $|A| = ۱۲ - ۱۲ = ۰$. می‌دانیم شرط وارون‌پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A| \neq ۰$ باشد.

ت) درست؛ دترمینان روی ضرب ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باز می‌شود.

۳- i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است. $۱ \le i,j \le ۳$.

$a_{۱۱} = ۲(۱)+۳(۱) = ۵$ $\quad a_{۱۲} = ۲(۱)+۳(۲) = ۸$

$a_{۱۳} = ۲(۱)+۳(۳) = ۱۱$ $\quad a_{۲۱} = ۲(۲)+۳(۱) = ۷$

$a_{۲۲} = ۲(۲)+۳(۲) = ۱۰$ $\quad a_{۲۳} = ۲(۲)+۳(۳) = ۱۳$

$a_{۳۱} = ۲(۳)+۳(۱) = ۹$ $\quad a_{۳۲} = ۲(۳)+۳(۲) = ۱۲$

$a_{۳۳} = ۲(۳)+۳(۳) = ۱۵$

در نتیجه ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۸ & ۱۱ \\ ۷ & ۱۰ & ۱۳ \\ ۹ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$ خواهد بود. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی یعنی:

$$a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳} = ۵+۱۰+۱۵ = ۳۰$$

۴- $A^۲$ یعنی A را دو بار در خودش ضرب کنیم:

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

$۴A$ یعنی عدد ۴ را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$۴A = ۴\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۴ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۴ \end{bmatrix}$$

$I_۳$ ماتریس همانی مرتبهٔ ۳×۳، $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است و $۵I_۳$ برابر است با $\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$

در نتیجه:

$$A^۲ - ۴A - ۵I_۳ = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۴ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

اگر عملیات تفریق را روی درایه‌های نظیر به نظیر انجام دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A^۲ - ۴A - ۵I_۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \bar{۰}$$

۵- برای دو ماتریس غیرصفر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$، حاصل‌ضرب AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \bar{۰}$$

یعنی ممکن است حاصل‌ضرب دو ماتریس غیرصفر، ماتریس صفر بشود.

۶- می‌دانیم توان از دترمینان خارج می‌شود، یعنی $|A^۴| = |A|^۴$. همچنین $|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$

در نتیجه:

$$|A^۴| - ۴|A^{-۱}| + ۳ = |A|^۴ - ۴\times\frac{۱}{|A|} + ۳$$

$$= (-۲)^۴ - ۴\times\frac{۱}{-۲} + ۳ = ۱۶+۲+۳ = ۲۱$$

۷-

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۳-(-۲) = ۵ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow ۵A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = ۴-۳ = ۱ \Rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$۵A^{-۱} + B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{درایه‌ها}]{\text{جمع‌نظیربه‌نظیر}} \begin{bmatrix} ۷ & -۳ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

۸- ساروس:

$$|A| = \left|\begin{matrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{matrix}\right| \begin{matrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & -۱ \\ ۴ & ۵ \end{matrix}$$

$$= (+۲+۶۰+۷۰) - (-۲۸+۱۵-۲۰) = ۱۳۲ - (-۳۳) = ۱۳۲+۳۳ = ۱۶۵$$

بسط ستون اول:

$$|A| = ۱\times(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۵ & -۲ \end{vmatrix} + ۲\times(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۵ & ۷ \\ ۵ & -۲ \end{vmatrix} + ۴\times(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۵ & ۷ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$= ۱(۲-۱۵) - ۲(-۱۰-۳۵) + ۴(۱۵+۷) = -۱۳+۹۰+۸۸ = ۱۶۵$$

۹- برای این‌که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید نسبت ضرایب با هم برابر باشند یعنی:

$$\underbrace{\frac{۲}{a} = \frac{۳}{-۱}} = \frac{۴}{۲a}$$

از حل تناسب اول داریم:

$$۳a = -۲ \Rightarrow a = -\frac{۲}{۳}$$

با جای‌گذاری $a = -\frac{۲}{۳}$، هر سه کسر با هم برابرند.

$$\frac{۲}{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{-۱} = \frac{۴}{۲(-\frac{۲}{۳})} \Rightarrow -۳ = -۳ = -۳$$

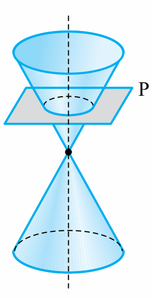
بنابراین به ازای $a = -\frac{۲}{۳}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (توجه کنید اگر تساوی بین کسرها برقرار نمی‌شد، آن‌گاه دستگاه به ازای هیچ مقدار a، دارای بی‌شمار جواب نبود.)

۱۰- الف) از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

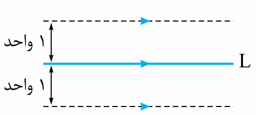
ب) $a^۲+b^۲ > ۴c$

پ) در دو نقطه متقاطع‌اند.

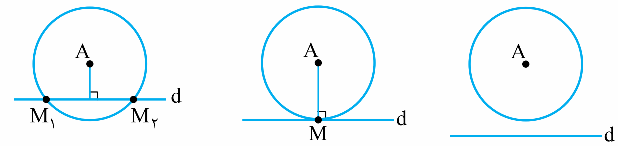
۱۱- دایره



۱۲- دو خط موازی با خط L و به فاصلهٔ ۱ واحد از آن، که در دو طرف خط L هستند.



۱۳- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم L باشد دایره‌ای به مرکز A و شعاع L است. اگر این دایره خط d را در دو نقطه قطع کند، آن دو نقطه، نقطه‌های مطلوب هستند و مسئله دارای دو جواب است. اگر این دایره بر خط d مماس باشد، نقطهٔ تماس، نقطهٔ مطلوب است و مسئله دارای یک جواب است. اگر این دایره، خط d را قطع نکند، مسئله دارای جواب نیست.

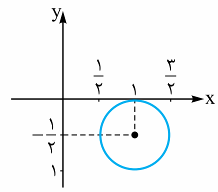


(مسئله جواب ندارد.) (M تنها جواب مسئله است.) ($M_۱$ و $M_۲$ دو جواب مسئله هستند.)

۱۴- الف) ابتدا معادلهٔ دایره را استاندارد می‌کنیم، در پرانتز دوم از ضریب y فاکتور می‌گیریم:

$$۴(x-۱)^۲+۴(y+\frac{۱}{۲})^۲=۱ \xrightarrow{\div ۴} (x-۱)^۲+(y+\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

ریشهٔ داخل پرانتزها، مرکز دایره را تشکیل می‌دهند و جذر مقدار ثابت، همان شعاع دایره خواهد بود.



$$O(۱,-\frac{۱}{۲}) \ , \ R=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

ب) $S_{دایره}=\pi R^۲=\pi(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{\pi}{۴}$

۱۵- xها را کنار هم و yها را کنار هم قرار می‌دهیم. سپس هر پرانتز را مربع کامل می‌کنیم:

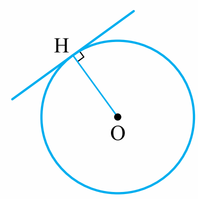
$$(x^۲+۲x)+(y^۲-۴y)=۰ \Rightarrow (\underbrace{x^۲+۲x+۱}_{اتحاد}-۱)+(\underbrace{y^۲-۴y+۴}_{اتحاد}-۴)=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲-۱+(y-۲)^۲-۴=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۵$$

ریشهٔ داخل پرانتزها مرکز و جذر مقدار ثابت، شعاع دایره است.

$$\left.\begin{array}{l} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ y-۲=۰ \Rightarrow y=۲\end{array}\right\} \Rightarrow O(-۱,۲) \ , \ R=\sqrt{۵}$$

۱۶- برای این‌که خط بر دایره مماس شود، باید فاصلهٔ خط تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، یعنی $OH = R$.



$$۲x^۲+۲y^۲-۳x+y=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}y=۰$$

$$O=(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})=(-\frac{-\frac{۳}{۲}}{۲},-\frac{\frac{۱}{۲}}{۲})=(\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۴})$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}-۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

$$OH = \text{فاصلهٔ مرکز دایره تا خط} = \frac{|۳(\frac{۳}{۴})-\frac{۱}{۴}-a|}{\sqrt{۹+۱}}=\frac{|۲-a|}{\sqrt{۱۰}}$$

باید $\frac{|۲-a|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$، پس: $|۲-a|=\frac{۱۰}{۴}$؛ در نتیجه $|۲-a|=\frac{۵}{۲}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲-a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \\ ۲-a=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow a=\frac{۹}{۲}\end{cases}$$

۱۷- ابتدا باید مرکز و شعاع دو دایره را مشخص کنیم. در دایرهٔ اول:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱=۰$$

قرینهٔ نصف ضریب x و ضریب y مرکز را تشکیل می‌دهند:

$$O=(-\frac{(-۲)}{۲},-\frac{۴}{۲})=(۱,-۲)$$

همچنین شعاع دایرهٔ اول برابر است با: $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۴}=\sqrt{۶}$

برای دایرهٔ دوم نیز داریم: $O'(-\frac{۴}{۲},-\frac{۲}{۲})=(-۲,-۱)$

$$R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴-۴}=۲$$

اکنون طول پاره‌خط OO' را محاسبه می‌کنیم:

$$OO'=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

چون $\sqrt{۶}-۲<\overbrace{OO'}^{\sqrt{۱۰}}<۲+\sqrt{۶}$ $(|R-R'|<OO'<R+R')$ است پس دو دایره متقاطع‌اند.

آزمون شمارهٔ ۲ (نوبت اول)

۱- الف) حاصلضرب $A\times B$ زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A (n) با تعداد سطرهای B (۲) برابر باشد و مرتبهٔ $A\times B$ از حذف این مقدار مساوی حاصل می‌شود؛ در نتیجه $n=۲$ و مرتبهٔ $A\times B$ برابر ۴×۳ است.

ب) $|A|=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

پ) صفر (کافی است برای به دست آوردن دترمینان، از بسط این سطر استفاده کنیم، آن‌گاه واضح است که مقدار دترمینان صفر است.)

۲- الف) درست

ب) نادرست؛ (قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها لزوماً برقرار نیست.)

۳- i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است. طبق فرض در ماتریس A، $i=۱,۲$ و $j=۱,۲,۳$ هستند.

طبق فرض:
$$\left.\begin{array}{ll} a_{۱۱}=۱^۲+۱=۲ & , \ a_{۱۲}=۱+۲-۱=۲ \\ a_{۱۳}=۱+۳-۱=۳ & , \ a_{۲۱}=۲-۱=۱ \\ a_{۲۲}=۲^۲+۱=۵ & , \ a_{۲۳}=۲+۳-۱=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ & ۴ \end{bmatrix}$$

در ماتریس B، $i=۱,۲,۳$ و $j=۱,۲$ هستند.

$$\left.\begin{array}{ll} b_{۱۱}=۲(۱)-۱=۱ & , \ b_{۱۲}=۱+۲=۳ \\ b_{۲۱}=۲^۲-۱=۳ & , \ b_{۲۲}=۲(۲)-۲=۲ \\ b_{۳۱}=۳^۲-۱=۸ & , \ b_{۳۲}=۳^۲-۲=۷ \end{array}\right\} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ \\ ۸ & ۷ \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس AB را تشکیل می‌دهیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ \\ ۸ & ۷ \end{bmatrix}_{۳\times۲}=\begin{bmatrix} ۳۲ & ۳۱ \\ ۴۸ & ۴۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

۴- $-۲A$ یعنی عدد -۲ را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$-۲A=\begin{bmatrix} -۴ & +۲ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس I را باید $I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، پس $۳I=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ در نتیجه:

$$-۲A-۳I=\begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

درایه‌ها را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم:

$$-۲A-۳I=\begin{bmatrix} -۷ & ۲ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

و در آخر:

$$(-۲A-۳I)+B=\begin{bmatrix} -۷ & ۲ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

از جمع‌کردن درایه‌های نظیر به نظیر داریم: $\begin{bmatrix} -۴ & ۶ \\ -۳ & -۱ \end{bmatrix}$ که جواب نهایی عبارت داده شده است.

۵- ابتدا $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۳ & x \\ y & -۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶+x & -۳+x \\ ۲y-۲ & -y-۲ \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

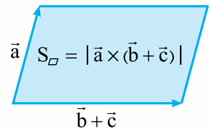
۱۴- اگر $\vec a$ و $\vec b$ در یک راستا باشند، آن‌گاه بردار $\vec a$ مضربی از بردار $\vec b$ است. $\vec a = r\vec b$

$$\vec a' = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^۲}\vec b \Rightarrow \vec a' = \frac{r\vec b\cdot\vec b}{|\vec b|^۲}\vec b = \frac{r\,\cancel{|\vec b|^۲}}{\cancel{|\vec b|^۲}}\vec b = r\vec b=\vec a \Rightarrow \vec a'=\vec a$$

۱۵- الف) $\vec a=(۲,۳,-۱)$, $\vec b=(۱,۰,۱)$, $\vec c=(۰,۲,۱)$

$$۲\vec b-\vec c = (۲,۰,۲)-(۰,۲,۱)=(۲,-۲,۱)\Rightarrow |۲\vec b-\vec c|=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$$

ب)



$$\vec a\times(\vec b+\vec c) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k\\ ۲&۳&-۱\\ ۱&۲&۲\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec i&\vec j\\ ۲&۳\\ ۱&۲\end{matrix} = (۶\vec i - \vec j + ۴\vec k) - (۳\vec k - ۲\vec i + ۴\vec j)$$

$$=۸\vec i -۵\vec j+\vec k = (۸,-۵,۱)$$

$$S=|\vec a\times(\vec b+\vec c)|=\sqrt{۶۴+۲۵+۱}=\sqrt{۹۰}=۳\sqrt{۱۰}$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) در ماتریس همانی، درایه‌های روی قطر اصلی ۱ و خارج قطر اصلی صفر هستند پس: $r=۱, m-۱=۰ \Rightarrow m=۱ \Rightarrow m+r=۱+۱=۲$

ب) دایره

پ) فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,-۲)$ از مرکز دایرهٔ $O(۱,-۱)$ برابر است با: $OA=\sqrt{۰+۱}=۱$

و شعاع دایره نیز برابر $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۰}=\sqrt{۲}$ است. چون $OA<R$ پس A **داخل** دایره است.

ت) $V=|a.(b\times c)|=۰$

(شرط هم‌صفحه‌بودن سه بردار)

۲- الف) درست

ب) درست

$$\begin{cases}|۲A|=۲^۳|A|=۸\times۵=۴۰\\ A_{۳\times۳}\end{cases}$$

پ) نادرست؛ طبق خاصیت بازتابندگی در بیضی، $\alpha=\beta$. چون $F\hat{M}F'=۵۰^\circ$، پس:

$$\alpha+\beta+۵۰=۱۸۰ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۳۰\Rightarrow \alpha=\beta=۶۵$$

ت) نادرست $\vec i\times\vec j=\vec k$

۳- ابتدا $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم سپس درایه‌های خارج قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴&a\\ b&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\ ۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a&-۸+۲a\\ b-۳&-۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

۴- الف)

$$A=[a_{ij}]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}&a_{۱۳}\\ a_{۲۱}&a_{۲۲}&a_{۲۳}\\ a_{۳۱}&a_{۳۲}&a_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰&۰\\ ۱&۴&۰\\ ۱&۲&۶\end{bmatrix}$$

ب)

$$|B|=\begin{vmatrix}۲&۱&۰\\ -۱&۳&۲\\ ۲&۰&۵\end{vmatrix}\begin{matrix}۲&۱\\ -۱&۳\\ ۲&۰\end{matrix}$$

$$=(۳۰+۴+۰)-(۰+۰-۵)=۳۴+۵=۳۹$$

۵-

$$\begin{cases}۲x+y=۴\\ ۷x+۴y=۱۵\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}۲&۱\\ ۷&۴\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۸-۷=۱$$

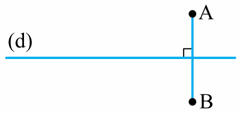
$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۴&-۱\\ -۷&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۱\\ -۷&۲\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}$$

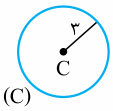
$$AX=B\Rightarrow X=A^{-۱}\times B$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۴&-۱\\ -۷&۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=۲\end{cases}$$

۶- مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است (d).

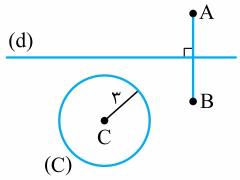


مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است.



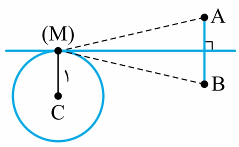
اکنون وضعیت خط d و دایرهٔ (C) را بررسی می‌کنیم:

الف) خط d دایره را قطع نمی‌کند. (مسئله جواب ندارد.)

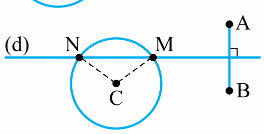


ب) خط d بر دایره مماس است. (پس مسئله یک جواب دارد.)

$MA=MB, MC=۱$



پ) خط d دایره را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند. (پس مسئله دو جواب دارد.)



$MA=MB$

$NA=NB$

$MC=NC=۱$

۷- چون خط بر دایره مماس است پس فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع است.

$$R=\frac{|۳(۱)-۴(-۱)+۳|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲\xrightarrow{\text{معادلهٔ دایره}}(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

۸- الف) $۲a=۱۰\Rightarrow a=۵$ $\quad$ $۲b=۶\Rightarrow b=۳$

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow c^۲=۲۵-۹=۱۶\Rightarrow c=۴$$

خروج از مرکز برابر است با: $\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$

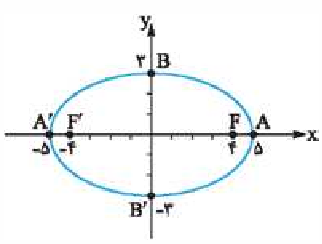
ب) چون بیضی افقی است پس:

$A=(۰+a,۰)=(۵,۰)$ $\quad$ $A'=(۰-a,۰)=(-۵,۰)$

$B=(۰,۰+b)=(۰,۳)$ $\quad$ $B'=(۰,۰-b)=(۰,-۳)$

$F=(۰+c,۰)=(۴,۰)$ $\quad$ $F'=(۰-c,۰)=(-۴,۰)$

پ)



۹- الف) $y^۲-۲y=۸x-۹\Rightarrow\underbrace{y^۲-۲y+۱}-۱=۸x-۹$

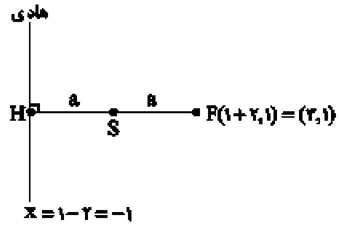
$$\Rightarrow(y-۱)^۲=۸x-۸\Rightarrow(y-۱)^۲=۸(x-۱)$$

ب) از مقایسهٔ معادلهٔ بالا با معادلهٔ کلی سهمی افقی $(y-k)^۲=۴a(x-h)$، داریم:

$$\begin{cases}h=۱\\ k=۱\end{cases}\Rightarrow S=(۱,۱)$$

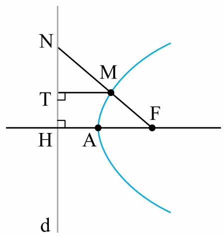
$$۴a=۸\Rightarrow a=۲$$

چون $a > ۰$ پس سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست باز می‌شود.



۱۰-

چون M روی سهمی است، پس $MT = MF$.
چون A روی سهمی است، پس $AH = AF$.
از طرفی چون MT و AH هر دو بر خط d عمودند پس با هم موازی‌اند.



قضیهٔ تالس را در $\overset{\Delta}{NHF}$ می‌نویسیم:

$$(۱)\ \frac{NT}{TH} = \frac{NM}{MF} \xleftarrow{\text{تالس جزء به جزء}} \qquad (۲)\ \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{NF} \xleftarrow{\text{تالس جزء به کل}}$$

در تساوی (۲) قرار دهید: $MT = MF$

$$\Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{MF}{FH}$$

با جابه‌جایی MF و NF داریم:

$$\frac{NM}{MF} = \frac{NF}{FH} \quad (۳)$$

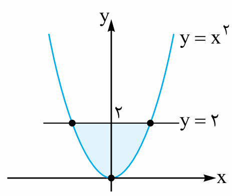
اکنون تساوی (۳) را با تساوی (۱) مقایسه کنید:
طرف چپ دو تساوی یکسان است پس:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH}$$

قرار دهید: $FH = ۲FA$

$$\Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

۱۱- داخل سهمی $y = x^۲$ و پایین خط $y = ۲$ مد نظر است.



۱۲- الف)
$$CDFG = \begin{cases} x = ۲ \\ ۰ \le y \le ۴ \\ ۰ \le z \le ۳ \end{cases}$$

ب)
$$AD = \begin{cases} ۰ \le x \le ۲ \\ y = ۴ \\ z = ۳ \end{cases}$$

پ) $D = (۲,۴,۳)$

ت) $y = ۲$

۱۳- $\vec{a} = (۲,۳,-۱) \qquad \vec{b} = (۱,۰,۱) \qquad \vec{c} = (۰,۲,۱)$

الف) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{۲+۰-۱}{\sqrt{۴+۹+۱}\times\sqrt{۱+۰+۱}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲۸}} = \dfrac{۱}{۲\sqrt{۷}}$

ب) $\vec{a}' = \dfrac{\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})}{|\vec{b}-\vec{c}|^۲}(\vec{b}-\vec{c})$

$$\vec{b}-\vec{c} = (۱,۰,۱)-(۰,۲,۱) = (۱,-۲,۰)$$

$$|\vec{b}-\vec{c}| = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵}$$

$$\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c}) = (۲,۳,-۱).(۱,-۲,۰) = ۲+(-۶)+۰ = -۴$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = \frac{-۴}{۵}(۱,-۲,۰) = (-\frac{۴}{۵},\frac{۸}{۵},۰)$$

۱۴- $|۲\vec{a}\times\vec{b}| = ۲|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = ۲\times۶\times۴\times\sin ۳۰^\circ$

$$= ۲\times۶\times۴\times\frac{۱}{۲} = ۲۴$$

۱۵- به کمک سه نقطهٔ داده‌شده دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را می‌سازیم:

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB} = \text{ابتدا} - \text{انتها} = (۳-۲,۱+۱,۴-۳) = (۱,۲,۱)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-۱-۲,۱+۱,۰-۳) = (-۳,۲,-۳)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ -۳ & ۲ & -۳ \end{vmatrix} = (-۸,۰,۸)$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۶۴+۰+۶۴} = ۸\sqrt{۲}$$

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲}\times۸\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

۱۶- $\vec{a}.\vec{b} = ۰ \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ۰ \xleftrightarrow[|b|\neq ۰]{|a|\neq ۰} \cos\theta = ۰$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{۲} \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

آزمون شمارهٔ ۱۰ (نوبت دوم)

۱-
$$A+B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+۱ & y+۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۸ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+۳ & y+۵ \\ ۸ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+۳ = ۵ \Rightarrow x = ۲ \\ y+۵ = ۴ \Rightarrow y = -۱ \end{cases}$$

۲-
$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱\times۱\times۱ = ۱$$

$$k|kA| = k\times k^۳|A| = k^۴|A| = ۶۲۵$$

$$\Rightarrow k^۴\times۱ = ۶۲۵ \Rightarrow k = \pm۵$$

۳-
$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}}_{B} A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

چون $|B| = ۱۵-۱۴ = ۱$ مخالف صفر است، پس ماتریس B وارون دارد. طرفین تساوی را از چپ در وارون B ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{B^{-۱}B}_{I}A = B^{-۱}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow IA = B^{-۱}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = B^{-۱}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

از طرفی وارون B برابر است با:

$$B^{-۱} = \frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۷ & ۴ \\ ۱۷ & -۹ \end{bmatrix}$$

۴- قرار دهید $|A| = x$، سپس به روش ساروس دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} |A| & ۰ & ۱ \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & ۰ & ۱ \\ ۱ & x & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} x & ۰ & ۱ & x & ۰ \\ ۱ & x & ۱ & ۱ & x \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰ & ۲ \end{array}\right|$$

فصل ۱: ماتریس و کاربرد

درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و ... نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ \sqrt{2} & 0/5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ \sqrt{3}\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

تعریف مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم «A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ است». مثلاً ماتریس $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 5 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳ سطری و ۲ ستونی است، بنابراین مرتبه‌اش ۲ × ۳ است.

تذکر نمایش کلی ماتریس A به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است، که a_{ij} ها درایهٔ واقع در سطر i و ستون j هستند. m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها می‌باشد.

مثلاً:

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{2\times3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix} \qquad A_{3\times3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

مثال ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times3}$ به صورت $a_{ij}=2i-j$ تعریف شده است. ماتریس A را با درایه‌هایش بنویسید.

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$$

برای درایهٔ a_{11} داریم: $i=1, j=1$ پس: $a_{11}=2(1)-1=1$

برای درایهٔ a_{12} داریم: $i=1, j=2$ پس: $a_{12}=2(1)-2=0$

و به همین ترتیب: $a_{21}=2(2)-1=3$ ، $a_{13}=2(1)-3=-1$

$a_{23}=2(2)-3=1$ ، $a_{22}=2(2)-2=2$

در نتیجه ماتریس A به صورت مقابل است: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

معرفی چند ماتریس خاص

۱ **ماتریس سطری**: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. مانند $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\end{bmatrix}_{1\times3}$.

۲ **ماتریس ستونی**: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مانند $A=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\ 3\\ 1\end{bmatrix}_{3\times1}$.

۳ **ماتریس مربعی**: ماتریسی که تعداد سطرهای آن با تعداد ستون‌های آن برابر باشد را ماتریس مربعی مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. مانند: $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}$ یا $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}$.

نکته در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که شمارهٔ سطر و ستون برابر دارند $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots)$ را درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس‌های مربعی بالا، به‌ترتیب قطرهای اصلی $\begin{matrix}2 & \\ & 1\end{matrix}$ و $\begin{matrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & 9\end{matrix}$ هستند.

۴ **ماتریس قطری**: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند (درایه‌های روی قطر اصلی دلخواه هستند) را ماتریس قطری می‌نامیم. مانند:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}_{3\times3} \qquad A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}$$

۵ **ماتریس اسکالر**: ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامیم. مانند:

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

نکتهٔ مهم در حالت خاص اگر درایه‌های روی قطر اصلی همه برابر ۱ باشند، آن ماتریس را همانی نامیده و با I نشان می‌دهند.

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times3} \qquad I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}$$

۶ **ماتریس صفر**: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. مانند: $\bar{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند، یعنی برای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$ باشد.

مثال مقادیر a و b را طوری بیابید که دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & 2+b\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1-b & 1\\ a+b & -1\end{bmatrix}$ با هم برابر باشند.

پاسخ هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲ × ۲ هستند (پس هم‌مرتبه‌اند). اکنون باید درایه‌های نظیربه‌نظیر را برابر هم قرار دهیم:

$$\begin{cases}1-b=a \Rightarrow a+b=1\\ 1=2+b \Rightarrow b=-1\end{cases} \Rightarrow a=2$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع و تفریق دو ماتریس اولاً باید دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، ثانیاً: درایه‌ها را نظیربه‌نظیر با هم جمع یا تفریق می‌کنیم. مانند:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد حقیقی r و ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب عدد r در ماتریس A را با نماد rA نمایش می‌دهیم که r در همهٔ درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود.

$$rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

مثال **اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $۲A+۳B$ را به دست آورید.**

پاسخ عدد ۲ را در تمام درایه‌های ماتریس A و عدد ۳ را در تمام درایه‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$۲A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۲ & ۴\end{bmatrix} \qquad ۳B=\begin{bmatrix}۹ & ۰\\ -۳ & ۳\end{bmatrix}$$

$$۲A+۳B=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۹ & ۰\\ -۳ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۰\\ -۱ & ۷\end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A_{m\times n}$، آن‌گاه قرینهٔ ماتریس A، از ضرب عدد ۱− در ماتریس A به وجود می‌آید و آن را با $-A$ نمایش می‌دهیم.

توجه شود که $A+(-A)=\bar{O}$.

تذکر به کمک قرینهٔ یک ماتریس می‌توان تفاضل دو ماتریس را به صورت زیر تعریف کرد: $A-B=A+(-B)$

خواص جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A و B و C سه ماتریس هم‌مرتبهٔ $m\times n$ بوده، r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی جمع)

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (عضو قرینه)

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۷) $A=B \Rightarrow rA=rB$

۸) $\begin{cases} rA=rB\\ r\neq ۰\end{cases} \Rightarrow A=B$

اثبات خاصیت‌های (۵) و (۶):

اثبات (۵): فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$.

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r([a_{ij}\pm b_{ij}])=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]$$
$$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]=rA\pm rB$$

اثبات (۶): فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]$.

$$(r\pm s)A=(r\pm s)[a_{ij}]=[(r\pm s)a_{ij}]=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[sa_{ij}]$$
$$=r[a_{ij}]\pm s[a_{ij}]=rA\pm sA$$

ضرب ماتریس‌ها

دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب A در B، یعنی AB زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد (n). آن‌گاه ماتریس AB از مرتبهٔ $m\times p$ است. نکتهٔ مهم این‌که، برای پیداکردن درایهٔ سطر i و ستون j حاصل‌ضرب AB، باید درایه‌های سطر iام ماتریس A را نظیربه‌نظیر در درایه‌های نظیرش در ستون jام ماتریس B ضرب کنیم، سپس حاصل آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال **اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۳ & -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ -۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$، ماتریس BA را محاسبه کنید.**

پاسخ تعداد ستون‌های B (۳تا) با تعداد سطرهای A (۳تا) برابر است، پس ضرب BA تعریف شده است. برای محاسبهٔ ماتریس BA، باید درایه‌های هر سطر B را در درایه‌های متناظر در هر ستون A ضرب کنیم:

$$BA=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ -۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}_{۲\times ۳}\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۳ & -۲ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix}۷ & -۵ & ۲\\ ۸ & -۵ & ۳\end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$

مثلاً درایهٔ سطر اول و ستون اول BA به صورت زیر محاسبه شده است:

$$۱\times ۱+۰\times ۲+۲\times ۳=۷$$

تذکر توجه شود که در مثال بالا ماتریس AB تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های A (۳تا) با تعداد سطرهای B (۲تا) برابر نیست.

سه خاصیت مهم ضرب ماتریس‌ها

۱) ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی: $A\times B\neq B\times A$

اما در حالت خاص ضرب ماتریس I (همانی) در هر ماتریس مربعی دلخواه (با شرط هم‌مرتبه بودن با I) خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی: $A\times I=I\times A=A$

در واقع ماتریس همانی I، در عملیات ضرب ماتریس‌ها عضو خنثی است.

۲) ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

۳) ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

تذکر دقت کنید که همیشه باید حواسمان باشد که ضرب دو ماتریس تعریف شده باشد.

دو نکتهٔ مهم دربارهٔ ضرب ماتریس‌ها

۱) اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند و $AB=\bar{O}$، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$. به بیان دیگر می‌توان دو ماتریس ناصفر A و B یافت، به طوری که ضرب آن‌ها برابر ماتریس صفر شود.

مثال **دو ماتریس ناصفر ۲×۲ مثال بزنید که ضرب آن‌ها ماتریس صفر شود.**

پاسخ اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه AB برابر است با:

$$AB=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

۲) قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

مثلاً اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$؛ آن‌گاه $AB=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ و $AC=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ اما $B\neq C$.

تذکر **توان در ماتریس:** منظور از ماتریس A^n این است که ماتریس A را n بار در خودش ضرب کنیم. طبیعی است ماتریسی قابل ضرب‌کردن در خودش است که مربعی باشد. پس توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.

$$A^۲=A\times A$$
$$A^۳=A\times A\times A$$
$$\vdots$$

نکته اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبهٔ توان آن، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم.

$$A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}a^n & ۰ & ۰\\ ۰ & b^n & ۰\\ ۰ & ۰ & c^n\end{bmatrix}$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۲-۲A$ را بیابید.

پاسخ

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۲\\-۲&-۱\end{bmatrix}$$

$$۲A=\begin{bmatrix}۴&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۲A=\begin{bmatrix}۳&۲\\-۲&-۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=-I$$

درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان

تعریف برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است، به طوری که $AB=BA=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$$

تذکر وارون ماتریس A در صورت وجود منحصر به فرد است.

نحوهٔ محاسبهٔ وارون ماتریس ۲×۲

وارون ماتریس ۲×۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}\quad,\quad ad-bc\neq ۰}$$

مقدار $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A نامیده و با $|A|$ نشان می‌دهیم.

$$|A|=ad-bc$$

توجه شود که محاسبات بالا، فقط برای ماتریس‌های ۲×۲ است.

تذکر مهم مقدار $|A|$ در محاسبهٔ $A^{-۱}$ در مخرج کسر ظاهر می‌شود، پس شرط وارون‌پذیری ماتریس A، آن است که $|A|\neq ۰$.

مثال وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$ را در صورت وجود محاسبه کرده، سپس پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

پاسخ ابتدا دترمینان A را محاسبه می‌کنیم: $|A|=۳-(-۲)=۵\neq ۰$

پس ماتریس A وارون‌پذیر است. $A^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}$

برای امتحان‌کردن پاسخ باید $A^{-۱}A$ و $AA^{-۱}$ برابر با ماتریس همانی I شود:

$$A^{-۱}A=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۵&۰\\۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

$$AA^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}\times\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۵&۰\\۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۴&۱\\۳&۱\end{bmatrix}$ ماتریس $(A^{-۱})^{-۱}$ را محاسبه کنید.

پاسخ باید از A دو بار وارون بگیریم. حدس ما این است که ماتریس اولیه حاصل شود.

$$|A|=۴-۳=۱\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۳&۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۳&۴\end{bmatrix}$$

حال وارونِ $A^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم: $|A^{-۱}|=۴-۳=۱$

$$(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۴&۱\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۱\\۳&۱\end{bmatrix}=A$$

در نتیجه: $(A^{-۱})^{-۱}=A$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس وارون

یک دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت: $\begin{cases}ax+by=e\\cx+dy=f\end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

فرمِ ماتریسی دستگاه به صورت زیر است:

نماد ماتریس ضرایب = A

نماد ماتریس مجهولات = X

نماد ماتریس جواب = B

$\Rightarrow AX=B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مجهولات}}=\underbrace{\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جواب}}$$

برای حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول به روش ماتریس وارون، ابتدا فرم ماتریسی دستگاه را می‌نویسیم: $AX=B$

سپس اگر A وارون‌پذیر باشد، وارونِ A را از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$X=A^{-۱}B$$

مثال دستگاه $\begin{cases}۲x+y=-۳\\x+۳y=۱\end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ ماتریس ضرایب $=A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۳\end{bmatrix}$

ماتریس جواب $=B=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات $=X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

فرم ماتریسی دستگاه: $\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}\Rightarrow AX=B\Rightarrow X=A^{-۱}B$

بنابراین باید وارون A را محاسبه کنیم: $|A|=۶-۱=۵$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵}&\frac{-۱}{۵}\\\frac{-۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}$$

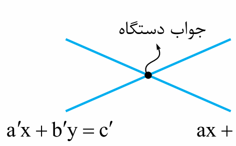
$$X=A^{-۱}B=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵}&\frac{-۱}{۵}\\\frac{-۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-۱۰}{۵}\\\frac{۵}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}\Rightarrow x=-۲,y=۱$$

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول

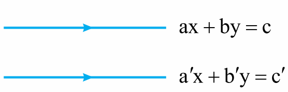
یک دستگاه دو معادله دو مجهول، از دو معادله تشکیل می‌شود، هر معادله یک خط است. منظور از حل دستگاه، بررسی وضعیت نسبی این دو خط است که سه حالت خواهد داشت: موازی، منطبق و متقاطع.

دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم:

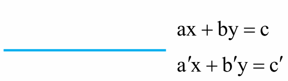
الف اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد، آن‌گاه دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب دارد که مختصات همان نقطهٔ تقاطع دو خط است.



ب اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط با هم موازی‌اند و دستگاه فاقد جواب است.



پ اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط بر هم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.



نکته مهم اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله دو مجهول را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

اگر $|A|\neq 0$ باشد، آن‌گاه دستگاه یک جواب دارد (دو خط متقاطع‌اند).

اگر $|A|=0$ باشد، آن‌گاه دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی) یا دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط منطبق‌اند).

مثال **بررسی کنید دستگاه** $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 6x-4y=1 \end{cases}$ **دارای چند جواب است؟**

پاسخ کافی است نسبت‌ها را تشکیل دهیم: $\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{3}{1}$

حالت موازی‌بودن رخ می‌دهد، پس دستگاه فاقد جواب است.

توجه شود که در این حالت دترمینان ماتریس ضرایب صفر است.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-12+12=0$$

مثال **مقدار m را چنان تعیین کنید که دستگاه** $\begin{cases} x+2y=5 \\ mx-3y=1 \end{cases}$**، جواب منحصر به فرد داشته باشد.**

پاسخ کافی است: $\frac{1}{m}\neq\frac{2}{-3}$

یعنی اگر $m\neq\frac{-3}{2}$ باشد، دستگاه دارای جواب منحصر به فرد است.

دترمینان

۱ ماتریس ۱×۱: $\boxed{A=[a] \Rightarrow |A|=a}$

مثلاً: $A=[2] \Rightarrow |A|=2$

۲ ماتریس ۲×۲: $\boxed{A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc}$

مثلاً: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-2-3=-5$

۳ ماتریس ۳×۳:

قطر اصلی　　　قطر فرعی

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس $A_{3\times3}$ روبه‌رو را در نظر بگیریم، آن‌گاه دو روش برای محاسبهٔ دترمینان A وجود دارد:

روش اول: ساروس

در این روش، ستون‌های اول و دوم را کنار ماتریس می‌نویسیم و دترمینان A برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو قطر موازی آن.

مثال **دترمینان ماتریس زیر را به روش ساروس محاسبه کنید.**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

پاسخ ستون‌های اول و دوم را دوباره می‌نویسیم:

$$|A|=\left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}=(-2-6+0)-(1+3+0)=-8-4=-12$$

روش دوم: دترمینان برحسب سطر یا ستون دلخواه

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. دترمینان این ماتریس برحسب سطر اول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|A|=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

یعنی هر درایه از سطر اول مانند a_{1j} را در $(-1)^{1+j}$ ضرب کرده و سپس آن را در دترمینان ماتریس ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستونی که درایه روی آن قرار دارد، ضرب می‌کنیم. حال اگر بخواهیم دترمینان را برحسب ستون سوم پیدا کنیم، داریم:

$$|A|=a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}+a_{23}\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$+a_{33}\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

توجه داشته باشیم که در محاسبهٔ دترمینان برحسب سطر یا ستون دلخواه، حتماً باید به جواب یکسان برسیم.

مثال **دترمینان ماتریس مثال قبل را یک بار با سطر اول و یک بار ستون سوم مجدداً محاسبه کنید.**

پاسخ برحسب سطر اول:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 1 \quad -2 \end{vmatrix}=?$$

$$|A|=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=1(-2-3)-2(0+3)-1(0+1)=-5-6-1=-12$$

برحسب ستون سوم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 & \boxed{3} \\ -1 & 1 & \boxed{-2} \end{vmatrix}$$

$$|A|=-1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$-2\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=-1(0+1)-3(1+2)-2(1-0)=-1-9-2=-12$$

نکته دترمینان ماتریس‌های قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی. مثلاً:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\times(-1)\times2=-2$$

نکته اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد و k یک عدد حقیقی آن‌گاه: $|kA|=k^n|A|$

به بیان فارسی: اگر عدد k در ماتریس A ضرب شده باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس kA برابر است با ضرب عددِ k^n در دترمینان ماتریس A.

مثال اگر $|A| = ۲$ و $A_{۳\times۳}$ دترمینان ماتریس $۴A$ را محاسبه کنید.

پاسخ
$$\begin{cases} |۴A| = ۴^۳|A| = ۴^۳\times ۲ = ۱۲۸ \\ A_{۳\times۳} \end{cases}$$

نکته اگر $A^{-۱}$ وارون ماتریس A باشد آن‌گاه دترمینان آن معکوس دترمینان A است. مثلاً اگر $|A| = ۵$ باشد، آن‌گاه $|A^{-۱}| = \frac{۱}{۵}$ است.

مثال **اگر A ماتریسی ۳×۳ و $|A| = -۲$ باشد، آن‌گاه حاصل $|۵A^{-۱}|$ را بیابید.**

پاسخ
$$\begin{cases} |۵A^{-۱}| = ۵^۳|A^{-۱}| = ۵^۳\times\frac{۱}{|A|} = ۱۲۵\times\frac{۱}{-۲} = \frac{-۱۲۵}{۲} \\ A_{۳\times۳} \end{cases}$$

مثال اگر $A = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} |A| & -۱ \\ ۴ & |A| \end{bmatrix}$ آن‌گاه $|A|$ را محاسبه کنید.

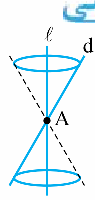
پاسخ
$$A = \begin{bmatrix} \frac{|A|}{۲} & \frac{-۱}{۲} \\ ۲ & \frac{|A|}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{|A|}{۲}\times\frac{|A|}{۲} - ۲\times(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{|A|^۲}{۴} + ۱ \xrightarrow{\times۴} |A|^۲ - ۴|A| + ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(اتحاد مربع دوجمله‌ای)}} (|A| - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow |A| - ۲ = ۰ \Rightarrow |A| = ۲$$

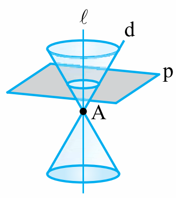
فصل ۲ آشنایی با مقاطع مخروطی

درس ۱: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی



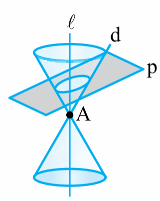
تعریف رویهٔ مخروطی: فرض کنید دو خط d و ℓ در نقطهٔ A متقاطع‌اند (غیرعمودند). سطح حاصل از دوران d حول ℓ را یک رویهٔ مخروطی می‌نامیم. ℓ را محور تقارن، A را رأس و خط d را مولد این رویهٔ مخروطی می‌نامیم.

نکته صفحهٔ دلخواه P و رویهٔ مخروطی می‌توانند حالت‌های زیر را نسبت به هم داشته باشند که در هر حالت به فصل مشترک صفحه و رویهٔ مخروطی یک «مقطع مخروطی» می‌گوییم.

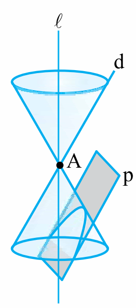


۱ صفحهٔ P بر محورِ رویهٔ مخروطی عمود و از A عبور نکند، آن‌گاه مقطع مخروطی حاصل، دایره است.

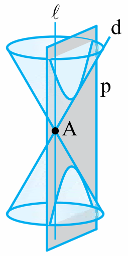
توجه شود که درحالت (۱)، اگر صفحهٔ P از نقطهٔ A عبور کند، آن‌گاه مقطع مخروطی حاصل، یک نقطه است.



۲ اگر صفحهٔ P بر محور ℓ عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، مقطع مخروطی حاصل، بیضی است.



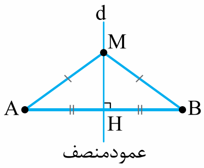
۳ اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس A نگذرد، در این صورت یک سهمی خواهیم داشت (اگر صفحهٔ P با همین شرایط از رأس A بگذرد، مقطع مخروطی حاصل یک خط است).



۴ اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور ℓ نباشد، در این صورت مقطع مخروطی حاصل یک هذلولی است.

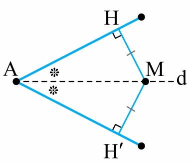
تعریف مکان هندسی

مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه است.



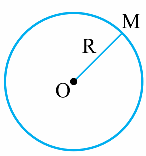
مثال مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمود منصف آن پاره‌خط است.

$AM = BM \Leftrightarrow$ خط d عمودمنصف AB است.



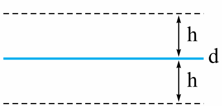
مثال مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.

(M نقطهٔ دلخواه روی خط d) $MH = MH' \Leftrightarrow$ خط d نیمساز A است.



مثال مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت، برابر مقدار ثابتی باشد یک دایره خواهد بود. نقطهٔ ثابت، مرکز دایره O و مقدار ثابت (R)، شعاع دایره است.

M روی دایره $\Leftrightarrow OM = R$



مثال مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ثابت h هستند، دو خط راست موازی d (در طرفین آن) و به فاصلهٔ h از آن است.

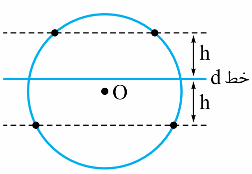
نکته یکی از کاربردهای مکان هندسی ترسیم‌های هندسی و یافتن نقطه یا نقاطی است که دارای ویژگی معین باشند.

برای حل این‌گونه مسائل، دو یا چند مکان هندسی داده‌شده را ترسیم می‌کنیم. محل برخورد آن‌ها نقاط مطلوب هستند.

مثال **خط d و دایرهٔ C داده شده‌اند. نقاطی روی دایره انتخاب کنید که از خط d به فاصلهٔ ثابت معلوم h باشند.**

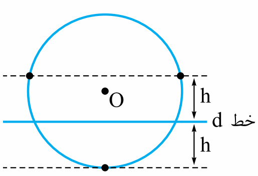
پاسخ می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ h باشند، دو خط به موازات d (در طرفین آن) و به فاصلهٔ h از آن است. محل برخورد این دو خط و دایرهٔ داده‌شده جواب‌های مسئله هستند. اما تعداد جواب‌ها به خط d، شعاع دایره (R) و فاصلهٔ ثابت h بستگی دارد.

حالت (۱): مسئله ۴ جواب دارد.

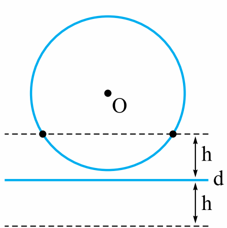


$h < R$

حالت (۲): مسئله ۳ جواب دارد.



حالت (۳): مسئله ۲ جواب دارد.



یا