

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سوالات
190 min	۸۶	۶ تا ۴۷
105 min	۱۱۰	۶۴ تا ۴۸
126 min	۱۲۰	۶۵ تا ۸۳

فصل اول: آمار و احتمال

فصل دوم: الگوهای خطی

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

امتحان نهایی



بارمبندی درس ریاضی و آمار ۳		
نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل
۵	۱۵	اول
۲	۵	تا صفحه ۶۰
۳/۵	-	صفحه ۶۰ به بعد
۹/۵	-	سوم

۱۳۴	آزمون ۱: خرداد ماه ۱۳۹۹
۱۳۵	آزمون ۲: شهریور ماه ۱۳۹۹
۱۳۶	آزمون ۳: دی ماه ۱۳۹۹
۱۳۷	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۰
۱۳۹	آزمون ۵: شهریور ماه ۱۴۰۰
۱۴۰	آزمون ۶: دی ماه ۱۴۰۰
۱۴۱	آزمون ۷: خرداد ماه ۱۴۰۱
۱۴۳	پاسخنامه تشریحی آزمون ۱ تا ۷

فصل اول

آمار و احتمال

سلام بر دوستان خوبم در رشته انسانی، قبل از این که شروع به خواندن این فصل بکنید، بهتره به توضیحاتی رو بهتون بدم. اولین حرفم اینه که حتی اگه فکر می‌کنید درس‌ها رو خوب یاد گرفتین (در مدرسه یا آموزشگاه) بازم درسنامه‌های کتاب ما رو بخونید، چون امسال نگاه شما به دروس مختلف، بیش‌تر نگاه تستی هست و ممکنه بخوابین همون روش‌های تستی رو که یاد گرفتین توی امتحانات تشریحی پیاده کنید و در نتیجه نمره کامل بهتون داده نمیشه. این فصل کتاب، به نظرم مفهومی‌ترین و دشوارترین فصل برای همه دانش‌آموزانه، و بر عکس فصل‌های دیگه، تنوع سؤالاتش خیلی زیاده به همین دلیل ما هم همه جور سؤالی براتون طرح کردیم تا به راحتی از عهده امتحان نهایی بریباین. سهم این فصل در امتحان خرداد ماه، ۵ نمره می‌باشد که ۲ سوال اول اون به شکل جای خالی یا بررسی درستی یا نادرستی است.

توجه کنید که اگه فاکتوریل، ترتیب و ترکیب رو خوب یاد نگیرین، قطعاً توی مبحث احتمال به مشکل برمیخورین، چون این‌ها مقدمه احتمال هستن. در قسمت آخر این فصل هم، به قسمت از آمار اومده که ربطی به قسمت‌های قبلی نداره و بیش‌تر روی شاخص‌های مرکزی و پراکندگی بحث کرده که قبلاً هم خوندین. فقط گام‌های چرخه آمار به بحث جدیدی هست که خیلی هم راحت.

بسته ۵



بسته‌های ۳ و ۴



بسته‌های ۱ و ۲



برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

شمارش (اصل جمع و ضرب)

صفحه ۲ تا ۷ کتاب درسی

بسته اول



الف اصل جمع

- اگر فقط یک کار را بتوان به k یا m یا n حالت مختلف انجام داد آن‌گاه تعداد کل حالت‌های انجام این کار برابر است با: $k + m + \dots + n$
- دقت کنید که در این جا فقط می‌خواهیم یک عمل را به روش‌های مختلف انجام دهیم. ضمناً حرف «یا» در مسائل، نشان دهنده اصل جمع است.

سؤال علی می‌خواهد از تهران به مشهد سفر کند. او برای انجام این کار می‌تواند از یکی از ۳ نوع قطار لوکس، خوب و معمولی یا یکی از ۴ شرکت هواپیمایی یا یکی از ۸ تعاونی اتوبوس استفاده کند. در کل او به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟

پاسخ علی فقط می‌خواهد یک عمل را انجام دهد و آن سفر از تهران به مشهد است پس از اصل جمع استفاده می‌کنیم: $3 + 4 + 8 = 15$ تعداد کل حالت‌ها

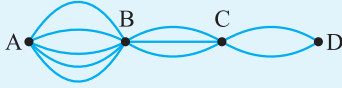
ب اصل ضرب

حالا می‌خواهیم دو یا چند عمل مختلف را با هم یا پشت سر هم انجام دهیم. در این حالت تعداد روش‌های هر عمل را در هم ضرب می‌کنیم. ضمناً حرف «و» نشان دهنده اصل ضرب است. پس الان تفات بین اصل ضرب و اصل جمع را متوجه شدید.

مثال فرض کنید علی ۳ جفت کفش، ۴ پیراهن و ۶ شلوار مختلف دارد؛ می‌خواهیم ببینیم او به چند حالت می‌تواند برای رفتن به مهمانی آماده شود. واضح است که چون او باید هر سه عمل پوشیدن کفش، پیراهن و شلوار را با هم انجام دهد لذا باید از اصل ضرب استفاده کنیم: $3 \times 4 \times 6 = 72$

سؤال با توجه به شکل زیر، مریم می خواهد از شهر A به شهر D سفر کند و برگردد. به طوری که در مسیر برگشت از راه هایی که رفته استفاده نکند. او به چند حالت می تواند این رفت و برگشت را انجام دهد؟ (همه جاده ها دو طرفه فرض می شوند).

مشابه امتحان نهایی



پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد حالت های مسیر رفت} = 5 \times 3 \times 2 = 30 \\ \text{تعداد حالت های مسیر برگشت} = 1 \times 2 \times 4 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعداد حالت های رفت و برگشت} = 30 \times 8 = 240$$

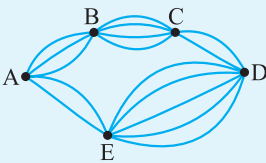
دقت کنید که در مسیر برگشت، از مسیری که در مسیر رفت استفاده کرده ایم مجاز به استفاده مجدد نیستیم یعنی از ۲ مسیر بین D و C یکی، از ۳ مسیر بین C و B یکی و از ۵ مسیر بین B و A هم یکی را حذف کرده ایم.

استفاده همزمان از اصل جمع و اصل ضرب

در بسیاری از سؤالات، باید از هر دو اصلی که خواندیم، استفاده کنیم. یکی از این سؤالات، مربوط به مسافرت از یک شهر به شهر دیگر است؛ سؤال دیگر مربوط به مسائل ترکیب است که جلوتر خواهید خواند.

مشابه کتاب درسی

سؤال با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می توانیم از شهر A، به شهر D سفر کنیم؟



پاسخ برای رفتن از A به D دو حالت کلی وجود دارد. یکی مسیر بالا (مسیر ABCD) و دیگری مسیر پایین (مسیر AED): یعنی شخص می تواند یا از مسیر بالا استفاده کند یا از مسیر پایین و این حرف «یا» نشان می دهد که جواب های دو قسمت بالا و پایین را باید با هم جمع کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مسیر بالا: تعداد حالت ها} = \overset{AB}{3} \times \overset{BC}{4} \times \overset{CD}{2} = 24 \\ \text{مسیر پایین: تعداد حالت ها} = \underset{AE}{2} \times \underset{ED}{5} = 10 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اصل جمع}} \text{تعداد کل حالت ها} = 24 + 10 = 34$$

نکته در آزمون های چندگزینه ای، اگر پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی باشد، تعداد کل حالت های پاسخ گویی به آزمون، طبق اصل ضرب برابر می شود با:

تعداد سؤالات (تعداد گزینه ها)

ولی اگر پاسخ گویی به هر سؤال، الزامی نباشد تعداد کل حالت ها برابر می شود با:

تعداد سؤالات (۱+ تعداد گزینه ها)

سؤال به یک آزمون ۳ گزینه ای که شامل ۱۰ سؤال است به چند حالت مختلف می توان جواب داد؟ (پاسخ گویی به همه سؤالات الزامی است).

کتاب درسی

پاسخ طبق نکته گفته شده، خواهیم داشت:

$$3^{10} = \text{تعداد حالت ها}$$

اگر در متن سؤال، گفته شود پاسخ گویی به سؤالات الزامی نیست، جواب برابر با 4^{10} خواهد شد.

نماد فاکتوریل (!)

• اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه حاصل $n!$ که آن را n فاکتوریل می‌خوانیم به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

• یعنی برای محاسبه فاکتوریل یک عدد طبیعی، باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش ضرب کنیم مثلاً:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

توجه به یاد داشته باشید که $1! = 1$ و $0! = 1$ است.

تذکر گاهی لازم نیست فاکتوریل یک عدد را تا 1 باز کنیم (مخصوصاً در کسرها)، در این مواقع بهتر است عدد بزرگ‌تر تا آن جا باز کنیم که به عدد کوچک‌تر برسیم؛ توجه کنید که هر جا که متوقف می‌شویم باید علامت فاکتوریل بگذاریم.

۹ بزرگ‌تر از ۷ است پس $9!$ را باز کردیم تا به $7!$ رسیدیم.

مثال $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 72$ $\xrightarrow{\text{توضیح}}$

n بزرگ‌تر از $(n-2)$ است پس $n!$ را باز کردیم تا به $(n-2)!$ رسیدیم.

مثال $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n$ $\xrightarrow{\text{توضیح}}$

مشابه امتحان نهایی

سؤال حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱ $5! - 3! = ?$ ۲ $\sqrt{0! - 1!} + 2! + 3! = ?$ ۳ $\frac{6!}{3! \times 4!} = ?$

۱ $5! - 3! = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) - (3 \times 2 \times 1) = 120 - 6 = 114$

۲ $\sqrt{0! - 1!} + 2! + 3! = \sqrt{1 - 1} + (2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 0 + 2 + 6 = 8$

۳ $\frac{6!}{3! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{(3 \times 2 \times 1) \times 4!} = 5$

پ مفهوم جایگشت

• جایگشت یعنی نحوه قرار گرفتن افراد یا اشیاء در کنار هم. مثلاً حروف a, b و c به شکل‌های زیر می‌توانند کنار هم قرار گیرند و کلمات ۳ حرفی بسازند:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$ (بامعنی یا بی‌معنی بودن کلمات، در این مبهم، اصلاً مهم نیست.)

• به هر کدام از این ۶ کلمه که ساختیم یک جایگشت از حروف a, b و c می‌گوییم. ضمناً چون ۳ حرف a, b و c مختلف هستند تعداد جایگشت‌ها برابر می‌شود با:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

نکته تعداد جایگشت‌های n شیء یا n فرد متمایز برابر با $n!$ می‌باشد مثلاً تعداد جایگشت‌های مختلف که با حروف کلمه «TASNIM» می‌توان

ساخت برابر با $6!$ یا همان 720 می‌باشد. توجه کنید اگر مثلاً گفته شود با حروف کلمه TASNIM چند کلمه ۳ حرفی می‌توان ساخت، دیگر نمی‌توان گفت جواب $3!$ است، بلکه باید از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم که بعد از سؤال زیر، این روش را توضیح می‌دهیم.

مشابه امتحان نهایی

سؤال چهار نفر دوست به چند حالت می‌توانند در یک صف قرار گیرند؟

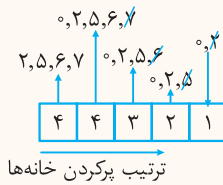
پاسخ طبق نکته گفته شده جواب برابر است با: $4! = 24$ تعداد حالت‌ها

ساختن اعداد و کلمات در حالت کلی

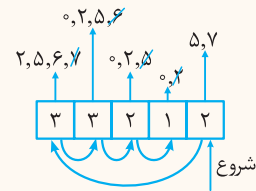
معمولاً بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرایط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح باشد باید ابتدا اولین خانه سمت راست را پُر کنیم سپس به سراغ پُر کردن اولین خانه سمت چپ می‌رویم و خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم. ضمناً توجه کنید اگر در متن سؤال ذکر شود تکرار ارقام یا حروف، مجاز نیست پس از پُر کردن هر خانه، باید یک حرف یا رقم استفاده شده در خانه قبلی را به دلخواه خط بزنیم. حالا دو تا سؤال حل می‌کنیم تا قضیه کاملاً برایتان جا بیفتد.

سؤال با ارقام ۶، ۵، ۲، ۰ و ۷ بدون تکرار ارقام:

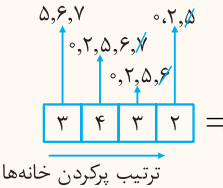
- ۱ چند عدد پنج رقمی می توان ساخت؟
- ۲ چند عدد پنج رقمی فرد می توان ساخت؟
- ۳ چند عدد چهاررقمی بزرگتر از ۵۰۰۰ می توان ساخت؟
- ۴ چند عدد پنج رقمی می توان ساخت که با ۲ شروع و به ۶ ختم شود؟



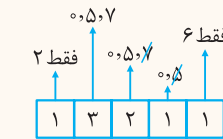
پاسخ ۱ شرط خاصی به جز تکراری نبودن ارقام ذکر نشده، پس خانه ها را از چپ به راست پُر می کنیم. فقط دقت کنید اولین خانه سمت چپ نمی تواند صفر باشد: (توجه کنید که پس از پُر کردن هر فونته، باید به دلفواه یکی از ارقام استفاده شده در اون فونته رو فقط بزنیم.)
 \Rightarrow تعداد عددها = $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$



۲ عددی فرد است که یکنانش فرد باشد. پس ابتدا اولین خانه سمت راست را پُر می کنیم سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می رویم: (ترتیب پُر کردن فونته ها رو با فلش هایی که زیر آن هاست، مشخص کرده ایم.)
 \Rightarrow تعداد عددها = $3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 36$



۳ برای آن که عدد چهاررقمی مورد نظر، بزرگتر از ۵۰۰۰ باشد اولین رقم سمت چپ آن باید ۵ یا بیش تر باشد لذا پُر کردن خانه ها را از چپ به راست انجام می دهیم:
 \Rightarrow تعداد عددها = $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$



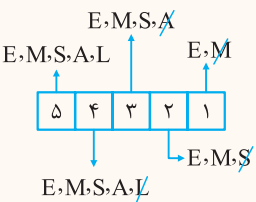
۴ ابتدا و انتهای اعداد خواسته شده، هر کدام فقط به ۱ حالت پُر می شوند: پس اول، این دو خانه را پُر می کنیم و بعد از آن، بقیه خانه ها را از چپ به راست پُر می کنیم:
 \Rightarrow تعداد عددها = $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

در تمام قسمت هایی که حل کردیم اگر گفته می شد تکرار ارقام مجاز است، دیگر هیچ رقمی را خط نمی زدیم.

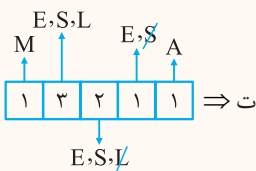
کتاب درسی - مشابه امتحان نهایی

سؤال با حروف کلمه «EMSAL» و بدون تکرار حروف:

- ۱ چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت؟
- ۲ چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با M شروع و به A ختم شود؟



پاسخ ۱ کلمه «EMSAL» پنج حرفی است، پس داریم:
 \Rightarrow تعداد کلمات = $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$



۲ تکلیف مکان های اول و آخر مشخص است، پس به صورت زیر عمل می کنیم:
 \Rightarrow تعداد کلمات = $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

ساختن اعداد زوج یا مضرب ۵ وقتی رقم صفر هم وجود دارد

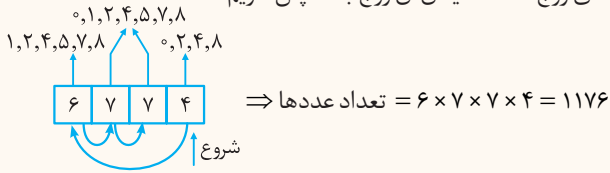
اگر صفر جزء ارقام داده شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم. در یک حالت فرض می کنیم یکان صفر باشد و در حالت دیگر فرض می کنیم یکان صفر نباشد. سپس جواب های هر دو حالت را با هم جمع می کنیم. توجه کنید اگر گفته شود تکرار ارقام مجاز است نیازی نیست دو حالت جداگانه تشکیل دهیم و با یک حالت، مسأله حل می شود.

کتاب درسی - مشابه امتحان نهایی

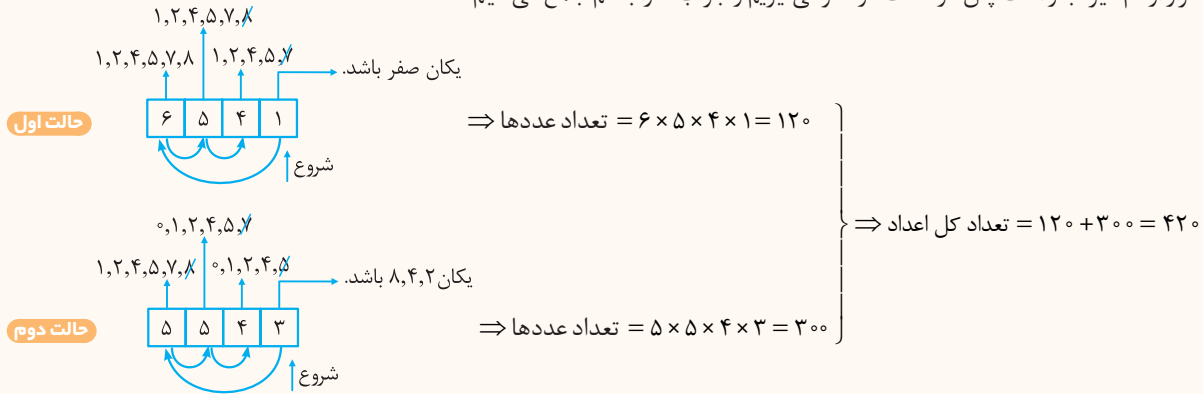
سؤال با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۸ و چند عدد زوج چهاررقمی می توان ساخت به طوری که:

۱ تکرار ارقام مجاز باشد. ۲ تکرار ارقام مجاز نباشد.

پاسخ ۱ تکرار ارقام مجاز است پس نیازی نیست دو حالت تشکیل دهیم؛ عددی زوج است که یکان آن زوج باشد پس داریم:

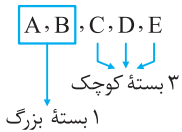


۲ تکرار ارقام غیرمجاز است پس دو حالت در نظر می گیریم و جواب ها را با هم جمع می کنیم:



کنار هم قرار داشتن اشیا یا افراد خاص

فرض کنید می خواهیم کتاب های A, B, C, D, E را در یک قفسه کنار هم قرار بدهیم، به شرطی که کتاب های A و B همیشه کنار هم باشند. پس این دو کتاب را داخل یک کادر قرار می دهیم و این کادر را یک بسته بزرگ می نامیم:



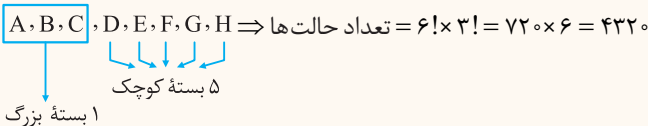
اکنون می توان گفت ۴ بسته داریم (۳ بسته کوچک و ۱ بسته بزرگ) که به ۴! حالت می توانند با هم جابه جا شوند. از طرفی در داخل بسته بزرگ، A و B خودشان هم می توانند با هم به ۲! حالت جابه جا شوند، لذا طبق اصل ضرب داریم:

$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$ = تعداد کل حالت ها

سؤال ۳ دبیر ریاضی و ۵ دبیر عربی به چند حالت می توانند عکس یادگاری بگیرند، به طوری که دبیران ریاضی، همیشه کنار هم باشند؟

کنکور سراسری

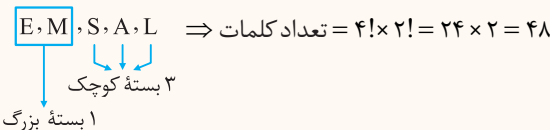
پاسخ دبیران ریاضی را به دلخواه A, B, C و دبیران عربی را D, E, F, G, H می نامیم و دبیران ریاضی را داخل یک کادر قرار می دهیم:



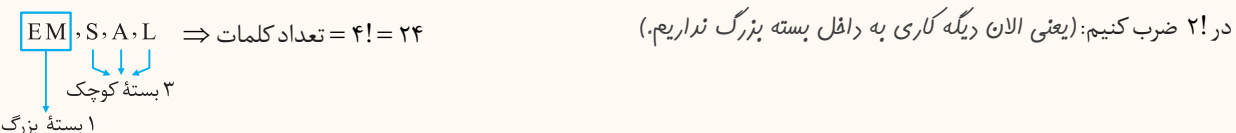
سؤال با حروف کلمه « EMSAL » و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که:

۱ در همه آن ها E و M کنار هم باشند؟ ۲ در همه آن ها عبارت « EM » به همین شکل آمده باشد؟

پاسخ ۱ می خواهیم E و M در همه کلمات ساخته شده، کنار هم باشند، پس آن ها را در یک کادر قرار می دهیم و یک بسته بزرگ فرض می کنیم:



۲ این دفعه باید عبارت « EM » دقیقاً به همین شکل بیاید، یعنی E و M نمی توانند با هم جابه جا شوند، پس دیگر نباید جواب ۴! قسمت (۱) را



- **درستی یا نادرستی دو سوال زیر، را مشخص کنید.**
۱. ساده شده عبارت $2! \div 6!$ برابر $3!$ است. (خرداد ۹۹ خارج از کشور)
۲. با حروف کلمه «MANZEL» و بدون تکرار، می‌توان به تعداد 144 کلمه 6 حرفی نوشت که در همه آن‌ها E, L, Z کنار هم باشند.
- **جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.**
۳. تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر است. (خرداد ۱۴۰۰، دی ۹۹، شهریور ۹۸)
۴. برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت $0! = \dots$ تعریف می‌کنیم. (خرداد ۱۴۰۰)
۵. اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به طریق انجام پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)
۶. مقدار $\frac{1!}{11!}$ برابر است. (شهریور ۱۴۰۰)
۷. هر حالت از کنار هم قرار گرفتن 5 شیء متمایز را یک از آن 5 شیء می‌نامیم. (شهریور ۱۴۰۰)
۸. هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک تایی از آن n شیء می‌نامیم. (دی ۹۹ خارج از کشور)
۹. هر حالت از کنار هم قرار گرفتن 7 شیء متمایز را یک جایگشت از آن 7 شیء می‌نامیم. (دی ۱۴۰۰)
۱۰. به چند طریق می‌توان با ارقام 1 تا 7 عددی چهاررقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست). (مشابه شهریور ۱۴۰۰، شهریور ۹۸)
۱۱. با ارقام $1, 2, 4, 7, 9$ و چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (دی ۹۹، مشابه خرداد ۹۹)
- **ارقام 1 تا 9 (بدون تکرار ارقام) مفروض‌اند؛ با توجه به آن به سؤالات زیر پاسخ دهید.**
۱۲. چند عدد 5 رقمی می‌توان نوشت؟
۱۳. چند عدد 4 رقمی زوج می‌توان نوشت؟
- **حروف کلمه «خورشید» را بدون تکرار حروف (با معنی یا بی‌معنی)، در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.**
۱۴. چند کلمه 3 حرفی می‌توان نوشت که به «د» ختم شوند؟ (شهریور ۹۹)
۱۵. چند کلمه 4 حرفی می‌توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟
- **حروف کلمه «مهرسان» را بدون تکرار حروف (با معنی یا بی‌معنی)، در نظر بگیرید و به دو سؤال زیر پاسخ دهید.**
۱۶. چند کلمه 3 حرفی می‌توان نوشت؟ (دی ۱۴۰۰)
۱۷. چند کلمه 3 حرفی می‌توان نوشت که با «م» شروع شوند؟
۱۸. می‌خواهیم از بین 2 سیب، 3 کیوی و 4 نارنگی یک میوه انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این میوه را انتخاب کنیم؟ (دی ۱۴۰۰)
۱۹. می‌خواهیم از بین 10 خودروی سواری، 12 خودروی وانت و 6 خودروی کامیون، یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ (شهریور ۹۹)
۲۰. بین چهار شهر A, B, C, D مطابق شکل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟ (خرداد ۱۴۰۰)
- 
۲۱. مطابق شکل زیر، بین شهرهای A, B, C, D راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ (خرداد ۹۹)
- 
- **اگر برای مسافرت به یکی از شهرهای مشهد، شیراز یا اهواز بتوان از وسیله نقلیه سواری، اتوبوس یا هواپیما استفاده کرد، آن‌گاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.**
۲۲. تعداد راه‌های ممکن را برای انتخاب شهر و وسیله نقلیه پیدا کنید.
۲۳. نمودار درختی مربوط به انتخاب‌ها را رسم کنید.

● فرض کنید از تهران به کرج ۳ راه، از کرج به زنجان ۴ راه و از زنجان به تبریز ۲ راه وجود داشته باشد، حال به سؤالات زیر پاسخ دهید. (کتاب درسی)

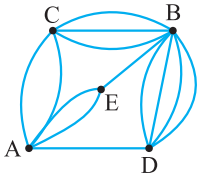
۲۴. به چند طریق می‌توان از تهران و با عبور از کرج و زنجان، به تبریز رفت و برگشت؟

۲۵. به چند طریق می‌توان از تهران به تبریز رفت و برگشت به شرط آن‌که در هیچ‌کدام از مسیرها، راه‌های رفت و برگشت یکی نباشند؟

(کتاب درسی)

● با توجه به نمودار، به سه سؤال زیر پاسخ دهید.

(کتاب درسی)



۲۶. به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر B برویم؟

۲۷. به چند طریق می‌توانیم با گذشتن از شهر C از A به B برویم؟

۲۸. به چند طریق می‌توانیم بدون گذشتن از شهر C از A به B برویم؟

۲۹. فردی می‌خواهد بداند به چند طریق با دو پیراهن به رنگ‌های «آبی - قرمز» و با سه شلوار به رنگ‌های «قهوه‌ای - مشکی - سرمه‌ای» می‌تواند لباس

(کتاب درسی)

بپوشد. نمودار درختی حالت‌های مختلف انتخاب او را رسم کنید.

(خرداد ۸۹)

۳۰. شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد. به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سه آن‌ها را با هم بپوشد؟

(خرداد ۹۳)

۳۱. به چند طریق می‌توان به ۲ سؤال ۳ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری که هیچ سؤالی بی‌پاسخ نماند؟

(کتاب درسی)

۳۲. به چند طریق می‌توان به یک آزمون دو گزینه‌ای که شامل ۲۰ سؤال است پاسخ داد به طوری که:

۱ پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی باشد. ۲ پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی نباشد.

۳۳. روی یک میز غذا ۲ نوع سوپ، ۴ نوع پلو و ۳ نوع سالاد وجود دارد. به چند روش می‌توان یک وعده غذایی که شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و

(خرداد ۹۲)

یک نوع سالاد باشد، انتخاب کنیم؟

(مشابه امتحان نهایی)

● حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(خرداد ۹۰، مشابه خرداد ۸۹)

$$\begin{aligned} ۳۴. & ۵! - ۴! \\ ۳۵. & \frac{۱۲!}{۱۰!} \\ ۳۶. & \frac{۷!}{۳! \times ۵!} \\ ۳۷. & \frac{۳! + ۵!}{۶!} \\ ۳۸. & \frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲! \times ۷!} \\ ۳۹. & ۰! + ۱! + ۲! + ۳! \\ ۴۰. & ۴! + ۲! \\ ۴۱. & \frac{۱۰!}{۶! \times ۷!} \end{aligned}$$

(خرداد ۹۲)

۴۲. درستی یا نادرستی تساوی $۱! + ۳! + ۴! = ۸!$ را بررسی کنید.

(کنکور سراسری، مخصوص علاقمندان)

۴۳. اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار n را به دست آورید.

(خرداد ۸۹)

۴۴. با اعداد ۱، ۴، ۹ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت، به طوری که:

۱ تکرار ارقام مجاز باشد. ۲ تکرار ارقام مجاز نباشد.

(کتاب درسی)

۴۵. به چند طریق مختلف ۸ نفر می‌توانند برای تهیه بلیط سینما در یک صف بایستند؟

(خرداد ۸۹)

۴۶. تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «کتاب» را بنویسید.

(خرداد ۹۰)

۴۷. به چند طریق می‌توان کتاب‌های ریاضی، عربی، جغرافیا و تاریخ را کنار هم قرار داد؟

(کتاب درسی)

۴۸. با حروف الفبای فارسی چند کلمه سه حرفی بدون توجه به معنا می‌توان نوشت به طوری که:

۱ تکرار حروف مجاز باشد. ۲ تکرار حروف غیرمجاز باشد.

(مشابه امتحان نهایی)

۴۹. با حروف کلمه «سعادت» به چند راه مختلف می‌توان کلمات سه حرفی نوشت به طوری که:

۱ تکرار حروف مجاز باشد. ۲ تکرار حروف غیرمجاز باشد.

(مشابه امتحان نهایی)

۵۰. با حروف کلمه «تهران» چند کلمه سه حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

(مشابه امتحان نهایی)

● حروف کلمه «مِهستان» را بدون تکرار حروف، در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۵۱. چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت؟

۵۲. چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت که با حرف «س» شروع و به «ن» ختم شود؟

(کتاب درسی)

● **حروف کلمه « TRIANGLE » را بدون تکرار حروف، در نظر بگیرید و به سه سؤال زیر پاسخ دهید.**

۵۳. چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت؟

۵۴. چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت که با «T» شروع شود؟

۵۵. چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت که با «T» شروع و به «E» ختم شود؟

(مشابه امتحان نهایی)

۵۶. با ارقام ۱، ۰، ۵، ۹، ۴ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت به طوری که:

۱) تکرار مجاز باشد. ۲) تکرار غیرمجاز باشد.

(مشابه امتحان نهایی)

● **ارقام ۲، ۳، ۴، ۶، ۸ و (بدون تکرار ارقام) را در نظر بگیرید و به چهار سؤال زیر پاسخ دهید.**

۵۷. چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟

۵۸. چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

۵۹. چند عدد چهار رقمی می توان نوشت که با ۲ شروع شود؟

۶۰. چند عدد سه رقمی می توان نوشت که با ۳ شروع و به ۸ ختم شود؟

۶۱. دو رقم اول سمت چپ یک عدد پنج رقمی، مشخص است. چند راه ممکن برای ساختن آن عدد پنج رقمی وجود دارد؟ (ارقام می توانند تکراری باشند.)

(تألیفی)

(شهریور ۹۰)

۶۲. با ارقام ۳، ۷، ۵، ۶، ۸ به چند طریق می توان یک عدد سه رقمی بدون تکرار ساخت، به طوری که:

۱) آن عدد زوج باشد. ۲) رقم یکان آن عدد اول باشد.

(مشابه امتحان نهایی)

● **ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۷ و (با تکرار ارقام) را در نظر بگیرید و به سه سؤال زیر پاسخ دهید.**

۶۳. چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

۶۴. چند عدد چهار رقمی زوج می توان نوشت؟

۶۵. چند عدد دورقمی فرد می توان نوشت؟

(کتاب درسی)

۶۶. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بزرگ تر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

(کتاب درسی)

۶۷. با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگ تر یا مساوی ۲۰۰۰ می توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)

(کتاب درسی)

۶۸. با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که:

۱) عدد مضرب ۵ بوده و تکرار مجاز باشد. ۲) عدد زوج باشد و تکرار مجاز باشد.

(کتاب درسی)

۶۹. با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که:

۱) عدد مضرب ۵ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. ۲) عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

(خرداد ۹۰)

● **ارقام ۵، ۶، ۸، ۷ و (با تکرار ارقام) را در نظر بگیرید و به دو سؤال زیر پاسخ دهید.**

۷۰. چند عدد سه رقمی بدون تکرار می توان نوشت؟

۷۱. چند عدد چهار رقمی زوج بدون تکرار می توان نوشت؟

(شهریور ۸۹)

۷۲. با ارقام ۵، ۳، ۸، ۲، ۷ به چند طریق می توان یک عدد سه رقمی ساخت به طوری که:

۱) آن عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. ۲) رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز باشد.

(کتاب درسی)

۷۳. چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که رقم دهگان آن ها، عددی اول باشد؟

۷۴. پلاک اتومبیل سواری سری «ب» در تهران به صورت

تهران
ب

 می باشد که هر ستاره نمایش گر یک عدد غیرصفر است. در سری «ب» و در

(کنکور سراسری)

تهران چند پلاک می توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

۷۵. یک اداره برای شماره کارت پرسنلی کارمندان خود از یک کد سه رقمی و ۲ حرف فارسی به شکل زیر استفاده می کند، با این شرط که اولین رقم سمت

(برگرفته از کتاب درسی)

چپ نمی تواند صفر باشد. تعداد راه های ممکن برای شماره کارت های مختلف پرسنلی را پیدا کنید به شرطی که:

عدد عدد حرف عدد عدد عدد عدد
□ □ □ □ □

۱) تکرار حروف و ارقام مجاز باشد. ۲) تکرار حروف و ارقام مجاز نباشد.

مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۲۰ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۲ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند حال به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(کتاب درسی)

۷۶. مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۰ نفر مشورت بگیرد؟

۷۷. اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشاوره بگیرد به شرط آن‌که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

(خرداد ۹۶)

کدام یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

۷۸. $(3!)^2 = 9!$ ۷۹. $3! \times 4 = 4!$ ۸۰. $\frac{8!}{4!} = 2!$ ۸۱. $10! = 10 \times 9!$

(خرداد ۹۵)

۸۲. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۸ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که رقم صدگان آن ۶ باشد؟

(خرداد ۹۴)

با در نظر گرفتن ارقام ۹، ۲، ۷، ۵، ۳ و ۸؛ به دو سؤال زیر پاسخ دهید.

۸۳. چند عدد سه‌رقمی با تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۸۴. چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که یکان آن ۲ باشد؟

(خرداد ۹۱)

۸۵. با حروف کلمه «روستا» و بدون تکرار، چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت؟ (بامعنی یا بی‌معنی)

(خرداد ۹۱)

۸۶. به چند راه مختلف، ۶ نفر دوست می‌توانند در یک ردیف کنار هم عکس بگیرند؟

شمارش (تبدیل و ترکیب)

صفحه ۷ تا ۱۱ کتاب درسی

بسته دوم



الف مسائل تبدیل

اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم r شیء از آن‌ها را طوری انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم مهم باشد، (مثل شرکت در مسابقه، یا گرفتن پست و مقام) در این صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $P(n, r)$ نشان داده و آن را تبدیل r شیء از n شیء می‌خوانیم که به صورت زیر حساب می‌شود:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

البته همواره به جای استفاده از فرمول بالا، می‌توانیم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم. مگر این‌که در متن سؤال، خود $P(n, r)$ را مشاهده کنیم.

کتاب درسی

سؤال از بین ۸ نفر شرکت‌کننده در یک مسابقه تلویزیونی، به چند حالت می‌توان به ۳ نفر اول جایزه داد؟

پاسخ روش اول ترتیب جایزه دادن به ۳ نفر اول مهم است پس از فرمول $P(n, r)$ استفاده می‌کنیم:

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$$

روش دوم به روش پُر کردن خانه‌ها عمل می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

کتاب درسی

سؤال از معادله زیر، مقدار n را به دست آورید.

$$P(n, 3) = 4P(n, 2)$$

پاسخ

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 4 \times \frac{n!}{(n-2)!} \xrightarrow{n! \text{ ها را از دو طرف ساده می‌کنیم.}} \frac{1}{(n-3)!} = 4 \times \frac{1}{(n-2)!}$$

$$\xrightarrow{(n-2)! \text{ را باز می‌کنیم.}} \frac{1}{(n-3)!} = \frac{4}{(n-2)(n-3)!} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1 = \frac{4}{n-2} \Rightarrow n-2 = 4 \Rightarrow n = 6$$

فصل ۱

آمار و احتمال

۱ | نادرست است؛ زیرا:

$$\begin{cases} 6! = 720 \\ 2! = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$

ولی ۳! برابر ۶ است پس این جمله نادرست است.

۲ | درست است، زیرا می‌خواهیم E, L, Z کنار هم باشند، پس

آن‌ها را داخل یک کادر قرار می‌دهیم:

E, L, Z, M, A, N

۱ بستهٔ کوچک \Rightarrow تعداد کلمات = $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$

۱ بستهٔ بزرگ

۱۴ | سه تا خانه رسم می‌کنیم، خانهٔ آخر فقط به ۱ حالت می‌تواند پُر شود

(با حرف «د»); در کلمات فارسی، خانه‌ها را از راست به چپ پُر می‌کنیم:

خ، و، ر، ش، ی

فقط (د)

۱ ۴ ۵ \Rightarrow جواب = $1 \times 4 \times 5 = 20$

خ، و، ر، ش، ی

۱۵ | چهار تا خانه رسم می‌کنیم، تکلیف خانه‌های ابتدایی و انتهایی معلوم است. لذا خواهیم داشت:

و، ر، ش، د

فقط (خ)

۱ ۳ ۴ ۱ \Rightarrow جواب = $1 \times 3 \times 4 \times 1 = 12$

فقط (ی)

و، ر، ش، ی

۱۶ | «مهرسان» کلمه‌ای فارسی است، پس پُر کردن خانه‌ها را از راست

به چپ انجام می‌دهیم. پس از پُر کردن هر خانه، یکی از حروف استفاده شده

را حذف می‌کنیم. (مهم نیست کدوم حرف) م، ه، ر، س، ا، ن

م، ه، ر، س، ا، ن

۴ ۵ ۶ \Rightarrow جواب = $4 \times 5 \times 6 = 120$

م، ه، ر، س، ا، ن

۱۷ | ابتدا خانه سمت راست را پُر می‌کنیم که فقط ۱ حالت دارد (حرف م)

سپس خانهٔ وسط به ۵ حالت پُر خواهد شد (پون ریگه نمی‌توانیم از «م»

استفاده کنیم) و در نهایت خانهٔ سمت چپ به ۴ حالت پُر می‌شود چون

یکی از حروف خانه وسط را باید حذف کنیم (ما به دلخواه حرف «ن» رو

حذف کردیم)

م، ر، س، ا، ن

۴ ۵ ۱ \Rightarrow جواب = $4 \times 5 \times 1 = 20$

م، ر، س، ا، ن

۱۸ | چون فقط باید یکی از میوه‌ها را انتخاب کنیم، از اصل جمع

استفاده می‌کنیم: $2 + 3 + 4 = 9$

۱۹ | باید از اصل جمع استفاده کنیم، چون خودروی انتخابی یا باید

سواری باشد یا وانت یا کامیون، لذا داریم:

$10 + 12 + 6 = 28$

۲۰ | برای رفتن از C به D به طوری که از B عبور نکنیم، فقط باید

مسیر CAD را طی کرد. لذا خواهیم داشت:

CA AD

تعداد حالت‌ها = $3 \times 4 = 12$

ABC مسیر: $3 \times 4 = 12$

ADC مسیر: $3 \times 2 = 6$

اصل جمع $\rightarrow 12 + 6 = 18$

۳ | $n!$

۵ | اصل ضرب $m \times n$

۶ | $\frac{n!}{1!} = \frac{1}{1} = 1$

۷ | جایگشت

۸ | جایگشت

۹ | ۷ تایی

۱۰ | چهار تا خانه رسم می‌کنیم، تنها شرط سوال این است که تکرار

رقم‌ها مجاز نیست پس بعد از پُر کردن هر خانه، یکی از ارقام استفاده

شده در خانهٔ قبلی را خط می‌زنیم (مهم نیست کدوم رقم رو خط بزنینم).

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

۷ ۶ ۵ ۴ \Rightarrow جواب = $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷

۱۱ | سه تا خانه رسم می‌کنیم، عدد حاصل باید فرد باشد، پس یکنانش

فقط می‌تواند ۱ یا ۷ یا ۹ باشد؛ لذا داریم:

۱، ۲، ۳، ۴، ۷، ۹

۱، ۲، ۳، ۴، ۷، ۹

۴ ۳ ۳ \Rightarrow جواب = $4 \times 3 \times 3 = 36$

شروع

۱۲ | می‌خواهیم عدد ۵ رقمی بسازیم و تکرار ارقام هم مجاز نیست لذا

خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

۹ ۸ ۷ ۶ ۵ \Rightarrow جواب = $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

۱۳ | یکان عدد باید زوج باشد یعنی می‌تواند ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

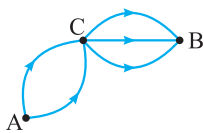
۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹

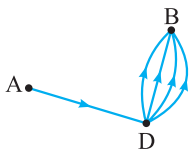
۸ ۷ ۶ ۴ \Rightarrow جواب = $8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$

شروع

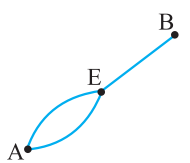
سه مسیر متمایز وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به $6 = 2 \times 3$ طریق انجام می‌گیرد.



مسیر (۲): ابتدا از A به D و سپس از D به B می‌رویم. ملاحظه می‌شود که از A به D فقط یک مسیر و از D به B چهار مسیر وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به $4 = 1 \times 4$ طریق انجام می‌گیرد.



در مسیر (۳) نیز خواهیم داشت:



$2 = 1 \times 2 =$ تعداد حالت‌ها \Rightarrow

چون برای رفتن از شهر A به شهر B فقط می‌توانیم یکی از ۳ مسیر (۱)، (۲) یا (۳) را در نظر بگیریم (به کلمه «یا» در ابتدای پاسخ توجه کنید که نشان‌دهنده اصل جمع است.) لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$12 = 2 + 4 + 6 =$ تعداد کل حالت‌ها برای رفتن از A به B

۲۷ | می‌خواهیم حتماً از شهر C عبور کنیم پس فقط مسیر $A \rightarrow C \rightarrow B$ را خواهیم داشت: $6 = 2 \times 3 =$ تعداد حالت‌ها

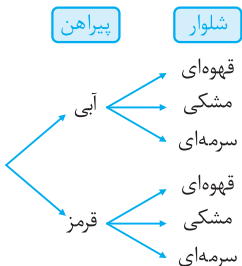
۲۸ | می‌خواهیم از شهر C عبور نکنیم پس دو مسیر $A \rightarrow E \rightarrow B$ و $A \rightarrow D \rightarrow B$ را خواهیم داشت:

$2 = 1 \times 2 =$ تعداد حالت‌ها: $A \rightarrow E \rightarrow B$

$4 = 1 \times 4 =$ تعداد حالت‌ها: $A \rightarrow D \rightarrow B$

$6 = 2 + 4 =$ تعداد کل حالت‌ها \Rightarrow

۲۹ | این فرد برای انتخاب پیراهن به ۲ طریق و برای انتخاب شلوار به ۳ طریق می‌تواند عمل کند، لذا طبق اصل ضرب کلاً به $6 = 2 \times 3$ طریق می‌تواند لباس بپوشد.



۳۰ | طبق اصل شمارش، تعداد انتخاب‌های حالت‌های مختلف را در هم ضرب می‌کنیم: $24 = 4 \times 3 \times 2 =$ تعداد انتخاب‌ها

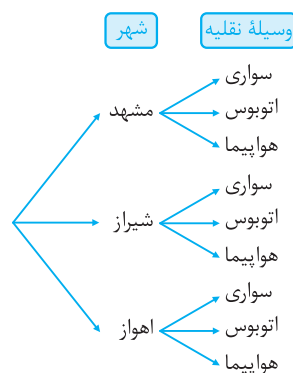
۳۱ | ۲ سؤال وجود دارد که برای هر کدام از آن‌ها ۳ گزینه (۳ حالت) وجود دارد. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$9 = 3 \times 3 =$ تعداد حالت‌های پاسخگویی به سؤالات

۲۲ | طبق اطلاعات مسئله برای انتخاب شهر ۳ گزینه وجود دارد (مشهد، شیراز یا اهواز) و برای انتخاب وسیله نقلیه نیز ۳ گزینه موجود است (سواری، اتوبوس یا هواپیما) بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب‌های این دو عمل در هم ضرب می‌شوند:

$9 = 3 \times 3 =$ تعداد راه‌های ممکن برای سفر

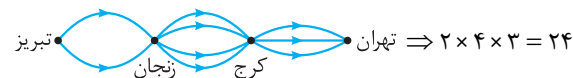
۲۳ | می‌توانیم، با یک تقسیم‌بندی مناسب (نمودار درختی) حالت‌های مختلف انتخاب را نمایش دهیم:



۲۴ | تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز:



تعداد راه‌های ممکن برای برگشتن از تبریز به تهران:



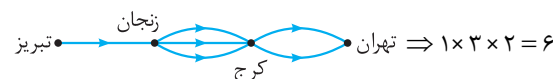
طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

$576 = 24 \times 24 =$

۲۵ | مسیره‌های رفتن از تهران به تبریز دقیقاً مانند سؤال قبل می‌باشد:

$24 = 3 \times 4 \times 2 =$ تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز

چون گفته شده مسیره‌های رفت و برگشت نباید تکراری باشند، پس مسیره‌هایی که در رفت از آن‌ها استفاده کردیم، در برگشت حذف می‌شوند: تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



حال طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

\times (تعداد حالات مسیر رفت) = تعداد کل راه‌های انتخابی

$144 = 24 \times 6 =$ (تعداد حالات مسیر برگشت)

۲۶ | برای رفتن از A به B سه مسیر کلی وجود دارد:

- (۱) مسیر $A \rightarrow C \rightarrow B$
- یا
- (۲) مسیر $A \rightarrow D \rightarrow B$
- یا
- (۳) مسیر $A \rightarrow E \rightarrow B$

مسیر (۱): مطابق شکل می‌توانیم ابتدا از شهر A به C و سپس از C به B برویم. ملاحظه می‌شود که از A به C دو مسیر مختلف و از C به B

۳۹ | $10! = 1 + 1 + \underbrace{(2 \times 1)}_2 + \underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_6 = 10$

۴۰ | $4! + 2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (2 \times 1) = 24 + 2 = 26$

۴۱ | $\frac{10!}{6! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = 1$

۴۲ | $\begin{cases} 1! + 3! + 4! = 1 + 6 + 24 = 31 \\ 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320 \end{cases}$

پس رابطه داده شده، نادرست است.

۴۳ | روش اول $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \frac{(n-1)!}{(n+1) \times n \times (n-1)!} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n)} = \frac{1}{6}$ طرفین وسطین می‌کنیم.

$\Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$ اتحاد جمله مشترک $\rightarrow (n+3)(n-2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} n+3=0 \\ n-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=-3 < 0 \text{ (غ ق ق)} \\ n=2 \text{ (ق ق)} \end{cases}$

چون n باید عددی طبیعی باشد، پس جواب $n = -3$ غیر قابل قبول است. روش دوم در معادله $(n+1)(n) = 6$ به جای حل این معادله درجه دوم به روش دلتا می‌توان گفت که چون $(n+1)$ و n دو عدد متوالی (پشت سر هم) هستند، پس عدد ۶ را نیز به صورت دو عدد متوالی می‌نویسیم:

$(n+1) \times n = 3 \times 2 \Rightarrow n = 2$

۴۴ | چون عدد مورد نظر سه رقمی است سه جای خالی می‌کشیم. طبق صورت مسئله چهار عدد به ما داده شده و تکرار ارقام نیز مجاز است، پس هر جای خالی (خانه) به چهار طریق می‌تواند پر شود که بنابه اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب در یکدیگر ضرب می‌شوند:

هریک از ارقام ۱، ۴، ۹، ۲

تعداد اعداد مطلوب: $4 \times 4 \times 4 = 64$

فلش‌های روی مربع‌ها، ترتیب پر شدن خانه‌ها را نشان می‌دهند.

ب) ابتدا سه خانه می‌کشیم. رقم سمت چپ (صدگان) به چهار طریق مختلف می‌تواند پر شود. چون تکرار ارقام مجاز نیست رقم دهگان (خانه وسط) می‌تواند به سه طریق پر شود، زیرا از رقمی که در خانه اول استفاده کردیم دیگر نمی‌توانیم در خانه وسطی استفاده نماییم. در نهایت در خانه سمت راست (رقم یکان) فقط می‌توانیم از دو رقم استفاده کنیم پس خواهیم داشت:

۱، ۴، ۹، ۲ ۴، ۹، ۲

تعداد اعداد مطلوب: $4 \times 3 \times 2 = 24$

۳۳ | پاسخ دادن به این ۲۰ سؤال، شامل ۲۰ تصمیم‌گیری است که هر تصمیم‌گیری به ۲ طریق انجام می‌شود. یعنی جواب دادن به سؤال ۱ دو حالت دارد، جواب دادن به سؤال ۲ نیز دو حالت دارد، و ... و جواب دادن به سؤال ۲۰ نیز دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالت‌ها $= \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{20 \text{ بار}} = 2^{20}$

ب) چون پاسخ‌گویی به سؤالات الزامی نیست. پس برای هر سؤال ۳ انتخاب داریم، یعنی به عنوان مثال برای جواب دادن به سؤال اول می‌توانیم گزینه «الف» و یا «ب» را انتخاب کنیم و یا می‌توانیم اصلاً به سؤال پاسخ ندهیم. پس تعداد راه‌های ممکن برای جواب دادن عبارت است از:

تعداد کل حالت‌ها $= \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{20 \text{ بار}} = 3^{20}$

در این گونه مسائل که یک کار مشابه را به دفعات زیاد تکرار می‌کنیم راه کوتاه‌تری برای پیدا کردن تعداد حالت‌ها وجود دارد؟

پاسخ: بله که وجود دارد ... به تذکر زیر خوب دقت کن:

اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(k, 1, 2, 3, \dots)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله با هم برابر و مساوی n باشد آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌های ممکن برابر با n^k است.

۳۳ | یک فرد می‌تواند هر سه کار را با هم انجام دهد. یعنی هم می‌تواند سوپ، هم پیلو و هم سالاد را انتخاب کند. پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

۳۴ | $5! - 4! = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) - (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 120 - 24 = 96$

از حل این مسئله نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی:

$\begin{cases} a! + b! \neq (a+b)! \\ a! - b! \neq (a-b)! \end{cases}$

به عنوان مثال نمی‌توان گفت که حاصل $3! + 4!$ برابر $(3+4)!$ یعنی $7!$ است، زیرا اگر حاصل این دو عبارت را جداگانه محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$3! + 4! = (3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 + 24 = 30$
 $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

$\Rightarrow 3! + 4! \neq 7!$

۳۵ | $\frac{12!}{10!} = \frac{12 \times 11 \times \cancel{10!}}{\cancel{10!}} = 12 \times 11 = 132$

۳۶ | $\frac{7!}{3! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{(3 \times 2 \times 1) \times \cancel{5!}} = \frac{7 \times 6}{6} = 7$

۳۷ | $\frac{3! + 5!}{6!} = \frac{(3 \times 2 \times 1) + (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6 + 120}{720} = \frac{126}{720} = \frac{7}{40}$

۳۸ | $\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!} = \frac{8 \times \cancel{7} \times \cancel{6!}}{(2 \times 1) \times \cancel{7!}} = \frac{8}{2} = 4$

۴۵ | چون برای قرار گرفتن در یک صف، ترتیب مهم است لذا با یک مسئله ترتیب مواجه هستیم. می‌دانیم تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با n!، لذا تعداد جایگشت‌های ۸ نفر برابر است با: $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ = تعداد کل حالت‌های ممکن.

۴۶ | چون در کلمه «کتاب» حروف تکراری وجود ندارد و این کلمه ۴ حرفی است، لذا خواهیم نوشت: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ = تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «کتاب»

۴۷ | تعداد حالت‌های قرار گرفتن n شیء مختلف در کنار هم برابر است با n! لذا تعداد حالت‌های قرار گرفتن این ۴ کتاب کنار هم برابر است با: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

۴۸ | اگر تکرار حروف مجاز باشد، هر یک از سه خانه زیر می‌توانند به ۳۲ طریق مختلف پر شوند. تعداد کلمات مورد نظر: هر یک از ۳۲ حرف الفبای فارسی

$$32 \times 32 \times 32 \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{جواب} = 32 \times 32 \times 32 = (32)^3$$

ترتیب پر کردن خانه‌ها ←

ب) وقتی گفته می‌شود تکرار غیرمجاز است به آن معنا است که وقتی خانه سمت راست می‌تواند با هر یک از ۳۲ انتخاب پر شود، خانه بعدی با ۳۱ انتخاب و خانه آخر با ۳۰ انتخاب پر می‌شود. تعداد کلمات مورد نظر:

$$30 \times 31 \times 32 \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \text{جواب} = 32 \times 31 \times 30$$

علت این‌که پر کردن خانه‌ها را از سمت راست شروع کردیم این است که کلمات فارسی از راست به چپ نوشته می‌شوند. (البته آله از سمت چپ هم شروع کنید به همین جواب‌ها فواید رسید.)

۴۹ | چون کلمات سه حرفی می‌خواهیم لذا ۳ خانه در نظر می‌گیریم و چون تکرار حروف مجاز است، خانه‌ها به صورت زیر پر می‌شوند:

$$\begin{matrix} \text{س، ع، ا، د، ت} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 5 \quad 5 \quad 5 \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

یعنی به عنوان مثال اگر در خانه سمت راست از حرف «س» شروع کردیم در بقیه خانه‌ها نیز می‌توانیم از آن استفاده کنیم. (در وقت کنید که بی‌معنی بودن کلمه سافته‌شده مهم نیست.)

بیشتر پرا پر کردن فوندها رو از سمت راست شروع کردید؟

پاسخ | تو این مسئله چون محدودیتی برای کلمات ۳ حرفی مورد نظر وجود نداره از هر طرف که فواید می‌تونیم فوندها رو پر کنیم ولی در کلمات فارسی همیشه بهترینه که از سمت راست، پاهای قالی رو پر کنیم.

ب) چون تکرار حروف مجاز نمی‌باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} \text{س، ع، ا، د، ت} & \text{س، ع، ا، د، ت} & \text{س، ع، ا، د، ت} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

\Rightarrow تعداد کلمات مطلوب = $5 \times 4 \times 3 = 60$

یعنی اگر در خانه اول (سمت راست) مثلاً از حرف «س» استفاده کردیم دیگر در خانه بعدی نمی‌توان آن را به کار برد (پس ۴ حرف باقی می‌ماند) و اگر در خانه دوم مثلاً از حرف «ع» استفاده کردیم در خانه سوم دیگر مجاز به استفاده از آن نیستیم (پس ۳ حرف باقی می‌ماند).

۵۰ | چون کلمه مورد نظر سه حرفی است، پس سه خانه در نظر می‌گیریم و چون شروع کلمه باید با حرف نقطه‌دار باشد، خانه سمت راست به دو طریق می‌تواند پر شود (حروف «ت» یا «ن»). از طرفی تکرار حروف غیرمجاز است پس خانه وسط به ۴ حالت پر می‌شود چون باید یکی از حروف «ت» و «ن» را که در خانه اول استفاده شده خط بزینیم (ما «ت» رو خط زدیم)

$$\begin{matrix} \text{ت، ه، ر، ا، ن} & \text{ت، ه، ر، ا، ن} & \text{ت، ه، ر، ا، ن} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 4 & 2 \end{matrix}$$

\Rightarrow تعداد کلمات مطلوب = $2 \times 4 \times 3 = 24$

۵۱ | چون کلمه چهار حرفی می‌خواهیم پس چهار خانه می‌کشیم:

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \leftarrow & & & \end{matrix}$$

\Rightarrow تعداد کلمات مورد نظر = $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

۵۲ | چون کلمه سه حرفی مورد نظر است لذا سه خانه می‌کشیم. خانه اول (سمت راست) فقط با یک حالت پر می‌شود (حرف «س») و خانه آخر (سمت چپ) نیز فقط به یک طریق پر می‌شود (حرف «ن») و خانه وسط به چهار طریق می‌تواند پر شود (یکی از حروف م، ه، ت، ا). پس خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} \text{حرف «س»} & & \text{حرف «ن»} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1 & 4 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مورد نظر} = 1 \times 4 \times 1 = 4$$

۵۳ | پنج خانه می‌کشیم و دقت می‌کنیم که از هر حرف فقط یک بار می‌توان استفاده کرد (تکرار حروف غیرمجاز) یعنی خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} \text{یکی از ۸ حرف کلمه} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ \downarrow \\ \text{یکی از ۷ حرف کلمه} \end{matrix}$$

\Rightarrow $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ = تعداد کلمات ۵ حرفی

۵۴ | چهار خانه می‌کشیم. برای حرف سمت چپ فقط یک حالت داریم (حرف T) و برای بقیه خانه‌ها به صورت زیر، انتخاب خواهیم داشت:

فقط T

$$\begin{matrix} \uparrow \\ 1 & 7 & 6 & 5 \\ \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مورد نظر} = 1 \times 7 \times 6 \times 5 = 210$$

۶۱ | چون عدد پنج رقمی می‌خواهیم پنج خانه می‌کشیم. دو خانه سمت چپ هر کدام فقط به یک حالت امکان پر شدن دارند، زیرا هر یک از این دو خانه قبلاً با یک عدد پر شده است. سه خانه باقی مانده هر کدام به ۱۰ حالت مختلف می‌توانند پر شوند (اعداد ۰ تا ۹) لذا می‌توان چنین نوشت:



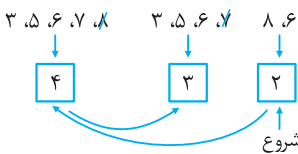
اصل ضرب \rightarrow تعداد اعداد مورد نظر $= 1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$

اگر در صورت مسئله ذکر می‌شد که تکرار غیرمجاز است، سه خانه سمت راست (سه رقم راست عدد) به صورت زیر پر می‌شدند:



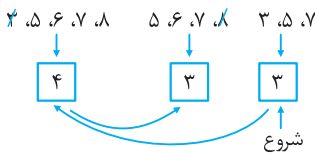
اصل ضرب \rightarrow تعداد اعداد مورد نظر $= 1 \times 1 \times 8 \times 7 \times 6 = 336$

۶۲ | برای زوج بودن عدد سه رقمی مورد نظر، ۲ انتخاب برای یکان داریم (عدد ۶ یا ۸)، پس:



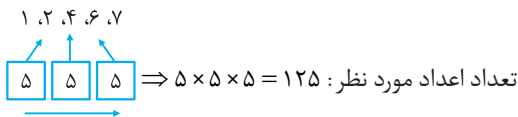
تعداد اعداد مورد نظر: $4 \times 3 \times 2 = 24$

ب) برای اول بودن یکان نیز ۳ انتخاب داریم (اعداد ۵، ۳ یا ۷)، پس:

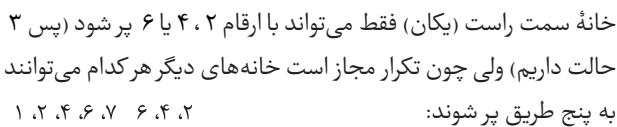


تعداد اعداد مورد نظر: $4 \times 3 \times 3 = 36$

۶۳ | چون عدد مطلوب سه رقمی است، سه خانه می‌کشیم و چون تکرار مجاز است هر خانه می‌تواند به پنج طریق پر شود، بنابراین داریم:

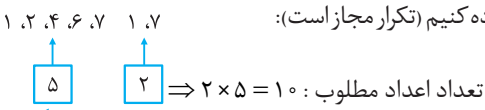


۶۴ | چون عدد مطلوب چهار رقمی است، پس چهار خانه می‌کشیم. خانه سمت راست (یکان) فقط می‌تواند با ارقام ۲، ۴ یا ۶ پر شود (پس ۳ حالت داریم) ولی چون تکرار مجاز است خانه‌های دیگر هر کدام می‌توانند به پنج طریق پر شوند:



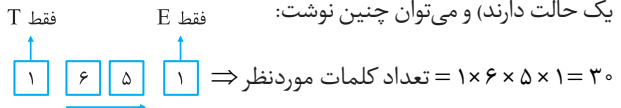
تعداد اعداد مورد نظر: $3 \times 5 \times 5 \times 5 = 375$

۶۵ | عدد مورد نظر دو رقمی است، پس دو خانه در نظر می‌گیریم. در خانه سمت راست (یکان) فقط می‌توانیم از اعداد ۱ و ۷ استفاده کنیم (چون عدد باید فرد باشد) ولی در خانه سمت چپ از هر کدام از پنج عدد داده شده می‌توانیم استفاده کنیم (تکرار مجاز است):



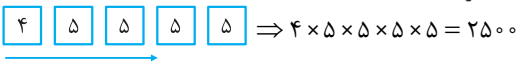
تعداد اعداد مطلوب: $2 \times 5 = 10$

۵۵ | خانه‌های اول و آخر هر کدام فقط به یک طریق پر می‌شوند (هر کدام یک حالت دارند) و می‌توان چنین نوشت:



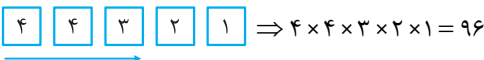
$30 = 1 \times 6 \times 5 \times 1 =$ تعداد کلمات مورد نظر

۵۶ | چون عدد مورد نظر پنج رقمی است، پس پنج خانه در نظر می‌گیریم. چون در این مسئله محدودیتی نداریم (شرطی مانند زوج بودن، فرد بودن و غیره در صورت مسئله ذکر نشده) پس پر کردن خانه‌ها را از خانه سمت چپ شروع می‌کنیم. می‌دانیم این خانه نمی‌تواند با صفر شروع شود (اعداد با صفر شروع نمیشوند) پس به ۴ طریق می‌تواند پر شود ولی خانه‌های بعدی، همگی می‌توانند به ۵ طریق پر شوند (پهن تکرار مجاز و از صفر در فونتهای دیگر می‌توانیم استفاده کنیم):



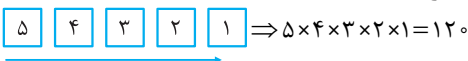
$2500 = 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ تعداد اعداد مطلوب

ب) پنج خانه را در نظر می‌گیریم. خانه سمت چپ همان‌طور که گفته شد می‌تواند به ۴ طریق پر شود و چون تکرار مجاز نیست خانه بعدی می‌تواند به ۴ طریق پر شود (عددی که با اون، فونته سمت چپ رو پر کردیم حذف میشه) به همین ترتیب در هر مرحله، یک عدد باید حذف شود:



$96 = 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$ تعداد اعداد مطلوب

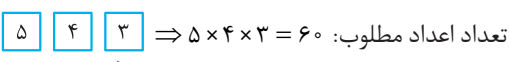
۵۷ | چون عدد مورد نظر پنج رقمی است، پنج خانه می‌کشیم که به صورت زیر پر می‌شوند. تعداد اعداد مورد نظر:



$120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$ تعداد اعداد مورد نظر

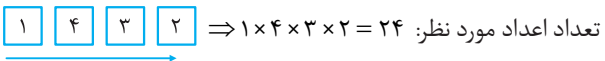
دقت کنید که در هر مرحله، از تعداد انتخاب‌ها یکی کم شده است (زیرا تکرار مجاز نیست).

۵۸ | برای عدد سه رقمی مطلوب، سه خانه در نظر می‌گیریم:



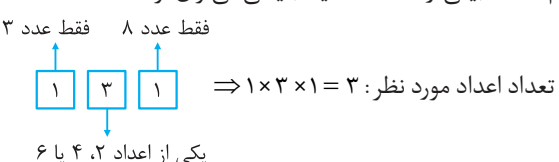
تعداد اعداد مطلوب: $5 \times 4 \times 3 = 60$

۵۹ | چون عدد چهار رقمی است پس چهار خانه می‌کشیم. خانه سمت چپ طبق صورت مسئله فقط به یک حالت پر می‌شود (عدد ۲) و بقیه خانه‌ها به صورت زیر پر می‌شوند:



تعداد اعداد مورد نظر: $24 = 1 \times 4 \times 3 \times 2 =$

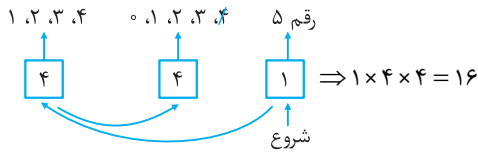
۶۰ | برای عدد سه رقمی مذکور، سه خانه می‌کشیم خانه سمت چپ فقط می‌تواند به یک حالت پر شود (عدد سه) خانه سمت راست (یکان) نیز فقط می‌تواند به یک حالت پر شود (عدد هشت) پس برای خانه وسط سه انتخاب خواهیم داشت (یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶) یعنی می‌توان نوشت:



تعداد اعداد مورد نظر: $3 = 1 \times 3 \times 1 =$

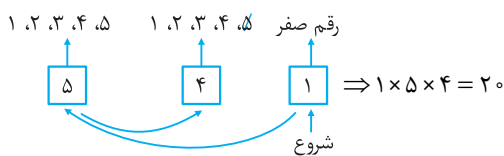
یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶

حالت دوم رقم یکان ۵ باشد: در این حالت خانه سمت راست فقط با عدد ۵ پرمی شود (۱ حالت) و چون تکرار غیرمجاز است خانه سمت چپ به ۴ حالت پرمی شود (پهن ۵ و صفر نمیتونن در این فئونه قرار بگیرن) و خانه وسط به ۴ طریق می‌تواند پرمی شود (چون از بین ۶ عدد داده شده دو عدد در خانه سمت چپ و راست قرار گرفته‌اند) پس داریم:

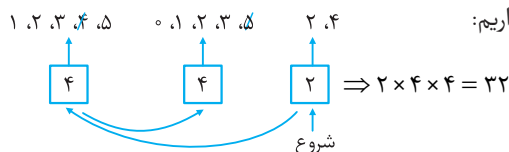


طبق اصل جمع، تعداد کل اعداد مورد نظر عبارت است از: $20 + 16 = 36$
ب می‌دانیم عددی زوج است که یکان آن زوج باشد (در این میان فقط میتونه ۰، ۲ یا ۴ رو اختیار کنه) و چون تکرار ارقام غیرمجاز است دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانه سمت راست فقط می‌تواند صفر باشد (۱ حالت داریم) و چون تکرار غیرمجاز است، خانه سمت چپ به ۵ طریق و خانه وسط به ۴ طریق پرمی شود؛ یعنی داریم:

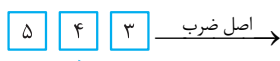


حالت دوم رقم یکان ۲ یا ۴ باشد: در این حالت خانه سمت راست فقط می‌تواند ۲ یا ۴ باشد (۲ حالت داریم) و چون تکرار غیرمجاز است، خانه سمت چپ به ۴ طریق پرمی شود (پهن از صفر و عدد قرار داده شده در فئونه سمت راست همیشه استفاده کرد) و خانه وسط به ۴ طریق پرمی شود (پهن از ۶ عدد داده شده، دو عدد در فئونه‌های سمت چپ و راست استفاده شدن)، پس داریم:



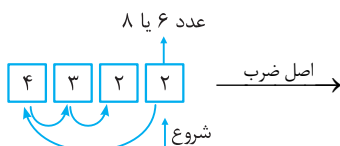
حال طبق اصل جمع، تعداد کل اعداد مورد نظر عبارت است از:

$$20 + 32 = 52$$



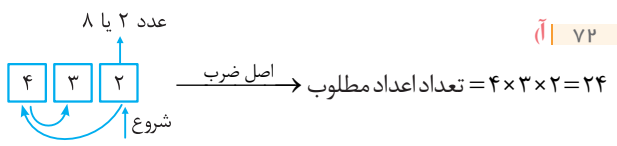
۷۰

$$\text{تعداد اعداد مورد نظر} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$



۷۱

$$\text{تعداد اعداد مطلوب} = 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$



۷۲

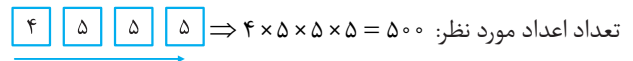
$$\text{تعداد اعداد مطلوب} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

۶۶ سه خانه در نظر می‌گیریم. چون عدد مورد نظر باید بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، در خانه سمت چپ (صدگان) می‌توانیم فقط از اعداد ۳، ۴ یا ۵ استفاده کنیم (۳ حالت) و چون تکرار غیرمجاز است، خانه‌های بعدی به پنج حالت و چهار حالت پرمی شوند.



$$\Rightarrow 3 \times 5 \times 4 = 60$$

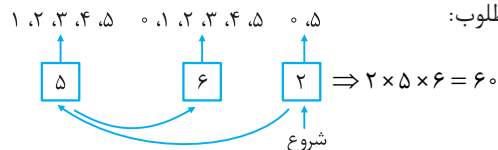
۶۷ دقت کنید که عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ رقم سمت چپ نمی‌تواند ۱ یا صفر باشد ولی می‌تواند ۲ یا بیشتر تر باشد (پهن در این حالت‌ها اعداد بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ ساخته میشن) ولی خانه‌های (۲)، (۳) و (۴) هیچ محدودیتی ندارند و هر کدام می‌توانند به ۵ طریق پرمی شوند (همه رقم‌ها میتونن استفاده بشن) لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:



$$\Rightarrow 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

۶۸ می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد.

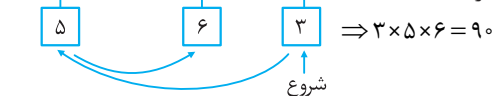
پس خانه سمت راست به دو طریق یعنی با ۰ یا ۵ پرمی شود و چون تکرار ارقام مجاز است خانه سمت چپ به ۵ طریق پرمی شود زیرا صفر نمی‌تواند در آن قرار گیرد (اعداد با صفر شروع نمی‌شوند) و در نهایت خانه وسط به ۶ حالت پرمی شود چون می‌توانیم از تمام ارقام برای پرمی‌اش استفاده کنیم: تعداد اعداد مطلوب:



$$\Rightarrow 2 \times 5 \times 6 = 60$$

ب عدد مورد نظر باید زوج باشد پس رقم یکان (سمت راست) می‌تواند با یکی از اعداد ۰، ۲ یا ۴ پرمی شود که سه حالت می‌باشد و چون تکرار مجاز است، خانه سمت چپ به ۵ حالت پرمی شود، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار گیرد. پس داریم:

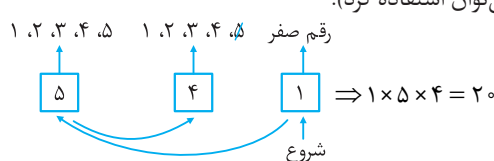
تعداد اعداد مطلوب:



$$\Rightarrow 3 \times 5 \times 6 = 90$$

۶۹ می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد و چون تکرار ارقام مجاز نیست باید هر یک از این حالت‌ها را جداگانه بررسی کنیم:

حالت اول رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانه سمت راست فقط عدد صفر می‌تواند باشد، پس به یک حالت پرمی شود و چون تکرار مجاز نیست، خانه سمت چپ به ۵ طریق و خانه وسط به ۴ طریق پرمی شود (از هر رقم فقط یک بار می‌توان استفاده کرد).



$$\Rightarrow 1 \times 5 \times 4 = 20$$

۷۶ | از اصل جمع استفاده می‌کنیم. چون مدیرعامل می‌تواند فقط یک نفر را از گروه A یا B انتخاب کند: $12 + 8 = 20 =$ تعداد حالت‌ها
 ۷۷ | در این قسمت، مدیرعامل می‌تواند به ۱۲ طریق یک نفر را از گروه A و به ۸ طریق یک نفر را از گروه B انتخاب کند. پس با استفاده از اصل ضرب چنین می‌نویسیم: $12 \times 8 = 96 =$ تعداد حالت‌ها

۷۸ | نادرست است. زیرا:

$$\left\{ \begin{aligned} (3!)^2 &= (3 \times 2 \times 1)^2 = 6^2 = 36 \\ 9! &= 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \end{aligned} \right. \Rightarrow (3!)^2 \neq 9!$$

۷۹ | درست است. زیرا:

$$\left\{ \begin{aligned} 3! \times 4 &= (3 \times 2 \times 1) \times 4 = 24 \\ 4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \end{aligned} \right. \Rightarrow 3! \times 4 = 4!$$

۸۰ | نادرست است، زیرا:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{8!}{4!} &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 1680 \\ 2! &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{8!}{4!} \neq 2!$$

۸۱ | درست است. زیرا وقتی یک عدد طبیعی را که فاکتوریل دارد، باز می‌کنیم، هر جا متوقف می‌شویم باید علامت فاکتوریل را قرار دهیم.

۸۲ | فقط ۱, ۲, ۵, ۸
 فقط ۱, ۲, ۵, ۸
 ۱ ۴ ۳ \Rightarrow تعداد عددهای مطلوب = $1 \times 4 \times 3 = 12$

۸۳ | ارقام ۱, ۳, ۵, ۷, ۹
 ۶ ۶ ۶ \Rightarrow تعداد عددهای مطلوب = $6 \times 6 \times 6 = 216$

۸۴ | فقط ۲
 فقط ۲
 ۵ ۴ ۳ ۱ \Rightarrow تعداد عددهای مطلوب = $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$

۸۵ | ر، و، س، ت، ا
 ر، و، س، ت
 ۳ ۴ ۵ \Rightarrow تعداد کلمات مطلوب = $3 \times 4 \times 5 = 60$
 ر، و، س، ت، ا

۸۶ | این افراد به ۶! طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند. مقدار ۶! هم برابر با ۷۲۰ می‌باشد.

۸۷ | ۱، زیرا: $C(5, 5) = \frac{5!}{(5-5)! \times 5!} = \frac{1}{1} = 1$

۸۸ | ۶۰ چون پس از انتخاب کتاب‌ها می‌خواهیم آن‌ها را در قفسه کنار هم قرار دهیم، پس ترتیب انتخاب‌ها مهم است، لذا داریم:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

ب) فقط عدد ۷
 اصل ضرب \rightarrow
 شروع
 ۵ ۵ ۱ \Rightarrow تعداد اعداد مطلوب = $5 \times 5 \times 1 = 25$

۷۳ | چون عدد مطلوب سه رقمی است، سه خانه می‌کشیم. در این سؤال، ارقام مشخص به ما داده نشده‌اند پس ارقام را از ۰ تا ۹ در نظر می‌گیریم. طبق صورت مسئله دهگان (خانه وسط) باید عددی اول باشد پس این خانه به چهار طریق می‌تواند پر شود (اعداد ۲، ۳، ۵، و ۷) و چون تکرار غیرمجاز است و اعداد نمی‌توانند با صفر شروع شوند خانه سمت چپ به ۸ طریق پُر می‌شود اما صفر در خانه سمت راست (یکان) می‌تواند واقع شود پس خانه سمت راست نیز به ۸ طریق پُر می‌شود. زیرا از ۱۰ عددی که در اختیار داریم (۰ تا ۹) دو تایی آن‌ها را در خانه‌های وسط و چپ استفاده کرده‌ایم پس ۸ تا باقی می‌ماند.

۷۴ | به جای ستاره سمت چپ می‌توان هر یک از اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ را قرار داد (پنج حالت داریم) و به جای ستاره سمت راست می‌توان هر یک از اعداد ۲، ۴، ۶، و ۸ را قرار داد (چهار حالت داریم، زیرا صفر در شماره‌گذاری لحاظ نمی‌شود) و به جای بقیه ستاره‌ها ۹ عدد از ۱ تا ۹ را می‌توان قرار داد (پون تکرار ارقام می‌بازد) که در این صورت خواهیم داشت: تعداد اعداد زوج یک رقمی $4 \times 8 \times 8 = 256 =$ تعداد اعداد مطلوب \Rightarrow

۷۵ | چون رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد پس برای پر کردن آن ۹ انتخاب داریم (اعداد ۱ تا ۹). هم چنین برای پر کردن بقیه خانه‌های اعداد به ترتیب ۱۰ و ۱۰ انتخاب داریم (چون تکرار مجاز است). برای پر کردن اولین خانه حروف (سمت چپ) ۳۲ انتخاب داریم، زیرا حروف الفبای فارسی ۳۲ تا می‌باشد و برای پر کردن خانه حرف بعدی نیز ۳۲ انتخاب داریم (چون از حرف قبلی هم می‌توانیم استفاده کنیم). لذا داریم:

عدد	عدد	عدد	عدد	اصل ضرب \rightarrow
۹	۳۲	۳۲	۱۰	۱۰

تعداد کارت‌های پرسنلی = $9 \times 32 \times 32 \times 10 \times 10$

ب) چون تکرار حروف و ارقام مجاز نیست در هر مرحله، یکی از تعداد انتخاب‌ها را کم می‌کنیم:

عدد	عدد	عدد	عدد	اصل ضرب \rightarrow
۹	۳۲	۳۱	۹	۸

تعداد کارت‌های پرسنلی = $9 \times 32 \times 31 \times 9 \times 8$

برای پر کردن سه خانه اعداد به این مطلب توجه کنید که خانه اول (سمت چپ) به ۹ طریق پُر می‌شود (یعنی اعداد ۱ تا ۹). خانه بعدی اعداد هم به ۹ طریق پُر می‌شود (زیرا از ۱۰ عدد موهور یکی در فونته اول استفاده شده است) و خانه آخر نیز به ۸ طریق پُر می‌شود (پون از ۱۰ عدد موهور دو تاشون در فانه‌های قبلی استفاده شدن).