

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سؤالات
104 min	۱۰۴	۶ تا ۳۵
107 min	۱۱۷	۳۶ تا ۷۷
74 min	۱۳۵	۷۸ تا ۱۰۱

فصل اول: ماتریس و کاربردها

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل سوم: بردارها

امتحان نهایی



بارمبندی درس هندسه ۳		
شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۱۰	۴
دوم	۱۰	۳
	-	۵
سوم	-	۸
جمع	۲۰	۲۰

۱۴۴	آزمون ۱: شهریور ماه ۱۴۰۰
۱۴۵	آزمون ۲: دی ماه ۱۴۰۰
۱۴۶	آزمون ۳: خرداد ماه ۱۴۰۱
۱۴۸	آزمون ۴: شهریور ماه ۱۴۰۱
۱۴۹	آزمون ۵: دی ماه ۱۴۰۱
۱۵۰	آزمون ۶: خرداد ماه ۱۴۰۲
۱۵۱	آزمون ۷: شهریور ماه ۱۴۰۲
۱۵۳	پاسخنامه تشریحی آزمون ۱ تا ۷

1

بخش



درستنامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

ماتریس و کاربردها

فصل اول هندسه ۳، در امتحان نوبت اول ۱۰ نمره و در نوبت دوم ۴ نمره و در شهریور و دی ۶ نمره دارد.

بسته ۶



بسته‌های ۴ و ۵



بسته ۳



بسته‌های ۱ و ۲



**فیلم
شب
امتحان**

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

آشنایی با ماتریس

صفحه ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

بسته اول



آشنایی با ماتریس

ماتریس

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و... نامگذاری می‌کنند. به ماتریس A توجه کنید. این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

← سطر اول
← سطر دوم
← ستون اول
← ستون دوم
← ستون سوم

هواست باشه که سطرها رو از بالا به پایین و ستون‌ها رو از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم.

■ **مرتبه ماتریس:** اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m \times n}$ و به صورت A ماتریسی از مرتبه m در n (یا از مرتبه $m \times n$) است، می‌خوانیم. (یادت باشه که برای بیان مرتبه ماتریس، عدد سمت چپ به تعداد سطرهاست و عدد سمت راست به تعداد ستون‌ها). مثلاً در مثال بالا ماتریس A یک ماتریس از مرتبه ۲ در ۳ است. باورت میشه که از تعاریف هم سؤال میاد تو نهایی. تمرین پایینو نگاه کن.

دی ۱۴۰۰

سؤال جای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، نامیده می‌شود.

پاسخ ماتریس

■ **درایه ماتریس:** هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ به ۴ و ۳، ۲، ۱، ۳ و ۴ درایه‌های ماتریس A می‌گوییم. درایه‌های هر ماتریس را با حرف کوچک اسم ماتریس نشان می‌دهیم و به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ شماره سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند (انریس همون عدد های کولمبوی هستن که زیر هروف قرار می‌دیم). یعنی درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس A.

مثال $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

■ **تعداد درایه‌های ماتریس:** یک ماتریس از مرتبه m در n، دارای $m \times n$ درایه است. مثلاً یک ماتریس ۳ در ۴ دارای $3 \times 4 = 12$ درایه است.

ماتریس با درایهٔ عمومی

گاهی اوقات درایه‌های ماتریس A را می‌توان با ضابطه یا ضابطه‌هایی مشخص کرد که به آن درایهٔ عمومی ماتریس A می‌گویند. در این صورت ماتریس A را به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در ماتریس $A_{2 \times 3} = [a_{ij}]$ اگر $a_{ij} = i + j$ باشد، برای به دست آوردن درایه‌های آن کافی است به جای درایهٔ سطر i ام و ستون j ام مجموع شمارهٔ سطر و ستون آن درایه را قرار دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

توجه اگر تمام درایه‌های یک ماتریس از یک قانون تبعیت کنند می‌توان قانون درایه را در کروه نیز قرار داد مثلاً در مثال بالا می‌توانیم بنویسیم $A = [i+j]_{2 \times 3}$.

دی ۹۸

سؤال جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{2i}{j-1}$ باشد، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است.

پاسخ درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ماتریس A ، یعنی a_{32} ، پس باید در ضابطهٔ a_{ij} به جای i عدد ۳ و به جای j عدد ۲ را قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$a_{32} = \frac{2(3)}{2-1} = \frac{6}{1} = 6$$

توجه گاهی ضابطهٔ درایه‌ها با هم فرق می‌کنند. در این صورت باید حواسمان باشد که برای هر درایه، ضابطهٔ مربوط به آن را انتخاب کنیم.

سؤال در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & i > j \\ 2 & i = j \\ j - i & i < j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

پاسخ درایه‌های ستون دوم a_{12} ، a_{22} و a_{32} هستند. در a_{12} ، $i < j$ ، در a_{22} ، $i = j$ و در a_{32} ، $i > j$ است. پس:

$$A = \begin{bmatrix} \text{○} & a_{12} & \text{○} \\ \text{○} & a_{22} & \text{○} \\ \text{○} & a_{32} & \text{○} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i < j \Rightarrow a_{ij} = j - i \Rightarrow a_{12} = 2 - 1 = 1 \\ i = j \Rightarrow a_{ij} = 2 \Rightarrow a_{22} = 2 \\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 2i - j \Rightarrow a_{32} = 2(3) - 2 = 6 - 2 = 4 \end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم برابر $1 + 2 + 4 = 7$ است.

آشنایی با ماتریس

پرسش‌های تشریحی

بسته
۱

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

- هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را آن ماتریس می‌نامیم.
- ماتریس A که دارای ۵ سطر و ۳ ستون است دارای درایه است.
- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ که در آن $a_{ij} = i^2 j - 3$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون چهارم برابر است.
- در ماتریس $B = [\frac{i+j}{2}]_{3 \times 4}$ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم برابر است.

۵. در ماتریس $C = [c_{ij}]_{3 \times 4}$ که در آن $c_{ij} = \begin{cases} i + j & i \geq j \\ j - 1 & i < j \end{cases}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم برابر است.

● درستی یا نادرستی عبارات در سه سؤال زیر را مشخص کنید.

- ماتریسی که دارای سه سطر و پنج ستون باشد از مرتبهٔ 5×3 است.
- ماتریسی که ۱۲ درایه دارد می‌تواند ۵ سطر داشته باشد.
- در ماتریس $A = [i^2 + j^2]_{2 \times 2}$ مجموع درایه‌ها برابر ۲۰ است.

(دی خارج ۱۴۰۰)

۹. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i - 2j & i > j \\ i + j & i \leq j \end{cases}$ می‌باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به دست آورید.

۱۰. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $a_{ij} = \begin{cases} i - \frac{j}{2} & i < j \\ i^2 - j^2 & i \geq j \end{cases}$ می‌باشد. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به دست آورید.

۱۱. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ یک ماتریس 3×3 با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i < j \\ 2 & i = j \\ i+j & i > j \end{cases}$ باشد، درایه‌های a_{12} و a_{31} را به دست آورید. (دی ۹۹)

۱۲. ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} 2 & i > j \\ -3 & i = j \\ i & i < j \end{cases}$ می‌باشد، مفروض است. ماتریس A را با درایه‌های مشخص کنید.

۱۳. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i = j \\ j & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}$ باشد، ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۴. اگر ماتریس A به صورت $A = [3i - 2j]_{3 \times 3}$ باشد، ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

۱۵. اگر $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & i = j \\ j-2 & i < j \\ 1 & i > j \end{cases}$ باشد، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (دی ۱۴۰۱)

معرفی چند ماتریس خاص **بسته دوم**

الف معرفی چند ماتریس خاص

در این قسمت به معرفی چند ماتریس خاص و پرکاربرد می‌پردازیم:

۱ **ماتریس مربعی:** اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی $n \times n$ می‌نامیم. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند زیرا تعداد سطرها و ستون‌های آن‌ها برابر است.

$$A = [\Delta]_{1 \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

توجه در مورد ماتریس مربعی به موارد زیر توجه کنید:

۱ به ماتریس مربعی $n \times n$ ، به طور خلاصه ماتریس مرتبه n نیز می‌گویند. مثلاً وقتی در سؤالی می‌گویند ماتریس A از مرتبه ۴ است یعنی A یک ماتریس مربعی است که دارای ۴ سطر و ۴ ستون می‌باشد.

۲ ماتریس مربعی مرتبه ۱ یعنی $[k]_{1 \times 1}$ را مساوی عدد حقیقی k نیز تعریف می‌کنند. یعنی به جای این‌که بنویسند $A = [\Delta]$ ، آن را به صورت $A = 5$ هم نمایش می‌دهند.

۳ **قطرهای اصلی و فرعی ماتریس مربعی:** در ماتریس مربعی A قطر اصلی و قطر فرعی را ببینید. درایه‌های روی قطر اصلی دارای شماره سطر و ستون برابر

هستند اما اگر a_{ij} درایه روی قطر فرعی باشد، $i + j = n + 1$ می‌باشد. (مواست باشد n همون مرتبه ماتریسه)

توجه در ماتریس‌های مربعی در درایه‌های بالای قطر اصلی $i < j$ و در درایه‌های پایین قطر اصلی $i > j$ می‌باشد. (در درایه‌های روی قطر اصلی هم که $i = j$ بود.)

سؤال در ماتریس $A = [2i - j]_{3 \times 3}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی را به دست آورید.

پاسخ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مربعی A ، درایه‌های a_{11} ، a_{22} و a_{33} هستند پس:

$$\begin{cases} a_{11} = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \\ a_{22} = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + 3 = 6 \\ a_{33} = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3 \end{cases}$$

۲ **ماتریس سطری:** اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. مرتبه ماتریس‌های سطری به صورت $1 \times n$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند.

$$A = [1 \ 2 \ 5]_{1 \times 3} \quad B = [2 \ 3]_{1 \times 2} \quad C = [\Delta]_{1 \times 1} = 5$$

مواست باشد در ماتریس سطری مهم اینه که فقط یک سطر داشته باشیم و تکرار ستون‌ها مهم نیست، حتی می‌تونه یک ستون هم داشته باشه!

سؤال ماتریس سطری $A = [a_{ij}]$ دارای ۵ درایه است. اگر $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ ماتریس سطری دارای یک سطر است. چون ماتریس A دارای ۵ درایه است پس مرتبه آن 1×5 می‌باشد. حال داریم:

$$A = [1+1 \quad 1+2 \quad 1+3 \quad 1+4 \quad 1+5] \Rightarrow A = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

۳ ماتریس ستونی: اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را یک ماتریس ستونی می‌نامیم. مرتبه ماتریس‌های ستونی $m \times 1$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ \pi \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad C = [12]_{1 \times 1} = 12$$

ماتریس ستونی هم مثل ماتریس سطریه، فقط باید یک ستون داشته باشد. تکرار سطرها هم معوم نیست.

۴ ماتریس قطری: ماتریسی مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. دقت کنید درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی قطری اند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سؤال جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

شهریور ۱۴۰۰

۱ ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس گویند.

شهریور ۹۹

۲ در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ ، مقدار m برابر است.

پاسخ ۱ قطری

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

۲ در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

سؤال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ n+2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. مقدار $m + n$ را به دست آورید.

پاسخ چون A یک ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن باید صفر باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \\ n + 2 = 0 \Rightarrow n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = 3 + (-2) = 1$$

۵ ماتریس اسکالر: اگر در یک ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = [2]$$

دی ۹۸

سؤال درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

«هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.»

پاسخ درست

۶ ماتریس واحد یا همانی: اگر در ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های روی قطر اصلی ۱ باشد، ماتریس را ماتریس واحد یا همانی می‌نامیم. ماتریس همانی از مرتبه n را با I_n نمایش می‌دهیم.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نوجه ماتریس اسکالر را با KI_n نشان می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix}_{n \times n}$$

۷ ماتریس صفر: ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با $\bar{0}$ نشان می‌دهیم. (ماتریس صفر تماماً مربعی نیست و می‌تونه از هر مرتبه‌ای باشه).

$$\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هنگامی مساوی اند که اولاً هم مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها مساوی باشند. (درایه‌های نظیر به نظیر، درایه‌هایی هستند که شماره سطر و ستون آن‌ها در دو ماتریس برابر باشد).

شهریور ۹۹

سؤال اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ را بیابید.

پاسخ باید درایه‌های نظیر به نظیر ماتریس‌های A و B برابر باشند:

$$\begin{cases} y+1 = x-1 \xrightarrow{x=1} y+1 = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x-2 = 8 \Rightarrow x = 10 \\ 3 = 3 \\ 4 = z+1 \Rightarrow z = 3 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = 10 + (-1) + 3 = 12$$

ب اعمال روی ماتریس‌ها

جمع و تفریق ماتریس‌ها

دو ماتریس هم مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم مرتبه A و B ، کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم. حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی مانند C است که از همان مرتبه A و B می‌باشد.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

شهریور ۱۴۰۰

سؤال دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟

پاسخ خیر، چون دو ماتریس A و B هم مرتبه نیستند. ماتریس A از مرتبه 3×2 و ماتریس B از مرتبه 2×3 است.

سؤال دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ n+2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 3 & -1 & n-1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A+B$ را محاسبه کنید.

پاسخ چون A ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی آن همگی صفرند:

$$\begin{cases} m-3 = 0 \\ n+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3, n = -2$$

بنابراین ماتریس‌های A و B به صورت زیر هستند و حاصل $A+B$ برابر است با:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 0+(-1) & 0+1 \\ 0+3 & 1+0 & 0+2 \\ 0+3 & 0+(-1) & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. به بیان دیگر اگر A یک ماتریس $m \times n$ و r یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $2A - 3B$ را به دست آورید.

پاسخ $2A - 3B = 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 3 \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - (-3) & 2 - 0 \\ 6 - 6 & 8 - (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$

قرینه یک ماتریس: قرینه ماتریس A را با $-A$ نمایش داده و از ضرب (-1) در ماتریس A به دست می‌آید. واضح است که مجموع هر ماتریس با قرینه‌اش برابر ماتریس صفر است.

$$A + (-A) = \bar{O}$$

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، ماتریس B را به گونه‌ای معلوم کنید که $A + B = \bar{O}$ باشد.

پاسخ چون $A + B = \bar{O}$ است، پس B قرینه ماتریس A می‌باشد. بنابراین داریم:

$$B = -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس: اگر A ، B ، C سه ماتریس هم‌رتبه باشند، داریم:

$$A + B = B + A$$

۱ جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

۲ جمع ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

$$A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$$

۳ ماتریس صفر، عضو خنثی عمل جمع است.

$$r(A \pm B) = rA \pm rB, (r \pm s)A = rA \pm sA$$

۴ اگر r و s اعداد حقیقی باشند، داریم:

$$A = B \Rightarrow rA = rB$$

۵ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد دلخواه ضرب کرد.

$$rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A = B$$

۶ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه مخالف صفر تقسیم کرد:

خرداد ۱۴۰۰

سؤال درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

«اگر A و B دو ماتریس هم‌رتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA = rB$ آن‌گاه داریم $A = B$ »

پاسخ با توجه به ویژگی‌های گفته شده عبارت فوق درست است.

تمامی خواص بالا را می‌توان با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس اثبات کرد. (اثبات یکی از اینارو تو سؤال زیر ببین).

سؤال اگر A و B ماتریس‌های هم‌رتبه و r یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید $r(A \pm B) = rA \pm rB$.

پاسخ با توجه به تعریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس داریم:

$$r(A \pm B) = r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r[a_{ij} \pm b_{ij}] = [r(a_{ij} \pm b_{ij})]$$

از آن جایی که ضرب نسبت به جمع در مجموعه اعداد حقیقی توزیع‌پذیر است داریم:

$$[r(a_{ij} \pm b_{ij})] = [ra_{ij} \pm rb_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] = r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] = rA \pm rB$$

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و هم چنین $r = 3$ و $s = 2$ باشند، درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

۱ $(A+C)+B = A+(C+B)$ ۲ $(r+s)A = rA+sA$

پاسخ ۱ یک بار $(A+C)+B$ و بار دیگر $A+(C+B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(A+C)+B = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+C)+B = A+(C+B)$$

$$A+(C+B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

۲ یک بار $(r+s)A$ و بار دیگر $rA+sA$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(r+s)A = (3+2)A = 5A = 5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (r+s)A = rA+sA$$

$$rA+sA = 3A+2A = 3 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

معرفی چند ماتریس خاص

پرسش‌های تشریحی

بسته
۲

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱۶. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر است.

۱۷. اگر ماتریسی دارای یک سطر باشد، به آن ماتریس می‌گوییم.

(دی خارج ۱۴۰۱)

۱۸. اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس می‌نامیم.

(دی ۹۷)

۱۹. در ماتریس اسکالر درایه‌های واقع بر قطر اصلی هستند.

۲۰. ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس می‌نامیم.

(شهریور ۱۴۰۰)

۲۱. اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه مقدار x برابر با است.

۲۲. دو ماتریس را می‌توان با هم جمع کرد.

۲۳. جمع دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی

۲۴. در ماتریس اسکالر $A = \begin{bmatrix} n+2 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار $m+n$ برابر است.

۲۵. در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی هستند.

۲۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های $A+2B$ برابر است.

● درستی یا نادرستی عبارات سوالات ۲۷ تا ۳۶ را مشخص کنید.

۲۷. ماتریس صفریک ماتریس مربعی است.

۲۸. در ماتریس مربعی A درایه‌های واقع بر قطر فرعی دارای شماره سطر و ستون برابر هستند.

۲۹. درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس قطری، غیرصفر هستند.

۳۰. هر ماتریس اسکالر مربعی است.

۳۱. هر ماتریس قطری اسکالر است.

۳۲. جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

۳۳. جمع ماتریس‌های هم‌رتبه خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

(دی خارج ۱۴۰۰)

۳۴. طرفین یک تساوی ماتریسی را می توان بر یک عدد دلخواه تقسیم کرد.

۳۵. ماتریس اسکالر عضو خنثی عمل جمع است.

۳۶. عمل جمع ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

۳۷. ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]$ دارای n درایه است. اگر $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i=j \\ 2i+j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ باشد، ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.

۳۸. در ماتریس $A = [i^2 - mj]_{3 \times 3}$ مجموع درایه های قطری اصلی برابر ۸ است. مقدار m را به دست آورید.

۳۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & m-4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & n-3 & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری و $B = \begin{bmatrix} m-k & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $m+n+k$ را به دست آورید.

(دی ۱۴۰۱)

۴۰. اگر $A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد مقادیر m و n را بیابید.

۴۱. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3a & c-1 \\ a+b & -6 \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار $a(b+c)$ را به دست آورید.

۴۲. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-2 & c-b \\ d+a & b+2 \end{bmatrix}$ ماتریس واحد باشد، مقدار $a+b+c+d$ را به دست آورید.

۴۳. اگر ماتریس $\begin{bmatrix} x+1 & x^2-x-2 \\ x^2+x & 2x+1 \end{bmatrix}$ قطری باشد، مجموع درایه های ماتریس A را به دست آورید.

(دی ۱۴۰۰ - شهریور ۹۸)

۴۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت $x+2y+3z$ را به دست آورید.

(دی خارج ۱۴۰۱)

۴۵. اگر $A = \begin{bmatrix} x^2-y^2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، در این صورت حاصل x^2+y^2 را بیابید.

۴۶. اگر ماتریس های $A = [3i - j^2]$ و $B = \begin{bmatrix} b-2 & a+1 \\ c+1 & 2 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ را به دست آورید.

۴۷. ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A+B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ باشد. آن گاه مقادیر x و y را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

(دی ۹۷)

۴۸. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} ij & i>j \\ i^2 & i=j \\ 2i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $3A - 2I$ را به دست آورید.

(دی خارج ۱۴۰۱)

۴۹. اگر A یک ماتریس مربعی، $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$ و $A^2 = 6A - 11I$ باشد، ماتریس A را به دست آورید.

۵۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A+I$ را بیابید (I ماتریس هانی مرتبه دو است). (شهریور ۱۴۰۰)

۵۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $2A - 3B$ را با درایه هایش مشخص کنید.

۵۲. ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر $A+C = \bar{O}$ باشد، ماتریس $2B+3C$ را به دست آورید.

۵۳. اگر $A = [a_{ij}]$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2-j & i \geq j \\ 2i-j & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $2A - 3B + 2I$ را به دست آورید.

۵۴. اگر A یک ماتریس و r و s اعداد حقیقی باشند ثابت کنید $(r \pm s)A = rA \pm sA$.



ضرب ماتریس‌ها

شرط انجام‌پذیری ضرب دو ماتریس

هر دو ماتریس دلخواهی را نمی‌توان در هم ضرب کرد. برای آن‌که $A \times B$ انجام‌پذیر باشد باید تعداد ستون‌های ماتریس سمت چپ یعنی A با تعداد سطرهای ماتریس سمت راست یعنی B برابر باشد.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

برای مرتبه $A \times B$

مثلاً اگر $A_{2 \times 5}$ و $B_{5 \times 3}$ باشد $A \times B$ انجام‌پذیر است و مرتبه آن 2×3 می‌باشد. اما $B \times A$ تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های B برابر ۳ و تعداد سطرهای A برابر ۲ است و $3 \neq 2$ می‌باشد.

کلاً برای این‌که بشه دو تا ماتریس رو در هم ضرب کرد باید وقتی اونارو کنار هم می‌نویسی دو تا عدد نزدیکاً برابر باشن تا بشه در هم ضربشون کرد. مرتبه ماتریس حاصل ضرب، همون دو تا عدد دور هاست.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

نزدیکاً برابر دورها

سؤال اگر A ماتریسی 3×5 باشد، در هر حالت مشخص کنید که $A \times B$ و $B \times A$ قابل تعریف است یا خیر. در صورت تعریف مرتبه ماتریس حاصل را بیابید.

۱ $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$

۲ $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$

۳ $B = [b_{ij}]_{5 \times 3}$

۴ $B = [b_{ij}]_{5 \times 4}$

۱ $A_{3 \times 5} \times B_{3 \times 2} \Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست.

انجام‌پذیر نیست. $B_{3 \times 2} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$

۲ $A_{3 \times 5} \times B_{3 \times 5} \Rightarrow$ انجام‌پذیر نیست.

انجام‌پذیر نیست. $B_{3 \times 5} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$

۳ $A_{3 \times 5} \times B_{5 \times 3} = (AB)_{3 \times 3}$

$B_{5 \times 3} \times A_{3 \times 5} = (BA)_{5 \times 5}$

۴ $A_{3 \times 5} \times B_{5 \times 4} = (AB)_{3 \times 4}$

انجام‌پذیر نیست. $B_{5 \times 4} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$

به دست آوردن درایه‌های حاصل ضرب دو ماتریس

اگر $A \times B$ انجام‌پذیر باشد، (دو تا نزدیکاً برابر باشن) برای به دست آوردن درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس $C = A \times B$ یعنی c_{ij} ، سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B ضرب می‌کنیم. (یعنی سطر رو از ماتریس سمت چپ و ستون رو از ماتریس سمت راست انتخاب می‌کنیم.)

$$c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{in} \times b_{nj}$$

اگر این کار را برای تک‌تک درایه‌ها انجام دهیم، ماتریس حاصل ضرب AB به دست می‌آید.

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس AB را به دست آورید.

پاسخ چون $A_{1 \times 5}$ و $B_{5 \times 1}$ است، پس ماتریس AB از مرتبه 1×1 می باشد و داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = [(-1) \times (-2) + 2 \times 3 + 0 \times 7 + 3 \times (-1) + (-5) \times (-2)]$$

$$= [2 + 6 + 0 + (-3) + 10] = [15] = 15$$

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ باشند.

1) ماتریس $A \times B$ را محاسبه کنید. 2) آیا ضرب $B \times A$ امکان پذیر است؟ چرا؟

پاسخ 1) اگر فرض کنیم $A \times B = C$ است، از آن جایی که $A_{3 \times 3} \times B_{3 \times 2}$ ، پس ماتریس C از مرتبه 3×2 بوده و داریم:

کم کم باید ذهنی مساب کنید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-4 & 3+4-5 \\ 6-2+4 & 9+4+5 \\ -2+2+16 & -3-4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 18 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

2) خیر زیرا تعداد ستون های ماتریس B برابر 2 و تعداد سطرهای ماتریس A برابر 3 است و چون برابر نیستند $B \times A$ امکان پذیر نیست.

انجام پذیر نیست. $B_{3 \times 2} \times A_{3 \times 3} \Rightarrow$

برابر نیست

دی 99

سؤال مقادیر x و y را از معادله زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$$

پاسخ ابتدا حاصل $\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ را به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس $\begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}$ باید با ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$ برابر باشد پس:

$$\begin{cases} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 4x - 2 = y - 2 \xrightarrow{x=2} 6 = y - 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

تماً ماتریس های فاص رو یادت هست. بین قطری از اونا تو سوالا استفاده می کنن. سوال بعی رو ببین.

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

دی 99 - شهریور 1400

پاسخ ابتدا ماتریس $A \times B$ را به دست می آوریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

برای آن که $A \times B$ یک ماتریس قطری باشد باید درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، پس

$$\begin{cases} -8+2a = 0 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \\ b-3 = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

شهریور ۹۸

سؤال اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ماتریس $A \times B$ را به دست آورید.

پاسخ ابتدا ماتریس A را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

حال $A \times B$ را به دست می آوریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1+4 & 0+3+0 & 0+2+10 \\ 2-3+2 & 1+9+0 & 0+6+5 \\ 4-1+16 & 2+3+0 & 0+2+40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 1 & 10 & 11 \\ 19 & 5 & 42 \end{bmatrix}$$

قرارمون این بود که ذهنی حساب کنیم.

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد.

۱) ماتریس $A \times B$ را به دست آورید.

۲) قسمت (۱) را با این حکم در اعداد حقیقی که «اگر $a \times b = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$ » مقایسه کنید.

پاسخ ۱) چون $A_{2 \times 2}$ و $B_{3 \times 3}$ است پس $(AB)_{2 \times 3}$ می باشد و داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1+0 & 2-2+0 & -2+2+0 \\ -2+1+1 & 4-2-2 & -4+2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲) در ماتریس ها اگر $A \times B = \bar{O}$ باشد، نمی توان نتیجه گرفت که $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$.

به دست آوردن سطری یا ستون خاص در ضرب ماتریس ها

۱) برای پیدا کردن درایه های سطر i ام ماتریس $C = A \times B$ ، کافی است سطر i ام ماتریس A را در ماتریس B ضرب کنیم.

$$C \times B = [\text{سطر } i \text{ ام ماتریس } A] \times B$$

۲) برای پیدا کردن ستون j ام ماتریس $C = A \times B$ ، کافی است ماتریس A را در ستون j ام B ضرب کنیم.

$$C \times B = A \times \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ j \text{ ام} \\ B \end{bmatrix}$$

سؤال اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های سطر سوم A^3 را به دست آورید.

پاسخ ابتدا سطر سوم ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

حال سطر سوم ماتریس A^3 برابر است با:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & -2 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

سؤال فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های سطر دوم ماتریس A را به دست آورید.

پاسخ ابتدا سطر دوم حاصل ضرب دو ماتریس سمت چپ را محاسبه می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

حال سطر دوم ماتریس A را به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 13 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 22 & 18 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های سطر دوم ماتریس A برابر $-13 + 22 + 18 = 27$ است.

$A \times B \neq B \times A$

خواص ضرب ماتریس ها: 1 در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ندارد.

سؤال جای خالی را با کلمه مناسب پر کنید.

دی ۹۷ - دی ۹۹

حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی

پاسخ ندارد

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، نشان دهید $A \times B$ و $B \times A$ برابر نیستند.

$$\begin{cases} A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -1+2 \\ 6+3 & -3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \\ B \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 4-1 \\ 3+3 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

پاسخ ماتریس های $A \times B$ و $B \times A$ را به دست می آوریم:

$A \times I = I \times A = A$

2 ماتریس واحد یا همانی عضو خنثی عمل ضرب است.

سؤال ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. ماتریس $B \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) A$ را با درایه هایش مشخص کنید.

پاسخ ابتدا ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ را به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

چون ماتریس I عضو خنثی عمل ضرب است پس ماتریس $B \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) A$ با ماتریس AB برابر است. بنابراین داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس ها در حالت کلی خاصیت جابه جایی ندارد. اما در خاصیت ۲ دیدیم که $A \times I$ یا $I \times A$ برابر A است. به این ماتریس ها ماتریس های تعویض پذیر می گن.

ماتریس های تعویض پذیر

اگر A و B دو ماتریس باشند به طوری که $A \times B = B \times A$ باشد آن گاه به ماتریس های A و B تعویض پذیر می گویند.

سؤال نشان دهید ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ تعویض پذیرند.

پاسخ برای آن که نشان دهیم A و B تعویض پذیرند، باید نشان دهیم $A \times B = B \times A$ است.

$$\begin{cases} A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+30 & 30+10 \\ 18+6 & 30+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 40 \\ 24 & 32 \end{bmatrix} \\ B \times A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+30 & 30+10 \\ 18+6 & 30+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 40 \\ 24 & 32 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A \times B = B \times A \Rightarrow A \text{ و } B \text{ تعویض پذیرند.}$$

نکته ضرب ماتریس های همانی و اسکالر در هر ماتریس هم مرتبه با خودشان تعویض پذیر است.

$A \times I = I \times A = A$

$kI \times A = A \times kI = kA$

ماتریس اسکالر (که ماتریس همانی هم به پورایی اسکالر) وقتی در ماتریس A ضرب میشه مانند عدد رفتار می کنه.

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس BA را به دست آورید.

پاسخ چون ماتریس B اسکالر است وقتی در ماتریس A ضرب می شود مانند این است که عدد ۳ را در ماتریس A ضرب کنیم. پس:

$$BA = 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

نکته! ضرب ماتریس قطری در هر ماتریس هم مرتبه با خودش به صورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b & r_1 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \\ r_3 g & r_3 h & r_3 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b & r_1 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \\ r_3 g & r_3 h & r_3 i \end{bmatrix}$$

سؤال اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i > j \\ 2i + j & i \leq j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس AB را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش معلوم می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

حال چون ماتریس B قطری است، کافی است سطر اول A را دو برابر، سطر دوم آن را (-1) برابر و سطر سوم آن را ۳ برابر کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 15 \\ 6 & -6 & 21 \\ 16 & -7 & 27 \end{bmatrix}$$

۳ ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع و تفریق ماتریس‌ها توزیع پذیر است.

$$A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$$

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B + C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A \times B + A \times C$ را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم $A \times B + A \times C$ برابر $A \times (B + C)$ است پس:

ذهنی انجام داری ریگه؟

$$A \times B + A \times C = A \times (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0-1 & 1+2+1 & -1+4-3 \\ 6+0+2 & 3+0-2 & -3+0+6 \\ 2+0+4 & 1-1-4 & -1-2+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

۴ ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت پذیری است یعنی جای پرانتزها در ضرب اهمیتی ندارد.

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

خرداد ۹۸

سؤال در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید.

پاسخ ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس سمت چپ را به دست آورده، سپس حاصل را در ماتریس $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3x - 6 & -6x + 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 6 & -6x + 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x + 6 - 6x + 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9x + 18 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 6 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -9x + 18 = 0 \Rightarrow 9x = 18 \Rightarrow x = 2$$

۵ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد. فقط سمت ضرب کردن در طرفین تساوی باید یکسان باشد یا از چپ

زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارند.

$$B = C \Rightarrow A \times B = A \times C \text{ یا } B \times A = C \times A$$

۶ قانون حذف در حالت کلی در تساوی‌های ماتریسی برقرار نیست.

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه کردید $AB = AC$ است در حالی که $B \neq C$ می‌باشد.

دی ۹۹

سؤال درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس‌های متمایز A ، B و C داشته باشیم $AB = AC$ ، آن‌گاه لزوماً $B = C$ است.

پاسخ نادرست؛ قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست.

به توان رساندن ماتریس‌ها

اگر A ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه توان‌های صحیح و نامنفی A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = A \times A, A^3 = A^2 \times A = A \times A^2, \dots, A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A = A^2 \times A^{n-2} = \dots$$

ویژگی‌ها

۱ ضرب توان‌های مختلف یک ماتریس دارای خاصیت جابه‌جایی است.

$$A^n \times A^m = A^m \times A^n = A^{m+n}$$

مثلاً $A^5 \times A^2$ با $A^5 \times A^2$ برابر است و مساوی $A^{5+2} = A^7$ می‌باشد.

۲ اگر k یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$(kA)^n = k^n A^n$$

مثلاً $(2A)^3$ برابر $8A^3$ است.

۳ اگر یک ماتریس توان‌دار را دوباره به توان برسانیم، کافی است توان‌های جدید و قدیم را در هم ضرب کنیم.

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

مثلاً ماتریس $(A^2)^3$ با ماتریس A^6 برابر است.

۴ توان روی ماتریس همانی بی‌تأثیر است.

$$I^n = I$$

مثلاً I^{52} برابر I است.

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل A^2 ، A^3 و A^4 را به دست آورید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \times A = I \times A = A$$

$$A^4 = A^3 \times A = A \times A = (A^2)^2 \times A = I^2 \times A = I \times A = A$$

دی ۹۸

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^4 را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I$$

پاسخ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

حال با توجه به ویژگی‌های توان داریم:

$$A^4 = (A^2)^2 \times A = (-2I)^2 \times A = 4I^2 \times A = 4I \times A = 4A = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & m+7 \\ n-3 & 27 \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر m و n را چنان بیابید که $A^3 - B = \bar{0}$ باشد.

پاسخ وقتی $A^3 - B = \bar{0}$ است یعنی $A^3 = B$ می‌باشد. پس باید ماتریس A^3 را به دست آوریم، برای این منظور ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & m+7 \\ n-3 & 27 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m+7 = 14 \Rightarrow m = 7 \\ n-3 = 0 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

سؤال اگر A و B ماتریس های 3×3 و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید:

۱ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

۲ $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

پاسخ ۱ می دانیم $(A+B)^2$ برابر $(A+B) \times (A+B)$ است، پس:

$$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = (A+B) \times A + (A+B) \times B$$

A و B تعویض پذیرند.

$$A \times A + \underbrace{B \times A}_{A \times B} + A \times B + B \times B = A^2 + 2A \times B + B^2$$

۲ با توجه به ویژگی های ضرب ماتریس ها داریم:

$$(A-B) \times (A+B) = (A-B) \times A + (A-B) \times B$$

A و B تعویض پذیرند.

$$A \times A - \underbrace{B \times A}_{A \times B} + A \times B - B \times B = A^2 - B^2$$

نکته چون ضرب ماتریس همانی و اسکالر با هر ماتریس هم مرتبه با خودش تعویض پذیر هستند، پس می توان اتحادهای جبری توان ۲ را در مورد آن ها به کار برد.

سؤال اگر $A^2 = A$ و $(A+2I)^2 = mA + nI$ باشند، مقادیر m و n را به دست آورید.

پاسخ چون ضرب A و $2I$ تعویض پذیر هستند، پس داریم:

$$(A+2I)^2 = A^2 + 2A(2I) + (2I)^2 = A^2 + 4A + 4I$$

$$A^2 = A \Rightarrow A^2 + 4A + 4I = A + 4A + 4I = 5A + 4I$$

از مقایسه $5A + 4I$ با $mA + nI$ ، $m = 5$ و $n = 4$ است.

ضرب ماتریس ها

پریش های تشریحی

بسته
۳

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

- ۵۵. اگر $A_{2 \times 3}$ و $B_{5 \times 2}$ باشند، آن گاه $A \times B$ انجام پذیر.....
- ۵۶. اگر $A_{3 \times 4}$ ، $B_{5 \times n}$ و $A \times B$ انجام پذیر باشد، مقدار n برابر..... است.
- ۵۷. اگر $A_{2 \times 5}$ و $B_{5 \times 3}$ باشند، ماتریس $A \times B$ از مرتبه..... است.
- ۵۸. اگر $A_{3 \times 4}$ و $B_{4 \times 3}$ باشند، ماتریس $B \times A$ دارای..... درایه است.
- ۵۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، بزرگ ترین درایه ماتریس $A \times B$ برابر..... است.
- ۶۰. ماتریس..... عضو خنثی عمل ضرب است.
- ۶۱. ضرب ماتریس اسکالر با ماتریس هم مرتبه با خودش خاصیت جابه جایی.....
- ۶۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ ترین درایه ماتریس A^2 برابر..... است.

درستی یا نادرستی عبارات زیر را در سؤالات ۶۳ تا ۷۷ مشخص کنید.

- ۶۳. اگر $A_{3 \times 6}$ و $B_{6 \times 2}$ باشند، ماتریس AB دارای ۳۶ درایه است.
- ۶۴. اگر $A \times B$ انجام پذیر باشد، حتماً $B \times A$ نیز انجام پذیر است.
- ۶۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A \times B$ یک ماتریس قطری است.
- ۶۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $B \times A$ یک ماتریس اسکالر است.

۲
بخش



پاسخنامه

فصل ۱
ماتریس و کاربردها

۱ | درایه

۲ | $5 \times 3 = 15$

۳ | در درایه سطر دوم و ستون چهارم $i = 2$ و $j = 4$ است پس:

$$a_{ij} = i^2 j - 3 \Rightarrow a_{24} = 2^2 \times 4 - 3 = 13$$

۴ | در درایه سطر دوم و ستون سوم $i = 2$ و $j = 3$ است پس:

$$a_{ij} = \frac{i+j}{2j} \Rightarrow a_{23} = \frac{2+3}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

۵ | در درایه سطر اول و ستون دوم، $i = 1$ و $j = 2$ است. چون $i < j$ می باشد، از قانون -1 استفاده می کنیم:

$$a_{12} = 2^2 - 1 = 3$$

۶ | نادرست.

در معرفی مرتبه ماتریس در سمت چپ تعداد سطرها و در سمت راست تعداد ستون ها را اعلام می کنیم، بنابراین مرتبه ماتریس 3×5 است.

۷ | نادرست.

اگر تعداد ستون ها را m فرض کنیم، باید $5 \times m$ برابر ۱۲ شود. در این صورت مقدار طبیعی برای m به دست نمی آید. (مواست هست که تعداد ستون ها باید به عدد طبیعی باشد.)

۸ | درست

ماتریس A را با درایه هایش مشخص می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 + 1^2 & 1^2 + 2^2 \\ 2^2 + 1^2 & 2^2 + 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه ها برابر $2 + 5 + 5 + 8 = 20$ است.

۹ | مجموع درایه های a_{12} ، a_{22} و a_{32} را می خواهیم:

$$\begin{cases} a_{12} = 1 + 2 = 3 \\ a_{22} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_{12} + a_{22} + a_{32} = 3 + 4 + (-1) = 6 \\ a_{32} = 3 - 4 = -1 \end{cases}$$

۱۰ | درایه های ستون دوم A همان a_{12} ، a_{22} و a_{32} هستند، پس:

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = i - \frac{j}{i} \Rightarrow a_{12} = 1 - \frac{2}{1} = 1 - 2 = -1$$

$$i = j \Rightarrow a_{ij} = i^2 - j^i \Rightarrow a_{22} = 2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$$

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = i^2 - j^i \Rightarrow a_{32} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$$

بنابراین مجموع درایه های ستون دوم برابر $1 + 0 + 1 = 2$ است.

۱۱ | با توجه به ضابطه a_{ij} داریم:

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = i + j \Rightarrow a_{31} = 3 + 1 = 4$$

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = i - j \Rightarrow a_{12} = 1 - 2 = -1$$

۱۲ | با توجه به ضابطه a_{ij} داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 2 & -3 & 2^3 & 2^4 \\ 2 & 2 & -3 & 2^4 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 16 \\ 2 & 2 & -3 & 16 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 0 & 0 \\ 1 & 2+2 & 0 \\ 1 & 2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3-2 & 3-4 & 3-6 \\ 6-2 & 6-4 & 6-6 \\ 9-2 & 9-4 & 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2-2 & 3-2 \\ 1 & 2+1 & 3-2 \\ 1 & 1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۳ |

درایه های قطر اصلی ۱ و ۸ هستند پس $1 + 8 = 9$ می باشد.

۱۴ | سطری

۱۵ | ستونی

۱۶ | برابر

۱۷ | اسکالر

۱۸ |

$$2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

۱۹ | هم مرتبه

۲۰ | دارد.

۲۱ |

در ماتریس اسکالر درایه های روی قطر اصلی برابر و درایه های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\begin{cases} n + 2 = 4 \Rightarrow n = 2 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases} \Rightarrow m + n = 1 + 2 = 3$$

۲۲ | صفر

۲۳ |

ماتریس $A + 2B$ را به دست می آوریم:

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = 5 + 4 + (-5) + 10 = 14$$

حال داریم:

$$1 - m + 4 - 2m + 9 - 3m = 8 \Rightarrow 14 - 6m = 8$$

$$\Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$$

۳۹ | چون A ماتریس قطری است پس درایه‌های غیروواقع بر قطر اصلی

آن صفر هستند. پس:

$$\begin{cases} m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \\ n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

حال چون ماتریس B اسکالر است پس:

$$\begin{cases} m - k = 3 \xrightarrow{m=4} 4 - k = 3 \Rightarrow k = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

بنابراین $m + n + k$ برابر $4 + 3 + 1 = 8$ است.

۴۰ | در ماتریس اسکالر درایه‌های غیروواقع بر قطر اصلی صفر هستند و

هم‌چنین درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند، پس:

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \\ m = n \xrightarrow{m=2} n = 2 \end{cases}$$

۴۱ | در ماتریس اسکالر درایه‌های غیروواقع بر قطر اصلی صفر و درایه‌های

روی قطر اصلی برابر هستند. پس

$$\begin{cases} 3a = -6 \Rightarrow a = -2 \\ c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \\ a + b = 0 \xrightarrow{a=-2} -2 + b = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

بنابراین $a(b+c)$ برابر $-2 \times (2+1) = -6$ است.

۴۲ | در ماتریس واحد یا همانی درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و

درایه‌های غیروواقع بر قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\begin{cases} a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ c - b = 0 \dots \xrightarrow{b=-1} c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1 \\ d + a = 0 \dots \xrightarrow{a=3} d + 3 = 0 \Rightarrow d = -3 \\ b + 2 = 1 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $a + b + c + d$ برابر $3 + (-1) + (-1) + (-3) = -2$ می‌باشد.

۴۳ | در ماتریس قطری درایه‌های غیروواقع بر قطر اصلی صفر است. پس:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2 \\ x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1 \end{cases}$$

واضح است که فقط $x = -1$ می‌تواند هم‌زمان هر دو درایه را صفر کند. پس

ماتریس A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = -1$$

۲۷ | نادرست

در ماتریس صفر تمام درایه‌ها صفر است اما مرتبه ماتریس می‌تواند هر چیزی باشد.

۲۸ | نادرست

درایه‌های واقع بر قطر اصلی این‌گونه‌اند.

۲۹ | نادرست

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس قطری نیز می‌توانند صفر باشند مثلاً

$$\text{ماتریس} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ یک ماتریس قطری است.}$$

۳۰ | درست

ماتریس‌های اسکالر نوعی از ماتریس‌های مربعی هستند.

۳۱ | نادرست

هر ماتریس قطری لزوماً اسکالر نیست مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ قطری است اما اسکالر نیست.

۳۲ | درست

۳۳ | درست

۳۴ | نادرست

طرفین تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد غیرصفر تقسیم کرد.

۳۵ | نادرست

ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع است.

۳۶ | درست

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

همواره داریم:

۳۷ | می‌دانیم ماتریس‌های مربعی از مرتبه n در n هستند، پس:

$$n \times n = 9 \Rightarrow n = 3$$

بنابراین با توجه به ضابطه‌های a_{ij} و این‌که مرتبه ماتریس ۳ است داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 2(2)+1 & 2-2 & 3-2 \\ 2(3)+1 & 2(3)+2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

۳۸ | درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - m \times 1 & \circ & \circ \\ \circ & 2^2 - m \times 2 & \circ \\ \circ & \circ & 3^2 - m \times 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-m & \circ & \circ \\ \circ & 4-2m & \circ \\ \circ & \circ & 9-3m \end{bmatrix}$$

۴۹ | $A^T = 6A - 11I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} = 6A - 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} = 6A - \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow 6A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 6A = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -18 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

۵۰ | چون $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ قطری است داریم:

$\Rightarrow \begin{cases} m+1=0 \Rightarrow m=-1 \\ 2n+4=0 \Rightarrow n=-2 \end{cases}$ حال $A+I$ را به دست می‌آوریم:

$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

۵۱ | $2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -14 \end{bmatrix}$

۵۲ | چون $A + C = \bar{O}$ است پس ماتریس C قرینه ماتریس A می‌باشد:

$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ حال ماتریس $2B + 3C$ را به دست می‌آوریم:

$2B + 3C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ -2 & 10 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 0 & -12 & -3 \\ -6 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -8 & 5 \\ -8 & 13 & -2 \end{bmatrix}$

۵۳ | چون جمع ماتریس‌ها را داریم، پس ماتریس‌ها باید هم مرتبه باشند لذا $A_{3 \times 3}$ است. اکنون ماتریس A را با درایه‌هایش معلوم می‌کنیم:

$A = \begin{bmatrix} (1)^2 - 1 & 2(1) - 2 & 2(1) - 3 \\ 2^2 - 1 & (2)^2 - 2 & 2(2) - 3 \\ 3^2 - 1 & 3^2 - 2 & (3)^2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

چون $2A - 3B + 2I$ را می‌خواهیم باید I ماتریس واحد مرتبه ۳ باشد، پس:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 16 & 14 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 12 & 0 & 6 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -11 \\ -6 & 6 & -4 \\ 1 & 17 & 5 \end{bmatrix}$

۵۴ | $(r \pm s)[a_{ij}] = [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}]$

$= [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}] = r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}] = rA \pm sA$

۵۵ | انجام پذیر نیست. $A_{2 \times 3} \times A_{5 \times 2}$ برابر نیستند

۴۴ | ماتریس‌های A و B که هم مرتبه هستند. پس فقط باید درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها مساوی باشند:

$\begin{cases} 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x + y = 5 \xrightarrow{2x=3} y = 2 \Rightarrow x + 2y + 3z = \frac{3}{2} + 2(2) + 3(-2) = -\frac{1}{2} \\ z = -2 \end{cases}$

۴۵ | باید $x^2 - y^2 = -7$ و $x + y = -1$ باشد، پس:

$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \Rightarrow (x - y)(x + y) = -7 \\ x + y = -1 \end{cases}$

$\xrightarrow{x+y=-1} (x - y)(-1) = -7 \Rightarrow x - y = 7$

حال داریم:

$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -4$

بنابراین $x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$ است.

۴۶ | چون دو ماتریس A و B مساوی‌اند پس حتماً ماتریس A از مرتبه ۲ است. حال ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$A = \begin{bmatrix} 2(1) - 1^2 & 2(1) - 2^2 \\ 2(2) - 1^2 & 2(2) - 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$A = B \Rightarrow \begin{cases} b - 2 = 2 \Rightarrow b = 4 \\ a + 1 = -1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow a + b + c = (-2) + 4 + 4 = 6 \\ c + 1 = 5 \Rightarrow c = 4 \end{cases}$

۴۷ | $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+3 & y+5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3=5 \Rightarrow x=2 \\ y+5=4 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$

۴۸ | ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$A = \begin{bmatrix} 1^2 & 2-2 & 2-3 \\ 2 \times 1 & 2^2 & 4-3 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

حال ماتریس $2A - 3I$ را به دست می‌آوریم:

$2A - 3I = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$