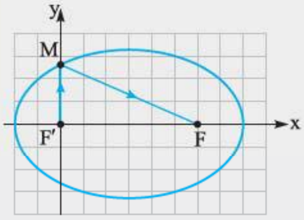
فهرست

پاسخ **گزینهٔ ۴** می‌دانیم پرتو بازتابش از کانون دیگر یعنی F می‌گذرد. اگر محل تلاقی پرتو تابش با بیضی را M بنامیم، پرتو بازتابش خط گذرنده از MF خواهد بود؛ بنابراین برای نوشتن معادلهٔ این خط به مختصات نقاط M و F نیاز داریم. طول MF' برابر نصف طول وتر کانونی مینیمم یعنی برابر $\frac{b^2}{a}$ است. با توجه به مفروضات تست $FF' = 2c = 8$ و $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ است، بنابراین $c = 4$ و $a = 5$، در نتیجه $b = 3$ می‌باشد، بنابراین $\frac{b^2}{a}$ برابر $\frac{9}{5}$ است؛ یعنی مختصات نقطهٔ M، $(0, \frac{9}{5})$ است. از سوی دیگر با توجه به این‌که FF' برابر ۸ است، مختصات F، $(8, 0)$ خواهد بود، پس معادلهٔ پرتو بازتابش معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(0, \frac{9}{5})$ و $(8, 0)$ است:

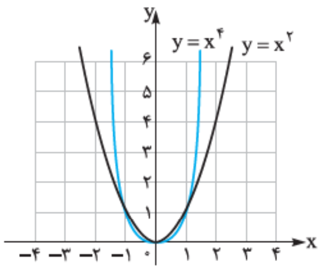


$$y - 0 = \frac{\frac{9}{5} - 0}{0 - 8}(x - 8) \Rightarrow y = -\frac{9}{40}(x - 8) \Rightarrow y = -\frac{9}{40}x + \frac{9}{5} \Rightarrow 40y + 9x = 72$$

استاد جان خوبی؟ رو به رشدی؟ دماغت چاغه؟ ایشالله که خروج از مرکز دماغت به صفر میل کنه! استاد میدونم الان خسته‌ای ولی یه استکان چای خوشگل برای خودت بریز بعدش سؤالات تشریحی ۳۱ تا ۴۰ رو حل کن تموم که شد، چای دوم رو یه کم پررنگ‌تر بریز و برو سراغ تست‌ها، تست‌های ۶۱ تا ۱۰۰ حدوداً یکی دو ساعتی زمان می‌بره اما بعدش زندگی دوباره بهت لبخند می‌زنه.

درس چهارم: سهمی

در بین مقاطع مخروطی شاید سهمی آشناترین آن‌ها است. برای شما عزیزان از سال‌های پیش کلمهٔ «سهمی» با تابع و منحنی تابع درجه‌دوم عجین بوده است. مدام در گوش ما می‌خوانده‌اند که شکل تابع درجه‌دوم «سهمی» است، اما آیا یک بار، حتی یک بار از دبیر محترمتان پرسیده‌اید «سهمی» یعنی چی؟ لابد سهمی به عنوان یک شکل هندسی مشخص باید تعریفی هم داشته باشد. در این درس‌نامه سهمی را به عنوان یک مکان هندسی تعریف خواهیم کرد و خواص، ویژگی‌ها و معادلات سهمی را تحلیل خواهیم کرد.



در حالی‌که نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^4$ بسیار به هم شبیه هستند، $y = x^2$ سهمی است اما $y = x^4$ سهمی نیست.

سهمی به عنوان مکان هندسی

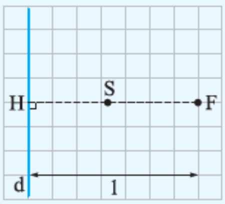
تا به این جای کار ملاحظه کردید که مقاطع مخروطی تعریف مشخصی به عنوان یک مکان هندسی دارند. مثال زیر، مقدمه‌ای برای ورود به دنیای هیجان‌انگیز سهمی به عنوان یک مکان هندسی است.

مثال **یک خط ثابت مانند d و یک نقطهٔ ثابت مانند F، خارج آن در نظر بگیرید و فرض کنید فاصلهٔ F از خط d برابر با l باشد.**

الف) یک نقطه بیابید که فاصلهٔ آن از خط d و نقطهٔ F یکسان باشد.

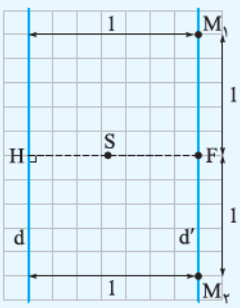
ب) آیا می‌توانید نقاط دیگری با همین خاصیت بیابید؟

پ) اگر مسئله پیداکردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصلهٔ یکسانی از خط d و نقطهٔ F قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟



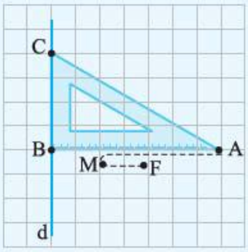
حل **الف)** مطابق شکل، خط ثابت d و نقطهٔ ثابت F را به فاصلهٔ l از آن در نظر بگیرید. به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که از خط d و نقطهٔ F به یک فاصله باشد. برای این منظور کافی است از نقطهٔ F، عمودی بر خط d رسم کنیم. نقطهٔ وسط این پاره‌خط را S می‌نامیم.

S از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله است اما آیا نقطه یا نقاط دیگری با این ویژگی وجود دارد؟



ب) از نقطهٔ F خط d' را به موازات خط d رسم می‌کنیم. هر نقطه‌ای روی خط d' از خط d به فاصلهٔ l می‌باشد بنابراین اگر روی d' نقطه یا نقاطی را بیابیم که از F هم به فاصلهٔ l باشند، این نقطه یا نقاط از خط d و نقطهٔ F به یک فاصله‌اند. آیا چنین نقاطی روی خط d' وجود دارند؟ مسلم است. روی خط d' دو نقطه در طرفین F وجود دارد که از آن به فاصلهٔ l هستند (M_1 و M_2).

اما اکنون سؤال این است که آیا نقاط دیگری هم به‌جز S، M_1 و M_2 با ویژگی یاد شده وجود دارند؟ آن‌ها را چگونه بیابیم؟



پ فرض کنید سه رأس یک گونیا به مانند شکل مقابل به نام‌های A، B و C باشند. یک سر یک تکه نخ به طول AB را در رأس A از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطهٔ F ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع BC بر خط d واقع باشد و نقطهٔ F بر ضلع AB قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به گونه‌ای به نخ گیر دهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصلهٔ نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد یعنی نقطهٔ M از خط d و از نقطهٔ F نسبت به هم چگونه است؟

پاسخ این سؤال بسیار ساده است:

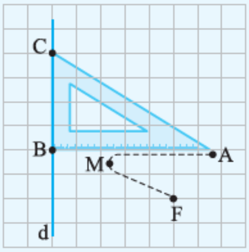
$$BM + MA = AB \quad (۱)$$

از سوی دیگر چون طول نخ هم برابر با AB است، می‌توان نوشت:

$$FM + MA = AB \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow BM = FM$$

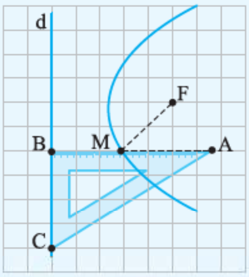
یعنی نقطهٔ M هم یکی از نقاطی است که از F و d به یک فاصله است.



حال در حالتی که ضلع BC کماکان بر خط d واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع AB چسبیده باشد و هر دو تکهٔ نخ در حالت کاملاً کشیده شده، باشند. فرض کنید نقطهٔ در حال حرکت نوک مداد را در هر حالت با M نمایش دهیم.

با استدلال نظیر آن‌چه پیش‌تر نمایش دادیم می‌توان گفت که همواره:

$$BM = FM$$

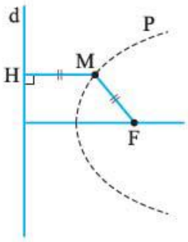


بنابراین با ادامهٔ کار و تغییر موضع، ضلع BC بر خط d، به تدریج تمام نقاطی مانند M با این ویژگی که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ F و خط d برابر است به دست می‌آید. این مجموعه‌نقاط، شکلی را تشکیل می‌دهند که ما نام «سهمی» را روی آن قرار می‌دهیم. به عبارتی:

نکته **(تعریف سهمی به عنوان مکان هندسی)**

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

$$M \in P \Leftrightarrow MF = MH$$

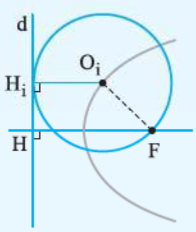


مثال **مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را به دست آورید که از نقطه‌ای ثابت می‌گذرند و بر خطی ثابت (که شامل آن نقطه نیست) مماس‌اند.**

(تمرین کتاب درسی)

حل خط d و نقطهٔ F را خارج آن خط در نظر بگیرید. هدف یافتن مرکز دایره‌هایی است که از F می‌گذرند و بر d مماس‌اند. مرکز یکی از این دوایر را O_i می‌نامیم. با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{matrix} O_iH_i = R \\ O_iF = R \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_iH_i = O_iF$$



یعنی نقطهٔ O_i از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله است. لذا مکان هندسی O_i یک سهمی است.

نکته **(بیان دیگری برای تعریف سهمی)**

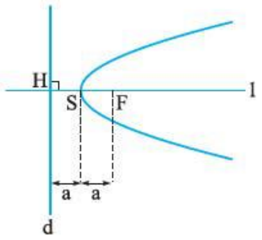
سهمی مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند و بر خط ثابتی (که شامل آن نقطه نیست) مماس‌اند.

مفاهیم اولیه در سهمی

گفتیم که سهمی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقطه‌ای ثابت (F) و خطی ثابت (d) در آن صفحه به یک فاصله‌اند. آن نقطهٔ ثابت یعنی F را «کانون» سهمی می‌نامند و آن خط ثابت یعنی d را «خط هادی» سهمی نام نهاده‌اند. بنابراین سهمی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از

کانون و خط هادی به یک فاصله است. اگر از نقطهٔ F یعنی کانون سهمی، خطی عمود بر خط هادی رسم کنیم. این خط (l) «محور» سهمی نام دارد که «محور تقارن» سهمی هم هست. محور سهمی، سهمی را در یک نقطه قطع می‌کند (S). این نقطه به عنوان نقطه‌ای از سهمی، از کانون و خط هادی به یک فاصله است.

این نقطه یعنی S، «رأس سهمی» نام دارد: $SF = SH$



فاصلهٔ رأس تا کانون و خط هادی را با a نمایش می‌دهیم، لذا فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر با ۲a است:

$$SF = SH = a \Rightarrow FH = ۲a$$

a به عنوان «فاصله» مفهوم مثبت‌بودن را در خود مستتر دارد. عدد مثبت a را «فاصلهٔ کانونی» سهمی می‌نامیم.

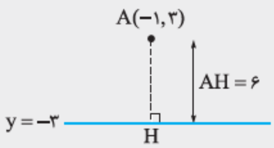
نکته **(خارج از کتاب درسی) خروج از مرکز سهمی برابر ۱ است:** $e_{\text{سهمی}} = ۱$

تست **اگر $A(-۱,۳)$ نقطه‌ای واقع بر یک سهمی و خط به معادلهٔ $y = -۳$ خط هادی آن سهمی باشد. کانون این سهمی کدام نقطه می‌تواند باشد؟**

۱) $(۰,۶)$ ۲) $(-۵,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۵,۳)$

پاسخ **گزینهٔ ۴** می‌دانیم هر نقطه واقع بر سهمی از کانون و خط هادی به یک فاصله است. ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ A را تا خط $y = -۳$ می‌یابیم:

$$AH = |۳ - (-۳)| = ۶$$



حالا گزینه‌ای می‌تواند کانون باشد که فاصلهٔ آن تا A برابر ۶ باشد. از ۱ شروع می‌کنیم:

۱ $AF_۱ = \sqrt{(۰-(-۱))^۲ + (۶-۳)^۲} = \sqrt{۱۰}$

۲ $AF_۲ = \sqrt{(-۵-(-۱))^۲ + (۴-۳)^۲} = \sqrt{۱۷}$

۳ $AF_۳ = \sqrt{(۳-(-۱))^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۲۰}$

۴ $AF_۴ = \sqrt{(۵-(-۱))^۲ + (۳-۳)^۲} = ۶$

یعنی ۴ می‌تواند کانون سهمی باشد.

مثال **معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن نقطهٔ $F(۲,۰)$ و خط هادی آن نیمساز ربع اول و سوم باشد.**

حل دوستان خوبم نیک می‌دانند که برای نوشتن معادلهٔ هر شکلی از تعریف آن به عنوان مکان هندسی استفاده می‌کنیم. سهمی موردنظر ما مکان هندسی نقاطی است مانند $M(x,y)$، به طوری که فاصلهٔ M از نقطهٔ $F(۲,۰)$ با فاصلهٔ آن از خط d به معادلهٔ $y = x$ برابر باشد:

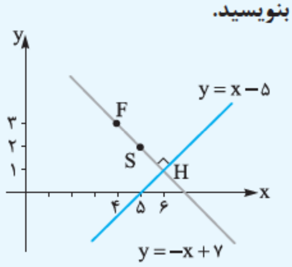
$$MF = MH \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲ + y^۲} = \frac{|y-x|}{\sqrt{۲}} \Rightarrow (x-۲)^۲ + y^۲ = \frac{(y-x)^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۸ + ۲y^۲ = y^۲ + x^۲ - ۲xy \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy - ۸x + ۸ = ۰$$

معادلهٔ به دست آمده معادلهٔ سهمی موردنظر است.

مثال **اگر $F(۴,۳)$ و $S(۵,۲)$، به ترتیب کانون و رأس یک سهمی باشند، معادلهٔ خط هادی و محور سهمی را بنویسید.**

حل به شکل مقابل دقت کنید: رأس سهمی درست وسط کانون و خط هادی قرار دارد. بنابراین اگر قرینهٔ نقطهٔ F نسبت به S را H بنامیم، خط هادی از این نقطه می‌گذرد:



$$\frac{x_H + x_F}{۲} = x_S \Rightarrow \frac{x_H + ۴}{۲} = ۵ \Rightarrow x_H = ۶$$

$$\frac{y_H + y_F}{۲} = y_S \Rightarrow \frac{y_H + ۳}{۲} = ۲ \Rightarrow y_H = ۱$$

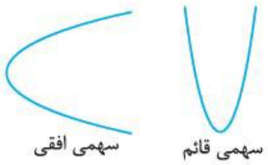
اکنون می‌توان گفت که خط هادی خطی است که از نقطهٔ $H(۶,۱)$ می‌گذرد و بر امتداد پاره‌خط FS (که همان امتداد محور سهمی است) عمود است:

(محور سهمی) معادلهٔ خط گذرنده از F و S : $y - ۳ = \frac{۲-۳}{۵-۴}(x-۴) \Rightarrow y = -x + ۷$

خط هادی از $H(۶,۱)$ می‌گذرد و چون بر خط $y = -x + ۷$ عمود است، شیب آن عکس و قرینهٔ شیب این خط است، بنابراین شیب خط هادی برابر با ۱ است:

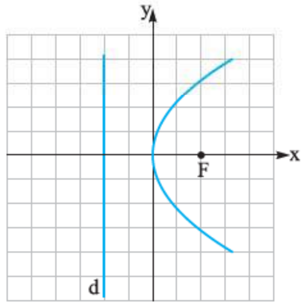
معادلهٔ خط هادی : $y - ۱ = (۱)(x - ۶) \Rightarrow y = x - ۵$

معادلهٔ سهمی

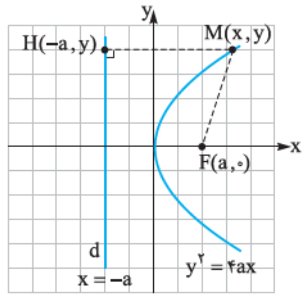


همان‌طور که در مثال قبلی دیدیم، تعریف سهمی به عنوان مکان هندسی الهام‌بخش ما برای نوشتن معادلهٔ سهمی است. در کتاب درسی هندسهٔ (۳) اما، تنها دو حالت خاص از معادلهٔ سهمی مورد عنایت قرار گرفته: معادلهٔ سهمی که محور تقارن آن موازی محور xها و یا موازی محور yها است.

به سهمی که محور تقارن آن موازی محور xها باشد، سهمی افقی و به سهمی که محور تقارن آن موازی محور yها باشد، سهمی قائم می‌گوییم:



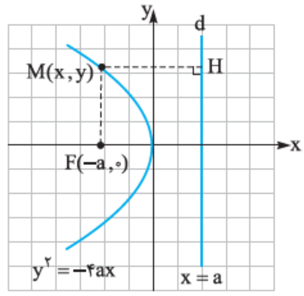
حالا بیایید به اتفاق، معادلهٔ یک سهمی افقی به شکل مقابل را بنویسیم. (رأس سهمی در مبدأ مختصات قرار دارد.)



اگر فرض کنیم فاصلهٔ کانونی سهمی برابر با a است، نقطهٔ $F(a,۰)$، که در آن a مثبت است، کانون سهمی و خط هادی d موازی محور yها به معادلهٔ $x=-a$ می‌باشد حال اگر نقطهٔ $M(x,y)$، نقطه‌ای دلخواه واقع بر سهمی باشد، با توجه به این‌که $MF = MH$ می‌توان نوشت:

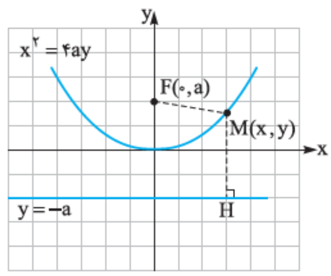
$$\sqrt{(x-a)^۲+(y-۰)^۲} = |x-(-a)| \Rightarrow (x-a)^۲+y^۲=(x+a)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲-۲ax+a^۲+y^۲=x^۲+۲ax+a^۲ \Rightarrow y^۲=۴ax$$



در حالتی که خط هادی d موازی محور yها به معادلهٔ $x=a$ باشد و کانون $F(-a,۰)$ در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قبلی می‌توان نشان داد که در این حالت معادلهٔ سهمی به صورت $y^۲=-۴ax$ است. $(۰<a)$

در مورد سهمی اول اصطلاحاً می‌گویند که دهانهٔ سهمی یا جهت تقعر سهمی به سمت xهای مثبت یا به سمت راست است و در مورد سهمی دوم می‌گویند که دهانه یا جهت تقعر سهمی به سمت xهای منفی یا به سمت چپ است.

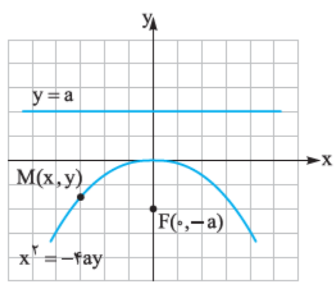


حالا بیایید به اتفاق معادلهٔ یک سهمی قائم را که رأس آن در مبدأ مختصات قرار دارد، مورد ارزیابی قرار بدهیم:

در حالتی که خط هادی d موازی محور xها به معادلهٔ $y=-a$ و کانون $F(۰,a)$ در بالای آن قرار دارد با استفاده از تعریف سهمی به عنوان مکان هندسی می‌توان نشان داد که در این حالت معادلهٔ سهمی به صورت $x^۲=۴ay$ است. (در این حالت دهان یا تقعر سهمی رو به بالا است.) (در واقع این معادله همان $y=\frac{۱}{۴a}x^۲$ است که در پایهٔ دهم به عنوان تابع درجه‌دوم با آن آشنا شدید.)

$$MF=MH \Rightarrow \sqrt{(x-۰)^۲+(y-a)^۲} = |y-(-a)| \Rightarrow x^۲+(y-a)^۲=(y+a)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲ay+a^۲=y^۲+۲ay+a^۲ \Rightarrow x^۲=۴ay$$



در حالتی که خط هادی d موازی محور xها به معادلهٔ $y=a$ و کانون $F(۰,-a)$ در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قبلی می‌توان نشان داد در این حالت معادلهٔ سهمی به صورت $x^۲=-۴ay$ است. (در این حالت دهانه یا تقعر سهمی رو به پایین است.)

مطالب بیان‌شده دربارهٔ سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد:

نکته

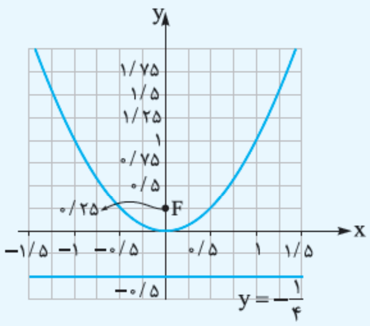
دهانه یا جهت تقعر سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی $(a>0)$	نوع سهمی
رو به راست	محور x	$x=-a$	$(a,0)$	$y^2=4ax$	افقی
رو به چپ	محور x	$x=a$	$(-a,0)$	$y^2=-4ax$	افقی
رو به بالا	محور y	$y=-a$	$(0,a)$	$x^2=4ay$	قائم
رو به پایین	محور y	$y=a$	$(0,-a)$	$x^2=-4ay$	قائم

نکته **در معادلهٔ یک سهمی اگر x، توان ۲ داشته باشد، سهمی قائم است و اگر y، توان ۲ داشته باشد سهمی افقی است.**

نکته **در معادلهٔ استاندارد یک سهمی که رأس آن در مبدأ مختصات است ($y^2=mx$ یا $x^2=my$) اگر m عددی مثبت باشد جهت تقعر سهمی به سمت جهت مثبت محور xها یا جهت مثبت محور yها است و اگر m عددی منفی باشد، جهت تقعر سهمی به سمت جهت منفی محور xها یا جهت منفی محور yها است.**

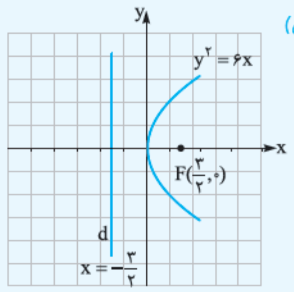
مثال **تابع نام‌آشنای $y=x^2$ را به عنوان یک سهمی تحلیل کنید. (فاصلهٔ کانونی آن را به دست آورید، مختصات کانون آن را تعیین کنید و معادلهٔ محور تقارن و خط هادی آن را بنویسید.)**

حل تابع $y=x^2$ یا بهتر بگوییم $x^2=y$ یک سهمی قائم است که رأس آن در مبدأ مختصات قرار دارد. با توجه به این‌که ضریب y مثبت است، جهت تقعر این سهمی رو به بالا است. با مقایسهٔ معادلهٔ این سهمی با شکل استاندارد $x^2=4ay$ متوجه می‌شویم که $4a=1$ لذا فاصلهٔ کانونی سهمی برابر با $\frac{1}{4}$ است. بنابراین مطابق شکل برای یافتن کانون سهمی از رأس به اندازهٔ $\frac{1}{4}$ واحد به سمت بالا حرکت می‌کنیم لذا نقطهٔ $F(0,\frac{1}{4})$ کانون سهمی است. برای یافتن معادلهٔ خط هادی کافی است به این نکته دقت کنیم که خط هادی، خطی است افقی که a واحد پایین‌تر از رأس است، پس معادلهٔ آن به شکل $y=-\frac{1}{4}$ خواهد بود. محور تقارن سهمی هم واقعاً محور yها یا خط $x=0$ است!



مثال **معادلهٔ $y^2=6x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.** *(متن کتاب درسی)*

حل این معادلهٔ یک سهمی افقی است که دهانهٔ آن رو به راست است و محور تقارن آن محور xها است. با قراردادن $4a=6$، داریم $a=\frac{3}{2}$. لذا کانون آن $F(\frac{3}{2},0)$، و خط هادی آن موازی محور yها به معادلهٔ $x=\frac{-3}{2}$ و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به صورت مقابل است.



تست **رأس یک سهمی افقی در مبدأ مختصات قرار دارد. اگر این سهمی از نقطهٔ $(-2,1)$ بگذرد، مختصات کانون آن کدام است؟**

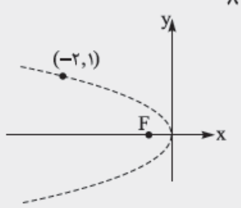
۱) $(0,-1)$ ۲) $(0,-\frac{1}{2})$ ۳) $(-\frac{1}{3},0)$ ۴) $(-\frac{1}{8},0)$

پاسخ **گزینهٔ ۴** با توجه به شکل مقابل جهت تقعر سهمی افقی مورد بحث به اجبار به سمت چپ است.

بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل $y^2=-4ax$ است. حال نقطهٔ $(-2,1)$ را در این معادله صدق می‌دهیم:

$$1=-4a(-2) \Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

پس با توجه به شکل کانون سهمی $\frac{1}{8}$ واحد سمت چپ رأس قرار می‌گیرد، لذا مختصات آن $(-\frac{1}{8},0)$ است.

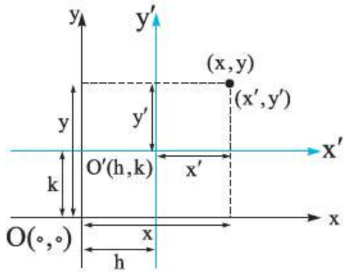


انتقال محورها

فرض کنید در دستگاه مختصات دکارتی xOy، محورهای مختصات را به موازات خود منتقل کنیم تا مبدأ مختصات یعنی $O(۰,۰)$ به نقطهٔ $O'(h,k)$ منتقل شود. اگر دستگاه جدید را دستگاه $x'O'y'$ بنامیم، چه ارتباطی بین مختصات نقاط در دستگاه جدید و قدیم وجود دارد؟

این ارتباط در شکل کاملاً واضح و مشهود است.

$$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x'=x-h \\ y'=y-k \end{cases}$$



مثال **اگر مبدأ مختصات را به نقطهٔ $(۲,۳)$ منتقل کنیم، معادلهٔ منحنی $y=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۵$ به چه صورت درمی‌آید؟**

حل با توجه به مطالبی که آموختیم، ارتباط بین مختصات نقاط در دستگاه‌های قدیم و جدید را می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$\begin{cases} x=x'+۲ \\ y=y'+۳ \end{cases}$$

با جای‌گذاری x و y برحسب x' و y' در معادلهٔ منحنی خواهیم داشت:

$$y'+۳=(x'+۲)^۳-۶(x'+۲)^۲+۱۲(x'+۲)-۵$$

$$\Rightarrow y'+۳=x'^۳+۶x'^۲+۱۲x'+۸-۶x'^۲-۲۴x'-۲۴+۱۲x'+۲۴-۵ \Rightarrow y'=x'^۳$$

یعنی معادلهٔ منحنی در دستگاه جدید $y'=x'^۳$ است.

نکته **اگر محورهای مختصات را به موازات خود منتقل کنیم تا مبدأ مختصات به نقطهٔ $O'(h,k)$ بدل شود:**

$$\begin{cases} x'=x-h \\ y'=y-k \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$$

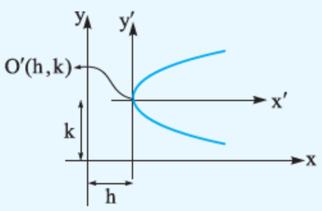
نکته **اگر معادلهٔ یک منحنی را به ما بدهند و سپس دستگاه مختصات را به روش یادشده در نکتهٔ قبل منتقل کنند و از ما معادلهٔ منحنی را در دستگاه جدید بخواهند، x و y قدیم را برحسب x' و y' بازنویسی می‌کنیم و در معادلهٔ منحنی قرار می‌دهیم، رابطهٔ بین x' و y' به دست می‌آید که همان معادلهٔ منحنی در دستگاه جدید است.**

حال با توجه به مطالبی که در مورد انتقال محورها آموختیم، به مثال جالب زیر توجه کنید:

مثال **فرض کنید محورهای مختصات را به موازات خود منتقل کرده باشیم تا مبدأ مختصات بر نقطهٔ $O'(h,k)$ منطبق شده باشد.**

الف **معادلهٔ سهمی مشخص‌شده در شکل، در دستگاه $x'O'y'$ را بنویسید.**

ب **معادلهٔ همین سهمی در دستگاه xOy به چه شکلی است؟**



حل **الف** سهمی مشخص‌شده در دستگاه $x'O'y'$ یک سهمی افقی است که رأس آن در مبدأ مختصات قرار دارد و دهانهٔ آن به سمت راست است، بنابراین با توجه به مطالبی که آموخته‌ایم اگر فاصلهٔ کانونی این سهمی برابر a باشد، معادلهٔ آن به شکل $y'^۲=۴ax'$ است.

ب با توجه به این‌که $\begin{cases} x'=x-h \\ y'=y-k \end{cases}$ با جای‌گذاری x' و y' برحسب x و y در معادلهٔ بالا ارتباط بین x و y یا به عبارتی معادلهٔ سهمی در دستگاه مختصات xOy به دست می‌آید:

$$(y-k)^۲=۴a(x-h)$$

نتیجهٔ فوق‌العاده مهمی به دست آوردیم:

نکته **اگر مختصات رأس یک سهمی $S(h,k)$ باشد:**

۱ **در صورتی که سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت راست باشد معادلهٔ آن به شکل روبه‌رو است:** $(y-k)^۲=۴a(x-h)$

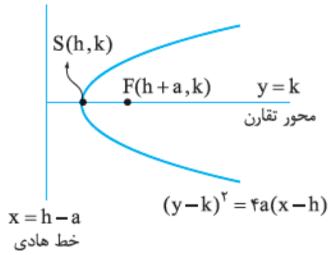
۲ **در صورتی که سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت چپ باشد، معادلهٔ آن به شکل روبه‌رو است:** $(y-k)^۲=-۴a(x-h)$

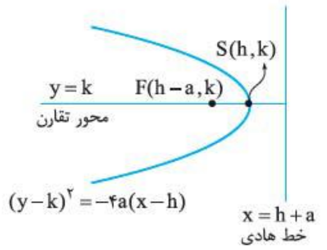
۳ **در صورتی که سهمی قائم و دهانهٔ آن به سمت بالا باشد، معادلهٔ آن به شکل روبه‌رو است:** $(x-h)^۲=۴a(y-k)$

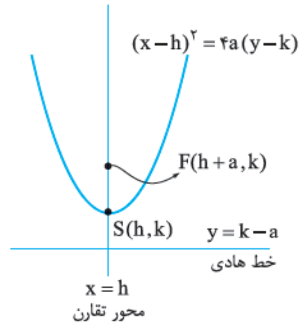
۴ **در صورتی که سهمی قائم و دهانهٔ آن به سمت پایین باشد، معادلهٔ آن به شکل روبه‌رو است:** $(x-h)^۲=-۴a(y-k)$

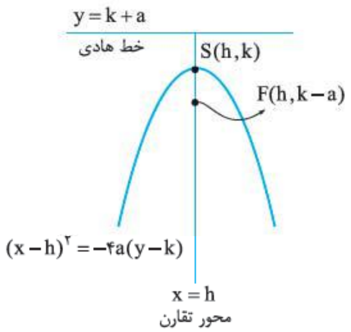
به این شکل از معادلات که شامل یک مربع کامل در سمت راست معادله است، فرم متعارف یا فرم استاندارد معادلهٔ سهمی می‌گویند.

شکل و اطلاعات مهم این سهمی‌ها را در اشکال صفحهٔ بعد آورده‌ایم: (خوب دقت کنید!)







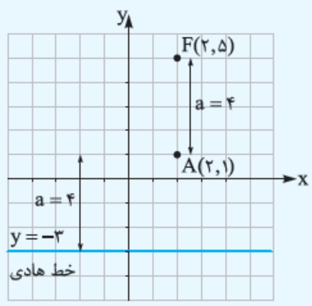


این اطلاعات در کتاب درسی در جدول زیر خلاصه شده است. با توجه به این‌که به کمک اشکال رسم‌شده فهم این اطلاعات بسیار ساده است، حفظ‌کردن جدول کمی ابلهانه است!

نکته

دهانه یا جهت تقعر سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی	نوع سهمی
رو به راست	خط $y=k$	$x=-a+h$	$(a+h,k)$	$(y-k)^{۲}=۴a(x-h)$	افقی
رو به چپ	خط $y=k$	$x=a+h$	$(-a+h,k)$	$(y-k)^{۲}=-۴a(x-h)$	افقی
رو به بالا	خط $x=h$	$y=-a+k$	$(h,a+k)$	$(x-h)^{۲}=۴a(y-k)$	قائم
رو به پایین	خط $x=h$	$y=a+k$	$(h,-a+k)$	$(x-h)^{۲}=-۴a(y-k)$	قائم

مثال معادلهٔ سهمی به رأس $A(۲,۱)$ و کانون $F(۲,۵)$ را بیابید و معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید. *(متن کتاب درسی)*



حل با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات مقابل، خواهیم داشت:

۱) سهمی قائم است.

۲) $a=۴$، زیرا فاصلهٔ رأس A تا کانون F برابر a است.

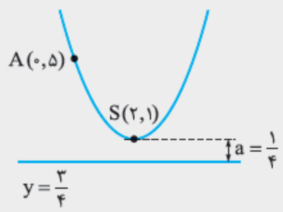
۳) معادلهٔ خط هادی آن $y=-۳$ است، زیرا اگر از رأس a واحد یعنی ۴ واحد به سمت پایین حرکت کنیم، عرض نقاط حاصل برابر -۳ است.

۴) دهانهٔ سهمی رو به بالاست، زیرا کانون بالای رأس قرار داد و از طرفی کانون باید داخل سهمی باشد.

لذا معادلهٔ آن به صورت $(x-h)^{۲}=۴a(y-k)$ است. بنابراین: $(x-۲)^{۲}=۱۶(y-۱)$

تست نقطهٔ $S(۲,۱)$ رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور yها است و از نقطهٔ $(۰,۵)$ می‌گذرد. معادلهٔ خط هادی آن، کدام است؟ *(ریاضی ۹۲)*

۱) $y=\frac{۱}{۴}$ ۲) $y=\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=\frac{۳}{۴}$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}$



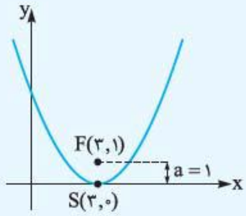
$y=۱-a=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$

پاسخ **گزینهٔ ۳** با توجه به داده‌های مسئله، سهمی مورد بحث یک سهمی قائم است. اگر موقعیت رأس سهمی یعنی نقطهٔ $S(۲,۱)$ و نقطهٔ $(۰,۵)$ را نسبت به یکدیگر مشخص کنیم، متوجه می‌شویم که جهت تقعر سهمی رو به بالا است لذا معادلهٔ آن به شکل $(x-۲)^{۲}=۴a(y-۱)$ خواهد بود. نقطهٔ $(۰,۵)$ نقطه‌ای از سهمی است بنابراین در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$(۰-۲)^{۲}=۴a(۵-۱) \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$

برای به دست آوردن خط هادی باید از رأس به اندازهٔ a واحد پایین بیاییم:

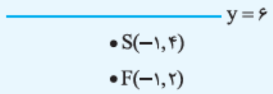
مثال **معادلهٔ سهمی قائم مماس بر محور xها که دارای کانون $F(3,1)$ باشد را بنویسید.**



حل با توجه به شکل سهمی و با در نظر گرفتن این نکته که جهت تقعر سهمی رو به بالا است، معادلهٔ آن به شکل $(x-3)^2 = 4a(y)$ می‌باشد. از سوی دیگر باز هم با توجه به شکل می‌توان گفت: $a = 1$ بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل $(x-3)^2 = 4(y)$ خواهد بود.

مثال **معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن $(-1,2)$ و خط هادی آن خط $y = 6$ باشد.**

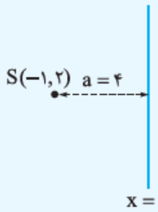
حل اگر خط $y = 6$ را رسم کنیم و موقعیت نقطهٔ $(-1,2)$ را نسبت به آن مشخص کنیم، متوجه می‌شویم سهمی قائم است و جهت تقعر آن رو به پایین است، بنابراین معادلهٔ کلی سهمی به شکل $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ خواهد بود. رأس سهمی درست وسط کانون و خط هادی قرار دارد، یعنی مختصات رأس $(-1,4)$ است و چون فاصلهٔ کانون از خط هادی برابر $2a$ است، $2a = 4$ یعنی $a = 2$.



بنابراین در نهایت معادله به شکل $(x+1)^2 = -8(y-4)$ است.

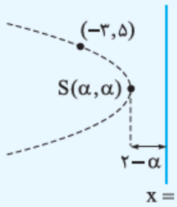
مثال **معادلهٔ سهمی را بنویسید که رأس آن $(-1,2)$ و خط هادی آن $x = 3$ باشد.**

حل باز هم رسم یک شکل ساده به منظور تعیین موقعیت نسبی رأس و خط هادی کمک شایانی به تعیین نوع سهمی و جهت تقعر آن می‌کند.



مطابق شکل ملاحظه می‌کنید که سهمی باید افقی باشد و دهانهٔ آن به سمت چپ است، بنابراین شکل کلی معادلهٔ آن $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ می‌باشد و از آن‌جایی که $S(h,k) = (-1,2)$ و a برابر ۴ است (فاصلهٔ رأس تا خط هادی)، معادلهٔ سهمی به شکل $(y-2)^2 = -16(x+1)$ خواهد بود.

مثال **معادلهٔ سهمی را بنویسید که رأس آن روی نیمساز ربع اول و سوم باشد و خط $x = 2$ خط هادی آن باشد و از نقطهٔ $(-3,5)$ بگذرد.**



حل مجدداً رسم شکل و تحلیل موقعیت نسبی خط هادی و نقطهٔ $(-3,5)$ به عنوان نقطه‌ای از سهمی، این واقعیت را نشان می‌دهد که سهمی افقی است و دهانهٔ آن به سمت چپ است. از آن‌جایی که رأس روی خط $y = x$ قرار دارد، مختصات رأس را (α,α) فرض می‌کنیم. فاصلهٔ رأس تا خط هادی (که الزاماً باید عددی مثبت باشد) برابر a است. بنابراین: $a = 2-\alpha$

اکنون با توجه به قالب کلی معادله، سهمی افقی با دهانهٔ به سمت چپ، می‌توان معادلهٔ سهمی را به شکل زیر نوشت:

$$(y-\alpha)^2 = -4(2-\alpha)(x-\alpha)$$

و برای به دست آوردن α کافی است به این واقعیت توجه کنیم که نقطهٔ $(-3,5)$ به عنوان نقطه‌ای از سهمی در معادلهٔ بالا صدق می‌کند:

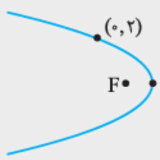
$$(5-\alpha)^2 = -4(2-\alpha)(-3-\alpha) \Rightarrow \alpha^2 - 10\alpha + 25 = -4\alpha^2 - 4\alpha + 24 \Rightarrow 5\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ یا } \alpha = \frac{1}{5}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی موردنظر $(y-1)^2 = -4(x-1)$ یا $(y-\frac{1}{5})^2 = \frac{-36}{5}(x-\frac{1}{5})$ خواهد بود.

تست **نقطهٔ $(3,1)$ رأس سهمی و محور تقارن آن موازی محور xها است. اگر سهمی از نقطهٔ $(0,2)$ بگذرد، مختصات کانون آن کدام است؟**

۱) $(\frac{37}{12},1)$ ۲) $(\frac{35}{12},1)$ ۳) $(\frac{11}{4},1)$ ۴) $(\frac{13}{4},1)$ *(ریاضی ۹۲ و مشابه تجربی ۹۶)*

پاسخ **گزینهٔ۲** سهمی مورد بحث افقی است و با توجه به موقعیت دو نقطهٔ $(3,1)$ و $(0,2)$ می‌توان گفت که دهانهٔ سهمی به سمت چپ است. بنابراین شکل کلی معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:



$$(y-k)^2 = -4a(x-h) \Rightarrow (y-1)^2 = -4a(x-3)$$

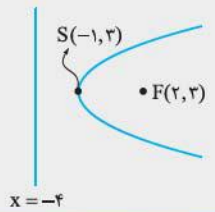
حال نقطهٔ $(0,2)$ به عنوان نقطه‌ای از سهمی باید در معادلهٔ آن صدق کند: $\Rightarrow (2-1)^2 = -4a(0-3) \Rightarrow a = \frac{1}{12}$

بنابراین کانون سهمی $\frac{1}{12}$ واحد سمت چپ رأس قرار می‌گیرد:

$$F(3-\frac{1}{12},1) \Rightarrow F(\frac{35}{12},1)$$

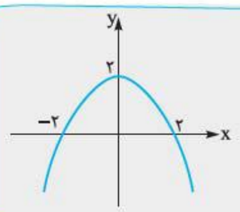
تست سهمی با کانون $F(۲,۳)$ و خط هادی به معادلهٔ $x=-۴$، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$



پاسخ گزینهٔ۲ سهمی مورد بحث افقی است و تقعر آن به سمت جهت مثبت محور xها است و از آن‌جایی که رأس سهمی درست وسط کانون و خط هادی است، مختصات رأس $(-۱,۳)$ می‌باشد و فاصلهٔ کانونی سهمی یعنی فاصلهٔ رأس تا کانون برابر ۳ است $(a=۳)$. اکنون می‌توان گفت که معادلهٔ سهمی به شکل $(y-۳)^۲=۱۲(x+۱)$ است و محل تلاقی سهمی با محور xها با جای‌گذاری $y=۰$ در معادله $x=-\frac{۱}{۴}$ خواهد بود

تست در سهمی شکل مقابل، فاصلهٔ کانون تا خط هادی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

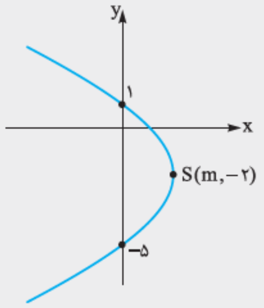
پاسخ گزینهٔ۳ فاصلهٔ کانون تا خط هادی یعنی $۲a$، پس هدف تست پیداکردن a است! سهمی مورد بحث قائم و مختصات رأس آن $(۰,۲)$ است و چون دهان سهمی به سمت پایین است معادلهٔ آن به شکل $(x-۰)^۲=-۴a(y-۲)$ خواهد بود. با جای‌گذاری نقاط $(۲,۰)$ یا $(-۲,۰)$ در معادلهٔ سهمی a به راحتی به دست می‌آید:

$$(۲-۰)^۲=-۴a(۰-۲) \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین فاصلهٔ کانون تا خط هادی یعنی $۲a$ برابر ۱ است.

تست فاصلهٔ کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵− قطع می‌کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۴)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$



پاسخ گزینهٔ۳ فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $۲a$ است یعنی: $۲a=۲ \Rightarrow a=۱$

از سوی دیگر تلاقی سهمی در دو نقطه با محور yها حکایت از آن دارد که سهمی افقی است و این‌که در صورت تست از ما خواسته شده که طول رأس را با «علامت مثبت» بیابیم، بدین معناست که سهمی را باید به شکل روبه‌رو تصور کرد. با توجه به شکل عرض، رأس باید برابر عرض محور تقارن سهمی یعنی درست وسط ۱ و ۵− باشد، لذا عرض رأس سهمی برابر $-۲=\frac{۱+(-۵)}{۲}$ است. با این اوصاف اگر رأس سهمی را $S(m,-۲)$ در نظر بگیریم، معادلهٔ سهمی به شکل مقابل خواهد بود: $(y+۲)^۲=-۴(۱)(x-m)$

و اکنون با صدق‌دادن یکی از نقاط $(۰,۱)$ یا $(۰,-۵)$ در معادلهٔ سهمی m یعنی طول رأس به دست می‌آید: $(۱+۲)^۲=-۴(۰-m) \Rightarrow m=\frac{۹}{۴}$

مثال $\begin{cases} y=\cos ۲\alpha \\ x=\sin\alpha+۱ \end{cases}$ معادلهٔ چه شکلی است؟

حل این معادله، معادله‌ای پارامتری است و برای این‌که به معادله‌ای عادی تبدیل شود، لازم است که پارامتر را حذف کنیم. برای این منظور باید رابطه‌ای بین $\cos ۲\alpha$ و $\sin\alpha$ برقرار کنیم تا α به طور کلی از معادله حذف شود. می‌دانیم:

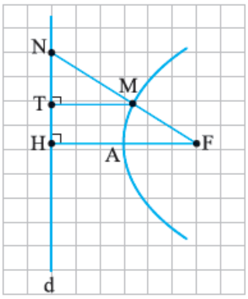
$$\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha \Rightarrow y=۱-۲(x-۱)^۲ \Rightarrow -۲(x-۱)^۲=y-۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=-\frac{۱}{۲}(y-۱)$$

بنابراین این‌طور به نظر می‌رسد که معادلهٔ داده‌شده معادلهٔ یک سهمی قائم است. اما عجله نکنید! توجه به این مسئله که $y=\cos ۲\alpha$ و این‌که $\cos ۲\alpha$ بین ۱− و ۱ قرار دارد و این‌که $x=\sin\alpha+۱$ و این‌که $\sin\alpha$ هم بین ۱− و ۱ است این واقعیت را به رخ می‌کشد که: $-۱\le y\le ۱,\ ۰\le x\le ۲$

لذا معادلهٔ داده‌شده معادلهٔ یک سهمی نیست، بلکه به خاطر محدودبودن x و y، «قسمتی از یک سهمی» است.

درس ٤: سهمی

۴۱- در شکل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$. *(تمرین کتاب درسی)*



۴۲- سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. هم‌چنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید. *(تمرین کتاب درسی)*

۴۳- سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید. *(تمرین کتاب درسی)*

۴۴- معادلهٔ سهمی را بنویسید که:

الف) نقطهٔ $(-3,4)$ کانون و محور yها خط هادی آن باشد.

ب) رأس آن $(2,5)$ و کانون آن $(2,7)$ باشد.

۴۵- $(m-1)x^2+3y+(m^2-1)y^2-8x+1=0$ به ازای کدام مقدار m معادلهٔ یک سهمی است؟ نوع سهمی و کانون آن را مشخص کنید.

۴۶- معادلهٔ سهمی‌های زیر را به فرم استاندارد تبدیل کنید؛ مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی را بنویسید.

۱) $x^2-4x+6y-11=0$

۲) $3y^2-6y+12x-7=0$

(تمرین کتاب درسی)

۴۷- مختصات کانون و همچنین معادلهٔ سهمی را به رأس $A(4,6)$ و خط هادی $x=9$ بنویسید.

۴۸- ثابت کنید نزدیک‌ترین نقطهٔ سهمی تا کانون آن، رأس سهمی است.

۴۹- اگر رأس سهمی $x^2+ax+8y+b=0$ نقطهٔ $(-1,2)$ باشد، a و b را به دست آورید.

۵۰- معادلهٔ سهمی‌ای را بنویسید که محور تقارن آن موازی یکی از محورهای مختصات باشد. رأس آن نقطهٔ $S(2,2)$ باشد و از نقطهٔ $(4,3)$ بگذرد.

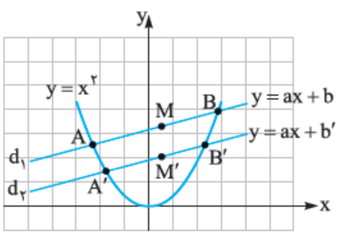
۵۱- معادلهٔ سهمی‌ای را بنویسید که خط $y=3$ محور تقارن آن، خط $x=3$ خط هادی آن و نقطهٔ $(5,5)$ نقطه‌ای از آن باشد.

۵۲- در یک آنتن سهمی‌شکل، عمق آنتن $40\ cm$ و قطر دهانهٔ آن $120\ cm$ است. فاصلهٔ رأس تا کانون را به دست آورید.

۵۳- طول وتر کانونی مینیمم، $3y^2-11y+7x-1=0$ چه‌قدر است؟

۵۴- یک پرتو که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد از کانون سهمی به معادلهٔ $y^2+2y-6x+4=0$ بر آن تابیده است، معادلهٔ پرتوی بازتاب آن را به دست آورید.

۵۵- سهمی $y=x^2$ و دو خطِ موازی $d_1: y=ax+b$ و $d_2: y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند، در نظر بگیرید. *(تمرین کتاب درسی)*



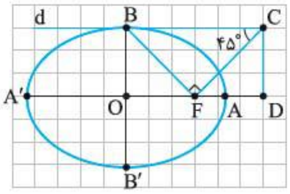
الف) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y=x^2$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد. مختصات نقطهٔ M را به دست آورید.

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جای‌گذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطهٔ M' (نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

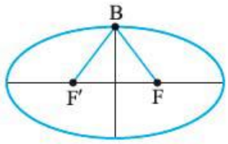
ت) خط MM' نسبت به محور yها چه وضعی دارد؟

۸۹- در بیضی مقابل، AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) ۲
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۱

۹۰- در بیضی مقابل، مثلث BFF' متساوی‌الاضلاع است. خروج از مرکز چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۹۱- اگر چهارضلعی که دو کانون و رأس‌های ناکانونی یک بیضی می‌سازند مربع باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۲

۹۲- چند مثلث مانند ABC وجود دارد که در آن محیط مثلث برابر ۱۸، ضلع BC برابر ۸ و ارتفاع AH برابر ۴ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۹۳- اگر دو نقطهٔ $F(۳,۶)$ و $F'(-۱,-۲)$ کانون‌های یک بیضی باشند، کدام گزینه می‌تواند یکی از رأس‌های ناکانونی بیضی باشد؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(۳,۵)$ ۳) $(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۳)$

۹۴- دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۲ مماس داخل‌اند. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر این دو دایره مماس است یک بیضی است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹۵- بدنهٔ داخلی یک بیضی را نقره‌اندود می‌کنیم. اگر مختصات رئوس کانونی این بیضی $(۵,۴)$ و $(-۱,-۲)$ باشند و مختصات یکی از کانون‌های بیضی $(۳,۲)$ باشد در صورتی که پرتو نوری از این کانون بر بیضی بتابد در بازتابش الزاماً از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۱,۰)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(۴,۳)$ ۴) $(۰,-۱)$

۹۶- در یک منظومهٔ شمسی، مدار گردش یک سیاره به دور خورشید منظومه به گونه‌ای است که کم‌ترین فاصلهٔ سیاره از خورشید ۷۰ میلیون کیلومتر و دورترین فاصلهٔ سیاره از خورشید ۹۰ میلیون کیلومتر است. خروج از مرکز مسیر سیاره به دور خورشید منظومه چه‌قدر است؟

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۰۵ ۳) ۰/۱۲۵ ۴) ۰/۲۵

۹۷- اگر M نقطه‌ای روی بیضی و F و F' کانون‌های بیضی باشند، حداقل و حداکثر $(MF - MF')$ به ترتیب کدام است؟

۱) $۲b , ۰$ ۲) $۲c , ۰$ ۳) $۲b , c$ ۴) $۲c , c$

۹۸- قطرهای یک بیضی موازی محورهای مختصات می‌باشند. اگر مختصات یک رأس کانونی این بیضی $(۵,۱)$ و مختصات یک رأس ناکانونی آن $(۰,۴)$ باشد، زاویهٔ بین پاره‌خط‌های واصل بین یک رأس ناکانونی و کانون‌های این بیضی چه‌قدر است؟

۱) ۵۳° ۲) ۷۴° ۳) ۹۰° ۴) ۱۰۶°

۹۹- در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ شیب خطی که مرکز بیضی را به یک سر وتر کانونی وصل می‌کند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۰۰- معادلهٔ بیضی که مختصات کانون‌های آن $(-۴,۰)$ و $(۴,۰)$ باشند و طول قطر بزرگ آن ۱۰ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ ۲) $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ ۳) $\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۲۵}=۱$ ۴) $\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{y^۲}{۲۵}=۱$

درس ٤: سهمی

۱۰۱- در سهمی به معادلهٔ $۳x^۲ + ۴y - ۶x + ۱۱ = ۰$، معادلهٔ خط هادی کدام است؟ (خارج ۸۸)

۱) $y = -\frac{۵}{۳}$ ۲) $y = -\frac{۴}{۳}$ ۳) $y = -\frac{۲}{۳}$ ۴) $y = -\frac{۱}{۳}$

۱۰۲- به ازای کدام مقدار a، خط هادی سهمی $۲y^۲ - ۱۲y + ax + ۸ = ۰$ به معادلهٔ $x = \frac{۲۱}{۸}$ است؟ (سراسری ۹۷)

۱) ۱۲ و ۳ ۲) ۱۶ و ۳ ۳) ۱۲ و ۵ ۴) ۱۶ و ۵

۱۰۳- به ازای کدام مقدار a، کانون سهمی به معادلهٔ $2y^2+ay-3x=0$ بر روی محور yها است؟ (سراسری ۹۱)

۱) ± 2 ۲) ± 3 ۳) ± 4 ۴) ± 6

۱۰۴- اگر خط به معادلهٔ $x=-1$ خط هادی سهمی $2y^2-4y=ax$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,4)$ از کانون سهمی کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۵- نقطهٔ $S(2,1)$ رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور yها است و از نقطهٔ $(0,5)$ می‌گذرد. معادلهٔ خط هادی آن، کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $y=\frac{1}{4}$ ۲) $y=\frac{1}{2}$ ۳) $y=\frac{3}{4}$ ۴) $y=\frac{3}{2}$

۱۰۶- سهمی به کانون $(1,2)$ و خط هادی به معادلهٔ $x=-3$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۰۷- دهانهٔ سهمی به معادلهٔ $y^2+a(x-y)=0$ رو به راست باز می‌شود و فاصلهٔ کانون تا خط هادی آن ۲واحد است، مختصات کانون این سهمی کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $(-1,-2)$ ۲) $(0,-2)$ ۳) $(0,-1)$ ۴) $(1,2)$

۱۰۸- وتری از سهمی به معادلهٔ $y^2=4(x+y)$ که از کانون بر محور آن عمود باشد، قطری از یک دایره است. معادلهٔ این دایره کدام است؟ (خارج ۸۷)

۱) $x^2+y^2-4y=0$ ۲) $x^2+y^2+4y=0$

۳) $x^2+y^2-2y=2$ ۴) $x^2+y^2-2x+2y=2$

۱۰۹- نقطهٔ $S(-1/6,-1)$، رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور xها بر این سهمی بتابد، به نقطهٔ $(0/9,-1)$ باز می‌تابد. این سهمی محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) $-6,4$ ۲) $-5,3$ ۳) $-4,2$ ۴) $-2,0$

۱۱۰- سهمی به کانون $F(3,2)$ و خط هادی به معادلهٔ $x=-1$، محور xها را در نقطهٔ A قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ A تا کانون سهمی کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۳

۱۱۱- یک سهمی که محور تقارن آن موازی یکی از محورهای مختصات است، محور yها را در دو نقطه به عرض ۱ و ۵ قطع می‌کند و رأس آن بر روی نیمساز ناحیهٔ اول است. فاصلهٔ کانون سهمی تا خط هادی، کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

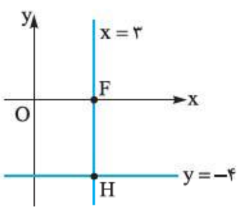
۱۱۲- خط هادی یک سهمی به معادلهٔ $x=\frac{13}{4}$ است. هر پرتویی که از نقطهٔ $(-\frac{5}{4},-2)$ بر این سهمی بتابد، در امتداد محور xها باز می‌تابد. این سهمی محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سراسری ۹۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۱۱۳- عمق یک آینهٔ سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعدهٔ آن ۶۰ واحد است. فاصلهٔ کانون تا رأس آن کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۵

۱۱۴- در شکل روبه‌رو، خط $x=3$ محور تقارن، خط $y=-4$ خط هادی و نقطهٔ F کانون سهمی است. این سهمی محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (قلم‌چی ۹۴)



۱) ۴ ۲) $-\frac{7}{8}$

۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۱۵- دایرهٔ $x^2+y^2-4x-2y+1=0$، بر سهمی $y^2+16x-2y+m=0$ و خط هادی آن مماس است. m کدام است؟ (قلم‌چی ۹۷)

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۱ ۴) -1

۱۱۶- نقاط $(0,-1)$، $(0,3)$ و $(-2,1)$ روی یک سهمی واقع هستند. از کانون سهمی، خطی موازی با خط هادی آن رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط M و N قطع کند. اندازهٔ MN چه‌قدر است؟ (قلم‌چی ۹۷)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۷- مکان هندسی مراکز دوایری که از نقطهٔ $A(2,1)$ می‌گذرد و بر محور yها مماس می‌شوند، کدام است؟ (قلم‌چی ۹۵)

۱) $x^2-4x+2y+5=0$ ۲) $y^2+4x-2y+5=0$ ۳) $x^2-2x-4y-5=0$ ۴) $y^2-4x-2y+5=0$

۱۱۸- اگر خط $y = mx + n$ در رأس سهمی $۳x^۲ - ۶x + by + ۱۱ = ۰$ بر آن مماس باشد و دهانهٔ سهمی به سمت پایین باز شود و فاصلهٔ کانون تا رأس سهمی برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $m + n$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۲ ۴) ۲−

۱۱۹- معادلهٔ سهمی‌ای که کانون آن در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات بوده و از نقطهٔ $(۱,-۱)$ بگذرد و معادلهٔ خط هادی آن $x = -۴$ و معادلهٔ محور تقارنش $y = ۲$ باشد، کدام است؟ (قلم‌چی ۹۶)

۱) $(y-۲)^۲ = ۹(۲x-۱)$ ۲) $(y-۲)^۲ = ۹x$ ۳) $(y-۲)^۲ = ۹(۳x-۲)$ ۴) $(y-۲)^۲ = ۹(۳-۲x)$

۱۲۰- فاصلهٔ بین کانون و خط هادی در سهمی گذرا بر سه نقطهٔ $M(۰,-۱)$، $N(۰,۳)$ و $P(-۲,۱)$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۶)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۲۱- کانون یک سهمی $F(۲,-۱)$ است. اگر این سهمی از نقطهٔ $M(-۱,۳)$ عبور کند، خط هادی کدام گزینه <u>نمی‌تواند</u> باشد؟ (قلم‌چی ۹۶)

۱) $x = ۴$ ۲) $y = -۲$ ۳) $x = -۵$ ۴) $y = ۸$

۱۲۲- چند نقطه روی سهمی وجود دارد که از رأس و کانون به یک فاصله باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۲۳- اگر $(m-۲)y^۲ + x^۲ + mx + ۵y + m = ۰$ معادلهٔ یک سهمی باشد، محور تقارن سهمی کدام است؟

۱) $x = ۲$ ۲) $x = ۱$ ۳) $x = -۱$ ۴) $x = -۲$

۱۲۴- نقطهٔ $(-۴,۵)$ کانون و نقطهٔ $(۲,m)$ رأس سهمی‌ای است که محور تقارن آن با یکی از محورهای مختصات موازی است. معادلهٔ خط هادی این سهمی کدام است؟

۱) $y = -۴$ ۲) $x = -۴$ ۳) $y = ۸$ ۴) $x = ۸$

۱۲۵- نقطهٔ $(۳,۲)$، کانون سهمی قائمی است که دهانهٔ آن رو به پایین باز می‌شود. اگر این سهمی محور yها را با عرض ۲ قطع کند، آن‌گاه فاصلهٔ کانون تا خط هادی آن کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۲۶- معادلهٔ $\begin{cases} y = \cos\alpha + ۳ \\ x = ۲\cos ۲\alpha \end{cases}$، معادلهٔ قسمتی از یک سهمی است. مختصات کانون این سهمی کدام است؟

۱) $(-\frac{۳۱}{۱۶},۳)$ ۲) $(-\frac{۳۳}{۱۶},۳)$ ۳) $(-\frac{۳۱}{۱۶},-۳)$ ۴) $(-\frac{۳۳}{۱۶},-۳)$

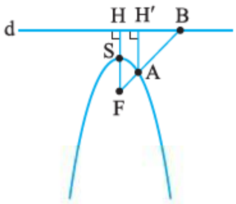
۱۲۷- در یک سهمی هر پرتو که از نقطهٔ $(۲,-۴)$ بر این سهمی می‌تابد، در امتداد محور yها باز می‌تابد. اگر این سهمی از نقطهٔ $A(۳,-۴)$ عبور کند و محور xها را در نقاط M و N قطع کند، طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۲۸- معادلهٔ سهمی که $y = ۴$ هادی آن باشد و دو سر وتر کانونی آن دو نقطهٔ $(۵,۰)$ و $(۱,۰)$ باشند، کدام است؟

۱) $(x+۳)^۲ = ۴y - ۸$ ۲) $(x-۳)^۲ = -۴y + ۸$ ۳) $(x+۳)^۲ = -۴y + ۸$ ۴) $(x-۳)^۲ = ۴y - ۸$

۱۲۹- در شکل مقابل، اگر فاصلهٔ کانونی سهمی برابر ۳ و FB برابر ۸ باشد، طول AB چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۷}$ ۳) $\frac{۳۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳۲}{۷}$

۱۳۰- اگر $A(۴,۱)$ یک نقطه از یک سهمی باشد و خط $y = ۳$ خط هادی سهمی باشد، معادلهٔ مکان هندسی کانون سهمی کدام است؟

۱) $(x-۴)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ ۲) $(x-۴)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴$ ۳) $y = ۲$ ۴) $y = ۴$