گاج

ویرایش جدید

«منطبق بر امتحان نهایی»

«خرداد ۱۴۰۲»

# هندسه ۲

پایه یازدهم

رشته ریاضی و فیزیک

# فرمول بیست


مؤلّف

آرش عمید

# فرمول بیست

**۸۰**
صفحه درسنامه

**۱۱۰۰**
پرسش تشریحی

**۴**
نمونه امتحانی

9 786220 308751
تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

# پیشگفتار

**سلام**

آرش عمید هستم. از عنوان کتاب یعنی «فرمول بیست» معلوم است که این کتاب برای ۲۰ شدن شما در هر آزمون تشریحی و با هر سطحی، نوشته شده است. این کتاب حاصل تجربهٔ ۲۵ سال تدریس من در درس هندسه و دیدن آزمون‌های نهایی مختلف در نظام قدیم و جدید آموزشی است.

**در این کتاب مطالب به صورت زیر است:**

**۱.** در درسنامه، خط به خط کتاب درسی و همهٔ تمرینات، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی با ترتیب آموزشی آورده شده است.

**۲.** در تمرینات پایانی با عنوان خط به خط کتاب درسی، کل تمرینات، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌های کتاب درسی، تمام تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم و سؤالات امتحانات نهایی نظام جدید آمده است.

**۳.** در تمرینات تکمیلی، تمریناتی مشابه تمرینات کتاب درسی آمده است که شما را برای هر آزمونی آماده کند و تسلط شما را بر کتاب درسی تکمیل نماید.

پیروز باشید
**آرش عمید**

# فهرست



## امتحان نهایی



## بارم‌بندی درس هندسه ۲

| شماره فصل | | نوبت اول | نوبت دوم |
|---|---|---|---|
| اول | | ۱۴ | ۶ |
| دوم | تا صفحه ۴۵ | ۶ | ۲ |
| | صفحه ۴۵ به بعد | - | ۵ |
| سوم | | - | ۷ |
| جمع | | ۲۰ | ۲۰ |

# ۱

بخش

# درسنامه

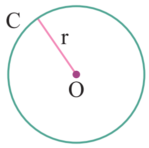
و سؤالات تشریحی

فصل اول

۱

# درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (قسمت اول)

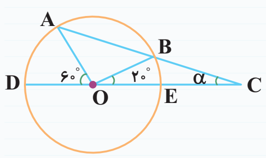
هندسهٔ یازدهم

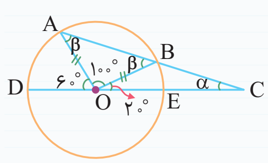



**دایره:** مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت در آن صفحه به فاصلهٔ مشخصی هستند. نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و فاصلهٔ مشخص را شعاع دایره می‌گویند. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را با $C(O,r)$ نشان می‌دهند. *(مثلاً وقتی می‌گن $C(O, 3)$ یعنی یک دایره داریم که مرکز اون نقطهٔ O هستش و شعاعش برابر ۳ هست.)*

**نکته** اگر در دایره مثلثی دیده شود که دو ضلع از آن، دو شعاع دایره باشد، حتماً آن مثلث، متساوی الساقین است و برابر قرار دادن زاویه‌های نظیر دو ساق، کلید حل مسئله است. البته گاهی اوقات لازم است خودمان شعاع مناسبی را رسم کنیم تا مثلثی ایجاد شود و بتوانیم به خواستهٔ مسئله برسیم.

**؟ در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ را به‌دست آورید.**



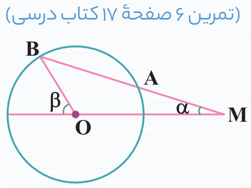

✓ زاویهٔ $A\hat{O}B$ برابر است با: $60^\circ + A\hat{O}B + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 100^\circ$

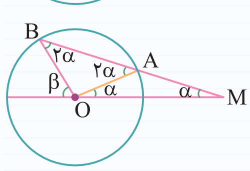
مثلث AOB متساوی الساقین است، پس: $100^\circ + \beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = 80^\circ \Rightarrow \beta = 40^\circ$

زاویهٔ $\beta$ زاویهٔ خارجی مثلث OBC است، پس: $\beta = 20^\circ + \alpha \Rightarrow 40^\circ = 20^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 20^\circ$

**؟ در شکل مقابل، دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. اگر $MA = R$ باشد، نشان دهید $\beta = 3\alpha$ .**

(تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)




✓ از O به A وصل می‌کنیم. چون $OA = R = MA$ است، پس مثلث OAM متساوی‌الساقین بوده و زاویهٔ $A\hat{O}M$ نیز برابر $\alpha$ است. از طرفی مثلث AOB نیز متساوی‌الساقین است زیرا $OA = OB = R$ می‌باشد. زاویهٔ $O\hat{A}B$ زاویهٔ خارجی مثلث OAM است، پس:

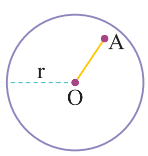
$$O\hat{A}B = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow O\hat{A}B = O\hat{B}A = 2\alpha$$

$\beta$ زاویهٔ خارجی مثلث BOM است، پس:

$$\beta = 2\alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

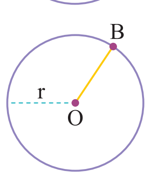
**وضعیت نقطه و دایره:** یک نقطه می‌تواند سه وضعیت نسبت به دایره داشته باشد:

آ) اگر نقطه‌ای درون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره کم‌تر از شعاع دایره است.



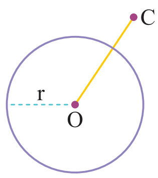

A درون دایره است. $OA < r \Leftrightarrow$

ب) اگر نقطه‌ای روی دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است.




B روی دایره است. $OB = r \Leftrightarrow$

پ) اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، بیش‌تر از شعاع دایره است.




C بیرون دایره است. $\Leftrightarrow OC > r$

**؟ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**

**آ) اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره ............... از ............... است.**

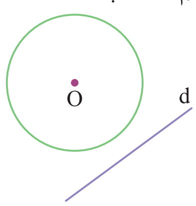
**ب) اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایرهٔ $C(O,5)$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه نقطهٔ A ............... دایره است.**

آ) بیشتر – شعاع دایره

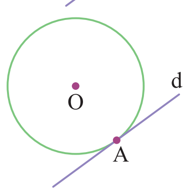
ب) درون

■ **اوضاع نسبی خط و دایره:** یک خط و یک دایره با توجه به تعداد نقاط مشترکی که دارند می‌توانند سه وضعیت مختلف نسبت به هم داشته باشند:

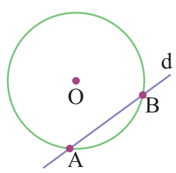
آ) خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.




ب) خط و دایره تنها یک نقطهٔ مشترک دارند. در این حالت می‌گوییم خط بر دایره مماس است.




پ) خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند و می‌گوییم خط و دایره متقاطع هستند. توجه کنید که در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.

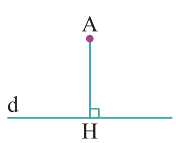



**؟ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**

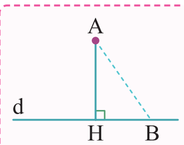
**اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خطی کم‌تر از شعاع دایره باشد، آن‌گاه خط و دایره ............... مشترک دارند.**

دو نقطه

■ **فاصلهٔ نقطه از خط:** خط d و نقطهٔ A خارج از آن را در نظر بگیرید. از نقطهٔ A بر خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d، برابر با طول پاره‌خط AH است.




**نکته** اگر از نقطهٔ A بر خط d عمود کنیم و پای عمود را H بنامیم، آن‌گاه فاصلهٔ هر نقطهٔ دیگری از خط d مانند B از نقطهٔ A بیش‌تر از فاصلهٔ نقطهٔ H از نقطهٔ A است.



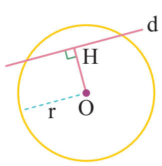

$AB > AH$

**نتیجه** اگر فاصلهٔ نقطهٔ H روی خط d از نقطهٔ A، کوچک‌تر از فاصلهٔ سایر نقاط خط d از نقطهٔ A باشد، می‌توان نتیجه گرفت که AH بر خط d عمود است.

*حالا که داستان فاصلهٔ نقطه از خط رو فهمیدیم بریم اوضاع نسبی خط و دایره رو براساس فاصلهٔ نقطه از خط بررسی کنیم.*

■ **اوضاع نسبی خط و دایره از دیدگاه فاصلهٔ نقطه از خط:** خط d و دایرهٔ $C(O,r)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O بر خط d رسم می‌شود، آن‌گاه داریم:

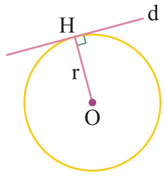
آ) اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d از شعاع دایره کم‌تر باشد، خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند، یعنی متقاطع‌اند.




خط و دایره متقاطع‌اند. $\Leftrightarrow OH < r$

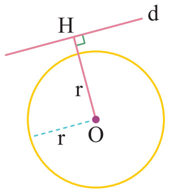
ب اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d برابر با شعاع دایره باشد، خط و دایره یک نقطهٔ مشترک دارند، یعنی خط بر دایره مماس است.

$OH = r \Leftrightarrow$ خط بر دایره مماس است.




پ اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d بیش‌تر از شعاع دایره باشد، خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.

$OH > r \Leftrightarrow$ خط و دایره نقطهٔ مشترکی ندارند.




**جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**

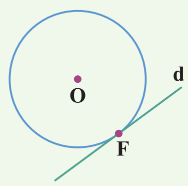
**اگر خط و دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز دایره تا خط ............ است.**

برابر شعاع دایره

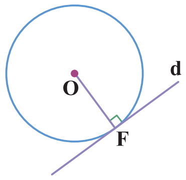
• فرض کنید خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ F مماس است. ثابت کنید شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطهٔ F بر هم عمودند. (فعالیت ۱ صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

**اثبات**

هر نقطهٔ دیگری غیر از F روی خط d مانند B خارج از دایره قرار دارد. بنابراین فاصلهٔ آن تا مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره خواهد بود؛ یعنی $OB > r$. از طرف دیگر نقطهٔ F روی دایره قرار دارد، بنابراین فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است؛ یعنی $OF = r$. بنابراین می‌توان گفت که نقطهٔ F نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O می‌باشد. حال اگر بخواهیم از O بر خط d عمود کنیم، از آن‌جایی که فاصلهٔ O تا پای عمود، کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط خط d تا O خواهد بود، بنابراین پای عمود همان نقطهٔ F می‌باشد. پس شعاع OF در نقطهٔ F بر خط d، عمود خواهد بود.




• خط d در نقطهٔ F بر شعاع OF عمود است. ثابت کنید این خط با دایره فقط یک نقطهٔ تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است. (فعالیت ۲ صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)



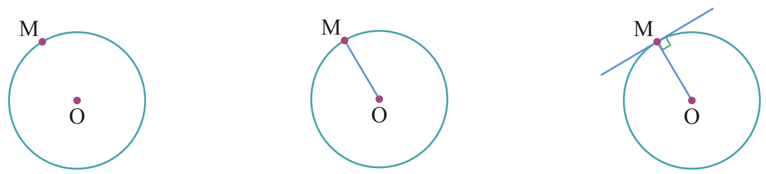

**اثبات**

اگر هر نقطهٔ دیگری غیر از F مانند B روی خط d در نظر بگیریم، فاصله‌شان تا نقطهٔ O از مقدار شعاع دایره یعنی OF بیش‌تر است (زیرا OF بر خط d عمود است.)؛ بنابراین همهٔ این نقاط خارج از دایره قرار دارند و خط و دایره تنها در نقطهٔ F با هم مشترک هستند. پس می‌توان گفت که خط d بر دایره مماس است.

*با توجه به دو مطلب قبلی میشه نتیجهٔ پایینو گرفت:*

**نتیجه** خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود باشد.

**رسم مماس بر دایرهٔ C(O,r) از نقطهٔ M روی آن:** می‌دانیم که خط مماس بر دایرهٔ $C(O,r)$ در نقطهٔ M، بر شعاع OM عمود خواهد بود. بنابراین ابتدا شعاع OM را رسم می‌کنیم و سپس در نقطهٔ M بر OM عمود می‌کنیم تا خط مماس بر دایره در نقطهٔ M رسم شود. *(رسم خط عمود بر OM در نقطهٔ M رو به کمک خط‌کش و پرگار در هندسه (۱) دیده‌ایم.)*



درس ۱

# پرسش‌های تشریحی

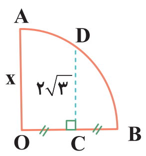
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

## خط‌به‌خط کتاب درسی

● **جاهای خالی را با عبارت یا عبارات مناسب پرکنید.**

**۱.** مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت در آن صفحه به فاصلهٔ مشخص هستند را .................. می‌نامند. نقطهٔ ثابت را .................. و فاصلهٔ مشخص را .................. می‌گویند.

**۲.** در ربع دایرهٔ شکل مقابل مقدار x برابر .................. است.




**۳.** اگر نقطه‌ای .................. دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره کم‌تر از .................. دایره است.

**۴.** اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا .................. دایره .................. از شعاع دایره است.

**۵.** دایرهٔ $C(O,3)$ و نقطهٔ A مفروض‌اند. اگر $OA = 5$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ A .................. دایره است.

**۶.** خط و دایره تنها یک نقطهٔ مشترک دارند. در این حالت می‌گوییم خط و دایره .................. .

**۷.** اگر خطی بر دایره‌ای مماس باشد، آن‌گاه خط و دایره .................. نقطهٔ مشترک دارند.

**۸.** در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند، خط را نسبت به دایره .................. می‌نامیم.

**۹.** نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d از مرکز دایرهٔ $C(O,r)$، درون دایره است. در این صورت خط و دایره .................. نقطهٔ مشترک دارند.

**۱۰.** اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d برابر .................. باشد، خط بر دایره مماس است.

**۱۱.** اگر فاصلهٔ نقطهٔ B روی خط d از نقطهٔ A، کوچک‌تر از فاصلهٔ سایر نقاط خط d از نقطهٔ A باشد، می‌توان نتیجه گرفت که .................. است.

**۱۲.** خط d در نقطهٔ T بر دایرهٔ $C(O,r)$ مماس است. در این صورت شعاع OT و خط مماس در نقطهٔ T .................. .

● **درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.**

**۱۳.** اندازهٔ شعاع دایره مقداری نامنفی است.

**۱۴.** فاصلهٔ هر نقطه روی دایره تا مرکز آن، برابر شعاع دایره است.

**۱۵.** خط d در نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس است. نقطه‌ای مانند B روی خط d وجود دارد که $OB \leq OA$ باشد.

**۱۶.** اگر خطی با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشد، خط را نسبت به دایره قاطع می‌گوییم.

**۱۷.** اگر خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ A مماس باشد، آن‌گاه OA و d برهم عمودند.

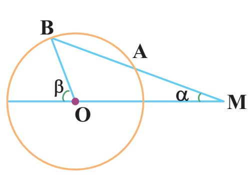
**۱۸.** اگر خط d بر شعاع OA عمود باشد، آن‌گاه خط بر دایرهٔ $C(O,r)$ مماس است.

**۱۹.** اگر خط d در نقطهٔ B بر شعاع OB عمود باشد، تعداد نقاط مشترک خط و دایره، هیچ، یک یا دو خواهد بود.

**۲۰.** اگر فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطه از خط d تا مرکز دایره $C(O,r)$ از r بزرگ‌تر باشد، خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.

**۲۱.** در شکل مقابل، دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. اگر $MA = R$ باشد، نشان دهید $\beta = 3\alpha$.

(تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)




**۲۲.** وضعیت یک نقطه و دایره را با رسم شکل بررسی کنید.

**۲۳.** وضعیت یک خط و یک دایره را از نظر تعداد نقاط مشترک با رسم شکل بررسی کنید.

**۲۴.** نقطهٔ A خارج از خط d قرار دارد. روش به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d را توضیح دهید.

**۲۵.** برای به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d، فاصلهٔ نقطهٔ A را از نقطهٔ H روی خط d محاسبه می‌کنیم. توضیح دهید که نقطهٔ H چگونه تعیین می‌شود؟

**۲۶.** وضعیت یک خط و یک دایره را از نظر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط با رسم شکل بررسی کنید.

**۲۷.** خط d در نقطهٔ F بر شعاع OF عمود است. ثابت کنید این خط بر دایره مماس است. (فعالیت ۲ صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

**۲۸.** خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ F مماس است. ثابت کنید شعاع OF و خط مماس در نقطهٔ F بر هم عمودند. (فعالیت ۱ صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

**۲۹.** نقطهٔ M روی دایرهٔ $C(O,r)$ قرار دارد. چگونه می‌توان خط مماس بر دایره در نقطهٔ M را رسم کرد؟

## تمرینات تکمیلی

**● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.**

۳۰. فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایرهٔ $C(O,۳)$ از نقطهٔ A برابر ۵ است. در این صورت نقطهٔ A بیرون دایرهٔ C قرار دارد.

۳۱. اگر نسبت فاصلهٔ دورترین نقاط دایره تا نقطهٔ A به نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ A برابر ۹ باشد، نقطهٔ A حتماً درون دایره است.

۳۲. اگر فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره از نقطهٔ A به ترتیب ۱۲ و ۲ باشد، نقطهٔ A حتماً درون دایره است.

**● جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید.**

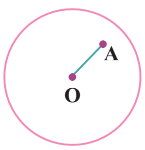
۳۳. نقطهٔ $A(-۳,۲)$ ................ دایرهٔ $C((۱,-۱),۲)$ قرار دارد.

۳۴. نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,۳)$ مفروض‌اند. اگر $OA=۵$ باشد، اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقاط دایره برابر ................ است.

۳۵. مجموعهٔ نقاطی که بیرون دایرهٔ $C(O,۱)$ و درون $C'(O,۳)$ قرار دارند، در ناحیه‌ای به مساحت ................ قرار دارند.

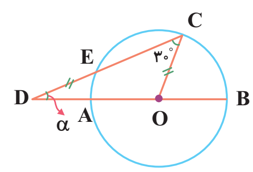
۳۶. اگر فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایرهٔ $C(O,r)$ تا نقطهٔ A به ترتیب ۷ و ۴ و $OA<r$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره برابر ................ است.

۳۷. در شکل مقابل O مرکز دایره و $OA=۶$ است. اگر فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره تا A برابر ۱۵ باشد، اندازهٔ شعاع دایره برابر ................ است.

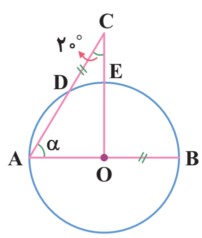



**● در شکل‌های زیر، نقطهٔ O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ را برحسب درجه به‌دست آورید.**

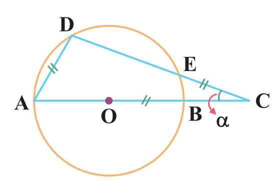
۳۸.



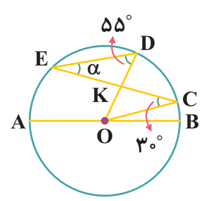

۳۹.




۴۰.




۴۱.




۴۲. فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره $C(O,۴)$ برابر $۲x-۵$ است. اگر نقطهٔ A درون دایره باشد، محدودهٔ x را به‌دست آورید.

۴۳. فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ $C(O,۴)$ برابر $x-۶$ است. اگر نقطهٔ A بیرون دایرهٔ C نباشد، مجموع مقادیر صحیح x را به‌دست آورید.

۴۴. نقاط A و B روی دایرهٔ $C(O,۴)$ قرار دارند. اگر $OA=x^۲-۵x+۱۰$ و $OB=۳x^۲-۷x+۶$ باشند، مقدار x را به‌دست آورید.

۴۵. فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ $C(O,۳x-۳)$ برابر $x+۷$ است. حدود x را طوری تعیین کنید که:

آ) نقطهٔ A درون دایره باشد.

ب) نقطهٔ A بیرون دایره باشد.

۴۶. فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ $C(O,۴)$ برابر ۷ است. فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ A را به‌دست آورید.

۴۷. بیش‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقاط دایره ۲/۵ برابر شعاع دایره است. اگر کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقاط دایره برابر ۴ باشد، اندازهٔ شعاع دایره را به‌دست آورید.

۴۸. کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دایرهٔ $C(O,r)$ از نقطهٔ A به ترتیب برابر ۳ و ۱۱ است. مقادیر ممکن برای شعاع دایره را به‌دست آورید.

۴۹. خط d به فاصلهٔ $۱۰-x$ از مرکز دایرهٔ $C(O,۳)$ قرار دارد و دایرهٔ C را در دو نقطه قطع می‌کند. مجموع مقادیر طبیعی x را به‌دست آورید.

۵۰. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O,۳a+۲)$ تا خطوط $d_۱$ و $d_۲$ به ترتیب برابر $OH_۱=a+۸$ و $OH_۲=۵-a$ است. اگر $d_۱$ بر دایره مماس باشد، وضعیت خط $d_۲$ و دایرهٔ C را تعیین کنید.

۵۱. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O,۶)$ از خط d برابر ۱۰ است. کم‌ترین و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره تا خط d را به‌دست آورید.

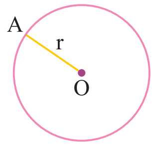
فصل اول

# ۱ درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (قسمت دوم)

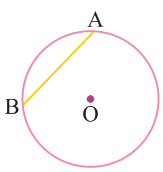
هندسهٔ یازدهم

**چند تعریف در دایره:** ابتدا به بررسی چند تعریف در دایره می‌پردازیم که آن‌ها را در دورهٔ اول دبیرستان دیده‌اید.

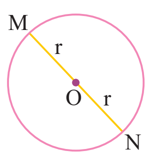
**۱ شعاع دایره:** به پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع دایره می‌گویند. شعاع دایره را معمولاً با حرف r نمایش می‌دهند.




**۲ وتر دایره:** پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد را یک وتر از دایره می‌گویند.




**۳ قطر دایره:** وتری از دایره که از مرکز دایره عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند. قطر دایره، بزرگ‌ترین وتر دایره است و اندازهٔ آن دو برابر اندازهٔ شعاع دایره است.



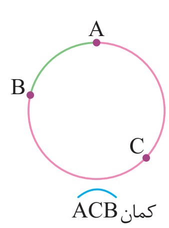

**در دایره‌ای با شعاع $2x - 3$، طول بزرگ‌ترین وتر برابر ۱۴ می‌باشد. مقدار x را به‌دست آورید.**

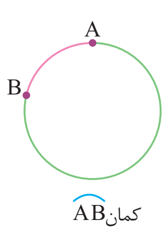
می‌دانیم بزرگ‌ترین وتر دایره، قطر دایره است و قطر دایره دو برابر شعاع دایره می‌باشد. پس:

$$2(2x - 3) = 14 \Rightarrow 4x - 6 = 14 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

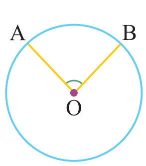
**۴ کمان دایره:** کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است. به عبارت دیگر، به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است، کمان می‌گویند.

**توجه** اگر دو نقطهٔ A و B روی دایره قرار داشته باشند، دو کمان روی دایره ایجاد می‌کنند که معمولاً کمان کوچک‌تر را با $\overset{\frown}{AB}$ و کمان بزرگ‌تر را با نقطه‌ای کمکی مانند C به‌صورت $\overset{\frown}{ACB}$ نمایش می‌دهند.



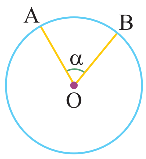

**۵ زاویهٔ مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره منطبق باشد و دو ضلع آن دو شعاع از دایره است. مثلاً در شکل مقابل $A\hat{O}B$ یک زاویهٔ مرکزی است.



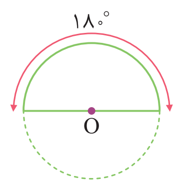

**توجه** زاویهٔ $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$ نامیده می‌شود. هم‌چنین کمان $\overset{\frown}{AB}$ نیز کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ است.

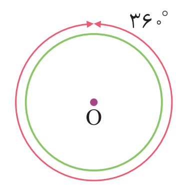
**۶ اندازهٔ کمان:** اندازهٔ کمان $AB$ با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن برحسب درجه برابر است. *(واضحه که اگه اندازهٔ کمان $AB$ برابر $\alpha$ درجه باشه، حتماً زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به اونم $\alpha$ درجه هستش.)*

$$A\hat{O}B=\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\alpha$$

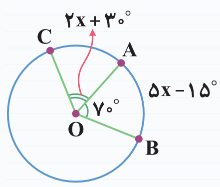



**نتیجه** ۱ یک دایره، کمانی با اندازهٔ $360^\circ$ است. ۲ نیم‌دایره، کمانی با اندازهٔ $180^\circ$ است.




**؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AC}$ چند درجه است؟**



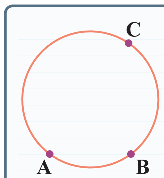

✓ زاویهٔ $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است، پس اندازهٔ آن با کمان مقابلش برابر است:

$$A\hat{O}B=\overset{\frown}{AB} \Rightarrow 70^\circ=5x-15^\circ \Rightarrow 5x=70^\circ+15^\circ=85^\circ \Rightarrow x=\frac{85^\circ}{5}=17^\circ$$

از طرفی زاویهٔ $A\hat{O}C$ نیز زاویهٔ مرکزی است، پس:

$$A\hat{O}C=\overset{\frown}{AC} \Rightarrow 2x+30^\circ=\overset{\frown}{AC} \xRightarrow{x=17^\circ} \overset{\frown}{AC}=2(17^\circ)+30^\circ=64^\circ$$

**؟ در شکل مقابل $\overset{\frown}{ABC}=190^\circ$ و $\overset{\frown}{BCA}=200^\circ$ هستند. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ را به‌دست آورید.**



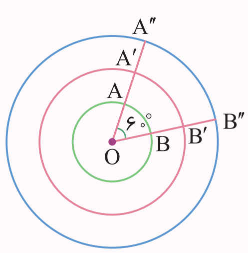

✓ می‌دانیم یک دایره کمانی با اندازهٔ $360^\circ$ است، پس:

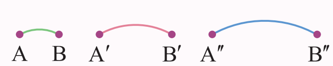
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BA}=360^\circ$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\overset{\frown}{ABC}=190^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=190^\circ\\ \overset{\frown}{BCA}=200^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}=200^\circ\end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}=390^\circ \xRightarrow{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}=360^\circ} 360^\circ+\overset{\frown}{BC}=390^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=30^\circ$$

**نکته** هر کمان علاوه بر اندازه، دارای طول نیز هست. کمان‌های دایره با شعاع‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابری داشته باشند ولی طول آن‌ها برابر نباشد و یا می‌توانند طول‌های برابر داشته باشند ولی اندازهٔ آن‌ها برابر نباشد. (اندازهٔ کمان برحسب درجه و طول آن برحسب واحد طول مثلاً متر، سانتی‌متر و ... می‌باشد.) مثلاً در شکل زیر، اندازهٔ کمان‌های $AB$، $A'B'$ و $A''B''$ با هم برابر و مساوی $60^\circ$ است اما واضح است که طول‌های آن‌ها برابر نیست.



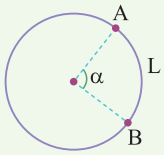



**۷ طول کمان:** طول کمان AB از دایرهٔ $C(O,R)$ که روبه‌روی زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ $\alpha$ است، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{L=\frac{\pi R\alpha}{180^\circ}}$$

**اثبات**

می‌دانیم دایره کمانی با اندازهٔ ۳۶۰ درجه و طول $2\pi R$ است، پس به کمک تناسب زیر داریم:

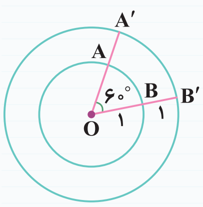



| اندازه | طول |
|---|---|
| $360^\circ$ | $2\pi R$ |
| $\alpha$ | $L$ |

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} L\times 360^\circ=\alpha\times 2\pi R \Rightarrow L=\frac{\alpha\times 2\pi R}{360^\circ}\Rightarrow \boxed{L=\frac{\pi R\alpha}{180^\circ}}$$

*توجه کن که نحوهٔ به‌دست آوردن طول کمان AB ، در کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی پرسیده شده.*

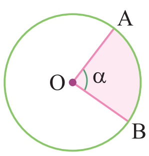
**؟ در شکل زیر، O مرکز دایره‌ها می‌باشد. اندازه و طول کمان‌های AB و $A'B'$ را به‌دست آورید.** (کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)




✓ اندازهٔ کمان‌های AB و $A'B'$ برابر زاویهٔ مرکزی مقابل آن‌ها است، پس اندازهٔ آن‌ها برابر $60^\circ$ می‌باشد. اما طول کمان‌های AB و $A'B'$ برابر هستند با:

$$L=\frac{\pi R\alpha}{180^\circ}\Rightarrow\begin{cases}L_{\overset{\frown}{AB}}=\dfrac{\pi\times 1\times 60^\circ}{180^\circ}=\dfrac{\pi}{3}\\[2mm] L_{\overset{\frown}{A'B'}}=\dfrac{\pi\times 2\times 60^\circ}{180^\circ}=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

**۸ قطاع دایره:** ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند.

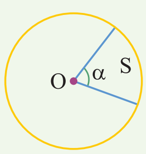



■ **مساحت قطاع:** اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ برحسب درجهٔ $\alpha$ باشد، مساحت قطاع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{S=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}}$$

**اثبات**

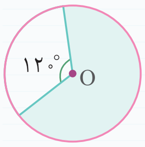
می‌دانیم دایرهٔ قطاعی با زاویهٔ مرکزی $360^\circ$ و مساحت $\pi R^2$ است، پس:




| زاویهٔ مرکزی | مساحت |
|---|---|
| $360^\circ$ | $\pi R^2$ |
| $\alpha$ | $S$ |

$$\Rightarrow \pi R^2\times\alpha=360^\circ\times S\Rightarrow \boxed{S=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}}$$

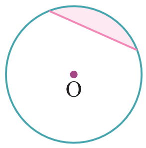
**؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره با شعاع ۵ است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.**



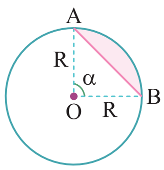

✓ زاویهٔ مرکزی قطاع رنگی برابر $240^\circ=360^\circ-120^\circ$ است، پس:

$$S=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}\Rightarrow S=\frac{\pi(5^2)\times 240^\circ}{360^\circ}=\frac{50\pi}{3}$$

*می‌تونستیم مساحت ناحیهٔ غیررنگی رو به‌دست بیاریم و از مساحت دایره کم کنیم.*



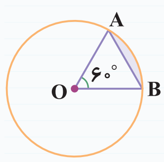

**۹ قطعهٔ دایره:** در یک دایره، ناحیهٔ محصور به یک وتر و کمان متناظرش را قطعه می‌گوییم.




**■ مساحت قطعه:** برای به‌دست آوردن مساحت قطعه، باید مساحت مثلث متساوی‌الساقین OAB را از مساحت قطاع کم کنیم.

$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\overset{\Delta}{OAB}} \Rightarrow \boxed{S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha}$$

**؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره به شعاع ۴ است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.** (تمرین ۸ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)




$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\overset{\Delta}{OAB}} \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi(4)^2 \times 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin 60^\circ$$

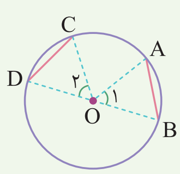
$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{8\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

## ■ اثبات‌های کتاب درسی به کمک زاویهٔ مرکزی

**۱** اگر دو کمان AB و CD از دایرهٔ $C(O,r)$ با هم برابر باشند، آن‌گاه وترهای AB و CD هم با یکدیگر برابرند. (فعالیت ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

**اثبات**

از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. چون $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ است، پس زوایای مرکزی مقابل آن‌ها یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند، پس:



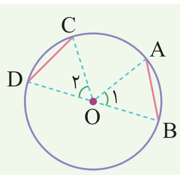

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OD = r \\ OB = OC = r \end{cases} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $AB = CD$ می‌باشد.

**۲** اگر دو وتر AB و CD در یک دایره با هم برابر باشند، آن‌گاه کمان‌های نظیر این دو وتر نیز با هم برابرند. (فعالیت ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

**اثبات**

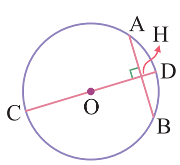
از مرکز دایره به دوسر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. پس:




$$\begin{cases} OA = OC = r \\ OB = OD = r \\ AB = CD \end{cases} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$$

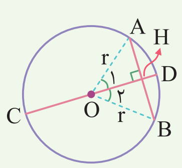
بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد؛ چون $O_1$ و $O_2$ زوایای مرکزی رو به کمان‌های AB و CD هستند، پس $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ می‌باشد.

**۳** در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند. (فعالیت ۳ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)




**اثبات**

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم و داریم:




$$\begin{cases} OA = OB = r \\ OH = OH\ (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xRightarrow{\text{برابری وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OHA} \cong \overset{\Delta}{OHB}$$

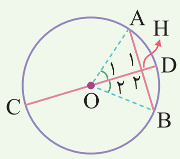
بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، از جمله $AH = BH$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد.

چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر AB را نصف کرده است و چون زوایای مرکزی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند، پس کمان نظیر آن‌ها یعنی $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BD}$ نیز برابر می‌باشند، پس قطر CD کمان AB را نیز نصف کرده است.

**۴** اگر قطری از دایره، وتری را نصف کند، آن‌گاه بر آن وتر عمود بوده و کمان نظیر آن را نیز نصف می‌کند. (فعالیت ۴ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

**اثبات**

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون CD وتر AB را نصف کرده است، پس $AH = BH$ می‌باشد و داریم:



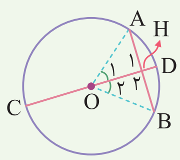

$$\begin{cases} OA = OB = r \\ AH = BH \\ OH = OH (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{AHO} \cong \overset{\Delta}{BHO}$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، از جمله $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می‌باشد. چون زوایای مرکزی $O_1$ و $O_2$ برابرند، پس کمان مقابل آن‌ها یعنی $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BD}$ برابرند؛ بنابراین CD کمان نظیر وتر AB را نصف کرده است. از طرفی چون $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ می‌باشد، بنابراین قطر CD بر وتر AB عمود است.

**۵** اگر قطری از دایره کمانی را نصف کند، آن‌گاه این قطر بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می‌کند. (فعالیت ۵ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

**اثبات**

وتر نظیر کمان AB را رسم می‌کنیم. چون قطر CD کمان AB را نصف کرده است، پس $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ می‌باشد. حال از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ می‌باشد، پس زوایای مرکزی مقابلِ کمان‌های AD و BD یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ با هم برابرند، پس:

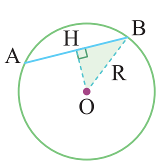



$$\begin{cases} OA = OB = r \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AHO} \cong \overset{\Delta}{BHO}$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، یعنی $AH = BH$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می‌باشد. چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB را نصف کرده است. از آن‌جایی‌که $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می‌باشند، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ بوده و این یعنی قطر CD بر وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB عمود است.

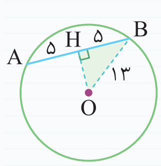
**نتیجه** با توجه به اثبات‌های فوق، اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، خط گذرنده از وسط کمان و وسط وتر، قطر دایره است که بر وتر AB عمود است. (فعالیت ۶ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

**فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر AB:** می‌دانیم فاصلهٔ نقطهٔ O از وتر AB برابر طول عمود OH است. چون OH بر وتر AB عمود است، پس H وسط وتر AB می‌باشد. حال اگر از O به B وصل کنیم، به کمک مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی می‌توانیم طول OH یعنی فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر AB را به‌دست آوریم. به مثال‌های زیر توجه کنید.




**در دایرهٔ $C(O, 13)$، طول وتر AB برابر ۱۰ می‌باشد. فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر AB را به‌دست آورید.**

از مرکز دایره بر وتر AB عمود می‌کنیم. می‌دانیم OH وتر AB را نصف می‌کند. پس $AH = HB = \frac{10}{2} = 5$ می‌باشند. حال از O به B وصل می‌کنیم.
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

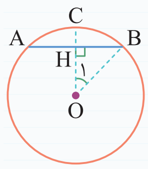



$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow 13^2 = OH^2 + 5^2 \Rightarrow OH^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow OH = 12$$

*ممکنه به جای شعاع دایره یا طول وتر، اندازهٔ کمان متناظر با وتر رو بدن. سؤال بعدیو ببین.*

**در دایرهٔ $C(O,R)$ ، $\widehat{AB}=60^\circ$ و $AB=10$ . فاصلهٔ $O$ از وتر $AB$ را به‌دست آورید.** (تمرین ۷ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

از $O$ بر وتر $AB$ عمود کرده و امتداد می‌دهیم تا کمان $AB$ را در نقطهٔ $C$ قطع کند. می‌دانیم $OC$ وتر $AB$ و کمان $AB$ را نصف می‌کند، پس:




$$AH=BH=\frac{10}{2}=5$$

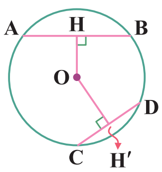
$$\widehat{AC}=\widehat{BC}=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$$

از $O$ به $B$ وصل می‌کنیم. زاویهٔ $O_1$ زاویهٔ مرکزی رو به کمان $BC$ است، پس $\hat{O}_1=\widehat{BC}=30^\circ$ می‌باشد. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OHB$ داریم:

$$\tan\hat{O}_1=\frac{BH}{OH}\Rightarrow \tan 30^\circ=\frac{5}{OH}\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5}{OH}\Rightarrow OH=\frac{3\times 5}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$$

**وترهای نامساوی:** دایرهٔ $C(O,R)$ در شکل مقابل مفروض است. $AB>CD$ اگر و تنها اگر $OH<OH'$ .

(تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



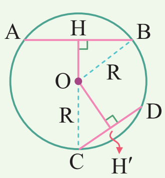

*قبل از خوندن اثبات، اینو بخون. میخوام درمورد «اگر و تنها اگر» صحبت کنم. عبارت «اگر و تنها اگر» یعنی این‌که قضیه دو شرطیه، یعنی برای اثبات یه بار باید با فرض « $AB>CD$ » ثابت کنیم که « $OH'>OH$ » هستش و بار دیگه باید با فرض « $OH'>OH$ » نشون بدیم که « $AB>CD$ » هستش.*

**اثبات**

**حالت اول** فرض می‌کنیم $AB>CD$ باشد. از $O$ به $B$ و $C$ وصل می‌کنیم. می‌دانیم $H$ وسط $AB$ و $H'$ وسط $CD$ می‌باشد، پس:

$$AB>CD\Rightarrow \frac{AB}{2}>\frac{CD}{2}\Rightarrow BH>CH'$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های $OHB$ و $OCH'$ داریم:



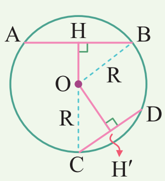

$$OB^2=OH^2+BH^2\Rightarrow R^2=OH^2+BH^2\Rightarrow BH^2=R^2-OH^2$$

$$OC^2=OH'^2+CH'^2\Rightarrow R^2=OH'^2+CH'^2\Rightarrow CH'^2=R^2-OH'^2$$

چون $BH>CH'$ است، پس $BH^2>CH'^2$ می‌باشد و داریم:

$$R^2-OH^2>R^2-OH'^2\Rightarrow -OH^2>-OH'^2\Rightarrow OH^2<OH'^2\Rightarrow OH<OH'$$

**حالت دوم** فرض می‌کنیم $OH<OH'$ باشد. از $O$ به $B$ و $C$ وصل می‌کنیم. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های $OHB$ و $OCH'$ داریم:




$$OB^2=OH^2+BH^2\Rightarrow R^2=OH^2+BH^2\Rightarrow OH^2=R^2-BH^2$$

$$OC^2=OH'^2+CH'^2\Rightarrow R^2=OH'^2+CH'^2\Rightarrow OH'^2=R^2-CH'^2$$

چون $OH<OH'$ است، پس $OH^2<OH'^2$ می‌باشد و داریم:

$$R^2-BH^2<R^2-CH'^2\Rightarrow -BH^2<-CH'^2\Rightarrow BH^2>CH'^2\Rightarrow BH>CH'$$

می‌دانیم $H$ وسط وتر $AB$ و $H'$ وسط وتر $CD$ است، پس:

$$BH>CH'\xrightarrow{\times 2}2BH>2CH'\Rightarrow AB>CD$$

درس ۱ **پرسش‌های تشریحی** مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

## خط‌به‌خط کتاب درسی

**● جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**

**۵۲.** به پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد ............... دایره می‌گویند.

**۵۳.** پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد را ............... می‌گویند.

**۵۴.** بزرگ‌ترین وتر دایره را ............... می‌گویند.

**۵۵.** وتری از دایره که از ............... عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند.

**۵۶.** به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است ............... می‌گویند.

**۵۷.** به زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز دایره منطبق باشد و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشد ............... می‌گویند.

**۵۸.** ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است ............... دایره می‌گویند.

**۵۹.** در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر را ............... می‌کند.

**۶۰.** اگر نقاط وسط وتر $AB$ و کمان $AB$ را داشته باشیم، خط گذرنده از وسط وتر $AB$ و وسط کمان $AB$، ............... است.

**۶۱.** در دایرهٔ $C(O,۴)$ ، شعاع‌های $OA$ و $OB$ برهم عمودند. طول کمان $AB$ برابر ............... است.

**۶۲.** مساحت قطاعی از دایرهٔ $C(O,۹)$ با زاویهٔ مرکزی $۱۲۰^\circ$ برابر ............... است.

**● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.**

**۶۳.** اندازهٔ قطر دایره دو برابر اندازهٔ شعاع دایره است.

**۶۴.** پاره‌خط $AB$ که از دو نقطهٔ متمایز از دایره می‌گذرد را وتر دایره می‌گوییم.

**۶۵.** اندازهٔ زاویهٔ مرکزی نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.

**۶۶.** نیم‌دایره کمانی با طول $۱۸۰^\circ$ است.

**۶۷.** طول کمان $AB$ از دایرهٔ $C(O,R)$ که روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ $\alpha$ می‌باشد برابر $L=\frac{\pi R\alpha}{۳۶۰^\circ}$ است.

**۶۸.** کمان‌های دایره با شعاع‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابری داشته باشند ولی طول آن‌ها برابر نباشد.

**۶۹.** در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

**۷۰.** خط شامل وسط یک وتر و وسط کمان نظیر با آن، قطر دایره است.

**۷۱.** مساحت قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ با زاویهٔ مرکزی $\alpha$ از رابطهٔ $S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۱۸۰^\circ}$ به‌دست می‌آید.

**۷۲.** در دایره‌ای به شعاع ۶، مساحت قطاعی با زاویهٔ مرکزی $۱۲۰^\circ$ برابر $۹\pi$ است.

**● مفاهیم زیر را تعریف کنید.**

**۷۳.** شعاع دایره

**۷۴.** وتر دایره

**۷۵.** قطره دایره

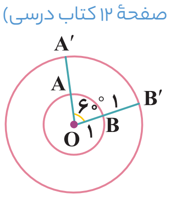
**۷۶.** کمان دایره

**۷۷.** زاویهٔ مرکزی

**۷۸.** قطاع دایره

**۷۹.** قطعهٔ دایره

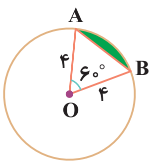
**۸۰.** در شکل زیر، $O$ مرکز دایره‌ها می‌باشد. اندازه و طول کمان‌های $AB$ و $A'B'$ را به‌دست آورید. (کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)



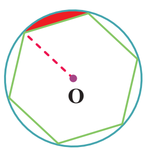
**۸۱.** در دایرهٔ $C(O,R)$ ، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ ، فاصلهٔ O از وتر AB را به‌دست آورید. (تمرین ۷ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

**۸۲.** طول وتر AB در دایرهٔ $C(O,R)$ برابر ۱۰ است. اگر فاصلهٔ وتر AB تا مرکز دایره برابر $۵\sqrt{۳}$ باشد، طول کمان AB را به‌دست آورید.
(تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم)

**۸۳.** در شکل مقابل، O مرکز دایره به شعاع ۴ است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید. (تمرین ۸ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)




**۸۴.** در شکل مقابل شعاع دایره ۴ و شش‌ضلعی، منتظم است. مساحت قسمت رنگی را به‌دست آورید. (تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم)




**۸۵.** نشان دهید طول کمان AB از دایرهٔ $C(O,R)$ که روبه‌روی زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ $\alpha$ است از رابطهٔ $L = \dfrac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}$ به‌دست می‌آید.
(کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

**۸۶.** نشان دهید مساحت قطاع از دایرهٔ $C(O,R)$ که روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ $\alpha$ است از رابطهٔ $S = \dfrac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}$ به‌دست می‌آید.
(کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

**۸۷.** ثابت کنید «اگر دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ از دایرهٔ $C(O,r)$ با هم برابر باشند، آن‌گاه وترهای AB و CD هم با یکدیگر برابرند.»
(فعالیت ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

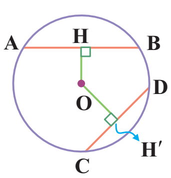
**۸۸.** ثابت کنید «اگر دو وتر AB و CD در یک دایره با هم برابر باشند، آن‌گاه کمان‌های نظیر این دو وتر نیز با هم برابرند.» (فعالیت ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

**۸۹.** ثابت کنید «در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند.» (فعالیت ۳ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۳)

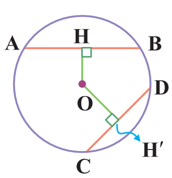
**۹۰.** ثابت کنید «اگر قطری از دایره، وتری را نصف کند آن‌گاه بر آن وتر عمود بوده و کمان نظیر آن را نیز نصف می‌کند.» (فعالیت ۴ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

**۹۱.** ثابت کنید «اگر قطری از دایره کمانی را نصف کند، آن‌گاه این قطر بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می‌کند.» (فعالیت ۵ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

**۹۲.** دایرهٔ $C(O,R)$ در شکل مقابل مفروض است. نشان دهید اگر $OH < OH'$ باشد آن‌گاه $AB > CD$ است.

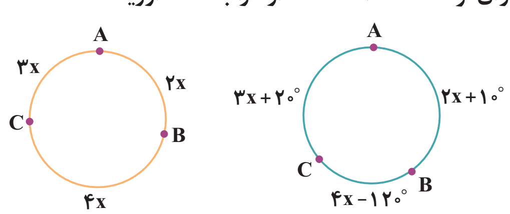



**۹۳.** دایرهٔ $C(O,R)$ در شکل مقابل مفروض است. نشان دهید اگر $AB > CD$ آن‌گاه $OH < OH'$ است.




**۹۴.** در دایره با شعاع ۱۰ ، طول بزرگ‌ترین وتر $۶x + ۲$ است. مقدار x را به‌دست آورید.

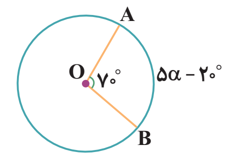
**۹۵.** در دایره‌های زیر اندازهٔ هر کمان در کنار آن نوشته شده است. مقدار x را به‌دست آورید. (تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم)

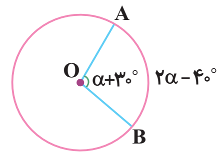


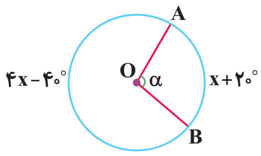
(آ) (ب)

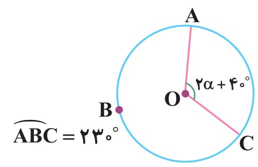
## تمرینات تکمیلی

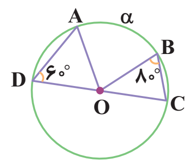
● در شکل‌های زیر، O مرکز دایره است. مقدار $\alpha$ را برحسب درجه به‌دست آورید.

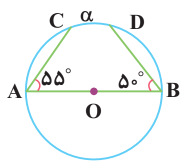
.۹۶


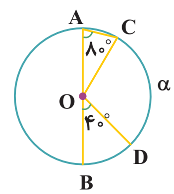

.۹۷


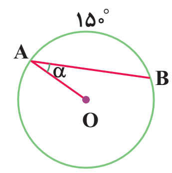

.۹۸


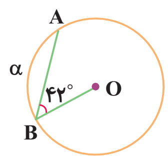

.۹۹


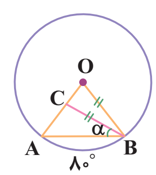

.۱۰۰


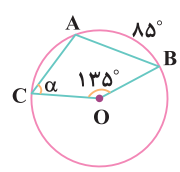

.۱۰۱


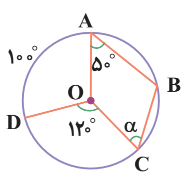

.۱۰۲


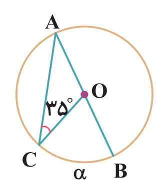

.۱۰۳


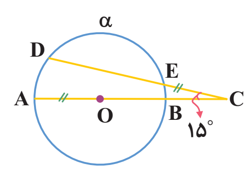

.۱۰۴


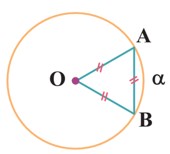

.۱۰۵


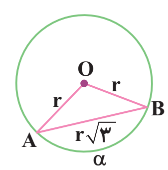

.۱۰۶


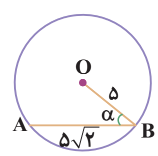

.۱۰۷



.۱۰۸


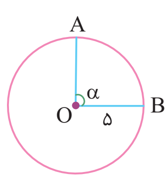

.۱۰۹



.۱۱۰



.۱۱۱


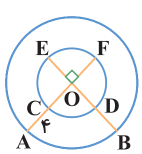

.۱۱۲



.۱۱۳ در شکل مقابل O مرکز دایره است. اگر طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر $۲\pi$ واحد باشد، زاویهٔ $\alpha$ چند درجه است؟

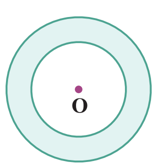



.۱۱۴ طول کمان متناظر با زاویهٔ مرکزی $۱۰۸^\circ$ در دایره‌ای برابر $۶\pi$ است. طول شعاع دایره را به‌دست آورید.

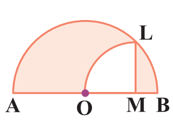
.۱۱۵ در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و طول کمان CD، $\frac{۳}{۵}$ برابر طول کمان AB است. اگر $AC = ۴$ باشد، طول کمان EF را به‌دست آورید.



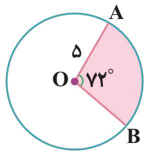

.۱۱۶ در شکل مقابل، O مرکز هر دو دایره است. اگر عدد محیط و مساحت ناحیهٔ رنگی برابر $۲۰\pi$ باشد، مساحت دایرهٔ بزرگ‌تر را به‌دست آورید.



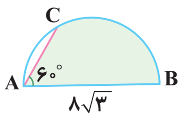

.۱۱۷ در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و M مرکز ربع دایره به شعاع ۶ است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.



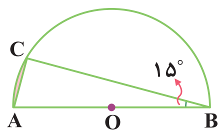
**۱۱۸.** در شکل مقابل، O مرکز دایره است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.




**۱۱۹.** در شکل مقابل، نیم‌دایره به قطر $۸\sqrt{۳}$ است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.

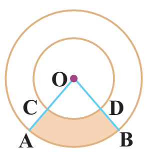



**۱۲۰.** در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره به شعاع ۶ است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.

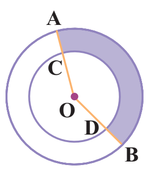



**۱۲۱.** در دایره‌ای با شعاع ۶ مساحت قطاع با زاویهٔ مرکزی $۶۰^\circ$ با مساحت قطاع در دایره‌ای با شعاع $۳\sqrt{۲}$ برابر است. زاویهٔ مرکزی قطاع در دایرهٔ کوچک‌تر را به‌دست آورید.

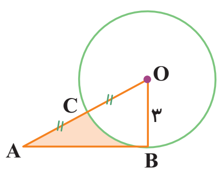
**۱۲۲.** در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و $OC = ۲AC$ است. اگر مساحت ناحیهٔ رنگی ۱۵ باشد، مساحت قطاع COD را به‌دست آورید.



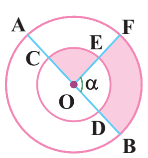

**۱۲۳.** در شکل مقابل O مرکز دایره‌ها، $OA = ۶$ و $OC = ۴$ است. اگر طول کمان AB برابر $۵\pi$ باشد، مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.



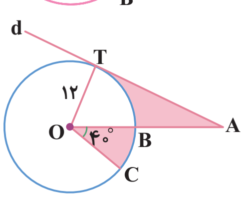

**۱۲۴.** در شکل مقابل O مرکز دایره و AB بر دایره مماس است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.




**۱۲۵.** در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر دو برابر شعاع دایره کوچک‌تر است. اگر مساحت ناحیه‌های رنگی برابر باشد، اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

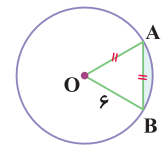



**۱۲۶.** در شکل مقابل، O مرکز دایره و خط d بر دایره مماس است. اگر AT برابر طول کمان $\overset{\frown}{TBC}$ باشد، مجموع مساحت ناحیه‌های رنگی را به‌دست آورید.

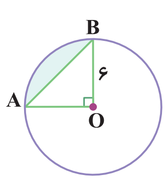



● **در شکل‌های زیر O مرکز دایره است. مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.**

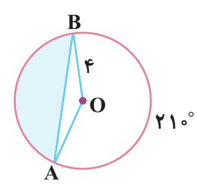
**۱۲۷.**



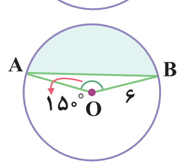

**۱۲۸.**



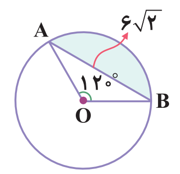

**۱۲۹.**



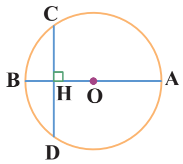

**۱۳۰.**



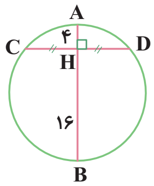

**۱۳۱.**



۱۳۲. در شکل مقابل $AB = ۳۴$ و $CD = ۳۲$ است. طول پاره‌خط BH را به‌دست آورید.




۱۳۳. در شکل مقابل طول وتر CD را به‌دست آورید.

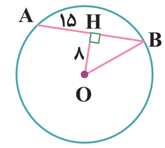



۱۳۴. فاصلهٔ مرکز دایره‌ای تا وتری به طول ۱۶ برابر ۶ است. طول وتری که به فاصلهٔ ۸ از مرکز دایره قرار دارد را به‌دست آورید.

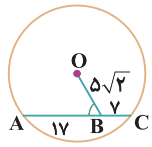
۱۳۵. در دایرهٔ $C(O,۴)$، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر نصف وتر AB است. طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ را به‌دست آورید.

● **در شکل‌های زیر O مرکز دایره است. طول شعاع دایره را به‌دست آورید.**

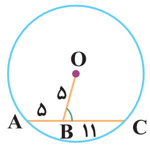
۱۳۶.



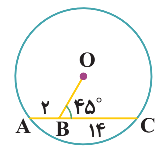

۱۳۷.



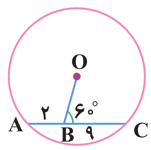

۱۳۸.



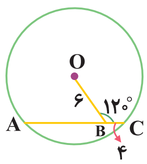

۱۳۹.




۱۴۰.

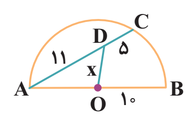



۱۴۱.

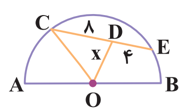



● **در شکل‌های زیر، O مرکز نیم‌دایره است. مقدار x را به‌دست آورید.**

۱۴۲.

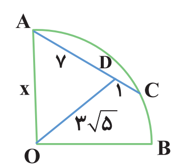



۱۴۳.

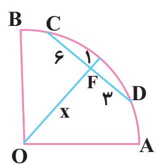



● **در شکل‌های زیر، O مرکز ربع دایره است. مقدار x را به‌دست آورید.**

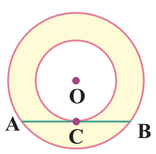
۱۴۴.




۱۴۵.

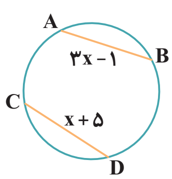



۱۴۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و وتر AB بر دایره کوچک‌تر مماس است. اگر $AB = ۱۰$ باشد، مساحت ناحیهٔ رنگی را به‌دست آورید.

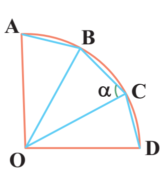



۱۴۷. در دو دایرهٔ هم‌مرکز طول وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، برابر ۱۸ است. مساحت ناحیهٔ محدود بین دو دایره را به‌دست آورید.

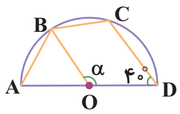
۱۴۸. در شکل مقابل، اندازهٔ کمان‌های AB و CD برابر است. مقدار x را به‌دست آورید.



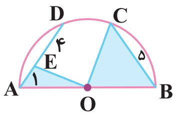

۱۴۹. در شکل مقابل O مرکز ربع دایره و $AB = BC = CD$ است. مقدار α را به‌دست آورید.



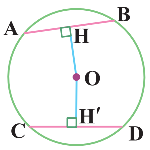
**۱۵۰.** در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و وترهای AB و BC برابرند. مقدار $\alpha$ را به‌دست آورید.



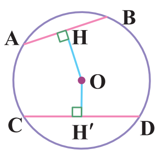

**۱۵۱.** در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. نسبت مساحت مثلث‌های رنگی را به‌دست آورید.



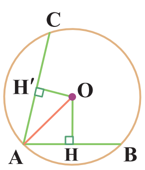

**۱۵۲.** در شکل مقابل O مرکز دایره و $OH = OH'$ است. اگر $AB = 3x + 8$ و $CD = x + 12$ باشند، مقدار x را به‌دست آورید.




**۱۵۳.** در شکل مقابل O مرکز دایره و $OH = 3OH'$ است. اگر $AB = 6$ و $CD = 10$ باشد، طول شعاع دایره را به‌دست آورید.




**۱۵۴.** در شکل مقابل O مرکز دایره، $OA = 17$، $BH = 2x + 5$ و $CH' = 3x + 2$ است. اگر $OH' < OH$ باشد، حدود x را به‌دست آورید.




یادداشت:

۲

بخش

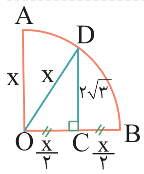
# پاسخ‌نامه

فصل ۱ **دایره**

**۱**

دایره - مرکز دایره - شعاع دایره

**۲**




ابتدا شعاع OD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم OA، OD و OB شعاع دایره هستند، پس با هم برابرند. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث DCO داریم:

$$OD^{۲} = OC^{۲} + CD^{۲} \Rightarrow x^{۲} = \frac{x^{۲}}{۴} + (۲\sqrt{۳})^{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳x^{۲}}{۴} = ۱۲ \Rightarrow x^{۲} = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

**۳**

درون - شعاع

**۴**

مرکز - بیش‌تر

**۵**

بیرون

**۶**

مماس است.

**۷**

یک

**۸**

قاطع

**۹**

دو

**۱۰**

شعاع دایره

**۱۱**

AB بر d عمود

**۱۲**

برهم عمودند.

**۱۳**

نادرست - اندازهٔ شعاع دایره همواره مثبت است نه نامنفی. وقتی می‌گوییم نامنفی یعنی اندازهٔ شعاع دایره می‌تواند صفر نیز باشد.

**۱۴**

درست

**۱۵**

نادرست - کم‌ترین فاصلهٔ نقاط خط d از دایره برابر OA است. پس دو نقطهٔ دیگری از خط d مانند B فاصله‌اش از مرکز دایره بیشتر از OA است.

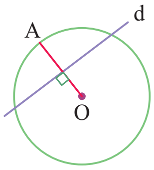
**۱۶**

نادرست - در این حالت خط بر دایره مماس است.

**۱۷**

درست

**۱۸**




نادرست - در شکل مقابل خط d بر شعاع OA عمود است، در حالی‌که d بر دایره مماس نیست.

**۱۹**

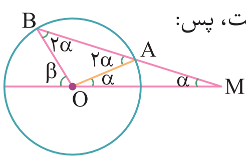
نادرست - چون خط d در نقطهٔ B بر شعاع OB عمود است، پس خط d بر دایره مماس است و فقط یک نقطهٔ مشترک دارند.

**۲۰**

درست - فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطه از خط d تا مرکز دایره همان فاصلهٔ مرکز از خط است و چون از شعاع دایره بزرگ‌تر است، پس خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.

**۲۱**

از O به A وصل می‌کنیم. چون $OA = R = MA$ است، پس مثلث OAM متساوی‌الساقین بوده و زاویهٔ AOM نیز برابر $\alpha$ است. از طرفی مثلث AOB نیز متساوی‌الساقین است زیرا $OA = OB = R$ می‌باشد. زاویهٔ $O\hat{A}B$ زاویهٔ خارجی مثلث OAM است، پس:



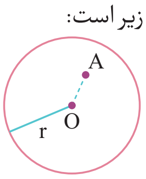

$$O\hat{A}B = \alpha + \alpha = ۲\alpha \Rightarrow O\hat{A}B = O\hat{B}A = ۲\alpha$$

$\beta$ زاویهٔ خارجی مثلث BOM است، پس: $\beta = ۲\alpha + \alpha \Rightarrow \beta = ۳\alpha$

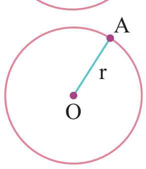
**۲۲**

وضعیت نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,r)$ به یکی از سه حالت زیر است:

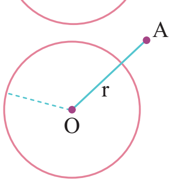
۱- نقطهٔ A درون دایره است. در این صورت فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره کم‌تر از شعاع دایره است.




۲- نقطهٔ A روی دایره است. در این صورت فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره برابر شعاع دایره است.

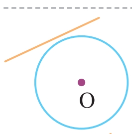



۳- نقطهٔ A بیرون دایره است. در این صورت فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره است.

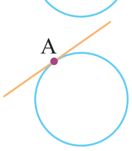



**۲۳**

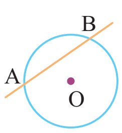
خط و دایره نقطهٔ مشترکی ندارند.




خط و دایره یک نقطهٔ مشترک دارند که در این حالت می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

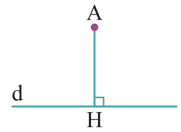



خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند که در این حالت می‌گوییم خط و دایره متقاطع هستند.



**۲۴**

از نقطهٔ A بر خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d، برابر با طول پاره‌خط AH است.



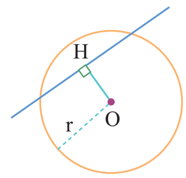

**۲۵**

از نقطهٔ A بر خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d، برابر با طول پاره‌خط AH است.

**۲۶**

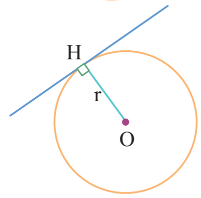
اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کم‌تر باشد، خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند و متقاطع‌اند.

$OH < r$



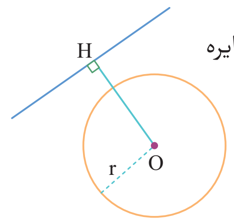

اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d برابر شعاع دایره باشد، خط و دایره یک نقطهٔ مشترک دارند یعنی خط بر دایره مماس است.

$OH = r$




اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط بیشتر از شعاع دایره باشد، خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.

$OH > r$




**۲۷**

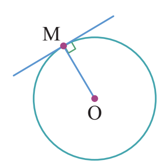
اگر هر نقطهٔ دیگری غیر از F مانند B روی خط d در نظر بگیریم، فاصله‌شان تا نقطهٔ O از مقدار شعاع دایره یعنی OF بیش‌تر است (زیرا OF بر خط d عمود است.)؛ بنابراین همهٔ این نقاط خارج از دایره قرار دارند و خط و دایره تنها در یک نقطهٔ F با هم مشترک هستند. پس می‌توان گفت که خط d بر دایره مماس است.

**۲۸**

هر نقطهٔ دیگری غیر از F روی خط d مانند B خارج از دایره قرار دارد. بنابراین فاصلهٔ آن تا مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره خواهد بود؛ یعنی $OB > r$. از طرف دیگر نقطهٔ F روی دایره قرار دارد، بنابراین فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است؛ یعنی $OF = r$. بنابراین می‌توان گفت که نقطهٔ F نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O می‌باشد. حال اگر بخواهیم از O بر خط d عمود کنیم، از آن‌جایی که فاصلهٔ O تا پای عمود، کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط خط d تا O خواهد بود، بنابراین پای عمود همان نقطهٔ F می‌باشد. پس شعاع OF در نقطهٔ F بر خط d، عمود خواهد بود.

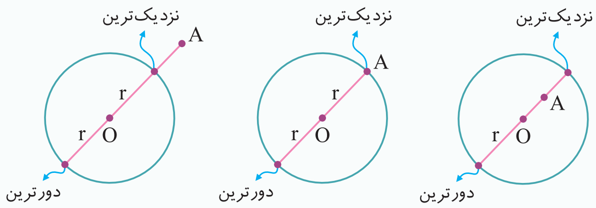
**۲۹**

می‌دانیم که خط مماس بر دایرهٔ $C(O,r)$ در نقطهٔ M بر شعاع OM عمود خواهد بود. بنابراین ابتدا شعاع OM را رسم می‌کنیم و سپس در نقطهٔ M بر OM عمود می‌کنیم تا خط مماس بر دایره در نقطهٔ M رسم شود.




**دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا یک نقطه**

در شکل‌های زیر، دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ A مشخص شده‌اند.




همان‌طور که ملاحظه می‌کنید بدون توجه به وضعیت نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,r)$ فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ A به‌صورت زیر است:

۱. فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره تا نقطهٔ A برابر است با:

فاصلهٔ دورترین نقطه $= OA + r$

۲. فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا نقطهٔ A برابر است با:

فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطه $= |OA - r|$

*چرا برای فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطه، قدرمطلق گذاشتیم؟ اگر A بیرون دایره باشه، فاصله میشه $OA - r$ و اگه A درون دایره باشه، فاصله میشه $r - OA$. به همین دلیل قدرمطلق گذاشتیم که هر دو حالت رو پوشش بده.*

**۳۰**

نادرست - با توجه به این‌که فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایرهٔ $C(O,۳)$ از نقطهٔ A برابر ۵ است داریم: $۵ = OA + r \Rightarrow ۵ = OA + ۳ \Rightarrow OA = ۲$

چون $OA < r$ است، پس A درون دایره می‌باشد.

**۳۱**

نادرست - با توجه به گزاره داریم:

$$\frac{OA + r}{|OA - r|} = ۹ \Rightarrow OA + r = ۹|OA - r|$$

حال دو حالت داریم:

$$۱)\ OA < r \Rightarrow OA + r = ۹(r - OA) \Rightarrow OA + r = ۹r - ۹OA$$

$$\Rightarrow ۱۰OA = ۸r \Rightarrow OA = \frac{۸}{۱۰}r$$

$$۲)\ OA > r \Rightarrow OA + r = ۹(OA - r) \Rightarrow OA + r = ۹OA - ۹r$$

$$\Rightarrow ۸OA = ۱۰r \Rightarrow OA = \frac{۱۰}{۸}r$$

چون r همواره مثبت است، پس در حالت اول A درون دایره و در حالت دوم A بیرون دایره است.

**۳۲**

نادرست - با توجه به گزاره $OA + r = ۱۲$ و $|OA - r| = ۲$ است. بنابراین دو حالت زیر را داریم:

$$۱)\ \begin{cases} OA + r = ۱۲ \\ OA - r = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲OA = ۱۴ \Rightarrow OA = ۷$$

$\Rightarrow r = ۵ \Rightarrow$ A بیرون دایره است.

$$۲)\begin{cases} OA + r = ۱۲ \\ r - OA = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲r = ۱۴ \Rightarrow r = ۷$$

$\Rightarrow OA = ۵ \Rightarrow$ درون دایره است. A

**۳۳**

بیرون – مرکز دایرهٔ C نقطهٔ $O(۱,-۱)$ و شعاع دایره برابر $r = ۲$ است. پس:

$$OA = \sqrt{(-۳-۱)^۲ + (۲-(-۱))^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

چون $OA > r$ است، پس A بیرون دایره است.

**۳۴**

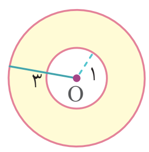
۶ – چون $OA > r$ است، پس نقطهٔ A بیرون دایره است و داریم:

$$\begin{cases} \text{بیشترین فاصله} = OA + r \\ \text{کم‌ترین فاصله} = OA - r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{کم‌ترین فاصله} - \text{بیشترین فاصله} = (OA + r) - (OA - r) = ۲r$$

بنابراین اختلاف فاصله‌ها برابر $۲r = ۲ \times ۳ = ۶$ می‌باشد.

**۳۵**




$۸\pi$ – نقاط مورد نظر در ناحیهٔ مقابل قرار دارند، پس:

$$S_{\text{رنگی}} = \pi(۳)^۲ - \pi(۱)^۲ = ۹\pi - \pi = ۸\pi$$

**۳۶**

۱/۵ – چون $OA < r$ است، داریم:

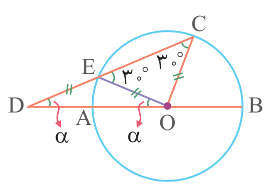
$$\begin{cases} OA + r = ۷ \\ r - OA = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۲r = ۱۱ \Rightarrow r = ۵/۵ \Rightarrow OA = ۱/۵$$

**۳۷**

۹ – فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره تا نقطهٔ A برابر $OA + r$ است، پس:

$$۱۵ = ۶ + r \Rightarrow r = ۹$$

**۳۸**



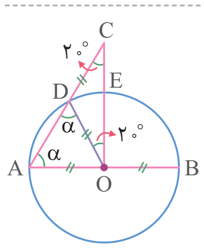

از O به E وصل می‌کنیم. چون OC و OE شعاع‌های دایره‌اند، پس با هم برابرند و مثلث COE متساوی‌الساقین است و داریم:

$$O\hat{E}C = O\hat{C}E = ۳۰^\circ$$

از طرفی چون $DE = OC$ می‌باشد، پس $DE = OE$ بوده و مثلث DEO نیز متساوی‌الساقین بوده و چون زاویهٔ OEC زاویهٔ خارجی این مثلث است، داریم:

$$O\hat{E}C = \alpha + \alpha \Rightarrow ۳۰^\circ = ۲\alpha \Rightarrow \alpha = ۱۵^\circ$$

**۳۹**

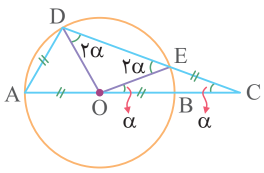



از O به D وصل می‌کنیم. چون OD و OB شعاع‌های دایره‌اند، پس با هم برابرند و از طرف چون CD با OB برابر است، پس $CD = OD$ نیز می‌باشد و این یعنی مثلث ODC متساوی‌الساقین بوده و زاویهٔ $D\hat{O}E$ برابر $۲۰^\circ$ می‌باشد.

از طرفی واضح است که مثلث DOA نیز متساوی‌الساقین بوده و زاویهٔ $A\hat{D}O$ برابر α می‌باشد. زاویهٔ $A\hat{D}O$ زاویهٔ خارجی مثلث ODC است، پس:

$$A\hat{D}O = ۲۰^\circ + ۲۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ + ۲۰^\circ = ۴۰^\circ$$

**۴۰**



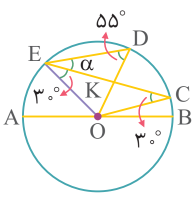

از O به E و D وصل می‌کنیم. با توجه به برابری پاره‌خط‌ها در شکل، OD و OE نیز با آن‌ها برابرند. مثلث OEC متساوی‌الساقین است، پس $E\hat{O}B = \alpha$ می‌باشد.

از طرفی مثلث DOE نیز متساوی‌الساقین می‌باشد و زاویهٔ $O\hat{E}D$ زاویهٔ خارجی مثلث OEC است پس $O\hat{D}E = O\hat{E}D = \alpha + \alpha = ۲\alpha$ می‌باشد. مثلث ADO متساوی‌الاضلاع است، پس $D\hat{A}O = A\hat{D}O = ۶۰^\circ$ هستند. حال در مثلث ADC داریم:

$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ + ۶۰^\circ + ۲\alpha + \alpha = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ$$

**۴۱**




از O به E وصل می‌کنیم. $OC = OE$ می‌باشد، پس مثلث EOC متساوی‌الساقین بوده و زاویهٔ $O\hat{E}C$ برابر $۳۰^\circ$ می‌باشد. از طرفی مثلث EOD نیز متساوی‌الساقین است؛ زیرا $OE = OD$ می‌باشد، پس $O\hat{E}D = O\hat{D}E$ بوده و داریم:

$$O\hat{E}D = O\hat{D}E \Rightarrow ۳۰^\circ + \alpha = ۵۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۵^\circ$$

**۴۲**

چون نقطهٔ A درون دایره است، پس فاصله‌اش تا مرکز دایره باید کم‌تر از شعاع دایره باشد. بنابراین داریم:

$$OA < r \Rightarrow ۵ - ۲x < ۴ \Rightarrow -۲x < ۴ - ۵ \Rightarrow -۲x < -۱ \xrightarrow{\div(-۲)} x > \frac{۱}{۲}$$

*حتماً می‌دونی که چون طرفین نامساوی رو بر عدد منفی تقسیم کردیم، جهت نامساوی عوض شد.*

از طرفی می‌دانیم فاصلهٔ دو نقطه بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس:

$$OA \geq ۰ \Rightarrow ۵ - ۲x \geq ۰ \Rightarrow ۲x \leq ۵ \Rightarrow x \leq \frac{۵}{۲}$$

از اشتراک حدود به‌دست آمده برای x، محدودهٔ آن به‌صورت $\frac{۱}{۲} < x \leq \frac{۵}{۲}$ خواهد بود.

**۴۳**

چون نقطهٔ A بیرون دایرهٔ $C(O,۴)$ نیست، پس درون یا روی دایرهٔ C می‌باشد و در نتیجه $OA \leq ۴$ است. بنابراین داریم:

$$OA \leq ۴ \Rightarrow ۶ - x \leq ۴ \Rightarrow x \geq ۶ - ۴ \Rightarrow x \geq ۲$$

از طرفی فاصلهٔ دو نقطه همواره بزرگ‌تر و یا مساوی صفر است، پس:

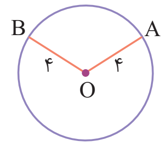
$$۶ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۶$$

از اشتراک حدود به‌دست آمده برای x، محدودهٔ آن به‌صورت $۲ \leq x \leq ۶$ می‌باشد که مجموع مقادیر صحیح x برابر است با:

$$\text{مجموع مقادیر صحیح } x = ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۲۰$$

**۴۴**

OA و OB شعاع‌های دایره هستند، پس:




$$OA = ۴ \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۱۰ = ۴ \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

$$OB = ۴ \Rightarrow ۳x^۲ - ۷x + ۶ = ۴ \Rightarrow ۳x^۲ - ۷x + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (۳x-۱)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ x = ۲ \end{cases}$$

واضح است که $x = ۲$ قابل قبول است زیرا OA و OB را برابر ۴ می‌کند.

**۴۵**

آ) چون A درون دایره است، پس باید $OA < r$ باشد:

$$OA < r \Rightarrow x + ۷ < ۳x - ۳ \Rightarrow ۲x > ۱۰ \Rightarrow x > ۵$$

از طرفی باید $r > ۰$ و $OA \geq ۰$ باشد، پس:

$$r > ۰ \Rightarrow ۳x - ۳ > ۰ \Rightarrow ۳x > ۳ \Rightarrow x > ۱$$

$$OA \geq ۰ \Rightarrow x + ۷ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۷$$

از اشتراک حدود به‌دست آمده برای x، مقدار آن به‌صورت $x > ۵$ می‌باشد.

ب) چون A بیرون دایره است، پس باید $OA > r$ باشد:

$$OA > r \Rightarrow x + ۷ > ۳x - ۳ \Rightarrow ۲x < ۱۰ \Rightarrow x < ۵$$

از طرفی باید $r > ۰$ و $OA \geq ۰$ باشد، پس:

$$r > ۰ \Rightarrow ۳x - ۳ > ۰ \Rightarrow x > ۱$$

$$OA \geq ۰ \Rightarrow x + ۷ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۷$$

از اشتراک حدود به‌دست آمده $۱ < x < ۵$ می‌باشد.

*توجه‌کن‌وقتی $r > ۰$ است‌چون $OA > r$ هستش،پس‌حتماً $OA \geq ۰$ میشه.*

**۴۶**

با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\begin{cases} OA = ۷ \\ r = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{فاصلهٔ دورترین نقطه} = OA + r = ۷ + ۴ = ۱۱ \\ \text{فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطه} = OA - r = ۷ - ۴ = ۳ \end{cases}$$

**۴۷**

فرض می‌کنیم شعاع دایره r باشد، پس:

$$OA + r = ۲/۵r \Rightarrow OA = ۱/۵r$$

از آن‌جایی که OA برابر $۱/۵r$ شده است پس نقطهٔ A بیرون دایره است و داریم:

$$OA - r = ۴ \xRightarrow{OA=۱/۵r} ۱/۵r - r = ۴ \Rightarrow ۰/۵r = ۴ \Rightarrow r = ۸$$

**۴۸**

با توجه به‌صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} OA+r=۱۱ \\ |OA-r|=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} OA+r=۱۱ \\ OA-r=۳ \end{cases} \Rightarrow ۲OA=۱۴ \Rightarrow OA=۷ \Rightarrow r=۴ \\ \begin{cases} OA+r=۱۱ \\ r-OA=۳ \end{cases} \Rightarrow ۲r=۱۴ \Rightarrow r=۷ \end{cases}$$

**۴۹**

چون خط d دایرهٔ C را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $OH < r$ است:

$$OH < r \Rightarrow ۱۰ - x < ۳ \Rightarrow x > ۷$$

از طرفی $OH \geq ۰$ است، پس:

$$۱۰ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۱۰$$

از اشتراک حدود به‌دست آمده، $۷ < x \leq ۱۰$ می‌باشد که مجموع مقادیر طبیعی x برابر است با:

$$۸ + ۹ + ۱۰ = ۲۷$$

**۵۰**

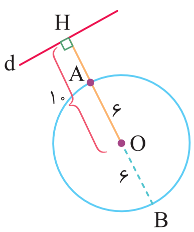
چون خط $d_۱$ بر دایره مماس است، پس:

$$OH_۱ = r \Rightarrow a + ۸ = ۳a + ۲ \Rightarrow ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳$$

به ازای $a = ۳$ اندازهٔ شعاع دایره برابر $r = ۳a + ۲ = ۳(۳) + ۲ = ۱۱$ و $OH_۲ = ۵ - a = ۵ - ۳ = ۲$ خواهد بود. از آن‌جایی که $OH_۲ < r$ است، خط $d_۲$ قاطع است بنابراین خط $d_۲$ و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند.

**۵۱**

با توجه به شکل مقابل داریم:




$$\begin{cases} OH = ۱۰ \\ r = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{کم‌ترین فاصله} = AH = OH - r = ۱۰ - ۶ = ۴ \\ \text{بیش‌ترین فاصله} = BH = OH + r = ۱۰ + ۶ = ۱۶ \end{cases}$$

**۵۲**

شعاع

**۵۳**

وتر

**۵۴**

قطر

**۵۵**

مرکز

**۵۶**

کمان

**۵۷**

زاویهٔ مرکزی

**۵۸**

قطاع

**۵۹**

نصف

**۶۰**

قطر دایره

**۶۱**

طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر است با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \times ۴ \times ۹۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = ۲\pi$$

**۶۲**

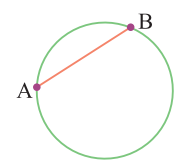
$$S=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow S=\frac{\pi\times ۹^{۲}\times ۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=۲۷\pi$$

**۶۳**

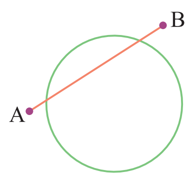
درست

**۶۴**

نادرست - در صورتی که دو نقطهٔ متمایز دایره نقاط A و B باشند درست است.




AB وتر است.




AB وتر نیست.

**۶۵**

نادرست - اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.

**۶۶**

درست - نیم‌دایره کمانی با اندازهٔ $۱۸۰^\circ$ است.

**۶۷**

نادرست - طول کمان AB از دایرهٔ $C(O,R)$ روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ $\alpha$ برابر $L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}$ است.

**۶۸**

درست

**۶۹**

درست

**۷۰**

درست

**۷۱**

نادرست - مساحت قطاع مورد نظر $S=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰^\circ}$ است.

**۷۲**

نادرست

$$S=\frac{\pi\times ۶^{۲}\times ۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=۱۲\pi$$

**۷۳**

به پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع دایره می‌گویند.

**۷۴**

پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد را یک وتر از دایره می‌گویند.

**۷۵**

وتری از دایره که از مرکز دایره عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند.

**۷۶**

به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است را کمان می‌گویند.

**۷۷**

زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشد را زاویهٔ مرکزی می‌گویند.

**۷۸**

ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است را یک قطاع دایره می‌گویند.

**۷۹**

ناحیهٔ محصور به یک وتر و کمان متناظرش را یک قطعه از دایره می‌گویند.

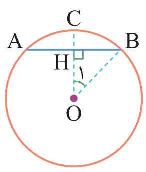
**۸۰**

اندازهٔ کمان‌های AB و $A'B'$ برابر زاویهٔ مرکزی مقابل آن‌ها است، پس اندازهٔ آن‌ها برابر $۶۰^\circ$ می‌باشد. اما طول کمان‌های AB و $A'B'$ برابر است با:

$$L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}\Rightarrow\begin{cases}L_{\overset{\frown}{AB}}=\frac{\pi\times ۱\times ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{\pi}{۳}\\ L_{\overset{\frown}{A'B'}}=\frac{\pi\times ۲\times ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

**۸۱**

از O بر وتر AB عمود کرده و امتداد می‌دهیم تا کمان AB را در نقطهٔ C قطع کند. می‌دانیم OC وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند، پس:




$$AH=BH=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$$

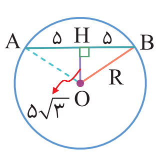
از O به B وصل می‌کنیم. زاویهٔ $O_۱$ زاویهٔ مرکزی رو به کمان BC است، پس $\hat{O}_۱=\overset{\frown}{BC}=۳۰^\circ$ می‌باشد. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB داریم:

$$\tan\hat{O}_۱=\frac{BH}{OH}\Rightarrow\tan ۳۰^\circ=\frac{۵}{OH}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۵}{OH}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{۳\times ۵}{\sqrt{۳}}=۵\sqrt{۳}$$

**۸۲**

با توجه به صورت سؤال، شکل مسئله به‌صورت زیر است. می‌دانیم شعاع عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:



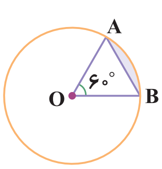

$$OB^{۲}=OH^{۲}+BH^{۲}\Rightarrow R^{۲}=(۵\sqrt{۳})^{۲}+۵^{۲}$$

$$\Rightarrow R^{۲}=۷۵+۲۵=۱۰۰\Rightarrow R=۱۰$$

مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است، پس $A\hat{O}B=۶۰^\circ$ بوده و داریم:

$$L_{AB}=\frac{\pi\times ۱۰\times ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{۱۰\pi}{۳}$$

**۸۳**




$$S_{\text{قطعه}}=S_{\text{قطاع}}-S_{\overset{\Delta}{OAB}}$$

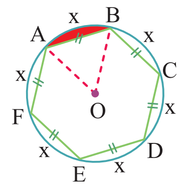
$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}}=\pi(۴)^{۲}\times\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}-\frac{۱}{۲}\times ۴^{۲}\times\sin ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}}=\frac{۸\pi}{۳}-\frac{۱}{۲}\times ۴^{۲}\times(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}}=\frac{۸\pi}{۳}-۴\sqrt{۳}$$

**۸۴**

اگر وترها در دایره برابر باشند، کمان‌های نظیر برابرند. چون شش‌ضلعی، منتظم است، پس کمان‌های نظیر ضلع‌های شش‌ضلعی برابرند.




$$۶x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

چون زاویهٔ $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است، پس $A\hat{O}B = ۶۰^\circ$ می‌باشد؛ بنابراین مثلث AOB متساوی‌الاضلاع بوده و داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴^۲ = ۴\sqrt{۳}$$

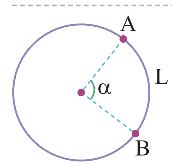
مساحت قطاع AOB برابر است با:

$$S = \frac{\pi \times (۴)^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{۸\pi}{۳}$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر $\frac{۸\pi}{۳} - ۴\sqrt{۳}$ می‌باشد.

**۸۵**

می‌دانیم دایره، کمانی با اندازهٔ ۳۶۰ درجه و طول $۲\pi R$ است، پس به کمک تناسب زیر داریم:



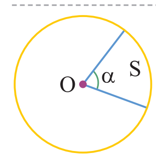

| اندازه | طول |
|---|---|
| $۳۶۰^\circ$ | $۲\pi R$ |
| $\alpha$ | $L$ |

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} L \times ۳۶۰^\circ = \alpha \times ۲\pi R$$

$$\Rightarrow L = \frac{\alpha \times ۲\pi R}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow L = \frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}$$

**۸۶**

می‌دانیم دایره قطاعی با زاویهٔ مرکزی $۳۶۰^\circ$ و مساحت $\pi R^۲$ است، پس:

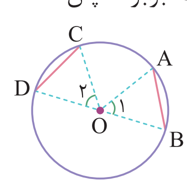



| زاویهٔ مرکزی | مساحت |
|---|---|
| $۳۶۰^\circ$ | $\pi R^۲$ |
| $\alpha$ | $S$ |

$$\Rightarrow \pi R^۲ \times \alpha = ۳۶۰^\circ \times S \Rightarrow S = \frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}$$

**۸۷**

از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. چون $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ است، پس زوایای مرکزی مقابل آن‌ها یعنی $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ برابرند، پس:

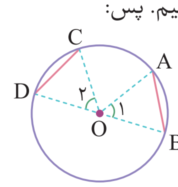



$$\begin{cases} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ OA = OD = r \\ OB = OC = r \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $AB = CD$ می‌باشد.

**۸۸**

از مرکز دایره به دوسر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. پس:

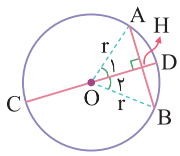



$$\begin{cases} OA = OC = r \\ OB = OD = r \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ می‌باشد؛ چون $O_۱$ و $O_۲$ زوایای مرکزی رو به کمان‌های AB و CD هستند، پس $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ می‌باشد.

**۸۹**

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم و داریم:



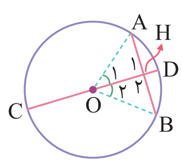

$$\begin{cases} OA = OB = r \\ OH = OH \ (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{برابری وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OHA} \cong \overset{\Delta}{OHB}$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، از جمله $AH = BH$ و $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ می‌باشد.

چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر AB را نصف کرده است و چون زوایای مرکزی $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ برابرند، پس کمان نظیر آن‌ها یعنی $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BD}$ نیز برابر می‌باشند، پس قطر CD کمان $\overset{\frown}{AB}$ را نیز نصف کرده است.

**۹۰**

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون CD وتر AB را نصف کرده است، پس $AH = BH$ می‌باشد و داریم:



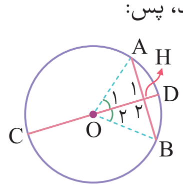

$$\begin{cases} OA = OB = r \\ AH = BH \\ OH = OH (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{AHO} \cong \overset{\Delta}{BHO}$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند از جمله $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ و $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲$ می‌باشد، چون زوایای مرکزی $O_۱$ و $O_۲$ برابرند، پس کمان مقابل آن‌ها یعنی $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BD}$ برابرند؛ بنابراین CD، کمان نظیر وتر AB را نصف کرده است.

از طرفی چون $\hat{H}_۱ + \hat{H}_۲ = ۱۸۰^\circ$ و $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲$، پس $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$ می‌باشد، بنابراین قطر CD بر وتر AB عمود است.

**۹۱**

وتر نظیر کمان AB را رسم می‌کنیم. چون قطر CD کمان AB را نصف کرده است، پس $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ می‌باشد. حال از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ می‌باشد، پس زوایای مرکزی مقابلِ کمان‌های AD و BD یعنی $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ با هم برابرند، پس:

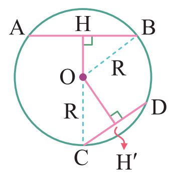



$$\begin{cases} OA = OB = r \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ OH = OH (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AHO} \cong \overset{\Delta}{BHO}$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند یعنی $AH = BH$ و $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲$ می‌باشد. چون $AH = BH$ است پس قطر CD وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB را نصف کرده است. از آن‌جایی‌که $\hat{H}_۱ + \hat{H}_۲ = ۱۸۰^\circ$ و $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲$ می‌باشند، پس $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$ بوده و این یعنی قطر CD بر وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB عمود است.

**۹۲**

از O به B و C وصل می‌کنیم. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های OHB و OCH′ داریم:




$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \Rightarrow R^۲ = OH^۲ + BH^۲$$
$$\Rightarrow OH^۲ = R^۲ - BH^۲$$
$$OC^۲ = OH'^۲ + CH'^۲$$
$$\Rightarrow R^۲ = OH'^۲ + CH'^۲$$
$$\Rightarrow OH'^۲ = R^۲ - CH'^۲$$

چون $OH < OH'$ است، پس $OH^۲ < OH'^۲$ می‌باشد و داریم:

$$R^۲ - BH^۲ < R^۲ - CH'^۲ \Rightarrow -BH^۲ < -CH'^۲$$
$$\Rightarrow BH^۲ > CH'^۲ \Rightarrow BH > CH$$

می‌دانیم H وسط وتر AB و H′ وسط وتر CD است، پس:

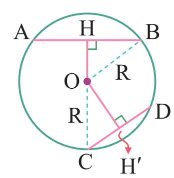
$$BH > CH' \xRightarrow{\times ۲} ۲BH > ۲CH' \Rightarrow AB > CD$$

**۹۳**

از O به B و C وصل می‌کنیم. می‌دانیم H وسط AB و H′ وسط CD می‌باشد، پس:

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \Rightarrow BH > CH'$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های OHB و OCH′ داریم:




$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \Rightarrow R^۲ = OH^۲ + BH^۲$$
$$\Rightarrow BH^۲ = R^۲ - OH^۲$$
$$OC^۲ = OH'^۲ + CH'^۲$$
$$\Rightarrow R^۲ = OH'^۲ + CH'^۲$$
$$\Rightarrow CH'^۲ = R^۲ - OH'^۲$$

چون $BH > CH'$ است، پس $BH^۲ > CH'^۲$ می‌باشد و داریم:

$$R^۲ - OH^۲ > R^۲ - OH'^۲ \Rightarrow -OH^۲ > -OH'^۲ \Rightarrow OH^۲ < OH'^۲$$
$$\Rightarrow OH < OH'$$

**۹۴**

بزرگ‌ترین وتر همان قطر دایره است که طول آن دو برابر طول شعاع دایره می‌باشد، پس:

$$۶x + ۲ = ۲ \times ۱۰ \Rightarrow ۶x = ۲۰ - ۲ \Rightarrow ۶x = ۱۸ \Rightarrow x = ۳$$

**۹۵**

آ) دایره کمانی با اندازهٔ $۳۶۰^\circ$ است، پس:

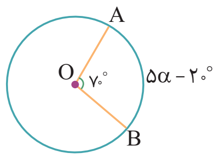
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۴x + ۳x = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۹x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

ب) دایره کمانی با اندازهٔ $۳۶۰^\circ$ است، پس:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۱۰^\circ + ۴x - ۱۲۰^\circ + ۳x + ۲۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۹x - ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹x = ۴۵۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

**۹۶**

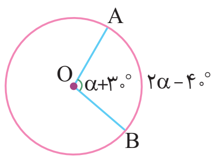
زاویهٔ $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است پس اندازهٔ آن با اندازهٔ کمان روبه‌رویش برابر است:




$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow ۷۰^\circ = ۵\alpha - ۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۵\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۸^\circ$$

**۹۷**

زاویهٔ $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است، پس اندازهٔ آن با اندازهٔ کمان مقابلش برابر است. بنابراین داریم:




$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \alpha + ۳۰^\circ = ۲\alpha - ۴۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha = ۷۰^\circ$$

**۹۸**

دایرهٔ کمانی با اندازهٔ $۳۶۰^\circ$ است، پس:

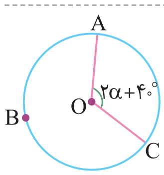
$$۴x - ۴۰^\circ + x + ۲۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۵x = ۳۸۰^\circ \Rightarrow x = ۷۶^\circ$$

زاویهٔ $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است، پس:

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \alpha = x + ۲۰^\circ \xRightarrow{x=۷۶^\circ} \alpha = ۹۶^\circ$$

**۹۹**

دایره کمانی با اندازهٔ $۳۶۰^\circ$ است، پس:




$$\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{AC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲۳۰^\circ + \overset{\frown}{AC} = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۱۳۰^\circ$$

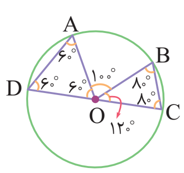
می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ کمان روبه‌رویش برابر است، پس:

$$۲\alpha + ۴۰^\circ = ۱۳۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

**۱۰۰**

مثلث‌های AOD و BOC متساوی‌الساقین هستند، پس:

$$O\hat{A}D = O\hat{D}A = ۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow D\hat{O}A = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۶۰^\circ) = ۶۰^\circ$$
$$O\hat{B}C = O\hat{C}B = ۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۸۰^\circ) = ۲۰^\circ$$




بنابراین زاویهٔ $A\hat{O}B$ برابر است با:

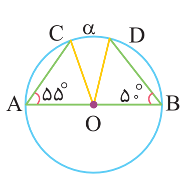
$$A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۲۰^\circ) = ۱۰۰^\circ$$

زاویهٔ $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$ است، پس:

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \alpha = ۱۰۰^\circ$$

**۱۰۱**

از O به C و D وصل می‌کنیم. مثلث‌های AOC و BOD متساوی‌الساقین هستند، پس:




$$\begin{cases} O\hat{C}A = O\hat{A}C = ۵۵^\circ \\ A\hat{O}C + ۵۵^\circ + ۵۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}C = ۷۰^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} O\hat{D}B = O\hat{B}D = ۵۰^\circ \\ B\hat{O}D + ۵۰^\circ + ۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}D = ۸۰^\circ \end{cases}$$