



گاج

وفاقیہ مدرسہ اسلامیہ
مطابق
«عقائد»



ریاضی ۱

پایہ دہم
رشتہ تجربی و ریاضی

مؤلف
علی اکبر طالبی

فرمولہ بیسٹ

فرمول لیست

۱۲
نمونه
امتحانی

۵۰۰
پرسش
تشریحی

۵۰
صفحه
درسنامه



+۹

ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان



تهران، میدان انقلاب
نیش بازار چه کتاب
www.gajmarket.com

ن و القلم و ما یسطرون

کتاب پیش‌رو از مجموعه کتاب‌های فرمول بیست می‌باشد. هدف اصلی این مجموعه کتاب، ارائه آموزش‌های کامل همراه با مثال‌ها و تمرینات متنوع بر پایه کتاب درسی و در جهت تسلط و آمادگی برای امتحانات می‌باشد.

در این کتاب...

۱. تمام مطالب کتاب تو درس نامه‌ها پوشش داده شده، پس درس نامه‌ها رو خوب بخون و تمام مثال‌هاش رو حل کن. در ضمن نکته‌ها و فرمول‌ها رو خوب به خاطر بسپار.
۲. تمام تمرینات کتاب درسی مشابه‌سازی شده و امکان نداره سؤالی در امتحان مطرح بشه که خودش یا مشابهش رو در این کتاب ندیده باشید.
۳. چند دوره امتحان تألیفی و نهایی در آخر کتاب براتون آوردیم که بتونید سؤالارو به صورت ترکیبی و یک‌جا ببینید.
۴. برای جمع‌بندی و دوره کردن مطالب در شب امتحان، به فیلم‌های آموزشی ویژه شب امتحان که QR-code آن در ابتدای هر فصل اومده، مراجعه کن.

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سؤالات
104 min	۸۶	۶ تا ۲۰
75 min	۹۶	۲۱ تا ۳۰
44 min	۱۰۴	۳۱ تا ۴۴
60 min	۱۱۴	۴۵ تا ۵۵
127 min	۱۲۴	۵۶ تا ۶۶
71 min	۱۳۳	۶۷ تا ۷۵
72 min	۱۴۱	۷۶ تا ۸۴

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارات‌های جبری

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

فصل پنجم: تابع

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

فصل هفتم: آمار و احتمال

امتحان نهایی



بارم‌بندی درس ریاضی ۱		
شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۵	۲
دوم	۵	۲
سوم	۵	۲/۵
چهارم	۵	۳/۵
پنجم	-	۳/۵
ششم	-	۳
هفتم	-	۳/۵
جمع	۲۰	۲۰

آزمون ۱: آزمون فصل ۱ ۱۵۰

آزمون ۲: آزمون فصل ۲ ۱۵۰

آزمون ۳: آزمون فصل ۳ ۱۵۱

آزمون ۴: آزمون فصل ۴ ۱۵۲

آزمون ۵: آزمون فصل ۵ ۱۵۲

آزمون ۶: آزمون فصل ۶ ۱۵۳

آزمون ۷: آزمون فصل ۷ ۱۵۴

آزمون ۸: نوبت اول ۱۵۴

آزمون ۹: نوبت اول ۱۵۶

آزمون ۱۰: نوبت دوم ۱۵۷

آزمون ۱۱: نوبت دوم ۱۵۸

آزمون ۱۲: خردادماه ۱۴۰۳ ۱۵۹

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۱۲ ۱۶۱

1

بخش



درستامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

مجموعه، گویا و دنباله

۱

ریاضی ۱

از فصل اول ریاضی (۱)، ۵ نمره در نوبت اول، ۲ نمره در نوبت دوم و ۲ نمره در نوبت شهریور سؤال طرح می‌شود.

فصل ۱

برای استفاده از فیلم آموزشی شب امتحان این فصل QR-code مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

مجموعه اعداد - بازه‌ها

صفحه ۲ تا ۵ کتاب درسی

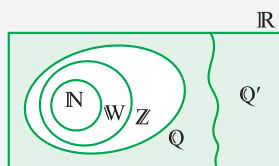
بسته اول



بسته اول شامل معرفی برفی از مجموعه‌های خاص و تعریف انواع بازه‌ها است.

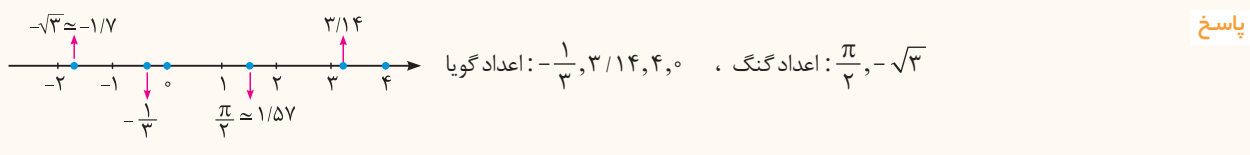
مجموعه اعداد: برخی از مجموعه‌های خاص اعداد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} & \mathbb{W} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} & \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \\ \mathbb{Q}' &= \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\} & & \\ \mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' & & \end{aligned}$$



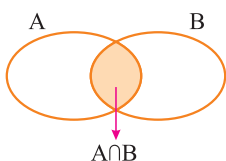
نکته ۱ رابطه زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ است. به عبارت دیگر، تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند.
۲ هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و هم‌چنین هر نقطه روی محور اعداد نشان دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

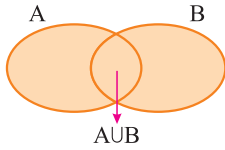
سؤال کدام یک از اعداد زیر گویا و کدام یک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هر یک از آن‌ها را روی محور مشخص کنید.
 $-\frac{1}{3}, 3/14, \frac{\pi}{2}, -\sqrt{3}, 4, 0$



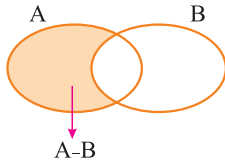
یادآوری از اشتراک، اجتماع و تفاضل دو مجموعه

۱ اشتراک دو مجموعه: مجموعه تمام عضوهای مشترک دو مجموعه A و B را اشتراک دو مجموعه A و B می‌گوییم و با $A \cap B$ نشان می‌دهیم.





۲ اجتماع دو مجموعه: مجموعه تمام عضوهایی که در A یا در B یا در هر دو باشند را اجتماع دو مجموعه A و B می‌گوییم و با $A \cup B$ نشان می‌دهیم.



۳ تفاضل دو مجموعه: مجموعه تمام عضوهایی که در A هستند ولی عضو B نیستند را مجموعه $A - B$ می‌نامیم.

سؤال اگر $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ و $B = \{2, 3, 6, 8\}$ دو مجموعه باشند، هر یک از مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ همه اعضای دو مجموعه A و B را در یک مجموعه قرار می‌دهیم. مجموعه $A \cup B$ به دست می‌آید. (اعضای تکراری را یک بار می‌نویسیم)

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \cup \{2, 3, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

همه اعضای مشترک دو مجموعه A و B، $A \cap B$ را مشخص می‌کند:

$$A \cap B = \{2, 8\}$$

عضوهای مشترک A و B را از مجموعه A حذف می‌کنیم. بقیه اعضای A، اعضای مجموعه $A - B$ است:

$$A - B = \{1, 4, 5, 7, 8\} - \{2, 3, 6, 8\} = \{1, 4, 5, 7\}$$

به همین ترتیب مجموعه $B - A$ مشخص می‌شود:

$$B - A = \{2, 3, 6, 8\} - \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{3, 6\}$$

در این قسمت با تعریف بازه که یک نماد برای سازه نوشتن مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی می‌باشد، آشنا می‌شویم.

بازه (فاصله): زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} مانند A را که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه یا فاصله می‌نامیم.

فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین 0 و 4 باشد، یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

مجموعه A را با نماد ساده‌تری به صورت $(0, 4)$ نمایش می‌دهیم و آن را بازه باز از 0 تا 4 می‌نامیم. بنابراین:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\} = (0, 4)$$

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ ، آن‌گاه:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)

نکته هر بازه، یک مجموعه است، بنابراین اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها وجود دارد.

سؤال اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ و $B = (0, 4)$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ ابتدا مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. $A \cup B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن یا در A یا در B یا در هر دو باشند:

$$\Rightarrow A \cup B = (-1, 4)$$

اعضای مشترک دو مجموعه A و B، مجموعه $A \cap B$ است:

$$\Rightarrow A \cap B = (0, 3]$$

از دو نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌هایی که از یک طرف نامحدود هستند، استفاده می‌کنیم. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد، در این صورت داریم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	

توجه $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند.

سؤال اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ باشد، $A - B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ اگر عضوهای مشترک A و B را از مجموعه A حذف کنیم، مجموعه $A - B$ به دست می‌آید. از محور برای مشخص کردن $A - B$ استفاده کنید:

$$A = (-\infty, 2], B = (0, +\infty) \Rightarrow A - B = (-\infty, 2] - (0, +\infty)$$



$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

نکته بازه $(-\infty, +\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر:

مجموعه اعداد - بازه‌ها

پریش‌های تشریحی

بسته
۱

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۵ کتاب درسی)

• **درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.**

- | | |
|---|--|
| ۹. $\{-1, 0, 2\} \subseteq [-1, 3]$ | ۱. $-1 \in (-1, 2]$ |
| ۱۰. $(-1, 1) \subseteq [-1, 1]$ | ۲. $4 \in (3, 4]$ |
| ۱۱. $0 \in (-2, 0) \cup (0, 1)$ | ۳. $0 \in \{-1, 1\}$ |
| ۱۲. $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ | ۴. $\frac{5}{6} \in (0, 1)$ |
| ۱۳. $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ | ۵. $\sqrt{3} \in (1, 2)$ |
| ۱۴. $(1, 2) \subseteq \mathbb{Q}$ | ۶. $[-1, 1) = (-1, 1]$ |
| ۱۵. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ | ۷. $\emptyset \subseteq [-1, +\infty)$ |
| ۱۶. $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 1\} = [-1, 1)$ | ۸. $\emptyset \in [0, 8)$ |

• **در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.**

(شبه نهایی)

۱۷. طول بازه $(-3, 7)$ برابر است.
۱۸. اگر $A = (-1, 5)$ و $B = [0, 6]$ باشند، طول نقطه میانی $A \cap B$ برابر است.
۱۹. اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.



$$1^\circ, -2, -\frac{\pi}{4}, \sqrt{5}, \frac{1}{4}, 3/1212 \dots$$

۲۰. هریک از اعداد $-\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3} + \sqrt{2}, 2/4$ و -2° را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام یک از آن‌ها گنگ هستند.

۲۱. طرف دوم هریک از تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{array}{lll} \boxed{1} \mathbb{R} - \mathbb{Q} = & \boxed{ب} \mathbb{Z} - \mathbb{W} = & \boxed{پ} \mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} = \\ \boxed{ت} \mathbb{W} - \mathbb{Q}' = & \boxed{ث} \mathbb{W} - \mathbb{N} = & \boxed{ج} \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \end{array}$$

۲۲. هریک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} \boxed{1} (-2, 2) & \boxed{ب} [0, 2) & \boxed{پ} [-4, -1] \\ \boxed{ت} (3, +\infty) & \boxed{ج} (-\infty, -2) & \boxed{د} [1, \sqrt{5}] \\ \boxed{ث} (-\infty, -\frac{1}{4}) & \boxed{ح} [\sqrt{2}, +\infty) & \boxed{ط} (-\infty, \frac{1}{4}) \end{array}$$

۲۳. نمایش هندسی دو بازه $A = [-1, 5]$ و $B = (-3, 2)$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} A \cap B & \boxed{ب} A \cup B \\ \boxed{پ} A - B & \boxed{ت} B - A \end{array}$$

(مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۵ کتاب درسی)

۲۴. حاصل هریک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} \boxed{1} (-2, 5] \cap (-1, 7) & \boxed{ب} [-4, 0] \cap [-1, +\infty) & \boxed{پ} (-2, 4) \cup (0, 5] \\ \boxed{ت} (-\infty, 2) - (0, 3) & \boxed{ج} (0, 5] - [2, +\infty) & \boxed{د} (-1, 0] \cap [0, 2) \\ \boxed{ث} (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) & \boxed{ح} (-\infty, -1) \cup (-\infty, 3) & \boxed{ط} (-\infty, -1) \cup (-\infty, 3) \end{array}$$

۲۵. مجموعه‌های $\mathbb{R} - \{0\}$ ، $\mathbb{R} - \{-3, 4\}$ ، $\mathbb{R} - \{4, 6\}$ و $[3, 7]$ و $(0, 1]$ و $[-2, 4]$ را روی محور نشان دهید و سپس هریک از آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۲۶. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x + 1 \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

$$\boxed{1} A \quad \boxed{ب} B \quad \boxed{پ} A - B \quad \boxed{ت} A \cup B$$

۲۷. اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 3\}$ ، $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$ و $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ باشند، حاصل $(A \cap B) \cup C$ و $B - (A \cap C)$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

۲۸. اگر $\frac{m+1}{4} \in [-1, 4)$ باشد، حدود m را مشخص کنید.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی - متمم یک مجموعه، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

صفحه‌های ۵ تا ۱۳ کتاب درسی

بسته دوم



در این بسته، تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی آورده می‌شود. متمم مجموعه تعریف می‌شود و با فرمول تعداد عضوهای مهموعه‌های متناهی آشنایی شویم.

مجموعه‌های متناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.

به عنوان مثال، مجموعه اعداد اول یک رقمی یک مجموعه متناهی است، زیرا یک مجموعه ۴ عضوی می‌باشد:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

مجموعه اعداد اول یک رقمی

توجه: تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و گاهی با بعضی امکانات می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد، مثل تعداد سواری‌های شهر تهران.

قرارداد: تعداد عضوهای مجموعه متناهی A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم. در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه نامتناهی می‌نامیم. به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی، یک مجموعه نامتناهی است.

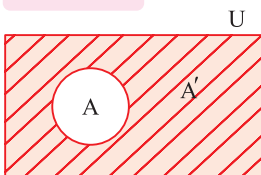
مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

به عبارت دیگر، A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند. در واقع:

$$A' = U - A$$

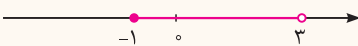
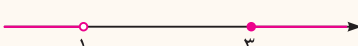
نمودار A با مجموعه مرجع U به صورت مقابل است:




سؤال فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 7\}$ باشند. مجموعه‌های $A' - B$ و $A' \cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ ابتدا هریک از مجموعه‌های A' و B' را با اعضا مشخص می‌کنیم:
 $A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 4\} = \{3, 5, 6, 7\}$, $B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 7\} = \{1, 2, 6\}$
 $\Rightarrow A' - B = \{3, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 7\} = \{6\}$, $A' \cup B' = \{3, 5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 6\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

سؤال مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$ را در نظر بگیرید.
 ۱ مجموعه A را روی محور نشان دهید.
 ۲ با فرض این‌که \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، مجموعه A' را مشخص کنید و آن را روی محور نشان دهید.

پاسخ ۱ مجموعه A ، بازه $[-1, 3)$ است. نمودار آن روی محور به صورت زیر است:

 ۲ $\mathbb{R} - [-1, 3)$ ، متمم مجموعه A است. داریم:
 $A' = (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$
 (-۱) عضوی از A است و در نتیجه، -۱ عضو A' نمی‌باشد و همچنین ۳ عضو مجموعه A نیست و در نتیجه، ۳ عضوی از A' می‌باشد. مجموعه A' روی محور به صورت مقابل است:


- نکته** ! اگر A و B دو مجموعه از مجموعه مرجع U باشند، آن‌گاه:
- ۱ $(A')' = A$
 - ۲ $A \cap A' = \emptyset$
 - ۳ $A \cup A' = U$
 - ۴ $\emptyset' = U$
 - ۵ $U' = \emptyset$
 - ۶ $A - B = A \cap B'$
 - ۷ $A - B = A - (A \cap B)$
 - ۸ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 - ۹ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

تذکر روابط (۸) و (۹)، قوانین دموگن نام دارند.
دو مجموعه جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم. نمودار ون دو مجموعه جدا از هم به صورت مقابل است:

 $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$
 به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد طبیعی زوج، دو مجموعه جدا از هم هستند:
 $O = \{1, 3, 5, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی فرد
 $E = \{2, 4, 6, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی زوج
 $\Rightarrow O \cap E = \emptyset$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

نکته ! ۱ اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ برابر است با:
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 ۲ اگر U یک مجموعه متناهی باشد، آن‌گاه:
 $n(A') = n(U) - n(A)$

مفهوم چندواژه:

- ۱ **حداقل:** ویژگی A یا ویژگی B به معنای حداقل است و از اجتماع استفاده می‌کنیم.
- ۲ **حداکثر:** ویژگی A یا ویژگی B یا هیچ یک از ویژگی‌های A و B به معنای حداکثر است و از متمم $(A \cap B)$ استفاده می‌کنیم.

سؤال در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۷ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۵ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند.

- ۱ چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟
 ۲ چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نمی باشند؟

پاسخ مجموعه شامل تمام دانش آموزان را با U ، مجموعه دانش آموزان عضو تیم فوتبال را با A و مجموعه دانش آموزان عضو تیم والیبال را با B نشان می دهیم.

۱ باید تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ را به دست آوریم:

$$n(A) = 17, n(B) = 15, n(A \cap B) = 7 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 15 - 7 = 25$$

۲ باید تعداد عضوهای مجموعه $(A \cup B)'$ را به دست آوریم:

$$n(U) = 30, n(A \cup B) = 25 \Rightarrow n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 25 = 5$$

نکته اگر A و B دو مجموعه متناهی و U مجموعه مرجع باشد، آن گاه:

۱ $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

۲ $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$

در فرمول شماره (۲)، U باید مجموعه ای متناهی باشد.

از نمودار ون برای به دست آوردن تعداد اعضاء مجموعه های $A \cup B$ و ... می توانیم استفاده کنیم.

سؤال یک دوره جشنواره فیلم کوتاه، با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن ها ۷ فیلم کارتونی و ۸ فیلم طنز وجود دارد به طوری که ۳ تا از فیلم های کارتونی با مضمون طنز هستند. مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که:

- ۱ کارتونی یا طنزند.
 ۲ غیرکارتونی و غیرطنزند.

پاسخ مجموعه های U ، A و B را به صورت زیر معرفی می کنیم:

B : مجموعه فیلم های طنز

A : مجموعه فیلم های کارتونی

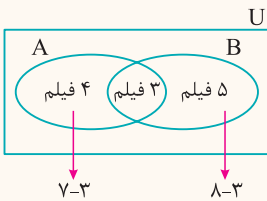
U : مجموعه تمام فیلم ها

در نمودار ون مقابل، دو مجموعه A و B ، مجموعه U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده است. عددی که برای هر ناحیه وجود دارد را می نویسیم. (ابتدا باید عدد مربوط به اشتراک را بنویسیم):

۱ تعداد فیلم های کارتونی یا طنز برابر $4 + 3 + 5 = 12$ می باشد.

۲ تعداد فیلم های غیرکارتونی و غیرطنز برابر $21 - 12 = 9$ است.

تعداد کل فیلم ها



مجموعه های متناهی و نامتناهی - متمم یک مجموعه، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

پرسش های تشریحی

بسته
۲

● در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

- ۲۹ مجموعه اعداد صحیح کوچک تر از ۵ - یک مجموعه است. (متناهی - نامتناهی)
- ۳۰ مجموعه تهی یک مجموعه است. (متناهی - نامتناهی)
- ۳۱ $A' \cup A = \dots$ ، $A' \cap B' = \dots$ ، $\emptyset' = \dots$ ، $A \cap A' = \dots$ (کاردر کلاس ۴ صفحه ۹ کتاب درسی)
- ۳۲ اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو مجموعه A و B را دو مجموعه می نامیم.
- ۳۳ اگر A یک مجموعه نامتناهی و B یک مجموعه متناهی باشد، آن گاه $A - B$ یک مجموعه است.
- کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است؟
- ۳۴ مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۲ یک مجموعه متناهی است.
- ۳۵ مجموعه اعداد صحیح بین ۲- و ۱- یک مجموعه متناهی است.
- ۳۶ اگر A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه نامتناهی باشد، آن گاه مجموعه $A \cap B$ یک مجموعه نامتناهی است.
- ۳۷ اگر A دارای یک زیرمجموعه متناهی باشد، آن گاه A یک مجموعه متناهی است.
- ۳۸ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آن گاه A نیز متناهی خواهد بود.
- ۳۹ اگر A دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن گاه A یک مجموعه نامتناهی است.

(خرداد ۱۴۰۳)

۴۰. اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، آن‌گاه $A - B$ مجموعه‌ای متناهی است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

۴۱. اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن‌گاه:

۴۲. اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

$$A' \cup B' = U \quad \text{ت} \quad A' - B' = \phi \quad \text{پ} \quad B' \subseteq A' \quad \text{ب} \quad A' = B' \quad \text{ا}$$

● **متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.**

- | | |
|--|---|
| ۴۳. مجموعه اعداد طبیعی اول و دورقمی | ۵۰. مجموعه مضرب‌های صحیح ۴ |
| ۴۴. مجموعه اعداد صحیح فرد | ۵۱. $(-1, \frac{1}{4})$ |
| ۴۵. مجموعه تمام چهارضلعی به صورت مربع | ۵۲. مجموعه کسرهایی با صورت و مخرج عدد طبیعی |
| ۴۶. مجموعه خیابان‌های ایران | ۵۳. مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۴ |
| ۴۷. مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱ | ۵۴. $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ |
| ۴۸. مجموعه اعداد گنگ بین ۰ و ۱ | ۵۵. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$ |
| ۴۹. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\}$ | ۵۶. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ |

● **به سؤالات زیر پاسخ دهید:**

۵۷. دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری باشد.

۵۸. دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

۵۹. دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها نامتناهی باشد.

۶۰. دو مجموعه نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها متناهی باشد.

۶۱. فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۶ باشد.

ا) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعه متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید که $C \subseteq D$

ث) دو زیرمجموعه نامتناهی و مجزا مانند A و B از U بنویسید که $A \cup B = U$

(تمرین ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

۶۲. مجموعه اعداد طبیعی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید:

ا) مجموعه نامتناهی A را طوری بنویسید که A' نامتناهی باشد.

ب) مجموعه نامتناهی A را طوری بنویسید که A' متناهی باشد.

پ) مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید. A' متناهی است یا نامتناهی؟

ت) مجموعه متناهی A و مجموعه نامتناهی B را طوری بنویسید که A و B مجزا بوده و $\mathbb{N} = A \cup B$

۶۳. \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید، سپس آن‌ها را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

$$A = (-1, 5] \quad \text{ا} \quad \mathbb{N} \quad \text{ب} \quad B = (2, +\infty) \quad \text{پ}$$

$$C = (-\infty, 1] \quad \text{ت} \quad (-\infty, 1) \cap (0, +\infty) \quad \text{ث} \quad (-4, 1) \cup (2, 7) \quad \text{ج}$$

۶۴. اگر مجموعه اعداد طبیعی یک مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $C = \{3, 4, 5, 6\}$ باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

$$A' \quad \text{ا} \quad (A \cap B)' \quad \text{ب} \quad B \cup C' \quad \text{پ}$$

$$(A \cup B)' \quad \text{ت} \quad (A \cup B') \cap C \quad \text{ث} \quad (A - B) \cup C' \quad \text{ج}$$

۶۵. فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{2, 3\}$ باشند. درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

(کاردرکلاس ۶ صفحه ۹ کتاب درسی)

$$A - B = A \cap B' \quad \text{پ} \quad (A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{ب} \quad (A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{ا}$$

۶۶. اگر $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 4\}$ ، $A = \{x \in U \mid x \leq 0\}$ ، $B = \{x \in U \mid x \leq 2\}$ و $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

$$B' \quad \text{ا} \quad C' \cup B \quad \text{ب} \quad (A \cap C)' - B \quad \text{پ} \quad (A' \cup B) \cap C' \quad \text{ت}$$

۶۷. اگر مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۵ مجموعه مرجع، مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ را با A و مجموعه مضرب‌های کوچک‌تر از ۱۴ عدد ۳ را با B نمایش دهیم، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$(A')' = A$ [آ] $B - A = B \cap A'$ [پ] $A - B = A - (A \cap B)$ [ب]

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ [ت] $(A \cap B)' = A' \cup B'$ [ث] $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$ [ج]

۶۸. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۱. فرض کنید $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (مجموعه مرجع)، $A = \{2, 6, 10\}$ و $B = \{2, 4, 6, 10\}$ باشند. آیا $A \subseteq B$ ؟ آیا $A' \subseteq B'$ ؟

(کار در کلاس ۷ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۲. فرض کنید $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع می‌باشد. با استفاده از نمودار ون نشان دهید $B' \subseteq A'$

۶۹. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U هستند، به طوری که $n(U) = 50$ ، $n(A) = 35$ ، $n(B) = 20$ و $n(A \cap B) = 12$ مطلوب است:

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

$n(A')$ [آ] $n(A \cup B)$ [ب] $n(A \cap B')$ [پ]

$n(A' \cap B')$ [ت] $n(A' \cup B')$ [ث] $n(A \cup B')$ [ج]

(خرداد ۱۴۰۳)

۷۰. اگر $n(A) = 60$ ، $n(B) = 70$ و $n(A - B) = 15$ باشد، آن‌گاه $n(A \cup B)$ را به دست آورید.

۷۱. در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(تمرین ۵ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۱. تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند. [آ]

۲. تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. [ب]

۷۲. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

۱. چند نفر در هر دو رشته فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند؟ [آ]

۲. چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند؟ [ب]

۳. چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟ [پ]

۷۳. از ۳۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۱۷ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس در هیچ یک از این دو المپیاد شرکت نکرده باشند:

۱. چند نفر در هر دو المپیاد ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟ [آ]

۲. چند نفر در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند ولی در المپیاد فیزیک شرکت نکرده‌اند؟ [ب]

۳. حداکثر چند نفر در یکی از این دو المپیاد شرکت کرده‌اند. [پ]

۷۴. در یک نظرسنجی از ۲۰۰ نفر که از اصفهان دیدن کرده‌اند، معلوم شد ۱۲۰ نفر از عالی‌قاپو و ۱۵۰ نفر از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند. اگر ۴۰ نفر از عالی‌قاپو بازدید کرده باشند ولی از بازار اصفهان بازدید نکرده باشند:

۱. چند نفر از هر دو مکان بازدید کرده‌اند؟ [آ]

۲. چند نفر دست‌کم از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟ [ب]

۳. چند نفر دقیقاً از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟ [ت]

۴. چند نفر از بازار اصفهان و از عالی‌قاپو بازدید نکرده‌اند؟ [پ]



در این بسته، الگو و دنباله تعریف می‌شوند. دنباله‌های فطری و دنباله درجه دوم از دنباله‌های مهم این قسمت هستند.

■ **الگو:** الگوی یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده، رشدکننده یا ترکیبی از این دو باشند. در این جا ما با الگوهای عددی و شکلی سروکار داریم.

۲, ۴, ۶, ۸, ...

الگوی عددی مقابل را در نظر بگیرید:

جمله اول این الگو را a_1 (اندیس ۱) نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم $a_1 = 2$. هم‌چنین جمله دوم این الگو برابر ۴ است و می‌نویسیم $a_2 = 4$ و به همین

ترتیب جمله n ام این الگو را a_n نمایش می‌دهیم و داریم $a_n = 2n$

a_n را جمله عمومی الگو می‌نامیم. با داشتن جمله عمومی الگو، می‌توان مقدار هر جمله از یک الگو را به دست آورد. در واقع جمله عمومی یک الگو، ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند.

سؤال جمله عمومی یک الگو به صورت $a_n = 5n + 3$ است.

۱ مقدار جمله دهم الگو را مشخص کنید. ۲ جمله چندم الگو برابر ۱۰۸ است؟

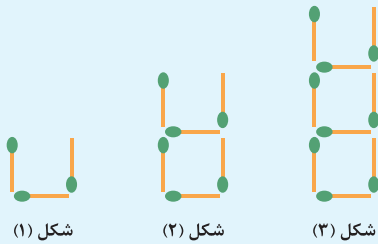
پاسخ ۱ با قرار دادن عدد ۱۰ به جای n در جمله عمومی الگو، جمله دهم الگو به دست می آید:

$$n = 10, a_n = 5n + 3 \Rightarrow a_{10} = 5 \times 10 + 3 = 53$$

۲ باید n را طوری به دست آوریم که $a_n = 108$ شود:

$$a_n = 108 \Rightarrow 5n + 3 = 108 \Rightarrow 5n = 108 - 3 = 105 \Rightarrow n = \frac{105}{5} = 21$$

سؤال با توجه به الگو، تعداد چوب کبریت های به کار رفته در شکل n ام را بنویسید.



پاسخ در شکل ۱، $3 = 3(1)$ ، در شکل ۲، $6 = 3(2)$ ، در شکل ۳، $9 = 3(3)$ ، چوب کبریت به کار رفته است. با ادامه همین روند، در شکل n ام، $a_n = 3n$ چوب کبریت به کار رفته است.

الگوی خطی: در الگوی $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99$ هر جمله دقیقاً ۲ واحد از جمله قبلی از خودش بیش تراست. چنین الگوهایی را که در آن ها اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابت است، الگوهای خطی می نامیم.

جمله عمومی الگوی خطی: الگوهایی که جمله عمومی آن ها به صورت $t_n = an + b$ باشد را الگوهای خطی می گوئیم (زیرا شبیه معادله خط هستند). که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. t_n یک عبارت دوجمله ای از درجه یک بر حسب n می باشد.

مثال الگوهای $a_n = -\frac{1}{3}n + 2$ و $b_n = 4n + 17$ ، الگوهای خطی هستند.

سؤال در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۹ و ۲۳ می باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

پاسخ فرض کنیم جمله عمومی الگو $t_n = an + b$ باشد. پس داریم:

$$\begin{cases} t_5 = a(5) + b = 9 \\ t_{12} = a(12) + b = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 9 \\ 12a + b = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a - b = -9 \\ 12a + b = 23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = \frac{14}{7} = 2 \xrightarrow{5a+b=9} 5(2) + b = 9 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow t_n = an + b = 2n - 1$$

نکته! اختلاف هر دو جمله متوالی در الگوهای خطی، برابر ضریب n می باشد (که همان شیب، در معادله خط است).

هر الگویی که در آن اختلاف هر دو جمله متوالی، مقدار ثابتی نباشد، الگوی خطی نیست. در الگوی زیر، اختلاف دو جمله اول برابر ۴ و اختلاف دو جمله دوم و سوم برابر ۵ می باشد. این الگو، یک الگوی غیرخطی است.

الگوی غیرخطی: هر الگویی که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ نباشد را الگوی غیرخطی می گوئیم.

مثال الگوهای $a_n = n^2 - 4n$ و $b_n = \frac{1}{n}$ الگوهای غیرخطی اند.

دنباله: هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می گیرند را یک دنباله می نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شوند.

مثال اعداد $1, 3, 5, 7, \dots$ که از الگوی $a_n = 2n - 1$ به دست می آیند را یک دنباله می گوئیم.

هم چنین اعداد $4, 10, 18, \dots$ که از الگوی درجه دوم $a_n = n^2 + 3n$ به دست می آیند، یک دنباله می باشد.

توجه جملات یک دنباله ممکن است فاقد الگو باشند، مانند دنباله اعداد اول $2, 3, 5, 7, \dots$

سؤال جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = n^2 - 4n$ است. پنج جمله اول این دنباله را بنویسید.

پاسخ $a_1 = (1)^2 - 4(1) = -3$, $a_2 = 2^2 - 4(2) = -4$, $a_3 = 3^2 - 4(3) = -3$, $a_4 = 4^2 - 4(4) = 0$, $a_5 = 5^2 - 4(5) = 5$
 \Rightarrow جملات دنباله: $-3, -4, -3, 0, 5, \dots$

نکته دو دنباله درجه دوم معروف $a_n = n^2$ (دنباله مربعی) و $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (دنباله مثلثی) وجود دارند که الگوی هندسی آنها به صورت زیر است:

$a_n = n^2$: 1, 4, 9, 16, ...

الگوی هندسی:  , ...

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$: 1, 3, 6, 10, ...

الگوی هندسی:  , ...

نکته مجموع اعداد طبیعی از 1 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

الگو و دنباله

پریش های تشریحی

بسته
س

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۷۵. جمله ششم الگوی $5, 8, 13, 20, \dots$ برابر است. (۳۲, ۴۰)

۷۶. در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = -2n - 3$ هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش واحد کاهش می یابد. (شبه نهایی)

کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

۷۷. الگوی $4, 7, 10, \dots$ یک الگوی خطی است.

۷۸. جمله دهم دنباله $a_n = 2n^2 + 3n$ برابر ۲۳ است.

۷۹. مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۹ برابر ۱۹۰ است.

۸۰. با استفاده از چوب کبریت ها، سه شکل مقابل ساخته شده است.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۱ شکل بعدی را در الگو رسم کنید و جدول را کامل کنید.

n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴
a_n : تعداد چوب کبریت ها				

ب جمله عمومی الگو را مشخص کنید.

پ در چه مرحله ای از الگو، تعداد چوب کبریت ها برابر ۷۰ می باشد؟

۸۱. در یک الگوی خطی، جملات چهارم و یازدهم به ترتیب ۹ و ۳۰ می باشند. جمله عمومی الگو را بیابید. (مشابه مثال صفحه ۱۶ کتاب درسی)

۸۲. در یک الگوی خطی، جملات پنجم و هفدهم به ترتیب ۳ و ۲۷ می باشند.

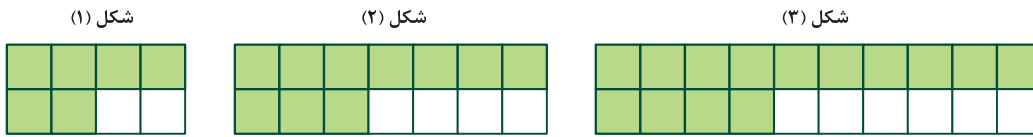
۱ جمله عمومی الگو را بنویسید.

ب جمله پنجاهم الگو را مشخص کنید.

پ جمله چندم الگو ۱۶۵ می باشد؟

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۲۰ کتاب درسی)

۸۳. به الگوی زیر توجه کنید:



آ تعداد مربع‌های رنگی در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب اگر n شماره شکل و a_n تعداد مربع‌های سفید باشد، مقدار a_n را بر حسب n بنویسید.

پ اگر n تعداد مربع‌های سفید و b_n تعداد مربع‌های رنگی باشد، مقدار b_n را بر حسب n بنویسید.

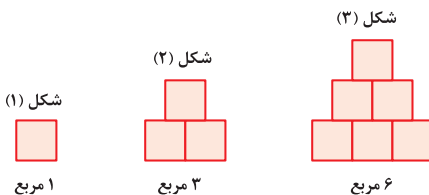
ت برای ۱۰۲ مربع رنگی، چند مربع سفید لازم است؟

ث در چندمین شکل، نسبت تعداد مربع‌های سفید به تعداد مربع‌های رنگی $\frac{۳۱}{۶۳}$ می‌باشد؟

ج آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۴۶ مربع سفید باشد؟ اگر هست، تعداد مربع‌های رنگی آن چندتا است؟

(کاردرکلاس ۴ صفحه ۱۹ کتاب درسی)

۸۴. الگوی زیر را در نظر بگیرید:



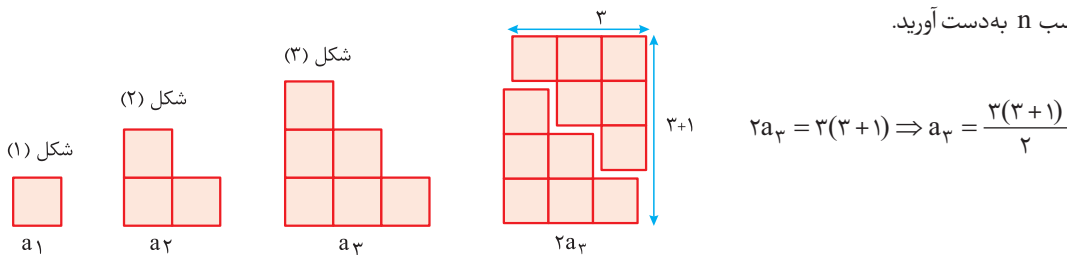
آ شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله

تا جمله هفتم آن بنویسید.

ب آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

پ شکل‌های الگوی بالا را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با توجه به تصویر حاصل

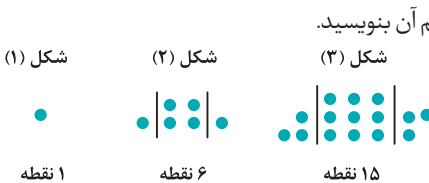
a_n را بر حسب n به دست آورید.



ت به کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت $1+2+3+\dots+n$ را به دست آورید.

(تمرین ۲ صفحه ۲۰ کتاب درسی)

۸۵. الگوی زیر را در نظر بگیرید:



آ شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله پنجم آن بنویسید.

ب جمله عمومی الگو را بیابید.

پ شکل بیستم در این الگو چند نقطه دارد؟

ت آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۱۲۰ نقطه باشد؟

۸۶. چهار جمله اول دنباله‌های زیر داده شده است. در هر مورد، سه جمله بعدی را بنویسید و در صورت امکان جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

(مشابه کاردرکلاس ۳ صفحه ۱۹ کتاب درسی)

آ $1, 3, 5, 7, \dots$

ب $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

ج $3, \frac{5}{4}, 2, \frac{3}{4}, \dots$

ث $-1, 4, -9, 16, \dots$

د $2, 5, 14, 41, \dots$

ز $1, 2, 3, 5, \dots$

۸۷. جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هریک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۲۰ کتاب درسی)

آ $a_n = 3n$

ب $b_n = n^2 + 1$

ت $c_n = n^2 - 2$

۸۸. برای دنباله‌های درجه دوم زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید. (مشابه تمرین ۴ صفحه ۲۰ کتاب درسی)

آ $1, 4, 9, \dots$

ب $2, 6, 12, \dots$

۸۹. دو جمله اول دنباله درجه دوم $t_n = an^2 + bn$ به ترتیب -1 و 2 می‌باشند.

آ a و b را به دست آورید. ب جمله هفتم دنباله را مشخص کنید.

۲
بخش



پاسخنامه

۱ | نادرست است، زیرا بازه $[-1, 2]$ شامل تمام x هایی است که $-1 < x \leq 2$ باشد، لذا $-1 \notin [-1, 2]$

۲ | درست است، زیرا انتهای بازه بسته است و در نتیجه عدد ۴ عضو این بازه است.

۳ | نادرست است، زیرا مجموعه $\{-1, 1\}$ (نه بازه $(-1, 1)$)، شامل فقط دو عضو -1 و 1 می باشد، بنابراین $\{1, -1\} \neq \emptyset$

۴ | درست است، زیرا $0 < \frac{5}{6} < 1$ و در نتیجه $\frac{5}{6} \in (0, 1)$

۵ | درست است، زیرا مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ برابر 1.7 است و در نتیجه $1 < \sqrt{3} < 2$ پس $\sqrt{3} \in (1, 2)$

۶ | نادرست است، زیرا مثلاً $-1 \in [-1, 1]$ ولی $-1 \notin (-1, 1)$ ، بنابراین دو بازه $(-1, 1)$ و $[-1, 1]$ با هم برابر نمی باشند.

۷ | درست است، زیرا \emptyset زیرمجموعه هر مجموعه ای است.

۸ | نادرست است، زیرا \emptyset عضو مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 8\}$ نمی باشد.

۹ | درست است، زیرا اعداد -1 ، 0 و 2 عضو بازه $[-1, 3]$ می باشند و در نتیجه مجموعه شامل این ۳ عدد، زیرمجموعه ای از بازه $[-1, 3]$ است.

۱۰ | درست است، زیرا تمام اعضای بازه $(-1, 1)$ عضوی از بازه $(-1, 1)$ می باشند.

۱۱ | نادرست است، زیرا عدد صفر در هیچ یک از دو بازه $(-2, 0)$ و $(0, 1)$ قرار ندارد.

۱۲ | درست است، زیرا:

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$$

۱۳ | درست است، زیرا تمام اعداد گنگ (اصم) در مجموعه اعداد حقیقی قرار دارند.

۱۴ | نادرست است، زیرا در بازه $(1, 2)$ بی شمار عدد گنگ مثل $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ وجود دارد که در مجموعه اعداد گویا قرار ندارند.

۱۵ | درست است، زیرا \mathbb{R} از اجتماع Q و Q' تشکیل شده است.

۱۶ | نادرست است، زیرا بازه ها شامل تمام اعداد حقیقی (گویا و گنگ) هستند و فقط شامل اعداد گویای بین دو عدد نمی باشد.

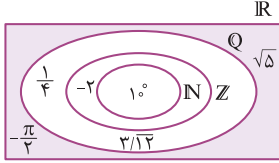
$$10 = 7 - (-3) = \text{ابتدای بازه} - \text{انتهای بازه} = \text{طول بازه}$$

۱۸ | ۲/۵

مجموعه $A \cap B$ به صورت $(0, 5]$ است.

$$\text{نقطه میانی} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

۱۹ | عدد $1^\circ = 1^\circ$ یک عدد طبیعی، عدد -2 یک عدد صحیح منفی،



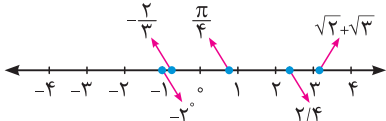
اعداد $\frac{1}{4}$ و $3/14$ گویا و اعداد $\sqrt{5}$ و $-\frac{\pi}{2}$ نیز اعدادی گنگ هستند، بنابراین:

۲۰ | $\frac{\pi}{4}$ و $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ اعداد گنگ هستند و با توجه به مقدار تقریبی

$$\pi \approx 3.14 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

$$\sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1.41 + 1.73 = 3.14$$

مقدار 2° برابر یک است.



۲۱ | Q'

با حذف اعداد گویا از اعداد حقیقی، مجموعه اعداد گنگ به دست می آید.

$$(ب) \{ \dots, -2, -1 \}$$

$$Z - W = \{ \dots, -2, -1, 1, 2, \dots \} - \{ 0, 1, 2, \dots \} = \{ \dots, -2, -1 \}$$

$$(پ) \emptyset$$

دو مجموعه گویا و گنگ هیچ عدد مشترکی ندارند.

(ت) W

W و Q' (اعداد گنگ) هیچ عضو مشترکی ندارند. بنابراین:

$$W - Q' = W$$

$$(ث) \{0\}$$

(ج) \mathbb{R}

اجتماع تمام اعداد گویا و گنگ، مجموعه اعداد حقیقی است.

۲۲ |

(آ) $(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

(ب) $[0, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$

(پ) $[-4, -1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -1\}$

(ت) $(1, \sqrt{5}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq \sqrt{5}\}$

(ث) $(3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

(ج) $(-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

(چ) $[\sqrt{2}, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2}\}$

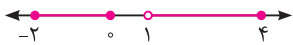
(ح) $(-\infty, \frac{1}{4}] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4}\}$

با حذف اعداد ۴ و ۶ از بازه $[۳, ۷]$ ، مجموعه $\{۴, ۶\} - [۳, ۷]$ به دست می‌آید:



$$[۳, ۷] - \{۴, ۶\} = [۳, ۴) \cup (۴, ۶) \cup (۶, ۷]$$

با حذف بازه $(۰, ۱]$ از بازه $[-۲, ۴]$ ، مجموعه $(۰, ۱] - [-۲, ۴]$ به دست می‌آید:



$$[-۲, ۴] - (۰, ۱] = [-۲, ۰] \cup (۱, ۴]$$

۲۶ | آ) با حل نامعادله $-۱ \leq x + ۱ \leq ۲$ ، مجموعه A را مشخص می‌کنیم:

$$-۱ \leq x + ۱ \leq ۲ \xrightarrow{-۱} -۲ \leq x \leq ۱ \Rightarrow A = [-۲, ۱]$$

$$B = (-۳, ۰]$$

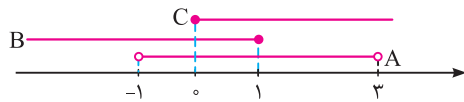
پ, ت) با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور، مجموعه‌های

$A - B$ و $A \cup B$ را مشخص می‌کنیم:



۲۷ | برای مشخص کردن هریک از مجموعه‌ها، ابتدا مجموعه‌های A ،

B و C را روی محور نمایش می‌دهیم:



$$A \cap B = (-۱, ۳) \cap (-\infty, ۱] = (-۱, ۱]$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = (-۱, ۱] \cup [۰, +\infty) = (-۱, +\infty)$$



$$A \cap C = (-۱, ۳) \cap [۰, +\infty) = [۰, ۳)$$

$$\Rightarrow B - (A \cap C) = (-\infty, ۱] - [۰, ۳) = (-\infty, ۰)$$



۲۸ | عضو $\frac{m+1}{۲}$ از مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid -۱ \leq x < ۴\}$ است. بنابراین

$-۱ \leq \frac{m+1}{۲} < ۴$ می‌باشد. با حل نامعادله، حدود m به دست می‌آید.

$$\frac{m+1}{۲} \in [-۱, ۴) \Rightarrow -۱ \leq \frac{m+1}{۲} < ۴$$

$$\xrightarrow{\times ۲} -۲ \leq m+1 < ۸ \xrightarrow{-۱} -۳ \leq m < ۷$$

۲۹ | نامتناهی - چون مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از -۵ به صورت

$\{...,-۸,-۷,-۶\}$ است که یک مجموعه نامتناهی می‌باشد.

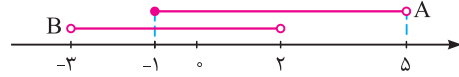
۳۰ | متناهی - چون مجموعه تهی، صفر عضو دارد و صفر یک عدد

حسابی است.

۳۱ |

$$A \cup A' = U, A' \cap B' = (A \cup B)', \emptyset' = U, A \cap A' = \emptyset$$

۲۳ | نمایش هندسی دو بازه A و B به صورت زیر است:



آ) قسمت‌های مشترک دو مجموعه A و B ، یعنی بازه $[-۱, ۲]$ جواب است:

$$A \cap B = [-۱, ۲]$$

ب) تمام قسمت‌هایی که در A یا در B و یا در هر دو وجود دارند، در

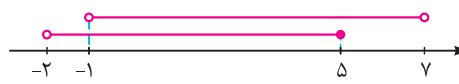
مجموعه $A \cup B$ قرار می‌گیرند، بنابراین:

پ) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعه A و B را از A حذف کنیم،

مجموعه $A - B = [۲, ۵)$ به دست می‌آید:

ت) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعه A و B را از B حذف کنیم،

مجموعه $B - A = (-۳, -۱)$ به دست می‌آید:



$$(-۲, ۵] \cap (-۱, ۷) = (-۱, ۵]$$



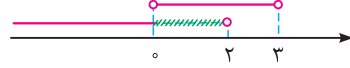
$$[-۴, ۰] \cap [-۱, +\infty) = [-۱, ۰]$$



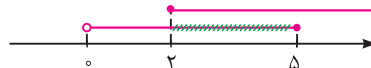
$$[-۲, ۴) \cup (۰, ۵] = [-۲, ۵]$$



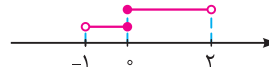
$$(-\infty, -۱) \cup [-۱, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$



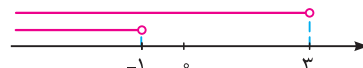
$$(-\infty, ۲) - (۰, ۳) = (-\infty, ۰]$$



$$(۰, ۵] - [۲, +\infty) = (۰, ۲)$$



$$(-۱, ۰] \cap [۰, ۲) = \{۰\}$$



$$(-\infty, -۱) \cup (-\infty, ۳) = (-\infty, ۳)$$

۲ | در نمایش هندسی مجموعه $\mathbb{R} - \{۰\}$ باید عدد صفر را از روی

محور حذف کنیم:

$$\mathbb{R} - \{۰\} = (-\infty, ۰) \cup (۰, +\infty)$$

با حذف اعداد -۳ و ۴ از روی محور، مجموعه $\mathbb{R} - \{-۳, ۴\}$ به دست می‌آید:



$\mathbb{R} - \{-۳, ۴\}$ از اجتماع سه بازه به دست می‌آید:

$$\mathbb{R} - \{-۳, ۴\} = (-\infty, -۳) \cup (-۳, ۴) \cup (۴, +\infty)$$



۴۷ | نامتناهی، بین هر دو عدد دلخواه می توان به هر تعداد عدد گویا مشخص کرد: $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$ اعداد گویای بین ۰ و ۱

۴۸ | نامتناهی، بین هر دو عدد دلخواه می توان به هر تعداد عدد گنگ مشخص کرد: $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$ اعداد گنگ بین ۰ و ۱

۴۹ | متناهی، هیچ عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی صفر وجود ندارد، لذا مجموعه $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0\} = \emptyset$ یک مجموعه متناهی است.

۵۰ | نامتناهی، مجموعه مضرب های صحیح عدد ۴ به صورت $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$ است که یک مجموعه نامتناهی می باشد.

۵۱ | نامتناهی، بی شمار عدد (گویا و گنگ) بین دو عدد -۱ و $\frac{1}{4}$ وجود دارد. بنابراین مجموعه $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ نامتناهی است.

۵۲ | نامتناهی، بی شمار عدد کسری با صورت و مخرج عدد طبیعی وجود دارد، بنابراین مجموعه مورد نظر نامتناهی است. $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \dots$

۵۳ | متناهی، مجموعه شمارنده های عدد ۲۴ به صورت $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ است که یک مجموعه متناهی ۸ عضوی می باشد.

۵۴ | متناهی، زیرا: $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, \dots\} = \{0\}$

۵۵ | نامتناهی، زیرا $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$ و \mathbb{N} یک مجموعه نامتناهی است.

۵۶ | نامتناهی، زیرا $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ و \mathbb{R} یک مجموعه نامتناهی است.

۵۷ | \mathbb{N} و \mathbb{W} دو مجموعه نامتناهی اند و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$

۵۸ | $A = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
 $\Rightarrow A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$

۵۹ | \mathbb{Q} و \mathbb{Z} دو مجموعه نامتناهی اند و $\mathbb{Z} - \mathbb{Q}$ نیز مجموعه ای نامتناهی است.

۶۰ | \mathbb{N} و \mathbb{W} دو مجموعه نامتناهی اند و $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ یک مجموعه متناهی است.

۶۱ | (آ) $U = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$
 (ب) U مجموعه ای نامتناهی است.

(پ) $A = \{12, 18, 24\} \subseteq U$ مجموعه ای متناهی است.

(ت) اگر C مجموعه مضرب های ۲۴ و D مجموعه مضرب های ۱۲ باشد، آن گاه $C \subseteq D$

$D = \{12, 24, 36, 48, \dots\}$, $C = \{24, 48, \dots\}$

(ث) A رامضرب های فرد ۶ و B رامضرب های زوج عدد ۶ در نظر می گیریم:

$A = \{6, 18, 30, 42, \dots\}$, $B = \{12, 24, 36, \dots\} \Rightarrow A \cup B = U$

۳۳ | نامتناهی - چون اگر از یک مجموعه با بی شمار عضو، تعداد محدودی عضو حذف کنیم، آن گاه بی شمار عضو برای آن باقی می ماند.

۳۴ | نادرست است، زیرا بی شمار عدد گویا مانند $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$ و در بازه $(0, 2)$ وجود دارد.

۳۵ | درست است، زیرا مجموعه اعداد صحیح بین -۲ و -۱، مجموعه تهی است که یک مجموعه متناهی با صفر عضو می باشد.

۳۶ | نادرست است، زیرا $A \cap B$ زیرمجموعه مجموعه A است و چون A یک مجموعه متناهی می باشد، پس هر زیرمجموعه آن نیز یک مجموعه متناهی می باشد، بنابراین $A \cap B$ یک مجموعه متناهی است.

۳۷ | نادرست است، به عنوان مثال، مجموعه نامتناهی \mathbb{N} دارای زیرمجموعه متناهی $\{1, 2\}$ است.

۳۸ | درست است، زیرا اگر B یک مجموعه متناهی باشد، آن گاه هر زیرمجموعه B متناهی است، بنابراین A متناهی می باشد.

۳۹ | درست است، زیرا اگر $B \subseteq A$ و B نامتناهی باشد، آن گاه تمام عضوهای مجموعه B در مجموعه A قرار دارند و در نتیجه A نامتناهی است.

۴۰ | نادرست است، \mathbb{N} (مجموعه اعداد طبیعی) و O (مجموعه اعداد فرد طبیعی) مجموعه هایی نامتناهی اند و $\mathbb{N} - O = \{2, 4, 6, \dots\} = E$ نیز مجموعه ای نامتناهی است.

۴۱ | درست است، زیرا:

A و B دو مجموعه جدا از هم اند.
 $\Rightarrow n(A \cap B) = 0$
 $\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \overset{0}{n(A \cap B)} = n(A) + n(B)$

۴۲ | ۲

طبق یکی از قوانین مجموعه ها، اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $A' \subseteq B'$.

۴۳ | متناهی، این مجموعه به صورت $\{1, 13, \dots, 97\}$ است که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است و در نتیجه یک مجموعه متناهی می باشد.

۴۴ | نامتناهی، این مجموعه به صورت $\{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$ است که یک مجموعه نامتناهی می باشد.

۴۵ | نامتناهی، می توان هر تعداد دلخواه مربع با طول ضلع های مختلف رسم کرد. پس این مجموعه، نامتناهی است.

۴۶ | متناهی، تعداد خیابان های ایران ممکن است زیاد باشد، ولی بالاخره می توان تعداد آن ها را مشخص کرد. بنابراین یک مجموعه متناهی است.

۶۵ | مجموعه $(A \cup B)'$ را ابتدا با مشخص کردن مجموعه $A \cup B$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\} \\ \Rightarrow (A \cup B)' &= U - (A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{1, 2, 3, 4\} \\ &= \{5\} \quad (1) \end{aligned}$$

مجموعه‌های A' و B' را مشخص و سپس اشتراک آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A' &= U - A = \{3, 5\}, \quad B' = U - B = \{1, 4, 5\} \\ \Rightarrow A' \cap B' &= \{3, 5\} \cap \{1, 4, 5\} = \{5\} \quad (2) \\ (1), (2) &\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B' \end{aligned}$$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow (A \cap B)' = U - \{2\} = \{1, 3, 4, 5\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A' \cup B' &= \{3, 5\} \cup \{1, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5\} \quad (2) \\ (1), (2) &\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B' \end{aligned}$$

پ) هر یک از مجموعه‌های $A - B$ و $A \cap B'$ را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A - B &= \{1, 2, 3, 4\} - \{2, 3\} = \{1, 4\} \quad (1) \\ A \cap B' &= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\} \quad (2) \\ (1), (2) &\Rightarrow A - B = A \cap B' \end{aligned}$$

۶۶ | مجموعه‌های A, B, C, U با اعضا به صورت زیر می‌باشند:

$$U = \{-5, -4, \dots, 3, 4\}, \quad A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

$$B = \{-4, 0, 4\}, \quad C = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$B' = U - B = \{-5, -3, -2, -1, 1, 2, 3\}$$

$$C' = \{-5, -4, -3, -2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow C' \cup B = \{-5, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4\}$$

$$A \cap C' = \{-5, -4, -3, -2\}$$

$$\Rightarrow (A \cap C') - B = \{-5, -3, -2\}$$

$$A' = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A' \cup B = \{-4, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow (A' \cup B) \cap C' = \{-4, 3, 4\}$$

۶۷ | مجموعه‌های A, B, U را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 15\}, \quad A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \quad B = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$A' = U - A = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$$

$$\Rightarrow (A')' = U - A' = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = A$$

$$A - B = \{1, 2, 4\} \quad (1)$$

$$A \cap B = \{3, 6, 12\} \Rightarrow A - (A \cap B) = \{1, 2, 4\} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$$

$$B - A = \{9\} \quad (1)$$

$$B \cap A' = \{3, 6, 9, 12\} \cap \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\} = \{9\} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow B - A = B \cap A'$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B)$$

$$= \{5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\} \quad (1)$$

$$A' \cap B' = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$$

$$\cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\}$$

$$= \{5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15\} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

۶۲ |

$$A = \{1, 3, 5, \dots\} \Rightarrow A' = \mathbb{N} - A = \{2, 4, 6, \dots\} \quad (آ)$$

$$A = \mathbb{N} - \{1\} \Rightarrow A' = \{1\} \quad (ب)$$

پ) A' نامتناهی است. اگر تعداد محدودی از عضوهای مجموعه نامتناهی \mathbb{N} را از مجموعه \mathbb{N} حذف کنیم، آن‌گاه مجموعه باقی‌مانده نیز دارای بی‌شمار عضو است.

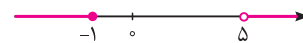
$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{3, 4, \dots\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{N} \quad (ت)$$

می‌توان مثال‌های دیگری مانند اعداد زوج و فرد را هم در نظر گرفت:

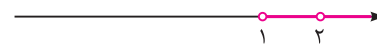
$$A = \{1, 3, \dots\}, \quad B = \{2, 4, \dots\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{N}$$

۶۳ | A با حذف بازه $[-1, 5]$ از محور، متمم آن به دست می‌آید.

$$A' = \mathbb{R} - (-1, 5] = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$$



$$\mathbb{N}' = \mathbb{R} - \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup \dots \quad (ب)$$



$$B' = \mathbb{R} - (2, +\infty) = (-\infty, 2] \quad (پ)$$

$$C' = \mathbb{R} - (-\infty, 1] = (1, +\infty) \quad (ت)$$

ث) ابتدا اشتراک دو بازه را به دست می‌آوریم:

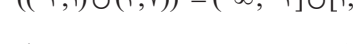
$$(-\infty, 1) \cap (0, +\infty) = (0, 1)$$

$$\Rightarrow (0, 1)' = \mathbb{R} - (0, 1) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

ج) مجموعه $(-4, 1) \cup (2, 7)$ روی محور به صورت



$$((-4, 1) \cup (2, 7))' = (-\infty, -4] \cup [1, 2] \cup [7, +\infty)$$



۶۴ | مجموعه مرجع $U = \{1, 2, \dots, 9\}$ می‌باشد.

آ) با حذف اعضای مجموعه A از مجموعه U ، مجموعه A' به دست می‌آید:

$$A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 9\} - \{1, 2, 3, 4\}$$

$$= \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

ب) ابتدا مجموعه $A \cap B$ را مشخص می‌کنیم و سپس متمم آن را به دست می‌آوریم:

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4\}$$

$$\Rightarrow (A \cap B)' = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 4\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C' = U - C = \{1, 2, 7, 8, 9\} \quad (پ)$$

$$\Rightarrow B \cup C' = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 2, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \quad (ت)$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{5, 7, 9\}$$

ث) ابتدا مجموعه $A \cup B'$ را با اعضا می‌نویسیم و سپس اعضای مشترک آن با C را مشخص می‌کنیم:

$$B' = U - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\Rightarrow A \cup B' = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B') \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5\}$$

$$A - B = \{1, 3\} \Rightarrow (A - B) \cup C'$$

$$= \{1, 3\} \cup \{1, 2, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$$

وہاں سے کہیں
میں نے
کبھی
نہیں
دیکھا
ہے
کہ
کبھی
نہیں
دیکھا
ہے
کہ
کبھی
نہیں
دیکھا
ہے

گاج

۵۵

باسج
تھریں ہائی
کتاب
درسی

ریاضی ۱

فرمول

لیسن



فرمول بسیار

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.
از آن جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان حاضر
شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

فهرست

فصل اول ۳ مجموعه، الگو و دنباله

فصل دوم ۱۴ مثلثات

فصل سوم ۲۱ توان‌های گویا و عبارات‌های جبری

فصل چهارم ۲۷ معادله‌ها و نامعادله‌ها

فصل پنجم ۴۰ تابع

فصل ششم ۵۷ شمارش، بدون شمردن

فصل هفتم ۶۸ آمار و احتمال

فصل

مجموعه، الگو و دنباله

درس ۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تمرین | ص ۷ کتاب درسی

۱ فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$$U = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟ U یک مجموعه نامتناهی است.

پ) یک زیرمجموعه متناهی از U بنویسید.

$$B = \{5, 10, 15, 20, \dots, 100\}$$

ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

$$C = \{15, 20, 25, \dots\} \text{ و } D = \{10, 15, 20, 25, \dots\}$$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی، زیرا برابر است با:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۶. متناهی، زیرا برابر است با:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$. نامتناهی، زیرا این بازه دارای بی‌شمار عدد حقیقی بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ است.

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$. متناهی، زیرا هیچ عددی طبیعی بین ۱ و ۲ وجود ندارد و

$$n(A) = 0 \in \mathbb{W} \text{ است. } A = \emptyset$$

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی، زیرا برابر است با:

$$\{100, 200, 300, 400, \dots\}$$

۳ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد. مجموعه اعداد

طبیعی زوج (E) و مجموعه اعداد اول (P)، دو مجموعه نامتناهی هستند که اشتراک آنها

مجموعه‌ای متناهی است:

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \Rightarrow E \cap P = \{2\}$$

تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است.

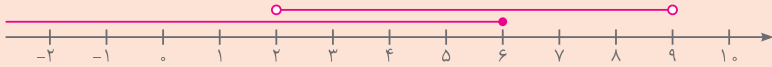
۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

الف) $(-3, 5) \cup (-2, 0)$



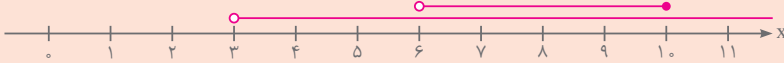
همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، برای به دست آوردن اجتماع دو بازه، باید تمام قسمت‌هایی که حداقل در یکی از دو بازه وجود دارد را به حساب آوریم.

ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (2, 6]$



برای به دست آوردن اشتراک دو بازه، فقط قسمت‌های مشترک را می‌نویسیم. لازم به ذکر است که چون عدد ۲ به صورت بازه باز (در محور دایره توخالی) است، در اشتراک قرار ندارد.

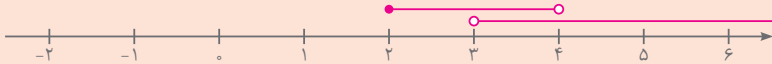
پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10] = (6, 10]$



ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$



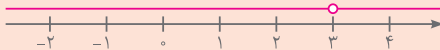
ث) $(3, +\infty) - [2, 4) = [4, +\infty)$



با توجه به شکل قسمت (ث) پاسخ می‌دهیم.

۵ مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ یعنی تمام اعداد حقیقی به جز عدد ۳. توجه کنید که روی محور، باید عدد ۳ را با دایره توخالی نشان دهیم.



این مجموعه را می‌توان به صورت اجتماع دو بازه نوشت، که یکی اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳ و دیگری اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۳ باشد:

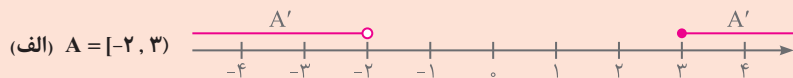
$$\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

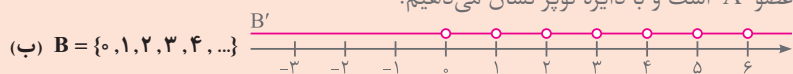
A حتماً یک مجموعه متناهی خواهد بود، زیرا A مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن با تعداد اعضای مجموعه B برابر یا از آن کمتر است.

تمرین | ص ۱۲ و ۱۳ کتاب درسی

۱ IR را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.



باید از مجموعه IR مجموعه A را حذف کرد. چون -۲ عضو مجموعه A است، پس عضو مجموعه A' نیست و با دایره توخالی نشان می‌دهیم. همچنین چون ۳ عضو A نیست، پس عضو A' است و با دایره توپر نشان می‌دهیم.



در اینجا نیز، اعضای B را به صورت دایره توخالی نشان می‌دهیم.



چون عدد صفر عضو C نیست، پس عضو C' است و با دایره توپر نشان می‌دهیم.



چون عدد ۱ عضو D است، پس عضو D' نیست و با دایره توخالی نشان می‌دهیم.

۲ IN را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

اگر A مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد، A' مجموعه اعداد طبیعی فرد خواهد بود که هر دو مجموعه A و A' نامتناهی هستند.

(ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

اگر B اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۵ باشد، یعنی $B = \{۶, ۷, ۸, \dots\}$ ، در این صورت B نامتناهی است و متمم آن، مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۵، یعنی $B' = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ مجموعه‌ای متناهی است.

(پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟ اگر C مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$C = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\} \Rightarrow C' = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, \dots\}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، مجموعه C' نامتناهی است.

۳ اگر $n(A) = ۱۵$ ، $n(A \cap B) = ۵$ و $n(A \cup B) = ۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

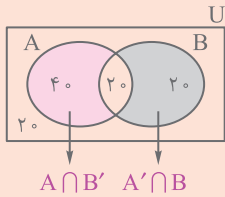
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۳۰ = ۱۵ + n(B) - ۵ \Rightarrow ۳۰ = n(B) + ۱۰ \Rightarrow n(B) = ۲۰$$

۴ فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$.

$n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است:

(الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 40 - 20 = 100 - 20 = 80$

با توجه به اطلاعات داده‌شده، نمودار ون را رسم می‌کنیم:



(ب) $n(A \cap B') = 40$

برای به دست آوردن $n(A \cap B')$ باید تعداد اعضای را بیابیم که هم عضو A و هم عضو B' باشند.

(پ) $n(A' \cap B) = 20$

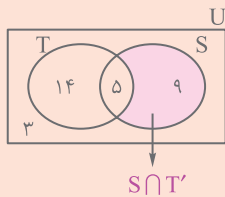
طبق قوانین دموگرن، خواهیم داشت:

(ت) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو

گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.



اگر گروه سرود را با S و گروه تئاتر را با T نشان دهیم، خواهیم داشت:

$n(S) = 14$ ، $n(T) = 19$ ، $n(S \cap T) = 5$ ، $n(S \cap T') = ?$

$n(S \cap T') = 9$

با توجه به نمودار رسم‌شده، داریم:

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

با توجه به نمودار رسم‌شده در قسمت (الف)، ۳ نفر عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

توجه داشته باشید که بدون رسم شکل نیز می‌توان به این سؤال پاسخ داد:

$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) = 31 - 19 - 14 + 5 = 3$

۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در

یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند.

همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد

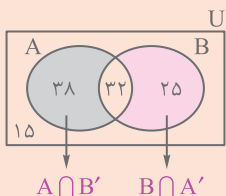
از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

(الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

$n(A) = 70$ ، $n(B) = 57$ ، $n(A \cap B) = 32$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 127 - 32 = 95$

یعنی دست‌کم (حداقل) ۹۵ نفر از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند.



ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. فقط از شرکت A خرید کرده‌اند، مانند این است که بگوییم از شرکت A خرید کرده‌اند و از شرکت B خرید نکرده‌اند. بنابراین: $n(A \cap B') = 38$

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند، یعنی از A خرید کرده‌اند و از B خرید نکرده‌اند ($A \cap B'$) یا از B خرید کرده‌اند و از A خرید نکرده‌اند ($B \cap A'$). بنابراین:

$$n[(A \cap B') \cup (B \cap A')] = n(A \cap B') + n(B \cap A') = 38 + 25 = 63$$

جدا از هم هستند

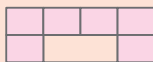
ت) از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند. از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند، یعنی از A خرید نکرده‌اند (A') و از B هم خرید نکرده‌اند (B'). بنابراین:

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$$

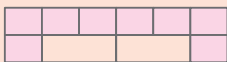
درس ۳ الگو و دنباله

تمرین ۱ | ص ۲۰ کتاب درسی

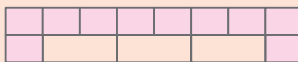
به الگوی روبه‌رو توجه کنید.



۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید



۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید



۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.



۱۲ کاشی تیره و ۴ کاشی سفید

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

تعداد کاشی‌های تیره: $6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots$

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید. با بررسی رابطه بین تعداد کاشی‌های سفید و تیره می‌توانیم t_n را به صورت زیر بنویسیم:

n : تعداد کاشی‌های سفید	۱	۲	۳	۴	...	n
t_n : تعداد کاشی‌های تیره	۶	۸	۱۰	۱۲	...	$2n + 4$
الگو t_n	$(2 \times 1) + 4$	$(2 \times 2) + 4$	$(2 \times 3) + 4$	$(2 \times 4) + 4$...	$2n + 4$

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

$$n = 100 \Rightarrow t_{100} = (2 \times 100) + 4 = 204 \text{ کاشی}$$

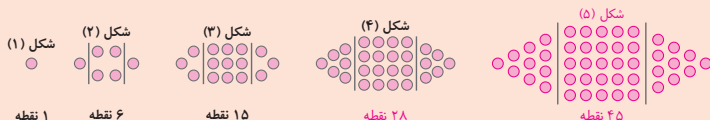
(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتا است؟

کافی است به جای t_n ، ۵۰ قرار دهیم و مقدار n را به دست آوریم:

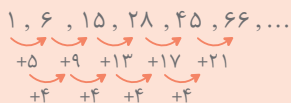
$$2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 50 - 4 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = \frac{46}{2} = 23$$

پس برای اینکه ۵۰ کاشی تیره داشته باشیم، باید ۲۳ کاشی سفید داشته باشیم.

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.



پس دنبالهٔ مقابل را خواهیم داشت:

(ب) جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد نقطه‌ها	۱	۶	۱۵	۲۸	...	$n(2n-1)$
الگو	1×1	2×3	3×5	4×7	...	$n(2n-1)$

$$a_n = n(2n-1) = 2n^2 - n$$

پس جملهٔ عمومی الگو برابر است با:

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

$$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 200 - 10 = 190$$

شکل دهم، ۱۹۰ نقطه دارد.

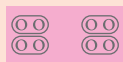
۳ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید

و سپس به هریک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) $a_n = 4n \Rightarrow a_1 = 4 \times 1 = 4, a_2 = 4 \times 2 = 8, a_3 = 4 \times 3 = 12, a_4 = 4 \times 4 = 16$



(۱) شکل



(۲) شکل



(۳) شکل



(۴) شکل

(ب) $b_n = 3n + 1 \Rightarrow b_1 = 3(1) + 1 = 4, b_2 = 3(2) + 1 = 7, b_3 = 3(3) + 1 = 10, b_4 = 3(4) + 1 = 13$



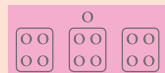
(۱) شکل



(۲) شکل

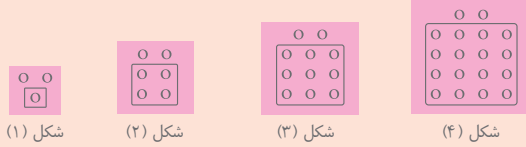


(۳) شکل

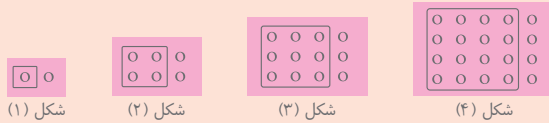


(۴) شکل

(پ) $c_n = n^2 + 2 \Rightarrow c_1 = 1^2 + 2 = 3, c_2 = 2^2 + 2 = 6, c_3 = 3^2 + 2 = 11, c_4 = 4^2 + 2 = 18$



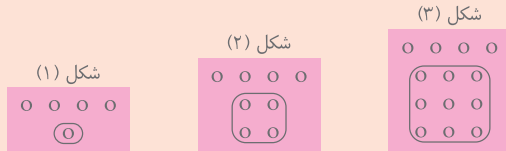
(ت) $d_n = n^2 + n \Rightarrow d_1 = 1^2 + 1 = 2, d_2 = 2^2 + 2 = 6, d_3 = 3^2 + 3 = 12, d_4 = 4^2 + 4 = 20$



۳ برای هر یک از دنباله‌های درجه دو زیر جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ...

شماره جمله	۱	۲	۳	۴	...	n	
جمله	۵	۸	۱۳	۲۰	...	$n^2 + 4$	$\Rightarrow a_n = n^2 + 4$
الگو	$1^2 + 4$	$2^2 + 4$	$3^2 + 4$	$4^2 + 4$...	$n^2 + 4$	



(ب) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

شماره جمله	۱	۲	۳	...	n
جمله	۵	۱۲	۲۲	...	$(n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$
الگو	$(1+1)^2 + \frac{(1)(1+1)}{2}$	$(2+1)^2 + \frac{(2)(2+1)}{2}$	$(3+1)^2 + \frac{(3)(3+1)}{2}$...	$(n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$

