

۳۴	۷	ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (آزمون اول)	۱	فصل ۱: ماتریس و کاربردها
۳۴	۷	ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (آزمون دوم)	۲	
۳۵	۸	وارون ماتریس و دترمینان (آزمون اول)	۳	
۳۶	۹	وارون ماتریس و دترمینان (آزمون دوم)	۴	
۳۷	۱۰	جامع فصل (استاندارد)	۵	
۳۹	۱۱	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۶	
۴۰	۱۳	مقاطع و برش	۷	فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی
۴۱	۱۳	مکان هندسی و کاربرد آن	۸	
۴۲	۱۴	دایره (آزمون اول)	۹	
۴۴	۱۵	دایره (آزمون دوم)	۱۰	
۴۶	۱۶	بیضی	۱۱	
۴۷	۱۶	سه‌می	۱۲	
۴۸	۱۷	جامع فصل (استاندارد)	۱۳	
۴۹	۱۸	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۱۴	
۵۲	۲۰	معرفی فضای R^3 و بردارها (آزمون اول)	۱۵	فصل ۳: بردارها
۵۳	۲۰	معرفی فضای R^3 و بردارها (آزمون دوم)	۱۶	
۵۴	۲۱	ضرب داخلی و خارجی (آزمون اول)	۱۷	
۵۴	۲۲	ضرب داخلی و خارجی (آزمون دوم)	۱۸	
۵۶	۲۳	جامع فصل (استاندارد)	۱۹	
۵۷	۲۴	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۲۰	
۵۸	۲۶	نیم‌سال اول (آزمون اول)	۲۱	آزمون‌های جامع
۵۹	۲۶	نیم‌سال اول (آزمون دوم)	۲۲	
۶۰	۲۷	جامع (آزمون اول)	۲۳	
۶۱	۲۸	جامع (آزمون دوم)	۲۴	
۶۲	۲۹	جامع (آزمون سوم)	۲۵	
۶۴	۳۰	جامع (آزمون چهارم)	۲۶	
۶۵	۳۰	جامع (آزمون پنجم)	۲۷	



۹۶- دایره‌ای از نقاط $A(-2, 4)$ و $B(4, 6)$ می‌گذرد و معادله یکی از قطرهای آن $x + y = 4$ است. فاصله مرکز دایره از مبدأ مختصات کدام است؟

۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

۹۷- شعاع دایره‌ای که مرکز آن $O(1, -3)$ و بر دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ مماس خارج باشد، کدام است؟

۲ (۱) 3 (۲) 4 (۳) 6 (۴)

۹۸- شعاع دایره‌ای که از نقطه $A(1, 2)$ می‌گذرد و بر دو محور مختصات مماس باشد، کدام است؟

۳ یا ۲ (۱) 5 یا 1 (۲) 3 یا 1 (۳) 5 یا 2 (۴)

۹۹- دو نقطه $A(-1, 0)$ و $B(2, 0)$ مفروض‌اند. معادله مکان هندسی نقطه‌ای مانند M که $MA = 2MB$ باشد، کدام است؟

۱ (۱) $x^2 + y^2 = 4$ (۲) $y = 0$ (۳) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ (۴) $x + y = 4$

۱۰۰- معادله تمام قطرهای دایره‌ای به صورت $(m-2)x + (m+3)y = 3m + 4$ هستند. شیب خط مماس بر این دایره در نقطه $A(3, 1)$ واقع بر دایره کدام است؟

۱ (۱) -1 (۲) -2 (۳) 1 (۴) 2

• موضوع: دایره (آزمون دوم) ۱۰
 • نوع آزمون: محنت
 • صفحه کتاب درسی: ۴۶ تا ۴۰
 • ۱۰ تست در ۱۸ دقیقه

۱۰۱- معادله دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس بوده و مرکز آن روی خط $2y - 3x = 5$ باشد، کدام است؟

۱ (۱) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 5 = 0$

۳ (۱) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 5 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$

۱۰۲- اگر خط‌المركزین دو دایره $x^2 + y^2 - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 + ax + 2y = 1$ منطبق بر خط $y = x + b$ باشد، طول خط‌المركزین این دو دایره کدام است؟

۱ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{5}$

۱۰۳- اگر طول مماسی که از نقطه $A(3, 2)$ بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x = a$ رسم می‌شود، برابر $\sqrt{6}$ باشد، a کدام است؟

۱ (۱) -1 (۲) 5 (۳) 1 (۴) -5

۱۰۴- اگر دو دایره $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ و $x^2 + y^2 + (x+3)^2 + (y-4)^2 = m^2$ مماس داخل باشند، m کدام است؟

۱ (۱) ± 5 (۲) ± 10 (۳) ± 15 (۴) گزینه‌های (۱) و (۳)

۱۰۵- اگر خط $y = x$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y + m = 0$ مماس باشد، مقدار m کدام است؟

۱ (۱) $m = 0$ (۲) $m = 1$ (۳) $m = -2$ (۴) $m = -1$

۱۰۶- معادله قطری از دایره $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 3 = 0$ که بر خط $3x + 2y + 1 = 0$ عمود باشد، کدام است؟

۱ (۱) $2y = 3x - 14$ (۲) $2y = 3x - 16$ (۳) $3y = 2x - 14$ (۴) $3y = 2x - 16$

۱۰۷- به ازای کدام مقدار m ، خط $3x + my + (3m - 1) = 0$ بر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ مماس است؟

۱ (۱) $\frac{11}{20}$ (۲) $\frac{20}{11}$ (۳) $\frac{11}{10}$ (۴) $\frac{10}{11}$

۱۰۸- دایره $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ روی خط $3x + 4y + 19 = 0$ وترى جدا می‌کند. طول این وتر کدام است؟

۱ (۱) 3 (۲) 6 (۳) 4 (۴) 8

۱۰۹- دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مفروض است. معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر این دایره رسم می‌شود، کدام است؟

۱ (۱) $x + y = 5$ (۲) $x^2 + y^2 - 2y = 3$ (۳) $x^2 + y^2 - 2x = 7$ (۴) $2x + y = 3$

۱۱۰- دو دایره $x^2 + y^2 - 2ax + by + 5a = 0$ و $x^2 + y^2 - 18x + by + 81 = 0$ دارای دو مماس مشترک خارجی موازی با هم و یک مماس مشترک داخلی عمود بر خط‌المركزین دو دایره هستند. $a + b$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱ (۱) 9 (۲) -9 (۳) 1 (۴) -13

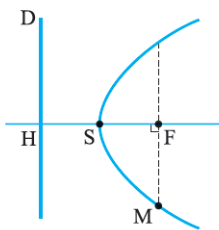


۱۲۳- نقطه $M(-3, 4)$ بر یک سهمی به کانون $F(2, -1)$ قرار دارد. فاصله نقطه M تا خط هادی سهمی کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) ۱۰

۱۲۴- معادله سهمی که $F(3, -\frac{5}{4})$ کانون و خط $y = \frac{y}{4}$ خط هادی آن باشد، کدام است؟

- (۱) $x^2 - 6x + 12y + 3 = 0$ (۲) $x^2 - 6x - 12y + 15 = 0$ (۳) $x^2 - 6x + 12y + 15 = 0$ (۴) $x^2 - 6x - 12y + 3 = 0$



۱۲۵- شکل مقابل، یک سهمی است که خط D هادی، S رأس، F کانون و M یک نقطه آن است به طوری که

$MF \perp SF$. اگر نقطه H برخورد امتداد SF با خط D باشد، حاصل $\frac{MH}{MF}$ کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۲۶- سهمی با کانون $F(3, -4)$ و خط هادی $y = 12$ ، محور x ها را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. طول پاره خط AB چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۲۷- در یک سهمی، نقطه‌های $F(1, 2)$ و $S(-1, 2)$ به ترتیب، کانون و رأس آن هستند. اگر از F عمودی بر SF رسم کنیم تا سهمی را در M و N قطع کند، طول پاره خط MN کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۲۸- اگر دایره‌ای به شعاع واحد که مرکز آن، منطبق بر رأس سهمی به معادله $y^2 - 2y = 4x - 5$ است رسم شود، آن گاه

(۱) این دایره خط هادی را در دو نقطه قطع می‌کند و مرکزش روی خط هادی است.

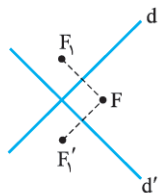
(۲) این دایره خط هادی را قطع نمی‌کند.

(۳) این دایره خط هادی را در دو نقطه قطع می‌کند و مرکزش روی خط هادی نیست.

(۴) این دایره بر خط هادی مماس است.

۱۲۹- سهمی $x^2 = 4y$ را در نظر بگیرید. پرتوی در امتداد خط $x = 2$ بر این سهمی می‌تابد، معادله پرتو بازتابش از روی سهمی، کدام است؟

- (۱) $15x - 2y + 2 = 0$ (۲) $y = \frac{1}{4}$ (۳) $y = 1$ (۴) $15x + 2y - 2 = 0$



۱۳۰- در شکل مقابل، نقطه F کانون سهمی و دو خط d و d' بر سهمی مماس‌اند. اگر بازتاب‌های F نسبت به d و d' را F_1 و F_1' و خطی که از F_1F_1' می‌گذرد را L بنامیم، کدام درست است؟

(۱) خطی است که در رأس سهمی بر آن مماس است.

(۲) L هادی سهمی است.

(۳) فقط موازی هادی است ولی بر آن منطبق نیست.

(۴) F_1 و F_1' روی سهمی هستند.

• نوع آزمون: استاندارد

• ۱۵ تست در ۲۴ دقیقه

• موضوع: جامع فصل

• صفحه کتاب درسی: ۳۴ تا ۵۹

۱۳

۱۳۱- مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر محور y ها به فاصله ۲ باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ (۳) $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ (۴) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

۱۳۲- نمودار معادله $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ کدام شکل است؟

- (۱) یک نقطه (۲) یک دایره (۳) تهی (۴) سهمی

۱۳۳- معادله $(k-1)x^2 + y^2 + kx - 2y = 2$ یک دایره است. شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۳۴- اندازه مماسی که از نقطه $A(2, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 2y = 8$ رسم می‌شود، چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۵ (۴) $\sqrt{11}$

۱۳۵- معادله خطی که در نقطه $A(4, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 35$ مماس باشد، کدام است؟

- (۱) $y - 3x + 9 = 0$ (۲) $3y + x - 13 = 0$ (۳) $y + 3x - 15 = 0$ (۴) $3y - x - 5 = 0$



۱۳۶- اگر خط $3x - 2y + m + 1 = 0$ دایره $x^2 + y^2 - (m-2)x + (4-m)y + 11 = n$ را در نقطه $(1, -2)$ قطع کند، شعاع دایره کدام است؟

- (۱) $13\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{13}$

۱۳۷- اگر دایره $x^2 + y^2 + 2x = k$ بر نیمساز ناحیه اول و سوم مماس باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) 2 (۴) -2

۱۳۸- طول شعاع کوچک ترین دایره‌ای که بر دو دایره $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ و $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ مماس باشد، کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) 2 (۴) $\frac{5}{2}$

۱۳۹- در یک بیضی، طول قطر بزرگ، سه برابر طول قطر کوچک است. اندازه $\frac{c}{a}$ در این بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

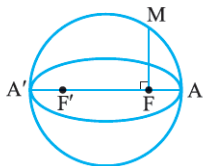
۱۴۰- نسبت دو قطر یک بیضی $\frac{\sqrt{13}}{3}$ می‌باشد. کدام رابطه درست است؟

- (۱) $2c = 3b$ (۲) $3a = 2c$ (۳) $2b = 3c$ (۴) $2a = 3c$

۱۴۱- در یک بیضی، نقاط Λ و Λ' دو سر قطر بزرگ، B و B' دو سر قطر کوچک و F و F' کانون‌های آن و F کانون نزدیک تر به رأس Λ است.

اگر $AB = 2\sqrt{34}$ و $FB = 10$ باشد، مساحت مثلث ABF کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6



۱۴۲- در شکل مقابل، دایره‌ای به قطر AA' رسم شده است و AA' قطر بزرگ بیضی با کانون‌های F و F' است. اگر

M نقطه‌ای از دایره باشد به طوری که $MF \perp AA'$ ، آن گاه طول MF کدام است؟

- (۱) $\frac{3a}{2}$ (۲) $\frac{ac}{b}$ (۳) b (۴) $\frac{ab}{c}$

۱۴۳- در سهمی $y^2 - 4y + 8x + 2 = 0$ فاصله کانون تا خط هادی کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 4 (۳) 8 (۴) 16

۱۴۴- به ازای چه مقدار k ، کانون سهمی $y^2 - 2y + 4x + k = 0$ روی خط $x - 3y + 2 = 0$ قرار دارد؟

- (۱) -7 (۲) 4 (۳) 3 (۴) 2

۱۴۵- پرتوی موازی با محور x ها به دیواره سهمی $y^2 - 8x - 6y + 33 = 0$ می‌تابد. بازتاب این پرتو از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(5, 5)$ (۲) $(3, 3)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(5, 3)$

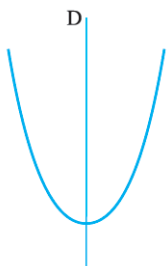
• نوع آزمون: به سوی ۱۰۰

• ۱۵ تست در ۲۶ دقیقه

• موضوع: جامع فصل

• صفحه کتاب درسی: ۳۴ تا ۵۹

۱۴



۱۴۶- سهمی شکل مقابل را حول خط D ، محور تقارن آن، دوران می‌دهیم؛ صفحه‌ای عمود بر D تمام سهمی‌های دوران یافته

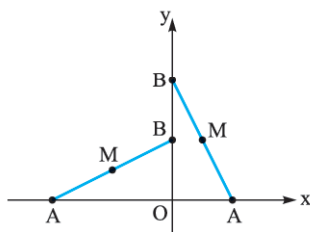
را قطع می‌کند. مقطع حاصل کدام شکل است؟

- (۱) بیضی
(۲) مستطیل
(۳) دایره
(۴) مربع

۱۴۷- پاره خط ثابت AB به طول ۱۰ طوری جابه‌جا می‌شود که نقطه A همواره روی محور x ها و نقطه B همواره روی محور y ها باشد. اگر M

وسط پاره خط AB باشد، مکان هندسی نقطه M کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع 5
(۲) بیضی به مرکز O که طول قطر بزرگ آن 10 است.
(۳) دایره‌ای به مرکز O و شعاع 10
(۴) بیضی به مرکز O که طول قطر کوچک آن 10 است.





۱۴۸- مکان هندسی نقاطی که فاصله آن‌ها از نقطه $A(2, 3)$ دو برابر فاصله آن‌ها از نقطه $B(-1, 3)$ باشد، کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱
 (۲) دایره‌ای به مرکز $O(-2, 3)$ و شعاع ۱
 (۳) دایره‌ای به مرکز $O(-2, 3)$ و شعاع ۲
 (۴) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲

۱۴۹- خط $y = 2x - 5$ ، دایره $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 1$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) $\sqrt{5}$
 (۴) $2\sqrt{5}$

۱۵۰- اندازه وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 = 2y$ و $x^2 + y^2 - x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
 (۲) $2\sqrt{5}$
 (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 (۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۱۵۱- معادله دایره‌ای که بر خط $3x + 2y - 6 = 0$ مماس بوده و با دایره $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$ هم مرکز باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 3$

(۳) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 8$

۱۵۲- اگر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3m - 4 = 0$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -3 قطع کند، طول قطر آن کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$
 (۲) ۶
 (۳) ۳
 (۴) $8\sqrt{2}$

۱۵۳- دو سر نخ به طول L را در دو نقطه ثابت نصب کرده‌ایم و مدادی به این نخ متکی کرده‌ایم تا نخ به حالت کشیده درآید. با حرکت مداد، یک بیضی حاصل می‌شود. اگر مختصات دو سر نخ $A(1, 2)$ و $B(1, -4)$ و نزدیک‌ترین نقطه بیضی به نقطه A ، $M(1, 4)$ باشد، طول نخ کدام است؟

- (۱) ۵
 (۲) ۴
 (۳) ۱۰
 (۴) ۸

۱۵۴- اگر در یک بیضی فاصله یک کانون از دورترین نقطه واقع بر بیضی، ۴ برابر فاصله آن تا نزدیک‌ترین نقطه بیضی باشد، آن گاه خروج از مرکز بیضی کدام است؟

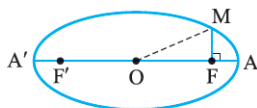
- (۱) $\frac{3}{5}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{4}{5}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۵۵- طول قطرهای بزرگ و کوچک یک بیضی به ترتیب، ۱۲ و ۶ و کانون‌های آن F و F' هستند. اگر M ، نقطه‌ای روی بیضی باشد، طوری که

$MF' \perp MF$ و بدانیم $MF < MF'$. آن گاه طول MF کدام است؟

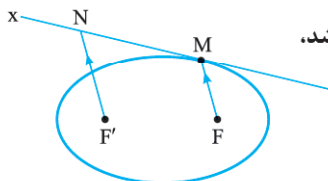
- (۱) $6 + 3\sqrt{2}$
 (۲) $6 - 3\sqrt{2}$
 (۳) $6 + 3\sqrt{3}$
 (۴) $6 - 3\sqrt{3}$

۱۵۶- در بیضی شکل مقابل، $MF \perp AA'$ ، $FF' = 8$ ، $a = 5$ ، $MF \perp AA'$ ، $FF' = 8$ ، $a = 5$ ، فاصله M از O کدام است؟



- (۱) ۴
 (۲) $\frac{29}{6}$

- (۳) $\frac{\sqrt{473}}{5}$
 (۴) $\frac{\sqrt{481}}{5}$



۱۵۷- در بیضی شکل مقابل، $a = 5$ ، $b = 3$ ، $MF = 4$ و Mx بر بیضی مماس است. اگر $F'N \parallel MF$ باشد،

طول NF' کدام است؟

- (۱) ۵
 (۲) ۶

- (۳) ۸
 (۴) ۱۰

۱۵۸- در سهمی به معادله $k(x^2 - 4x + 5) = (k+1)y$ ، فاصله رأس تا خط هادی، برابر ۲ و دهانه سهمی به طرف بالا است. مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) $-\frac{1}{9}$
 (۳) $\frac{1}{7}$
 (۴) -3

۱۵۹- معادله سهمی که خط هادی آن $x = 0$ ، محور تقارن آن $y = 3$ و از نقطه $A(2, 5)$ می‌گذرد، کدام است؟

(۱) $y^2 - 10y - 8x + 41 = 0$

(۳) $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$

(۲) $y^2 - 6y + 4x - 3 = 0$

(۴) $y^2 - 6y - 4x + 13 = 0$

۱۶۰- نقاط متمایز A و B غیر واقع بر خط Δ و در یک طرف آن هستند. چند سهمی می‌توان مشخص نمود که Δ خط هادی آن باشد و از نقاط

A و B بگذرد؟

- (۱) حداکثر یکی
 (۲) حداکثر دو تا
 (۳) دقیقاً یکی
 (۴) بی‌شمار



۲۶۹- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ و $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 16 & -7 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}$

۲۷۰- اگر دستگاه $\begin{cases} 2x+ky=1 \\ kx+8y=-2 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) فقط -۴ (۲) فقط ۴ (۳) ± 4 (۴) هیچ مقدار k

• موضوع: جامع (آزمون سوم)



• ۱۰ تست در ۲۵ دقیقه

• صفحه کتاب درسی: ۱۰ تا ۸۴

۲۷۱- اگر زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر با 45° باشد، زاویه بین بردارهای $\frac{|\vec{b}|}{3}\vec{a}$ و $\frac{-\delta\vec{b}}{|\vec{a}|}$ کدام است؟

- (۱) 135° (۲) 90° (۳) 45° (۴) 180°

۲۷۲- اگر $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ، $\vec{b} = (1, k, 2)$ و $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ، آن‌گاه k کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3 + \sqrt{161}}{8}$ (۴) $\frac{3 - \sqrt{161}}{8}$

۲۷۳- نقاط $A(0, 1)$ ، $B(0, 4)$ و $C(3, k)$ سه رأس مثلث ABC هستند. با تغییر k ، مکان هندسی نقطهٔ هم‌مرسی میانه‌های مثلث ABC کدام است؟

- (۱) خطی موازی با محور X ها (۲) خطی موازی با محور Y ها (۳) خطی موازی با نیم‌ساز ربع اول و سوم (۴) خطی موازی با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم

۲۷۴- از نقطهٔ $A(4, 0)$ دو مماس AT و AT' بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ رسم شده‌اند. طول وتر TT' کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۲۷۵- اگر نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و B و B' دو سر قطر کوچک یک بیضی باشند که F و F' کانون‌های آن بیضی هستند و داشته باشیم

$$\frac{FF'}{AA'} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

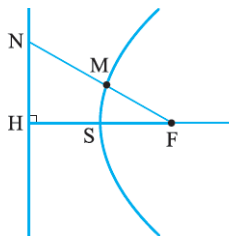
آن‌گاه حاصل $\frac{BB'}{AA'}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

۲۷۶- در یک بیضی، طول‌های قطر بزرگ و کوچک ۱۰ و ۶ هستند. چند نقطه روی بیضی یافت می‌شود که از مرکز بیضی به فاصلهٔ ۴ باشد؟

- (۱) چهار (۲) سه (۳) دو (۴) یک

۲۷۷- در شکل مقابل، اگر نقطهٔ F کانون سهمی، M نقطه‌ای از آن، NH روی خط هادی آن، $MF = 4$ و فاصلهٔ M از محور تقارن سهمی $4/2$ باشد، حاصل $\frac{FN}{FS}$ کدام است؟



- (۱) $2/4$ (۲) $2/5$ (۳) $2/6$ (۴) $2/7$

۲۷۸- اگر نقطهٔ S ، رأس سهمی $y = 4x^2$ باشد و نقطهٔ M روی این سهمی حرکت کند، چنان‌چه نقطهٔ A وسط پاره‌خط SM باشد، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ A کدام است؟

- (۱) $y = 8x^2$ (۲) $y = \frac{x^2}{4}$ (۳) $y = 2x^2$ (۴) $y = \frac{x^2}{2}$

۲۷۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^5 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A^4 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) -۵



۲۸۰- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ با درایه‌های $i < j$ و $i > j$ و $a_{ij} = i - j$ و $b_{ij} = i - j$ باشند، درایه واقع در سطر دوم و ستون دوم ماتریس AB چند برابر درایه نظیر در ماتریس BA است؟

(۱) $1/5$ (۲) 2 (۳) $-1/5$ (۴) -2

۱۰ تست در ۲۵ دقیقه

• موضوع: جامع (آزمون چهارم)

• صفحه کتاب درسی: ۱۰ تا ۸۴



۲۸۱- نقاط $A(1, 1, -2)$ و $B(-3, 2, -1)$ مفروض‌اند. اگر $\overline{MA} = 2\overline{BM}$ باشد، مختصات نقطه M کدام است؟

(۱) $(-7, 8, -7)$ (۲) $(7, -8, 7)$ (۳) $(-\frac{7}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{7}{5})$ (۴) $(\frac{7}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{7}{5})$

۲۸۲- اگر نقاط $A(-1, 0, 1)$ ، $B(2, -3, 1)$ و $C(4, 1, 5)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات نقطه D کدام است؟

(۱) $(1, -3, 2)$ (۲) $(6, -2, 6)$ (۳) $(3, 1, 6)$ (۴) $(1, 4, 5)$

۲۸۳- اگر سه نقطه $A(1, 1, 2)$ ، $B(0, -1, 4)$ و $C(1, 0, 1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع CH کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۲۸۴- نقاط $A(0, 1)$ و $B(0, 4)$ در صفحه \mathbb{R}^2 مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه M واقع بر صفحه \mathbb{R}^2 طوری که $AM = 2BM$ باشد، کدام است؟

(۱) خطی موازی AB (۲) دایره‌ای به شعاع ۲ (۳) خطی عمود بر AB (۴) دایره‌ای به شعاع ۱

۲۸۵- اگر خط $3x - 4y = 5$ بر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 4y + m - 1 = 0$ مماس باشد، m کدام است؟

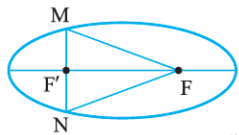
(۱) $\frac{94}{25}$ (۲) $-\frac{94}{25}$ (۳) $\frac{144}{25}$ (۴) $\frac{12}{5}$

۲۸۶- در یک بیضی، قطر کوچک از کانون F با زاویه 30° رؤیت می‌شود. اگر قطر بزرگ این بیضی ۲۴ واحد باشد، فاصله مرکز بیضی تا BF چه قدر است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۸۷- اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک آن ۸ باشد، چنانچه MN وتری از بیضی باشد که از F' گذشته و بر محور کانونی عمود باشد، مساحت مثلث MNF کدام است؟

(۱) $1/92$ (۲) 192 (۳) $19/2$ (۴) $3/84$



۲۸۸- در سهمی به معادله $y^2 + 2y - 6x = 0$ خط گذرنده از کانون و موازی با خط هادی، سهمی را در دو نقطه M و N قطع می‌کند. طول پاره خط MN کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۸۹- معادله خط هادی سهمی $y^2 - 6x = 3(2y - 4x)$ کدام است؟

(۱) $x = \frac{3}{4}$ (۲) $y = \frac{3}{4}$ (۳) $x = 0$ (۴) $x = 3$

۲۹۰- اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر و ماتریس‌های B و C نیز تعویض‌پذیر باشند، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) A و C تعویض‌پذیرند. (۲) B و AC تعویض‌پذیرند. (۳) $A + C$ و B تعویض‌پذیرند. (۴) $A - C$ و B تعویض‌پذیرند.

۱۰ تست در ۲۵ دقیقه

• موضوع: جامع (آزمون پنجم)

• صفحه کتاب درسی: ۱۰ تا ۸۴



۲۹۱- قرینه نقطه $A(-1, 2, 3)$ نسبت به نقطه $B(0, 1, -4)$ کدام است؟

(۱) $(1, 4, -5)$ (۲) $(1, 0, -11)$ (۳) $(-2, 3, 10)$ (۴) $(-2, 4, 5)$



پس مختصات مرکز دایره مسئله از تلاقی خط $y = x$ با خط داده شده به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = x \\ 2y - 3x = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3x = 5 \Rightarrow x = -5$$

$$\Rightarrow O(-5, -5)$$

شعاع دایره نیز فاصله این نقطه تا هر یک از محورهای می‌باشد، پس شعاع دایره $R = 5$ است، در نتیجه داریم:

$$(x+5)^2 + (y+5)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$$

۱۰۲- گزینه ۱ مرکز دایره اول $O_1(0, 1)$ است و این نقطه باید روی خط $y = x + b$ باشد، پس $1 = 0 + b$ یا $b = 1$.

مرکز دایره دوم $O_2(-\frac{a}{2}, -1)$ است و این نقطه نیز باید روی خط موردنظر باشد، پس $-1 = -\frac{a}{2} + b$ یا $-1 = -\frac{a}{2} + 1$ در نتیجه $a = 4$ بنابراین $O_2(-2, -1)$. اکنون داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱۰۳- گزینه ۱ روش ۱

مرکز دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - a = 0$ ، نقطه $O(1, 0)$ و شعاع آن $R = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 4 \times (-a)} = \sqrt{1+a}$ است. طول OA برابر است با:

$$OA = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

با توجه به شکل، در مثلث قائم‌الزاویه OAT داریم:

$$R^2 = (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2 = 8 - 6 = 2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1+a})^2 = 2 \Rightarrow 1+a = 2 \Rightarrow a = 1$$

۲ روش ۲ اگر نقطه $A(x_1, y_1)$ بیرون دایره به معادله $C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ باشد و از A مماسی بر این دایره رسم کنیم، طول مماس از رابطه $\sqrt{C(x_1, y_1)}$ به دست می‌آید.

پس اگر $C(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - a$ باشد، آن‌گاه طول مماسی که از $A(3, 2)$ بر دایره رسم می‌شود، برابر است با:

$$A \text{ مماسی} = \sqrt{C(3, 2)} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2 \times 3 - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2 \times 3 - a} \Rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{7 - a}$$

$$\Rightarrow a = 1$$

این دایره از نقطه $A(1, 2)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه باید در معادله دایره صدق کند.

$$1^2 + 2^2 - 2R \times 1 - 2R \times 2 + R^2 = 0 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$$

$$\Rightarrow R = 1 \text{ یا } 5$$

۹۹- گزینه ۲ اگر $M(x, y)$ یک نقطه از مکان باشد، آن‌گاه:

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}$$

$$\Rightarrow MA^2 = x^2 + y^2 + 2x + 1 \quad (1)$$

$$MB = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$$

$$\Rightarrow MB^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4 \quad (2)$$

می‌خواهیم $MA = 2MB$ یا $MA^2 = 4MB^2$ باشد. از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$x^2 + y^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 16x + 16$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 14x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$$

۱۰۰- گزینه ۲ روش ۱ تمام قطرهای دایره از مرکز آن می‌گذرند، پس کافی است دو تا از قطرهای را با هم تلاقی دهیم تا مختصات مرکز دایره به دست آید و برای این منظور کافی است به m دو مقدار دلخواه نسبت دهیم تا معادله‌های دو قطر به دست آیند و مختصات نقطه برخورد آن‌ها را پیدا کنیم؛ اما برای راحتی محاسبات، بهتر است مقدارهایی که به m نسبت می‌دهیم، یک بار ضریب x را صفر کند و بار دیگر ضریب y را:

$$m = 2 \Rightarrow 0 \times x + (2+3)y = 3 \times 2 + 4 \Rightarrow y = 2$$

$$m = -3 \Rightarrow (-3-2)x + (-3+3)y = 3 \times (-3) + 4$$

$$\Rightarrow x = 1$$

\Rightarrow مرکز دایره $O(1, 2)$

خط مماس بر دایره از نقطه A بر شعاع OA عمود است، پس:

$$OA \text{ شیب} = m_{OA} = \frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta \text{ شیب مماس بر دایره در نقطه } A = 2$$

۲ روش ۲ شیب قطرهای $-\frac{m-2}{m+3}$ هستند و چون A روی یکی از قطرهای قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند و داریم:

$$(m-2) \times 3 + (m+3) \times 1 = 3m + 4$$

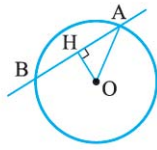
$$\Rightarrow 4m - 3 = 3m + 4 \Rightarrow m = 7$$

$$A \text{ شیب قطر گذرنده از } A = -\frac{7-2}{7+3} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{شیب مماس بر دایره در نقطه } A = 2$$

آزمون ۱۰

۱۰۱- گزینه ۲ مرکز تمام دایره‌هایی که در ناحیه اول و سوم بر محورهای مختصات مماس باشند، روی خط $y = x$ قرار دارند.



۱۰۸- گزینه ۲ مرکز دایره $O(-1,1)$ و شعاع

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2^2 + (-2)^2} - 4 \times (-23) = 5$$

آن است. فاصله مرکز دایره از خط $3x + 4y + 19 = 0$ برابر است با:

$$OH = \frac{|3 \times (-1) + 4 \times 1 + 19|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

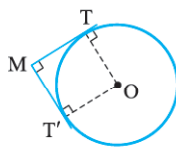
در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AH = 3$$

چون قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می کند، پس:

$$AB = 2AH = 2 \times 3 = 6$$

۱۰۹- گزینه ۲ اگر $M(x,y)$ نقطه ای باشد که از آن بتوان دو



مماس عمود بر هم بر دایره رسم نمود،

چنانچه O مرکز دایره و شعاع آن R باشد،

چهارضلعی $OTMT'$ مربعی به ضلع R در

نتیجه طول قطر آن $MO = R\sqrt{2}$ است،

چون O نقطه ای ثابت و $R\sqrt{2}$ نیز مقداری ثابت است، پس فاصله M از نقطه ثابت O ، مقداری ثابت است و در نتیجه M روی دایره ای

به مرکز O و شعاع $R\sqrt{2}$ است.

مختصات مرکز دایره $O(1,0)$ و اندازه شعاع آن برابر با

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-2)^2 + 0 - 4(-3)} = 2$$

هندسی نقطه M به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 7$$

۱۱۰- گزینه ۲ زمانی مماس مشترک های خارجی دو دایره، موازی

یکدیگرند که شعاع های آن دو دایره برابر باشند، پس:

$$R_1 = R_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-2a)^2 + b^2} - 4 \times 5a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-18)^2 + b^2} - 4 \times 81$$

به توان ۲ می رسانیم:

$$4a^2 + b^2 - 20a = b^2 \Rightarrow 4a^2 - 20a = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 5 \end{cases}$$

دو دایره وقتی مماس مشترکی عمود بر خط المکزین دارند که آن دو دایره، مماس خارج باشند، پس باید طول خط المکزین دو دایره برابر مجموع دو شعاع باشد.

$$O_1(0, -\frac{b}{\sqrt{2}}) \text{ و } O_2(9, -\frac{b}{\sqrt{2}}) \text{ اگر } a = 0 \text{ باشد، آن گاه:}$$

$$\Rightarrow O_1O_2 = 9 = R_1 + R_2$$

$$9 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{0 + b^2} - 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{324 + b^2} - 324 \Rightarrow 9 = |b|$$

$$\Rightarrow b = \pm 9 \Rightarrow a + b = \pm 9$$

۱۰۴- گزینه ۲ شعاع ها، مرکزها و طول خط المکزین دو دایره را حساب می کنیم. داریم:

$$O(3, -4) \text{ و } R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{36 + 64} = 5$$

$$O'(-3, 4) \text{ و } R' = \pm m$$

$$OO' = \sqrt{(3+3)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

برای این که دو دایره، مماس داخل باشند باید داشته باشیم:

$$|R - R'| = OO' \Rightarrow$$

$$|5 \mp m| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 5 \pm m = 10 \Rightarrow m = \pm 5 \\ 5 \pm m = -10 \Rightarrow m = \pm 15 \end{cases}$$

باید توجه کرد که اگر $m = \pm 5$ را بپذیریم، شعاع دو دایره با هم مساوی می شود و دو دایره با شعاع های مساوی نمی توانند مماس داخل باشند.

۱۰۵- گزینه ۱ اگر خطی بر یک منحنی (هر نوع منحنی) مماس باشد، معادله حاصل از برخورد آن ها باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 2x + m = 0 \Rightarrow 2x^2 + m = 0$$

این معادله باید دارای ریشه مضاعف باشد، پس باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 2 \times m = 0 \Rightarrow m = 0$$

۱۰۶- گزینه ۲ چون قطر دایره از مرکز دایره می گذرد، پس باید

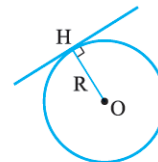
از نقطه $O(2, -4)$ بگذرد. از طرفی چون قطری از دایره مورد نظر است که بر خط $3x + 2y + 1 = 0$ عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب خط مذکور می باشد. داریم:

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب قطر مورد نظر} = \frac{2}{3}$$

پس معادله خط مورد نظر، به صورت زیر می باشد:

$$y - (-4) = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$3y + 12 = 2x - 4 \Rightarrow 3y = 2x - 16$$



۱۰۷- گزینه ۱ اگر خطی بر دایره ای مماس

باشد، فاصله مرکز دایره تا خط مورد نظر، برابر با

شعاع دایره می باشد، پس داریم:

$$O(2, -1) \text{ و } R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{16 + 4} - 4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{16} = 2$$

$$OH = \frac{|3 \times 2 + m \times (-1) + 2m - 1|}{\sqrt{9 + m^2}} = \frac{|2m + 5|}{\sqrt{m^2 + 9}} = 2$$

$$\Rightarrow |2m + 5| = 2\sqrt{m^2 + 9}$$

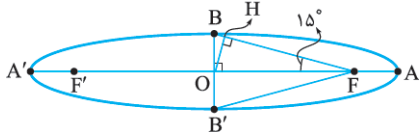
$$\Rightarrow 4m^2 + 20m + 25 = 4m^2 + 36 \text{ به توان ۲ می رسانیم:}$$

$$\Rightarrow 20m = 11 \Rightarrow m = \frac{11}{20}$$

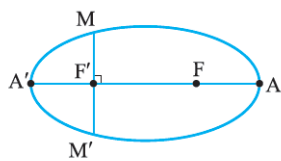


مثلت قائم الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش 15° باشد، برابر $\frac{1}{4}$ وتر است. در

نتیجه: $OH = \frac{1}{4}BF$
 اما $a = \frac{16}{4} = 4$ پس $BF = a = 4$ پس $OH = 1$.



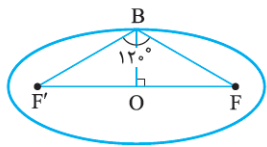
۱۱۶- گزینه ۳ وتری که از کانون بیضی می‌گذرد و بر قطر بزرگ



بیضی عمود می‌باشد، همان وتر کانونی است و می‌دانیم طول آن برابر $MM' = \frac{2b^2}{a}$ است. چون

قطر بزرگ، دو برابر قطر کوچک است، پس: $a = 2b$
 $\frac{MM'}{AA'} = \frac{\frac{2b^2}{a}}{2a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4}$

۱۱۷- گزینه ۲ اگر F' و F کانون‌های بیضی و B یک رأس ناکانونی

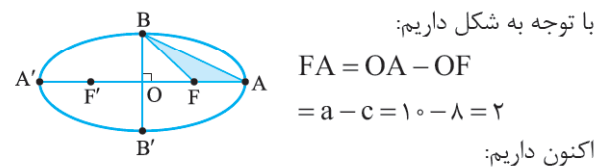


آن باشد، بنا به فرض $\angle F'BF = 12^\circ$. از طرفی می‌دانیم $BF = BF' = a$ و $\angle F = \angle F' = 3^\circ$ پس در مثلث قائم‌الزاویه BOF داریم:

$\cos \hat{F} = \frac{OF}{BF} \Rightarrow \cos 3^\circ = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2b = 12 \Rightarrow b = 6$ ۱۱۸- گزینه ۲

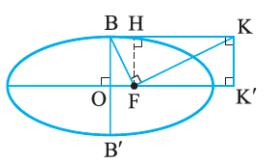
$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a$
 $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow 36 + \frac{16}{25}a^2 = a^2 \Rightarrow \frac{9a^2}{25} = 36$
 $\Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ و $c = 8$



با توجه به شکل داریم: $FA = OA - OF = a - c = 10 - 8 = 2$ اکنون داریم:

$S_{BAF} = \frac{1}{2}FA \times BO = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$

۱۱۹- گزینه ۲ اگر از F عمود FH را بر BK رسم کنیم،



چهارضی‌های $BHFO$ و $HKK'F$ مستطیل هستند، پس $BH = OF = 4$ ، $HF = OB$ و $HK = FK' = 9$ در مثلث قائم‌الزاویه BFK ، پاره‌خط FH ارتفاع نظیر وتر است، پس داریم:

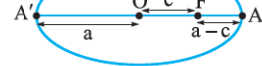
$HF^2 = BH \times HK = 4 \times 9 \Rightarrow HF = 6 \Rightarrow OB = 6$
 پس طول قطر کوچک برابر $BB' = 2OB = 12$ است.

و اگر $a = 5$ باشد، آن‌گاه: $O_1(5, -\frac{b}{4})$ و $O_2(9, -\frac{b}{4})$

$O_1O_2 = 4 = R_1 + R_2$
 $\Rightarrow 4 = \frac{1}{4}\sqrt{100 + b^2} - 100 + \frac{1}{4}\sqrt{324 + b^2} - 324$
 $\Rightarrow 4 = |b| \Rightarrow b = \pm 4$
 $\Rightarrow a + b = 5 + 4 = 9$ یا $a + b = 5 - 4 = 1$

آزمون ۱۱

۱۱۱- گزینه ۲ با توجه به شکل، در هر



بیضی می‌توان گفت $FA' = a + c$ بیشترین فاصله کانون F از نقاط بیضی و $FA = a - c$ کوچک‌ترین فاصله کانون F از نقاط بیضی است. پس با توجه به صورت سؤال داریم:

$a + c = \frac{5}{4}(a - c) \Rightarrow 4a + 4c = 5a - 5c$
 $\Rightarrow 9c = a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{9}$

۱۱۲- گزینه ۲ می‌دانیم طول قطر کوچک بیضی $2b$ می‌باشد،

$2b = BB' = 4 \Rightarrow b = 2$

از طرفی در هر بیضی داریم:

$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=3c} 9c^2 = 4 + c^2$
 $\Rightarrow 8c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\Rightarrow a = 3c = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ طول قطر بزرگ $= 2a = 3\sqrt{2}$

۱۱۳- گزینه ۲ با توجه به تعریف بیضی می‌دانیم:

$OA = a, OB = b, OF = OF' = c$

پس داریم:

$S_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{ab}{2}$

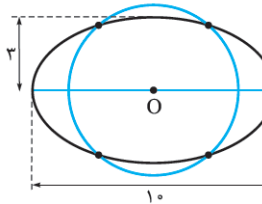
$S_{FBF'} = \frac{FF' \times OB}{2} = \frac{2c \cdot b}{2} = bc$

اکنون داریم:

$\frac{ab}{2} = \frac{3}{5}bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{6}{5}$

۱۱۴- گزینه ۱ چون $2a = 10$ و $2c = 8$ ، پس $a = 5$ و $c = 4$

بنا بر رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ نتیجه می‌شود $b = 3$.



اگر به مرکز مرکز بیضی، دایره‌ای به شعاع $\frac{3}{5}$ رسم کنیم، چون شعاع این دایره از $b = 3$ بیشتر است، بیضی را در چهار نقطه قطع می‌کند.

۱۱۵- گزینه ۱ چون محور تقارن بیضی است، پس AA'

عمودمنصف BB' نیز می‌باشد و در نتیجه AA' نیمساز زاویه $B'FB$ است، بنابراین $\angle BFO = 15^\circ$. می‌دانیم ارتفاع نظیر وتر در



برابر است با $\sqrt{C(x_1, y_1)}$ ، پس داریم:

$$\text{طول مماس} = \sqrt{C(2, 3)} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2 \times 3 - 8} = \sqrt{11}$$

۱۳۵- گزینه ۲ با تحقیق ساده‌ای معلوم می‌شود که نقطه A روی دایره است. مرکز دایره $O(-2, 1)$ است، پس مماس بر دایره بر OA عمود می‌باشد.

$$\text{شیب } OA = \frac{3-1}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m = -3 = \text{شیب مماس بر دایره در نقطه } A$$

اکنون معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y - 3 = -3(x - 4) \Rightarrow y + 3x - 15 = 0$$

۱۳۶- گزینه ۲ نقطه تقاطع باید در معادلات خط و دایره صدق کند، پس داریم:

$$3x - 2y + m + 1 = 0 \Rightarrow 3 + 4 + m + 1 = 0 \Rightarrow m = -8$$

اکنون معادله دایره به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 + 10x + 12y + 11 = n$$

$$\xrightarrow{\text{دایره } (1, -2)} 1 + 4 + 10 \cdot (-2) + 12 \cdot (-2) + 11 = n \Rightarrow n = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 12y + 9 = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 144 - 36} = \frac{1}{2} \sqrt{208} = 2\sqrt{13}$$

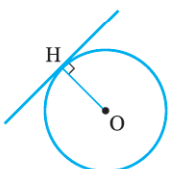
۱۳۷- گزینه ۲ معادله نیمساز ناحیه اول $y = x$ است. اگر این خط بر دایره مماس باشد، باید معادله حاصل از تلاقی آن‌ها دارای ریشه مضاعف باشد.

خط و دایره را تلاقی می‌دهیم. (در یک دستگاه قرار می‌دهیم.)

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 + 2x = k \end{cases} \xrightarrow{y=x} x^2 + x^2 + 2x = k$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - k = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-k) = 0 \Rightarrow 8k + 4 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$



روش ۲ اگر خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از خط مماس، برابر با شعاع دایره است. مرکز دایره $O(-1, 0)$ و شعاع آن به صورت زیر

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4k} = \sqrt{1+k} \quad \text{است:}$$

$$x - y = 0 \text{ از خط } O \text{ فاصله} = R \Rightarrow \frac{|-1-0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{1+k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1+k} \xrightarrow{\text{به توان } 2} \frac{1}{2} = 1+k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

۱۳۸- گزینه ۱ مرکز دایره اول $O_1(1, 3)$ و شعاع آن $R_1 = 1$ مرکز دایره دوم $O_2(4, -1)$ و شعاع آن $R_2 = 2$ و طول

اگر نقطه برخورد پرتو $x = 2$ با سهمی باشد، آن گاه طول نقطه M برابر ۲ است و در نتیجه عرض آن $y = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$ است؛ یعنی مختصات نقطه M به صورت $(2, 1)$ می‌باشد.

$$\text{شیب } FM = m_{FM} = \frac{1-1}{2-0} = 0$$

معادله پرتو بازتابش به صورت زیر است:

$$\text{معادله } FM: y - 1 = 0 \times (x - 0) \Rightarrow y = 1$$

۱۳۰- گزینه ۲ می‌دانیم بازتاب کانون سهمی، نسبت به هر خط مماس بر آن، روی خط هادی سهمی است، پس F_1 و F_2 روی خط هادی سهمی هستند و در نتیجه امتداد این دو نقطه، همان خط هادی سهمی است.

آزمون ۱۳

۱۳۱- گزینه ۱ مختصات نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر محور y ها به صورت $A(0, 1)$ است. تمام نقاطی که از نقطه A به فاصله ۲ باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ هستند و معادله آن به صورت زیر است:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

۱۳۲- گزینه ۱ معادله را به صورت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + (y-1)^2 = 0$$

پس این معادله، دایره‌ای به شعاع صفر است؛ یعنی یک نقطه است. (این نقطه همان مرکز؛ یعنی نقطه $O(0, 1)$ می‌باشد.)

۱۳۳- گزینه ۲ در معادله دایره باید ضرایب x^2 و y^2 برابر باشند، پس:

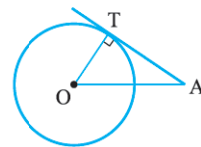
$$k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2$$

اکنون معادله آن به صورت $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ است و داریم:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 - 4 \times (-2)} = 2$$

۱۳۴- گزینه ۲ مرکز دایره $O(0, -1)$ و شعاع آن

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 2^2 - 4 \times (-8)} = 3$$



طول پاره خط OA برابر است با:

$$OA = \sqrt{(2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$$

اگر AT بر دایره مماس باشد، آن گاه OT بر AT عمود است و در مثلث قائم‌الزاویه OAT داریم:

$$AT^2 = OA^2 - OT^2 = 20 - 3^2 = 11 \Rightarrow AT = \sqrt{11}$$

روش ۲ طول مماسی که از نقطه $A(x_1, y_1)$ واقع در خارج دایره $C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ بر آن رسم می‌شود



۱۴۳- گزینه ۲ معادله را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$y^2 - 4y + 4 = -8x - 2 + 4 \Rightarrow (y-2)^2 = -8x + 2$$

$$(y-2)^2 = -8\left(x - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

از طرفی در هر سهمی فاصله کانون تا خط هادی برابر با $|2a|$ می‌باشد، پس $|2a| = 4$.

۱۴۴- گزینه ۱ $y^2 - 2y = -4x - k$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -4x - k + 1 \Rightarrow (y-1)^2 = -4\left(x + \frac{k-1}{4}\right)$$

محور این سهمی افقی است و در آن $4a = -4$ یا $a = -1$ است.

رأس آن $S\left(-\frac{k-1}{4}, 1\right)$ و کانون آن به صورت زیر است:

$$F = \left(-\frac{k-1}{4} + (-1), 1\right) = \left(-\frac{k-3}{4}, 1\right)$$

این نقطه باید روی خط $x - 3y + 2 = 0$ باشد، پس:

$$\frac{-k-3}{4} - 3 \times 1 + 2 = 0 \Rightarrow \frac{-k-3}{4} = 1 \Rightarrow k = -7$$

۱۴۵- گزینه ۲ محور این سهمی موازی با محور x ها است، در

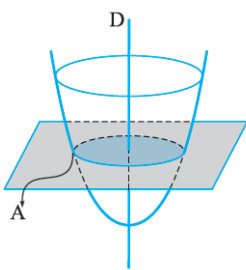
نتیجه پرتو تابیده شده به سهمی موازی با محور سهمی است و بازتابش آن از کانون سهمی می‌گذرد، پس باید مختصات کانون سهمی را مشخص کنیم:

$$y^2 - 6y = 8x - 33 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 8x - 24$$

$$\Rightarrow (y-3)^2 = 8(x-3)$$

پس $4a = 8$ یا $a = 2$ و رأس سهمی $S(3, 3)$ است، بنابراین مختصات کانون آن $F(\alpha + a, \beta) = (3 + 2, 3) = (5, 3)$ است.

آزمون ۱۴



۱۴۶- گزینه ۳ چون صفحه عمود

بر محور سهمی است، اگر این صفحه، سهمی اولیه را در نقطه‌ای مانند A قطع کند، گویی نقطه A را حول خط D دوران داده‌ایم.

پس مقطع حاصل، یک دایره است.

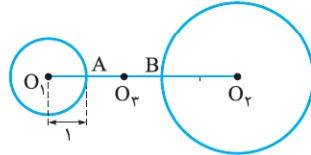
۱۴۷- گزینه ۱ مثلث OAB مثلثی قائم‌الزاویه در رأس O است و

OM میانه نظیر وتر می‌باشد، پس $OM = \frac{AB}{2} = 5$. چون فاصله

از نقطه ثابت O مقدار ثابت ۵ است، پس مکان نقطه M ، دایره‌ای

به مرکز O و شعاع ۵ خواهد بود.

خط‌المركزین این دو دایره $O_1O_2 = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2} = 5$ است و چون $O_1O_2 > R_1 + R_2$ می‌باشد، پس این دو دایره متخارج‌اند.



با توجه به شکل مقابل، کوچک‌ترین دایره‌ای که بر این دو دایره مماس باشد، دایره‌ای به قطر $AB = 2$ است؛ یعنی قطر دایره موردنظر ۲ و در نتیجه شعاع آن ۱ است.

۱۳۹- گزینه ۲ $2a = 3(2b) \Rightarrow b = \frac{a}{3}$

$$c^2 = a^2 - b^2 \xrightarrow{b=\frac{a}{3}} c^2 = a^2 - \frac{a^2}{9} \Rightarrow c^2 = \frac{8a^2}{9}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2\sqrt{2}}{3}a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۱۴۰- گزینه ۲ چون عدد داده شده بزرگ‌تر از یک می‌باشد، پس

حتماً نسبت داده شده برابر با $\frac{a}{b}$ می‌باشد و داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{13}}{3}b$$

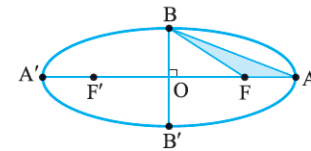
از طرفی در هر بیضی داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{13}{9}b^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{4}{9}b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}b = c \Rightarrow 2b = 3c$$

۱۴۱- گزینه ۲ چون $OF = c$ و $OB = b$ ، پس در مثلث

قائم‌الزاویه OBF داریم:



$$BF^2 = OB^2 + OF^2$$

$$= b^2 + c^2 = a^2$$

$$\Rightarrow BF = a = 10$$

در مثلث قائم‌الزاویه OBA داریم:

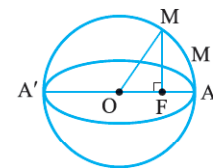
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow (2\sqrt{34})^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 136 = 10^2 + b^2 \Rightarrow b = 6$$

با استفاده از رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ نتیجه می‌شود $c = 8$. از طرفی:

$$FA = OA - OF = a - c = 10 - 8 = 2$$

$$S_{ABF} = \frac{1}{2}FA \times BO = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$



۱۴۲- گزینه ۲ اگر O مرکز بیضی و

دایره باشد، آن‌گاه $MO = a$ و $OF = c$.

در مثلث قائم‌الزاویه MOF داریم:

$$MF^2 = MO^2 - OF^2$$

$$= a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$



۱۴۸- گزینه ۲ اگر $M(x, y)$ یک نقطه از مکان باشد، آن گاه باید داشته باشیم $MA = 2MB$ یا $MA^2 = 4MB^2$.

از طرفی داریم:

$$MA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4(x+1)^2 + 4(y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 4x^2 + 8x$$

$$+ 4 + 4y^2 - 24y + 36$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 12x - 18y + 27 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$$

بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

این معادله یک دایره است که مرکز آن $O(-2, 3)$ و شعاعش

$$R = \frac{1}{3} \sqrt{4^2 + (-6)^2} - 4 \times 9 = 2$$

۱۴۹- گزینه ۲ روش خط و دایره را با هم تلاقی می‌دهیم، پس کافی است به جای y عبارت $2x - 5$ را قرار دهیم:

$$x^2 + (2x-5)^2 - 2x - 4(2x-5) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 20x + 25 - 2x - 8x + 20 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 30x + 44 = 0 \Rightarrow \Delta = 900 - 880 = 20$$

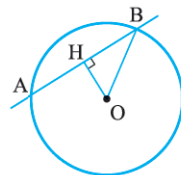
$$\Rightarrow x = \frac{30 \pm 2\sqrt{5}}{10} \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{5}}{5}$$

$$A = \left[\begin{array}{c} 15 + \sqrt{5} \\ 5 \\ 2(15 + \sqrt{5}) - 5 = 20 + 2\sqrt{5} \\ 5 \end{array} \right] \text{ و } B = \left[\begin{array}{c} 15 - \sqrt{5} \\ 5 \\ 5 - 2\sqrt{5} \\ 5 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 \times 5}{25} + \frac{16 \times 5}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

روش ۲ با توجه به شکل مقابل، داریم:



$$AB = 2HB$$

اگر O مرکز دایره باشد، OB شعاع دایره و OH فاصله نقطه O از خط موردنظر

می‌باشد، پس داریم:

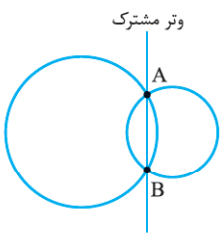
$$R = OB = \frac{1}{3} \sqrt{4 + 16 + 4} = \frac{1}{3} \sqrt{24} = \sqrt{6}$$

$$O(1, 2) \text{ و } y - 2x + 5 = 0$$

$$OH = \frac{|2 - 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow HB^2 = OB^2 - OH^2 = 6 - 5 = 1 \Rightarrow AB = 2HB = 2$$

۱۵۰- گزینه ۲ دو دایره را تلاقی می‌دهیم تا معادله وتر مشترک را در صورت وجود به دست آوریم:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x^2 + y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x = 2y$$

اکنون این خط را با یکی از دایره‌ها (مثلاً دایره دوم) تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقاط برخورد آن‌ها به دست آیند:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases} \xrightarrow{x=2y} (2y)^2 + y^2 = 2y$$

$$\Rightarrow 5y^2 - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A(0, 0) \\ y = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) \end{cases}$$

اکنون طول AB را که همان طول وتر مشترک است، پیدا می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۱۵۱- گزینه ۲ فاصله مرکز دایره داده شده تا خط موردنظر، برابر با شعاع دایره موردنظر می‌باشد. داریم:

$$O(-1, -2) \text{ و } OH = R = \frac{|-3 - 4 - 6|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

پس معادله دایره مطلوب به صورت زیر است:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y = 8$$

۱۵۲- گزینه ۱ چون دایره محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -3 قطع می‌کند، پس نقطه $A(0, -3)$ روی دایره است و مختصات آن باید در معادله دایره صدق کند. داریم:

$$0^2 + (-3)^2 - 4 \times 0 + 2 \times (-3) + 3m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

پس معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ است.

$$R = \frac{1}{3} \sqrt{16 + 4 + 12} \Rightarrow 2R = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۱۵۳- گزینه ۲ طول نخ برابر $2a$ (طول قطر بزرگ بیضی) است. A و B کانون‌های بیضی هستند، پس وسط آن‌ها مرکز بیضی است.

$$AB \text{ وسط } O \left(\frac{1+1}{2}, \frac{2+(-4)}{2} \right) = (1, -1)$$

فاصله O از M ، برابر a است:

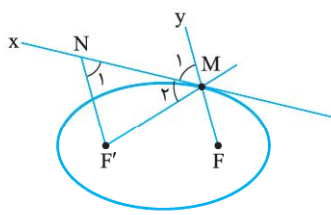


$$a = OM = \sqrt{(1-1)^2 + (4-(-1))^2} = 5$$

پس طول نخ، برابر $L = 2a = 10$ است.



۱۵۷- گزینه ۲ می‌دانیم خط مماس بر بیضی در نقطه M ، زاویه



بین $F'M$ و امتداد MF را نصف می‌کند، پس:

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad (1)$$

از طرفی چون $F'N \parallel MF$ و MN مورب است، داریم:

$$\hat{N}_1 = \hat{M}_1 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\hat{N}_1 = \hat{M}_2$ ، پس:

$$NF' = MF'$$

از طرفی چون M روی بیضی است، پس:

$$F'M + MF = 2a \Rightarrow F'M + 4 = 2 \times 5 \Rightarrow F'M = 6$$

در نتیجه $NF' = 6$.

۱۵۸- گزینه ۲ معادله سهمی را به صورت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 - 4x + 5 = \frac{k+1}{k}y \Rightarrow (x-2)^2 + 1 = \frac{k+1}{k}y$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = \frac{k+1}{k}y - 1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = \frac{k+1}{k}\left(y - \frac{k}{k+1}\right)$$

در این سهمی $a = \frac{k+1}{4k}$ است. فاصله رأس تا خط هادی برابر $|a|$ است، پس:

$$\left|\frac{k+1}{4k}\right| = 2 \Rightarrow \frac{k+1}{4k} = \pm 2$$

$$\boxed{-} \Rightarrow -4k = k+1 \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$$

$$\boxed{+} \Rightarrow 4k = k+1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

چون دهانه سهمی به طرف بالاست باید $a > 0$ باشد، پس $\frac{k+1}{4k} > 0$

در نتیجه $k > 0$ یا $k < -1$. در نتیجه $k = \frac{1}{3}$ قابل قبول است.

۱۵۹- گزینه ۲ چون خط هادی سهمی $x = 0$ است، پس محور

سهمی افقی است و معادله آن به صورت $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$

و رأس آن $S(\alpha, \beta)$ است. چون $y = 3$ محور آن است، پس $\beta = 3$

و معادله هادی آن $x = \alpha - a = 0$ و در نتیجه: $\alpha = a$

اکنون معادله سهمی به صورت $(y-3)^2 = 4a(x-a)$ است و

چون نقطه M روی این سهمی است باید در آن صدق کند:

$$(5-3)^2 = 4a(2-a) \Rightarrow 4 = 4(2a-a^2)$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$$

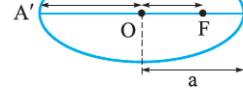
$$\Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

پس معادله سهمی به صورت زیر است:

$$(y-3)^2 = 4(x-1) \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 4x - 4$$

$$\Rightarrow y^2 - 6y - 4x + 13 = 0$$

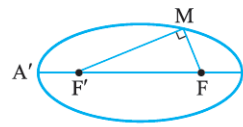
۱۵۴- گزینه ۱ در شکل مقابل،



FA' دورترین فاصله کانون F از نقاط واقع بر بیضی و FA نزدیکترین فاصله آن نقاط از بیضی است.

$$FA' = 4FA \Rightarrow a + c = 4(a - c)$$

$$\Rightarrow a + c = 4a - 4c \Rightarrow 5c = 3a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$



۱۵۵- گزینه ۲ چون $2a = 12$

و $2b = 6$ پس $a = 6$ و $b = 3$

در نتیجه:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow c = 3\sqrt{3}$$

اگر $MF = x$ باشد، از آنجا که $MF + MF' = 2a = 12$ ، پس

$$MF' = 12 - x$$

$$\Delta MFF': MF^2 + MF'^2 = FF'^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (12-x)^2 = (6\sqrt{3})^2$$

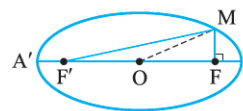
$$\Rightarrow x^2 + 144 - 24x + x^2 = 108$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 24x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 18 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 72}}{2} = \frac{12 \pm 6\sqrt{2}}{2} = 6 \pm 3\sqrt{2}$$

چون $MF < MF'$ ، پس $x < 12 - x$ یا $x < 6$ و در نتیجه:

$$x = MF = 6 - 3\sqrt{2}$$



۱۵۶- گزینه ۲

$$FF' = 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

و چون $a = 5$ ، پس $a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ یا $b^2 = 3$

پاره خط MF نصف وتر کانونی است، پس:

$$MF = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{5}$$

و از آنجا که M روی بیضی است، پس داریم:

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow \frac{9}{5} + MF' = 10$$

$$\Rightarrow MF' = 10 - \frac{9}{5} = \frac{41}{5}$$

در مثلث MFF' ، پاره خط MO میانه است و بنا بر قضیه میانه‌ها

در مثلث، داریم:

$$4MO^2 = 2(MF^2 + MF'^2) - FF'^2 = 2\left(\frac{81}{25} + \frac{1681}{25}\right) - 8^2$$

$$4MO^2 = \frac{2 \times 1762 - 64 \times 25}{25}$$

$$\xrightarrow{\text{بر 4 تقسیم می‌کنیم}} MO^2 = \frac{881 - 400}{25} = \frac{481}{25}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{\sqrt{481}}{5}$$



۱۶۵- گزینه ۲ چون بردار \vec{a} بر صفحه xOz واقع است، پس مقدار y آن باید صفر باشد، بنابراین داریم: $m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$
 $\vec{a} = (-7, 0, 5) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

۱۶۶- گزینه ۲ اگر $\vec{a} = (x, y, z)$ ، آن گاه تصویر بردار \vec{a} روی صفحات xOy ، xOz ، و yOz به ترتیب برابر با $\vec{a}_1 = (x, y, 0)$ و $\vec{a}_2 = (x, 0, z)$ و $\vec{a}_3 = (0, y, z)$ هستند. پس داریم:

$$|a_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 18$$

$$|a_2| = \sqrt{x^2 + z^2} = 2 \Rightarrow x^2 + z^2 = 4$$

$$|a_3| = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{5} \Rightarrow y^2 + z^2 = 5$$

سه رابطه فوق را با هم جمع می‌کنیم؛ داریم:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = 27 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow |a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

۱۶۷- گزینه ۲ واضح است که $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ ، پس داریم:

$$\frac{1}{3}(3\vec{b} - 3\vec{a}) = 2(\vec{b} - \vec{a}) = 2(1-2, -2-(-2), 2-1) = (-2, 0, 2)$$

۱۶۸- گزینه ۱ فاصله نقطه $M(x, y, z)$ از محور x ها برابر $\sqrt{y^2 + z^2}$ و فاصله‌اش از محور y ها برابر $\sqrt{x^2 + z^2}$ و از محور z ها برابر $\sqrt{x^2 + y^2}$ است.

$$\text{فاصله } A \text{ از محور } x \text{ها} = \sqrt{y_A^2 + z_A^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

۱۶۹- گزینه ۲ عرض نقاط M ، N و P برابر -1 است؛ یعنی عرض همه نقاط این راستا $y = -1$ است. پس تمام این نقاط روی صفحه $y = -1$ هستند. از طرفی طول نقاط M و P برابر 3 است؛ یعنی طول تمام نقاط این راستا $x = 3$ است. به عبارت دیگر، تمام این نقاط روی صفحه $x = 3$ هستند. در نتیجه معادله راستای موردنظر $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ است و تنها ۲ در آن صدق می‌کند.

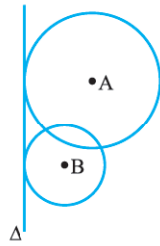
۱۷۰- گزینه ۲ می‌دانیم فاصله دو خط $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ و $\begin{cases} x = a' \\ y = b' \end{cases}$ برابر

است با $|a - a'|$ و فاصله دو خط $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ و $\begin{cases} x = a \\ y = b' \end{cases}$ نیز برابر با $|b - b'|$ است.

فاصله هر دو خط از سه خط D ، D' و D'' برابر طول یکی از یال‌های مکعب مستطیل است.

هر دو خط D و D' بر محور x ها عمودند، پس فاصله این دو خط برابر است با قدرمطلق اختلاف x های این دو خط، بنابراین اندازه

۱۶۰- گزینه ۲ می‌دانیم مرکز دایره‌ی که از یک نقطه ثابت مانند F



می‌گذرند و بر خط ثابت Δ مماس هستند، روی یک سهمی به کانون F و خط هادی Δ واقع‌اند. پس اگر به مراکز A و B دو دایره چنان رسم کنیم که بر خط Δ مماس باشند، نقاط برخورد این دو دایره، کانون سهمی موردنظر هستند. می‌دانیم دو دایره حداکثر در دو نقطه می‌توانند متقاطع باشند، پس حداکثر دو سهمی می‌توان رسم نمود که از A و B بگذرند و Δ خط هادی آن باشد.

آزمون ۱۵

۱۶۱- گزینه ۲ چون $a \neq 0$ ، پس $a^2 > 0$ و $a^2 + 1 > 0$ ولی $a - 3$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد، در نتیجه M می‌تواند در ناحیه‌های اول یا پنجم باشد؛ یعنی می‌تواند در دو ناحیه قرار گیرد.

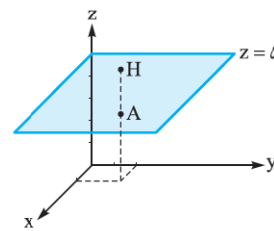
۱۶۲- گزینه ۲

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{1 + 4 + (m-1)^2} = \sqrt{(3-m)^2 + 1 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \Delta + (m-1)^2 = (3-m)^2 + 2$$

$$\Rightarrow \Delta + m^2 - 2m + 1 = 9 - 6m + m^2 + 2$$

$$\Rightarrow 4m = 5 \Rightarrow m = \frac{5}{4}$$

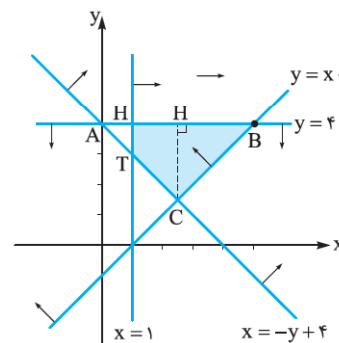


۱۶۳- گزینه ۲

فاصله نقطه $A(a, b, c)$ از صفحه $z = k$ برابر است با $|k - c|$. با توجه به شکل، داریم:

$$\text{فاصله } A \text{ از صفحه } z = 5 \text{ است } AH = |5 - 3| = 2$$

۱۶۴- گزینه ۱ مساحت موردنظر، مساحت مثلث ABC منهای



مساحت مثلث AHT است.

B نقطه برخورد دو خط

$$y = 4 \text{ و } y = x - 1$$

است، پس $B(5, 4)$ به

وضوح $A(0, 4)$ می‌باشد

و C نقطه برخورد دو

$$\text{خط } y = x - 1 \text{ و } x = -y + 4$$

از

حل این دستگاه داریم

$$C\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ است، پس } AB = 5 \text{ و } CH = \left|4 - \frac{4}{3}\right| = \frac{8}{3} \text{ به همین}$$

$$\text{ترتیب } T(1, 3) \text{، پس: } S_{AHT} = \frac{1}{2} AH \times HT = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\text{در نتیجه: } S_{\text{مساحت رنگی}} = S_{ABC} - S_{AHT} = \frac{22}{3}$$



۲۶۸- گزینه ۲ می‌دانیم اگر ماتریسی قطری به توان n برسد،

ماتریس A^n نیز ماتریسی قطری است که درایه‌هایش برابر با توان n ام درایه‌های نظیر ماتریس A است، پس داریم:

$$A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & 125 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -21 & 0 & 0 \\ 0 & 155 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^2 + A^3$ برابر است با:
 $= -21 + 155 + 84 = 218$

۲۶۹- گزینه ۱ $(A+B)^T = A^T + B^T + AB + BA$

$$\Rightarrow AB + BA = (A+B)^T - A^T - B^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 30 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}$$

۲۷۰- گزینه ۱ دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ زمانی دارای بی‌شمار

جواب است که در آن، رابطه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ برقرار باشد.

$$\frac{2}{k} = \frac{1}{-2} \Rightarrow k = -4$$

آزمون ۲۵

۲۷۱- گزینه ۱ بردار $\frac{|b|}{3} \vec{a}$ مضرب مثبتی از بردار \vec{a} است، پس

هم‌جهت با بردار \vec{a} است. هم‌چنین $\frac{-5}{|a|} \vec{b}$ مضربی منفی از بردار \vec{b}

است، پس در خلاف جهت بردار \vec{b} خواهد بود. در نتیجه زاویه بین این دو بردار، برابر با زاویه بین بردار \vec{a} و $-\vec{b}$ است (دقت کنید که عدد مضرب مهم نیست و فقط علامت آن مهم می‌باشد.) و این زاویه برابر با 135° است.

۲۷۲- گزینه ۲ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 3k - 2 = 3k$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |(2, 3, -1) + (1, k, 2)| = |(3, 3+k, 1)|$$

$$= \sqrt{9 + (3+k)^2 + 1} = \sqrt{k^2 + 6k + 19}$$

پس باید داشته باشیم $3k = \sqrt{k^2 + 6k + 19}$. واضح است که چون سمت راست معادله، مثبت است، باید سمت چپ آن نیز مثبت باشد؛ یعنی باید $k > 0$ باشد. اکنون دو طرف این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$9k^2 = k^2 + 6k + 19 \Rightarrow 8k^2 - 6k - 19 = 0$$

۲۶۳- گزینه ۲ می‌دانیم: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$

پس داریم:

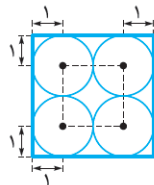
$$(\vec{3a} - \vec{2b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0} + \vec{3a} \times \vec{b} - \vec{2b} \times \vec{a} + \vec{0}$$

$$= \vec{3a} \times \vec{b} + \vec{2a} \times \vec{b} = \vec{5a} \times \vec{b} = (10, -15, 5)$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (2, -3, 1) \Rightarrow$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

۲۶۴- گزینه ۲ با توجه به شکل مقابل، مکان هندسی مرکزهای دایره‌ها، مربعی به ضلع ۲ است که قطرهایش منطبق بر قطرهای مربع اولیه هستند، پس مساحت آن $2^2 = 4$ است.



۲۶۵- گزینه ۱ به سادگی معلوم می‌شود که نقطه A روی دایره است. پس اگر O مرکز دایره باشد، مماس بر دایره در نقطه A بر شعاع OA عمود است.

مختصات مرکز دایره به صورت $O(1, -2)$ است، پس:

در نتیجه معادله خط مماس به صورت زیر می‌باشد:

$$m = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب مماس} = \frac{-2-1}{1-2} = 3 \Rightarrow \text{شیب شعاع } OA$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + x = 5$$

۲۶۶- گزینه ۲ با توجه به مختصات نقطه A' در شکل به سادگی معلوم می‌شود که $a = 3$ و $b = 2$ بنا بر رابطه مهم بیضی داریم:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

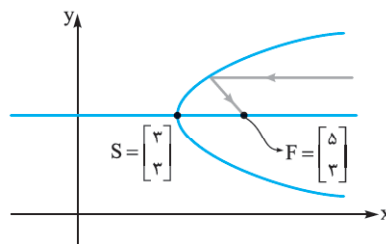
پس $OH = b = 2$ و $FF' = 2c = 2\sqrt{5}$ در نتیجه:

$$S_{OFF'} = \frac{1}{2} FF' \times OH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{5}$$

۲۶۷- گزینه ۲ پرتوهایی که موازی با محور سهمی بر آن می‌تابند، بازتابش آن‌ها از کانون می‌گذرند.

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 24 \Rightarrow (y - 3)^2 = 8(x - 3)$$

پس محور این سهمی، افقی است و رأس سهمی $S(3, 3)$ و $4a = 8$ یا $a = 2$ است، در نتیجه کانون سهمی به صورت $F(3+a, 3) = (5, 3)$ می‌باشد.





$$\begin{aligned} \Delta MKF \sim \Delta NTM &\Rightarrow \frac{NT}{MK} = \frac{MN}{MF} \\ \Rightarrow \frac{NT}{2/4} &= \frac{\sqrt{16+NT^2}}{4} \Rightarrow 4NT = 2/4\sqrt{16+NT^2} \\ \Rightarrow NT &= 0/6\sqrt{16+NT^2} \\ \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان 2}} NT^2 &= 0/36 \times 16 + 0/36 NT^2 \\ \Rightarrow 0/64 NT^2 &= 0/36 \times 16 \Rightarrow 0/8 NT = 0/6 \times 4 \\ \Rightarrow NT &= 3 \Rightarrow MN = 5 \\ TM \parallel FH &\Rightarrow \frac{TM}{HF} = \frac{MN}{NF} \Rightarrow \frac{4}{2FS} = \frac{5}{9} \Rightarrow FS = \frac{18}{5} \\ \frac{FN}{FS} &= \frac{9}{18} = \frac{5}{2} = 2/5 \end{aligned}$$

۲۷۸- گزینه ۱ اگر نقطه $M(X, Y)$ روی سهمی باشد، آن گاه $S(0, 0)$ رأس این سهمی است. یعنی $M(X, 4X^2)$ است. اگر A وسط MS باشد، آن گاه:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{X+0}{2}, \frac{4X^2+0}{2}\right) &= \left(\frac{X}{2}, 2X^2\right) \\ \text{پس در نقطه } A, x &= \frac{X}{2} \text{ و } y = 2X^2 \\ x = \frac{X}{2} &\Rightarrow X = 2x \\ \text{معادله مکان نقطه } A: &y = 2X^2 = 2(2x)^2 \Rightarrow y = 8x^2 \end{aligned}$$

۲۷۹- گزینه ۲

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس $A^4 = A$ و $A^6 = I$ اکنون داریم:

$$A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = -1 \\ d = -2 \end{cases}$$

در نتیجه: $a + b + c + d = 4 + 5 - 1 - 2 = 6$

۲۸۰- گزینه ۲ با توجه به درایه‌های داده شده داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس AB برابر است با:

$$A \text{ سطر دوم} \times B \text{ ستون دوم} = [2 \ 0] \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2$$

درایه سطر دوم ستون دوم ماتریس BA برابر است با:

$$B \text{ سطر دوم} \times A \text{ ستون دوم} = [1 \ 0] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

پس درایه سطر دوم و ستون دوم AB ، -2 برابر درایه نظیر از BA است.

جواب‌های این معادله $k = \frac{3 \pm \sqrt{161}}{8}$ هستند و چون باید $k > 0$ باشد، پس $k = \frac{3 + \sqrt{161}}{8}$

۲۷۳- گزینه ۲ مختصات نقطه هم‌رسی سه میانه مثلث ABC به صورت زیر است:

$$G \begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow G \begin{cases} \frac{0+0+3}{3} \\ \frac{1+4+k}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(1, \frac{5+k}{3}\right)$$

طول تمام نقاط G ثابت و برابر ۱ است؛ یعنی معادله مکان این نقطه، خط $x = 1$ می‌باشد که خطی موازی محور y هاست.

۲۷۴- گزینه ۲

مرکز دایره $O(0, 0)$ و شعاع آن $R = 2$ است، پس: $AO = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = 4$

در مثلث قائم‌الزاویه AOT از رابطه فیثاغورس نتیجه می‌شود: $AT = AT' = 2\sqrt{3}$

در مثلث AOT چون $AO = 2OT$ پس $A_1 = 30^\circ$ و در نتیجه $T'AT = 60^\circ$ ، بنابراین مثلث ATT' متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $TT' = AT = 2\sqrt{3}$.

۲۷۵- گزینه ۲ در هر بیضی می‌دانیم:

$$AA' = 2a \text{ و } BB' = 2b \text{ و } FF' = 2c$$

از طرفی در هر بیضی داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

پس داریم:

$$\frac{FF'}{AA'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{3}a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + \frac{5}{9}a^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}a^2 = b^2 \Rightarrow \frac{2}{3}a = b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

بنابراین:

۲۷۶- گزینه ۱ $a = 5$ و $b = 3 \Rightarrow c = 4$

نقاطی که از مرکز بیضی به فاصله ۴ هستند، روی دایره‌ای به مرکز مرکز بیضی و شعاع ۴ قرار دارند. با توجه به شکل، چهار نقطه با این شرایط وجود دارند.

۲۷۷- گزینه ۲ از M عمودهای MT و MK را به ترتیب، بر خط هادی و محور سهمی رسم می‌کنیم. بنا بر تعریف سهمی داریم:

$$MF = MT = 4$$