فصل	شمارهٔ آزمون	مبحث آزمون	صفحهٔ سؤال	صفحهٔ پاسخ‌نامهٔ تشریحی
فصل ۱: منطق (یازدهم)	۱	جامع فصل (استاندارد)	۷	۸۴
	۲	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۸	۸۵
فصل ۲: مجموعه (دهم و یازدهم)	۳	مفاهیم مقدماتی	۱۰	۸۷
	۴	زیرمجموعه	۱۰	۸۹
	۵	جبر مجموعه‌ها ـ ضرب دکارتی (آزمون اول)	۱۱	۹۰
	۶	جبر مجموعه‌ها ـ ضرب دکارتی (آزمون دوم)	۱۲	۹۱
	۷	جامع فصل (استاندارد)	۱۳	۹۲
	۸	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۱۴	۹۴
فصل ۳: شمارش (دهم)	۹	اصل ضرب و جمع	۱۶	۹۶
	۱۰	جایگشت	۱۷	۹۷
	۱۱	ترکیب	۱۷	۹۸
	۱۲	جامع فصل (استاندارد)	۱۸	۹۹
	۱۳	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۱۹	۱۰۱
فصل ۴: احتمال (یازدهم)	۱۴	پیشامد ـ احتمال هم‌شانس (آزمون اول)	۲۱	۱۰۲
	۱۵	پیشامد ـ احتمال هم‌شانس (آزمون دوم)	۲۲	۱۰۴
	۱۶	احتمال غیرهم‌شانس	۲۳	۱۰۵
	۱۷	احتمال شرطی (آزمون اول)	۲۴	۱۰۶
	۱۸	احتمال شرطی (آزمون دوم)	۲۵	۱۰۸
	۱۹	پیشامدهای مستقل و وابسته	۲۶	۱۱۰
	۲۰	جامع فصل (استاندارد)	۲۶	۱۱۱
	۲۱	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۲۸	۱۱۳
فصل ۵: آمار (یازدهم)	۲۲	جدول‌های فراوانی	۳۰	۱۱۵
	۲۳	معیارهای گرایش به مرکز (آزمون اول)	۳۱	۱۱۶
	۲۴	معیارهای گرایش به مرکز (آزمون دوم)	۳۲	۱۱۸
	۲۵	معیارهای پراکندگی (آزمون اول)	۳۳	۱۱۹
	۲۶	معیارهای پراکندگی (آزمون دوم)	۳۴	۱۲۰
	۲۷	روش‌های جمع‌آوری اطلاعات	۳۴	۱۲۱
	۲۸	برآورد	۳۵	۱۲۲
	۲۹	جامع فصل (استاندارد)	۳۶	۱۲۳
	۳۰	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۳۸	۱۲۵
فصل ۶: استدلال (دوازدهم)	۳۱	جامع فصل (استاندارد)	۴۰	۱۲۷
	۳۲	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۴۱	۱۲۹

صفحهٔ پاسخ‌نامهٔ تشریحی	صفحهٔ سؤال	مبحث آزمون	شمارهٔ آزمون	
۱۳۱	۴۳	عادکردن	۳۳	فصل۷: نظریه اعداد (دوازدهم)
۱۳۲	۴۳	قضیهٔ تقسیم	۳۴	
۱۳۳	۴۴	افراز و ب.م.م	۳۵	
۱۳۴	۴۵	هم‌نهشتی (آزمون اول)	۳۶	
۱۳۵	۴۵	هم‌نهشتی (آزمون دوم)	۳۷	
۱۳۶	۴۶	کاربردهای هم‌نهشتی	۳۸	
۱۳۸	۴۶	حل معادله‌های هم‌نهشتی (آزمون اول)	۳۹	
۱۳۹	۴۷	حل معادله‌های هم‌نهشتی (آزمون دوم)	۴۰	
۱۴۰	۴۸	جامع فصل (استاندارد)	۴۱	
۱۴۲	۴۹	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۴۲	
۱۴۳	۵۰	درجه‌های گراف	۴۳	فصل۸: گراف (دوازدهم)
۱۴۴	۵۱	گراف منتظم ــ کامل	۴۴	
۱۴۵	۵۱	زیرگراف ــ گراف مکمل	۴۵	
۱۴۶	۵۲	مسیر ــ دور	۴۶	
۱۴۷	۵۳	احاطه‌گری (آزمون اول)	۴۷	
۱۴۸	۵۴	احاطه‌گری (آزمون دوم)	۴۸	
۱۴۹	۵۵	جامع فصل (استاندارد)	۴۹	
۱۵۱	۵۶	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۵۰	
۱۵۳	۵۸	جایگشت با تکرار	۵۱	فصل۹: ترکیبیات (دوازدهم)
۱۵۴	۵۸	حل معادلهٔ سیالهٔ خطی	۵۲	
۱۵۵	۵۹	مربع لاتین	۵۳	
۱۵۶	۶۰	اصل شمول	۵۴	
۱۵۸	۶۱	اصل لانهٔ کبوتری	۵۵	
۱۵۹	۶۲	جامع فصل (استاندارد)	۵۶	
۱۶۱	۶۳	جامع فصل (به سوی ۱۰۰)	۵۷	
۱۶۳	۶۵	جامع دهم و یازدهم	۵۸	فصل۱۰: آزمون‌های جامع
۱۶۶	۶۶	نیم‌سال اول دوازدهم	۵۹	
۱۶۸	۶۸	نیم‌سال دوم دوازدهم	۶۰	
۱۷۰	۶۹	جامع دوازدهم	۶۱	
۱۷۳	۷۱	جامع (آزمون اول)	۶۲	
۱۷۵	۷۲	جامع (آزمون دوم)	۶۳	
۱۷۸	۷۴	جامع (آزمون سوم)	۶۴	
۱۸۱	۷۶	جامع (آزمون چهارم)	۶۵	
۱۸۳	۷۷	جامع (آزمون پنجم)	۶۶	
۸۱				پاسخ‌نامهٔ کلیدی

۳۶

• موضوع : همنهشتی (آزمون اول)
• نوع آزمون: مبحثی
• صفحهٔ کتاب درسی: ۱۸ تا ۲۲ ریاضیات گسسته
• ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

۴۱۱- عدد $27^{100}+18$ به کدام دستهٔ همنهشتی تعلق دارد؟

۱) $[0]_{13}$ ۲) $[3]_{13}$ ۳) $[6]_{13}$ ۴) $[9]_{13}$

۴۱۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\frac{47!}{47!}+\cdots+\frac{47!}{3!}+\frac{47!}{2!}+\frac{47!}{1!}$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۴۱۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $3^{50}-1$ بر ۳۰ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۳ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۱۴- به ازای کدام دسته از اعداد طبیعی n، عدد $7^{9n+3}+7^{3n+1}+11$ بر ۱۹ بخش‌پذیر است؟

۱) فقط nهای فرد ۲) فقط nهای زوج ۳) کل اعداد طبیعی ۴) فقط مضارب ۳

۴۱۵- اگر $114a \overset{15}{\equiv} 84b$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $a\overset{5}{\equiv}b$ ۲) $4a\overset{15}{\equiv}b$ ۳) $4a\overset{5}{\equiv}b$ ۴) $a\overset{15}{\equiv}b$

۴۱۶- اگر رقم یکان اعداد $13a+6$ و $30a-9$ مساوی باشند، رقم یکان عدد $2a^2+3a+4$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۹

۴۱۷- اگر $a\overset{12}{\equiv}b$ و $b\overset{18}{\equiv}c$ آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $a\overset{12}{\equiv}c$ ۲) $a\overset{9}{\equiv}c$ ۳) $a\overset{6}{\equiv}c$ ۴) $a\overset{4}{\equiv}c$

۴۱۸- هر عدد صحیح مثل k، دقیقاً در یکی از رابطه‌های $k\overset{m}{\equiv}6\,,\dots,k\overset{m}{\equiv}1\,,k\overset{m}{\equiv}0$ صدق می‌کند. عدد 2000^4+1000^3 به کدام دستهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m قرار می‌گیرد؟

۱) $[0]$ ۲) $[1]$ ۳) $[3]$ ۴) $[6]$

۴۱۹- از رابطهٔ همنهشتی $6x\overset{9}{\equiv}21$ کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

۱) $3\mid 2x+5$ ۲) $9\mid 2x+2$ ۳) $9\mid 2x+7$ ۴) $3\mid 2x-2$

۴۲۰- اگر عدد $7^{15}+a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۱

• موضوع: جامع فصل • نوع آزمون: استاندارد

• صفحهٔ کتاب درسی: ۹ تا ۳۰ ریاضیات گسسته • ۱۵ تست در ۲۳ دقیقه

۴۶۱- اگر $a \mid a^2 - b^2$ کدام گزینه نتیجه نمی‌شود؟

۱) $a-b \mid b^2$ ۲) $a+b \mid ab$ ۳) $a^2-b^2 \mid a^3$ ۴) $a+b \mid a-b$

۴۶۲- اگر $(a,b) = d > 1$ و $d \mid a^2 + b^2 + 13$ آن‌گاه $a-b$ برابر با کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۶۵ ۲) ۴۹ ۳) ۳۶ ۴) ۲۳

۴۶۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند که $[a,b] = a$، حاصل (a,b) کدام است؟

۱) ۱ ۲) a ۳) b ۴) $\frac{a}{b}$

۴۶۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد m و n بر ۱۵ به ترتیب برابر ۱۱ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $m-2n$ بر ۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶۵- در یک تقسیم، مقسوم‌علیه برابر ۳۰ و باقی‌مانده برابر ۱۴ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد به طوری که در تقسیم بر ۳۰، خارج قسمت تغییر نکند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۷ ۴) ۱۴

۴۶۶- اگر a عددی فرد و $a+2$ بر b بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2 + b^2 + 1$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶۷- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، دو عدد $5n-1$ و $2n+3$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸۵ ۴) ۸۶

۴۶۸- سه عدد ۷۰، ۱۳۵ و ۲۲۶ به یک دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m تعلق دارند. m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۴۶۹- عدد $a + 9^{117}$ بر ۲۶ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۴ ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۴۷۰- اگر ۱۷ آذر در یک سال جمعه باشد، اولین دوشنبه در ماه خرداد در کدام روز است؟

۱) اول خرداد ۲) ۴ خرداد ۳) ۵ خرداد ۴) ۶ خرداد

۴۷۱- به ازای چند عدد دورقمی n، عدد $3^n + 27$ مضرب ۲۸ است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۴۷۲- اگر $a \in [15]_{24}$ و $b \in [7]_{16}$ باشد، $a+b$ عضو کدام مجموعه است؟

۱) $[3]_8$ ۲) $[4]_8$ ۳) $[5]_8$ ۴) $[6]_8$

۴۷۳- اگر دو عدد $\overline{85a}$ و $\overline{6b4}$ به یک کلاس هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق داشته باشند، آن‌گاه عدد $\overline{4b32a}$ به کدام کلاس هم‌نهشتی زیر تعلق دارد؟

۱) $[3]_{11}$ ۲) $[5]_{11}$ یا $[2]_{11}$ ۳) $[6]_{11}$ یا $[0]_{11}$ ۴) $[2]_{11}$ یا $[0]_{11}$

۴۷۴- کوچک‌ترین جواب دورقمی معادلهٔ $53x \overset{7}{\equiv} 11$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

۴۷۵- اگر x و y در معادلهٔ سیالهٔ خطی $54x+21y=15$ صدق کنند، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد x بر ۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۴۲

• موضوع: جامع فصل • نوع آزمون: به سوی ۱۰۰

• صفحهٔ کتاب درسی: ۹ تا ۳۰ ریاضیات گسسته • ۱۵ تست در ۲۳ دقیقه

۴۷۶- a و b دو عدد طبیعی هستند. اگر $ab \mid a+b$، چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۴۷۷- اگر $a \mid 4k+1$ و $b \mid 6k'+5$، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a^2b^2+1 بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۴۷۸- در تقسیم a بر ۱۵۳، خارج قسمت برابر ۷۶ شده است. اگر $2a+1$ مضرب ۱۵ باشد، رقم یکان کوچک‌ترین عدد a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۹

۴۷۹- a و b نسبت به هم اول‌اند. ب.م.م دو عدد $3a+2b$ و $2a+b$ کدام است؟

۱) فقط ۱ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۳ ۴) ۵

۴۸۰- اگر a و b دو عدد فرد متمایز باشند، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $4 \mid a^2-b^2$ ۲) $2 \mid a-b$ ۳) $4 \mid a^2+b^2$ ۴) $2 \mid a+b$

۴۸۱- بزرگ‌ترین جواب دورقمی معادلهٔ $3^{14x-2} \overset{28}{\equiv} 1$ کدام است؟

۱) ۹۵ ۲) ۹۶ ۳) ۹۷ ۴) ۹۸

۴۸۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد طبیعی a و $7a$ بر عدد طبیعی b، به ترتیب برابر ۱۷ و ۳۵ است. b کدام است؟

۱) ۳ و ۴۲ و ۸۴ ۲) فقط ۴۲ ۳) ۸۴ یا ۴۲ ۴) فقط ۸۴

۴۸۳- به ازای هر عدد طبیعی n که $n \le t$ است، دو عدد $5n-3$ و $7n+2$ نسبت به هم اول‌اند. بیشترین مقدار t کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۴۳ ۴) ۴۴

۴۸۴- اعداد مجموعهٔ $\{7^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ را بر ۴۳ تقسیم می‌کنیم. اگر اعدادی را که هم‌باقی‌مانده هستند، در یک زیرمجموعه در نظر بگیریم، این مجموعه به چند زیرمجموعه افراز می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۴۸۵- به ازای کدام مقدار a، عبارت $a^{57}-7^{57}-9^{57}$ بر عدد ۶۳ بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۱۶ ۲) ۵۷ ۳) ۷۹ ۴) ۱۳۰

۴۸۶- به ازای چند عدد m از مجموعهٔ $\{2,3,4,\ldots,10\}$، جواب‌های دو معادلهٔ $9x \overset{m}{\equiv} 6$ و $3x \overset{m}{\equiv} 2$ یکسان است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۸۷- دو رقم سمت راست $2!+4!+6!+\cdots+100!$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۶ ۳) ۶۶ ۴) ۸۶

۴۸۸- دو عدد m و n نسبت به هم اول‌اند. معادلهٔ $(m+n)x+(m-n)y=4$ در چه صورتی جواب دارد؟

۱) فقط m و n فرد ۲) به ازای هر m و n صحیح ۳) فقط m زوج و n فرد ۴) فقط n و mهای زوج

۴۸۹- معادلهٔ $23x+13y=7$ چند جواب صحیح دارد، به طوری که $x,y \in [-100,100]$؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۴

۴۹۰- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی x که سیزده برابر آن منهای ۱۱ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۶۲

• موضوع: جامع (آزمون اول)
• ۲۰ تست در ۳۰ دقیقه
• صفحهٔ کتاب درسی: ۱۱۸ تا ۱۷۰ ریاضی ۱ و ۱ تا ۱۲۷ آمار و احتمال و ۱ تا ۸۵ ریاضیات گسسته

۷۴۱- ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow r) \wedge q$ در چند حالت درست است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

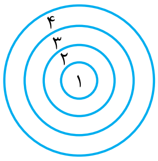
۷۴۲- مجموعهٔ $[A \cup (B' \cup A)] \cap [(A' - B) \cap (A \cup B)]$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A \cap B$ ۴) $\varnothing$

۷۴۳- درون یک سی‌دی ۳ آهنگ مختلف از خوانندهٔ A، ۲ آهنگ مختلف از خوانندهٔ B و یک آهنگ از خوانندهٔ C وجود دارد. اگر آهنگ‌ها به صورت تصادفی پخش شوند، با کدام احتمال آهنگ‌های هر خواننده، پشت سر هم پخش می‌شود؟

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{1}{20}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{10}$

۷۴۴- در پرتاب یک دارت به صفحهٔ دایره‌ای‌شکل مقابل، احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ kام، برابر $(2k-1)x$ است. احتمال آن‌که در دو پرتاب پشت سر هم، ۳ امتیاز بگیریم چه‌قدر است؟ (شمارهٔ هر ناحیه، امتیاز آن ناحیه را نشان می‌دهد. از احتمال عدم برخورد و برخورد بین دو ناحیه صرف‌نظر می‌کنیم.)



۱) $\frac{3}{256}$ ۲) $\frac{3}{128}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷۴۵- در ظرف A، ۵ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز و در ظرف B، ۳ مهرهٔ آبی و ۷ مهرهٔ قرمز موجود است. از ظرف A، سه مهره و از ظرف B، ۲ مهره خارج کرده و در ظرف C قرار می‌دهیم. اگر مهرهٔ خارج‌شده از ظرف C آبی باشد با کدام احتمال این مهرهٔ آبی از ظرف B درون C قرار داده شده است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{5}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

۷۴۶- یک نمودار دایره‌ای مربوط به ۹۰ داده، به سه ناحیهٔ A، B و C تقسیم شده است. اگر زاویهٔ B دو برابر زاویهٔ A و زاویهٔ C، سه برابر زاویهٔ B باشد. فراوانی مطلق دستهٔ B چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۷۴۷- ضریب تغییرات داده‌های درون جعبه در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۴۸، ۳۵، ۲۱، ۱۹، ۱۵، ۱۲، ۳، ۲، ۱ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{20}{7}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{7}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{7}$

۷۴۸- در یک جامعه انحراف معیار برآورد میانگین با نمونه‌های ۱۰۰تایی برابر ۰/۲۵ است. میانگین یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰عضوی برابر ۳۰ شده است. میانگین این جامعه با اطمینان ۹۵٪ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $[29,31]$ ۲) $[28/5,31/5]$ ۳) $[29/5,30/5]$ ۴) $[29/05,30/05]$

۷۴۹- برای اثبات .... گزارهٔ زیر از روش .... استفاده می‌کنیم.

«اگر P عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد باقی‌ماندهٔ P^2 بر ۱۲ برابر یک است»

۱) درستی ـ در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها ۲) درستی ـ اثبات مستقیم

۳) نادرستی ـ مثال نقض ۴) نادرستی ـ غیرمستقیم

۷۵۰- اگر $27^{n+1} \mid 18^{2n-1}$ و $6^{m-1} \mid 54^3$ باشد کدام گزینه درست است؟

۱) $\min(n)+\max(m)=15$ ۲) $\min(n)+\max(m)=9$

۳) $\max(n)+\min(m)=15$ ۴) $\max(n)+\min(m)=9$

۷۵۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی n بر ۲۹ برابر ۱۷ است. اگر این عدد مضرب ۱۳ باشد مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۳

۷۵۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(7^{47}+1)(6!-1)$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۹

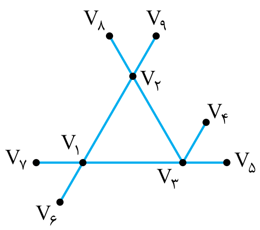
۷۵۳- اگر $\overline{۶a۲b} \in [۶]_{۱۱}$ باشد، عدد چهاررقمی $\overline{۶a۲b}$ عضو کدام دسته نمی‌تواند باشد؟

۱) $[۲]_۹$ ۲) $[۴]_۹$ ۳) $[۴]_{۱۰}$ ۴) $[۷]_{۱۰}$

۷۵۴- گراف G دارای ۳ رأس از درجهٔ ۴ و ۷ رأس از درجهٔ ۲ است. اگر گراف دارای ۱۵ یال باشد گراف چند رأس از درجهٔ ۱ دارد؟

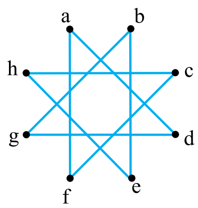
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۱ یا ۲ ۴) ۱ یا ۴

۷۵۵- H زیرگرافی از گراف مقابل است. اگر V(H) یک γـ مجموعه باشد، H به چند صورت می‌تواند باشد؟



۱) ۱
۲) ۴
۳) ۸
۴) بستگی به γـ مجموعه دارد.

۷۵۶- مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف مقابل حداکثر چند عضو دارد؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۷۵۷- نامعادلهٔ $x+y+z+w \le ۷$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۳۵ ۲) ۱۶۵ ۳) ۳۳۰ ۴) ۷۷۰

۷۵۸- اعداد ۳، ۳، ۳، ۲، ۲، ۲، ۱، ۱، ۱ را به تصادف درون یک مربع ۳×۳ قرار می‌دهیم. با کدام احتمال مربع به دست آمده مربع لاتین است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۴۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸۰}$ ۴) $\frac{۱۲}{۹!}$

۷۵۹- تعداد تابع‌های غیریک‌به‌یک از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ به $\{۱,۲,۳,...,۶\}$ برابر با کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۹۶

۷۶۰- حداقل چند تابع f از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳\}$ بسازیم تا مطمئن باشیم در بین آن‌ها ۳ تابع که $R_f = B$ باشد وجود دارد؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۹ ۳) ۴۸ ۴) ۷۳

آزمـــون ۳۶

۴۱۱- گزینهٔ ۳ به گزینه‌ها دقت کنید! آن ۱۳ نشان می‌دهد که هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۳ است. حالا سعی می‌کنیم عدد داده‌شده را بسازیم:

$$۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱ \xrightarrow{\text{توان } ۱۰۰} ۲۷^{۱۰۰}\overset{۱۳}{\equiv}۱ \xrightarrow{+۱۸} ۲۷^{۱۰۰}+۱۸\overset{۱۳}{\equiv}۱۹\equiv۶$$

پس باقی‌مانده بر ۱۳ برابر ۶ است، یعنی عدد داده‌شده به $[۶]_{۱۳}$ تعلق دارد.

۴۱۲- گزینهٔ ۲ یادتان باشد در تست‌هایی که شلوغ‌پلوغ است یک کاسه‌ای زیر نیم‌کاسه است، طوری که اگر نکتهٔ آن را بفهمید مسئله خیلی ساده می‌شود. من می‌گویم در دلِ $\frac{۴۷!}{۱!}$ و $\frac{۴۷!}{۲!}$ تا $\frac{۴۷!}{۴۳!}$، عدد ۴۴ که مضرب ۱۱ است وجود دارد، یعنی همهٔ این‌ها به پیمانهٔ ۱۱، برابر صفر می‌شوند، پس فقط می‌ماند چهارتای آخر!

$$\frac{۴۷!}{۴۴!}+\frac{۴۷!}{۴۵!}+\frac{۴۷!}{۴۶!}+\frac{۴۷!}{۴۷!}$$

$$=(۴۷\times۴۶\times۴۵)+(۴۷\times۴۶)+۴۷+۱$$

$$\overset{۱۱}{\equiv}(۳\times۲\times۱)+(۳\times۲)+۳+۱\overset{۱۱}{\equiv}۵$$

۴۱۳- گزینهٔ ۳ فکر می‌کنم موافق باشید که 3^3 شروع خوبی می‌تواند باشد چون $3^3 \overset{30}{\equiv} -3$ می‌شود. دو طرف را به توان ۱۶ برسانیم می‌شود: $3^{48} \overset{30}{\equiv} (-3)^{16} = 3^{16}$

$$3^3 \overset{30}{\equiv} -3 \xrightarrow{\text{توان}\,5} 3^{15} \overset{30}{\equiv} -3^5 \xrightarrow{\times 3} 3^{16} \overset{30}{\equiv} -3^6$$

پس شد:

$$3^{48} \overset{30}{\equiv} 3^{16} \overset{30}{\equiv} -3^6 \overset{30}{\equiv} -(3^3 \times 3^3) \overset{30}{\equiv} -(-3 \times (-3)) = -9$$

$$\xrightarrow{\times 3^2} 3^{50} \overset{30}{\equiv} -9 \times 9 + 3(30) = 9 \xrightarrow{-1} 3^{50} - 1 \overset{30}{\equiv} 8$$

پس باقی‌مانده برابر ۸ می‌شود.

۴۱۴- گزینهٔ ۳ اگر بتوانیم توانی از عدد ۷ پیدا کنیم که هم‌نهشت ۱ یا ۱− به پیمانهٔ ۱۹ باشد خیلی خوب می‌شود. پس شروع به جست‌وجو می‌کنیم. ۷ و 7^2 که نمی‌شوند اما $7^3 \overset{19}{\equiv} 49 \times 7 \overset{19}{\equiv} 11 \times 7 \overset{19}{\equiv} 1$. پس:

$$7^3 \overset{19}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان}\,n} 7^{3n} \overset{19}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 7} 7^{3n+1} \overset{19}{\equiv} 7$$

$$\xrightarrow{\text{توان سوم}} 7^{9n+3} \overset{19}{\equiv} 7^3 \overset{19}{\equiv} 1$$

پس: $7^{9n+3} + 7^{3n+1} + 11 \overset{19}{\equiv} 1 + 7 + 11 \overset{19}{\equiv} 0$

یعنی به ازای هر عدد طبیعی n، عدد داده‌شده مضرب ۱۹ است.

۴۱۵- گزینهٔ ۱ ضرایب را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$114a \overset{15}{\equiv} 84b \xrightarrow[(15,2)=1]{\div 2} 57a \overset{15}{\equiv} 42b$$

$$\xrightarrow[(15,3)=3]{\div 3} 19a \overset{5}{\equiv} 14b$$

$$\xrightarrow[14 \overset{5}{\equiv} 4]{19 \overset{5}{\equiv} 4} 4a \overset{5}{\equiv} 4b \xrightarrow[(5,4)=1]{\div 4} a \overset{5}{\equiv} b$$

۴۱۶- گزینهٔ ۴ رقم یکان دو عدد داده‌شده مساوی است؛ یعنی هر دو به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت هستند.

$$13a + 6 \overset{10}{\equiv} 30a - 9 \Rightarrow 17a \overset{10}{\equiv} 15 \xrightarrow{17 \overset{10}{\equiv} -3} -3a \overset{10}{\equiv} 15$$

$$\xrightarrow[(3,10)=1]{\div 3} -a \overset{10}{\equiv} 5 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} -5 \Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 5$$

خب پس رقم یکان a برابر ۵ است. حالا می‌بینیم عددی که داده در پیمانهٔ ۱۰ چه می‌شود؟

$$2a^2 + 3a + 4 \overset{10}{\equiv} 2(5)^2 + 3(5) + 4 \overset{10}{\equiv} 50 + 15 + 4 \overset{10}{\equiv} 9$$

یعنی رقم یکان برابر ۹ می‌شود.

۴۱۷- گزینهٔ ۳ اگر دو عدد به پیمانهٔ m هم‌نهشت باشند، به پیمانهٔ مقسوم‌علیه‌های m هم هم‌نهشت هستند، پس می‌توانیم به جای پیمانه‌های ۱۲ و ۱۸ پیمانهٔ ۶ را قرار دهیم، یعنی $a \overset{6}{\equiv} b$ و $b \overset{6}{\equiv} c$.

رابطهٔ هم‌نهشتی ویژگی تعدی هم دارد، پس $a \overset{6}{\equiv} c$.

۴۱۸- گزینهٔ ۲ آن صفر تا ۶ که گفته همان باقی‌مانده‌های تقسیم k بر m هستند، یعنی از آن چیزی که گفته نتیجه می‌شود $m = 7$ بوده است.

از طرفی $1000 \overset{7}{\equiv} 10 \times 10 \times 10 \overset{7}{\equiv} 3 \times 3 \times 3 \overset{7}{\equiv} -1$ می‌شود پس:

$$1000^3 + 2000^4 \overset{7}{\equiv} \underbrace{(-1)^3 + (2 \times -1)^4}_{15} \overset{7}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 1000^3 + 2000^4 \in [1]_7$$

۴۱۹- گزینهٔ ۱ دو طرف و پیمانه بر ۳ بخش‌پذیرند پس همه را به ۳ ساده می‌کنیم تا به $2x \overset{3}{\equiv} 7$ برسیم. حالا:

$$2x \overset{3}{\equiv} 7 \overset{3}{\equiv} 1 \overset{3}{\equiv} -5$$

$$2x \overset{3}{\equiv} -5 \Rightarrow 3 \mid 2x - (-5)$$

۴۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا یک هم‌نهشتی اولیه می‌نویسیم و سپس با توان‌رسانی 7^{15} را می‌سازیم. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^2 بر ۲۳ برابر ۳ می‌شود، داریم:

$$7^2 \overset{23}{\equiv} 3 \xrightarrow{\text{توان}\,7} 7^{14} \overset{23}{\equiv} 3^7 \xrightarrow{\times 7} 7^{15} \overset{23}{\equiv} 7 \times 3^7$$

$$\overset{23}{\equiv} 7 \times 3^3 \times 3^3 \times 3 \overset{23}{\equiv} 7 \times 27 \times 27 \times 3 \overset{23}{\equiv} \underbrace{7 \times 4}_{28} \times 4 \times 3$$

$$\overset{23}{\equiv} \underbrace{5 \times 4 \times 3}_{60} \overset{23}{\equiv} 14$$ (توجه دارید که $27 \overset{23}{\equiv} 4$ و $28 \overset{23}{\equiv} 5$)

بنابراین اگر $7^{15} + a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$7^{15} + a \overset{23}{\equiv} 14 + a \overset{23}{\equiv} 0$$

کوچک‌ترین مقدار a برابر ۹ به دست می‌آید.

آزمون ۴۱

۴۶۱- گزینهٔ ۴ خب $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ می‌شود پس $a-b \mid a^2-b^2$. حالا از ویژگی تعدی عادکردن می‌فهمیم $a-b \mid a$، پس $a-b \mid a-(a-b)=b$ بنابراین $a-b \mid b^2$ و ۱ درست است. شبیه همین $a+b \mid a^2-b^2$، پس $a+b \mid a$ و بنابراین $a+b \mid a-(a+b)=-b$، پس $a+b \mid -b$. حالا $a+b$ هر مضرب $-b$ مثل ab را هم عاد می‌کند، پس $a+b \mid ab$ هم درست است. ۳ هم تابلو درست است چون سمت راست هر رابطهٔ عادکردن را می‌توانیم در هر عدد صحیح دلخواه ضرب کنیم.

۴۶۲- گزینهٔ ۱ $(a,b)=d$ است، پس $d \mid a$ و $d \mid b$. بنابراین $d \mid a^2$ و $d \mid b^2$. حالا:

$$\begin{rcases} d \mid a^2+b^2+13 \\ d \mid a^2+b^2 \end{rcases} \xrightarrow{\text{کم}} d \mid 13 \xrightarrow{d>1} d=13$$

پس $13 \mid a$ و $13 \mid b$، یعنی $a=13k$ و $b=13k'$ به دست می‌آید. بنابراین $a-b=13(k-k')$ یعنی گزینه‌ای قبول است که مضرب ۱۳ باشد. $13\times 5=65$ پس همین گزینه قبول می‌شود.

۴۶۳- گزینهٔ ۳ کوچک‌ترین مضرب مشترک b و a برابر a شده است، پس a مضرب b است، یعنی $b \mid a$. پس b مقسوم‌علیه a است. بنابراین ب.م.م b و a برابر b *(کوچک‌تره)* می‌شود یعنی $(a,b)=b$.

۴۶۴- گزینهٔ ۲ روش ۱ از همنهشتی برویم:

$$m \overset{15}{\equiv} 11 \qquad n \overset{15}{\equiv} 7$$

به جای پیمانه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را قرار دهیم، پس:

$$\begin{rcases} m \overset{5}{\equiv} 11 \overset{5}{\equiv} 1 \\ n \overset{5}{\equiv} 7 \overset{5}{\equiv} 2 \end{rcases} \Rightarrow m-2n \overset{5}{\equiv} \underbrace{1-(2\times 2)}_{-3} \overset{5}{\equiv} 2$$

روش ۲ رابطه‌های تقسیم را می‌نویسیم:

$$m=15k+11$$

$$n=15k'+7 \xrightarrow{\times 2} 2n=15(2k')+14 \Rightarrow m-2n$$

$$=15(k-2k')-3=5\times \underbrace{3(k-2k')}_{q}-3=5q-3$$

باقی‌مانده بر ۵ نمی‌تواند منفی باشد، پس یک بستهٔ ۵تایی باز می‌کنیم یعنی باقی‌مانده برابر $5-3=2$ می‌شود.

در واقع این کار را انجام داده‌ایم:

$$5q-3=5(q-1)+\overbrace{5-3}^{2}$$

۴۶۵- گزینهٔ ۱ رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم، بعد به دو طرف x واحد اضافه می‌کنیم. باقی‌ماندهٔ جدید برابر $14+x$ می‌شود که باید از مقسوم‌علیه کوچک‌تر باشد.

$$a=30q+14 \xrightarrow{+x} a+x=30q+\underbrace{14+x}_{r}$$

$$\xrightarrow{0\le r<b} 0 \le x+14<30 \Rightarrow 0\le x<16$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x_{max}=15$$

۴۶۶- گزینهٔ ۳ a فرد است، پس $a+2$ هم فرد است. $a+2$ بر b بخش‌پذیر است پس b نمی‌تواند زوج باشد (چون در این صورت $a+2$ مضرب عدد زوج b بوده و زوج می‌شود). مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است؛ یعنی $a^2 \overset{8}{\equiv} 1$ و $b^2 \overset{8}{\equiv} 1$. داریم:

$$a^2+b^2+1 \overset{8}{\equiv} 1+1+1=3$$

۴۶۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $d=(2n+3,5n-1)$ باشد. پس d هر دو را عاد می‌کند. سمت راست را یک‌جوری ضرب می‌کنیم که بعد از ساده‌شدن اثری از n باقی نماند.

$$\begin{cases} d\,|\,2n+3 \\ d\,|\,5n-1 \end{cases} \Rightarrow d\,|\,5(2n+3)-2(5n-1)=17$$

پس $d=1$ یا $d=17$ می‌تواند باشد. اگر قرار باشد $d=17$ باشد، $17\,|\,2n+3$. پس: $2n+3 \overset{17}{\equiv} 0 \xrightarrow{\times 9} 18n+27 \overset{17}{\equiv} n+10 \overset{17}{\equiv} 0$

یعنی $n+10=17k$. پس اگر n، اعداد دورقمی به صورت $17k-10$ باشد، ب.م.م دو عدد برابر ۱۷ می‌شود. به ازای $k=2,3,\dots,6$ (یعنی ۵ عدد n دورقمی شده و ب.م.م برابر ۱۷ می‌شود پس به ازای $90-5=85$ عدد دورقمی، ب.م.م اعداد $5n-1$ و $2n+3$ برابر یک می‌شود.

۴۶۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید $135 \overset{m}{\equiv} 70$ باشد، پس $m\,|\,135-70=65=5\times13$؛ یعنی m مقسوم‌علیه‌های ۶۵ می‌تواند باشد (مثلاً ۵ یا ۱۳). شبیه همین $m\,|\,\underbrace{226-135}_{91=13\times7}$ پس m باید مقسوم‌علیه ۹۱ هم باشد. گزینه‌ای برای m قبول است که مقسوم‌علیه هر دو عدد ۶۵ و ۹۱ مثل ۱۳ باشد.

۴۶۹- گزینهٔ ۱ اگر بتوانیم توانی از ۹ پیدا کنیم که همنهشت ۱+ یا ۱− به پیمانهٔ ۲۶ باشد مسئله خیلی راحت حل می‌شود، اما پیداکردن چنین توانی کار حضرت فیل است! کمی صبر کنید $9=3^2$ است. توان‌های ۳ چه‌طور؟ آفرین $3^3 \overset{26}{\equiv} 1$ می‌شود. حالا $9^{117}+a=(3^2)^{117}+a=3^{234}+a$ می‌شود.

$$3^3 \overset{26}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان ۷۸}} 3^{234} \overset{26}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{234}+a \overset{26}{\equiv} 1+a$$

چون گفته بخش‌پذیر پس $1+a \overset{26}{\equiv} 0$، یعنی $26\,|\,1+a$ پس $a=26k-1$ می‌شود. پس کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر ۲۵ می‌شود.

۴۷۰- گزینهٔ ۱ من می‌گویم اول ببینیم آخرین روز اردیبهشت، چندشنبه است. از ۱۷ آذر تا آخرین روز اردیبهشت باید $17+(2\times30)+(4\times31)$ به عقب برویم.

جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	روز
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	

مبدأ را روز جمعه می‌گیریم و می‌بینیم آن عدد به پیمانهٔ ۷، همنهشت کدام عدد است. البته چون به عقب رفته‌ایم تعداد روزها را منفی در نظر می‌گیریم. *(می‌تونستی مثل تست ۴۳۲ هم بری!)*

$$-[(4\times31)+(2\times30)+17] \overset{7}{\equiv} -[5+4+3] \overset{7}{\equiv} -5 \overset{7}{\equiv} 2$$

یعنی آخرین روز اردیبهشت متناظر عدد ۲ یعنی یکشنبه بوده است. حالا اول خرداد می‌شود دوشنبه.

۴۷۱- گزینهٔ ۳ خب $3^n+27 \overset{28}{\equiv} 0$ پس $3^n-1 \overset{28}{\equiv} 0$ و این یعنی $3^n \overset{28}{\equiv} 1$. باید کوچک‌ترین عدد n را پیدا کنیم، بعد بقیهٔ nهای قابل‌قبول، مضرب آن عدد می‌شوند. می‌دانیم $3^3 \overset{28}{\equiv} -1$ می‌شود. اگر این را توان دو برسانیم $3^6 \overset{28}{\equiv} 1$؛ یعنی کوچک‌ترین عدد n برابر $n=6$ می‌شود *(خیالت راحت اگه همنهشت ۱− رو هم پیدا کردی توان دومش همنهشت یک می‌شه و دیگه کوچک‌تر از اون جوابی نداره!)* حالا $3^{6k} \overset{28}{\equiv} 1$ یعنی مضارب ۶، همگی جواب‌های $3^n \overset{28}{\equiv} 1$ هستند. تعداد عدد دورقمی مضرب ۶ داریم $[\frac{99}{6}]-[\frac{9}{6}]=15$، پس به ازای ۱۵ عدد دورقمی n، معادلهٔ $3^n \overset{28}{\equiv} 1$ برقرار می‌گردد.

۴۷۲- گزینهٔ ۴ $a\in[15]_{24}$ یعنی $a \overset{24}{\equiv} 15$. از $b\in[7]_{16}$ هم نتیجه می‌شود $b \overset{16}{\equiv} 7$.

به گزینه‌ها دقت کنید پیمانه برابر ۸ است. به جای پیمانه‌ها یعنی ۱۶ و ۲۴ در این دو رابطه‌ای که به دست آوردیم می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن‌ها را (یعنی ۸) هم قرار دهیم، پس:

$$\begin{cases} a \overset{8}{\equiv} 15 \\ b \overset{8}{\equiv} 7 \end{cases} \Rightarrow a+b \overset{8}{\equiv} 22 \overset{8}{\equiv} 6 \Rightarrow a+b\in[6]_8$$

۴۷۳- گزینهٔ ۴ دو عدد $\overline{85a}$ و $\overline{6b4}$ به یک کلاس همنهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارند. پس هر دو به پیمانهٔ ۹، همنهشت یکدیگرند:

$$\overline{85a} \overset{9}{\equiv} \overline{6b4} \Rightarrow 8+5+a \overset{9}{\equiv} 6+b+4 \Rightarrow 13+a \overset{9}{\equiv} 10+b$$

$$\Rightarrow a-b \overset{9}{\equiv} -3 \overset{9}{\equiv} 6$$

با توجه به این‌که $b\le 9$ و $0\le a$، نتیجه می‌گیریم $a-b=-3$ یا $a-b=6$ بوده است. حالا در همنهشتی به پیمانهٔ ۱۱ داریم:

$$\overline{4b32a} \overset{11}{\equiv} a-2+3-b+4 \overset{11}{\equiv} a-b+5$$

$$a-b=-3 \Rightarrow a-b+5 \overset{11}{\equiv} 2$$

$$a-b=6 \Rightarrow a-b+5 \overset{11}{\equiv} 0$$

۴۷۴- گزینهٔ ۳ $53 \overset{7}{\equiv} 4$ و $11 \overset{7}{\equiv} 4$ می‌شود، پس کافی است معادلهٔ همنهشتی $4x \overset{7}{\equiv} 4$ را حل کنیم.

$$4x \overset{7}{\equiv} 4 \xrightarrow[(4,7)=1]{\div 4} x \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow x=7k+1$$

کوچک‌ترین عدد دورقمی x به ازای $k=2$ یعنی $x=15$ به دست می‌آید.

۴۷۵- گزینهٔ ۲ تساوی را تبدیل به معادلهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۷ می‌کنیم:

$$54x+21y\overset{7}{\equiv}15 \Rightarrow 54x+0\overset{7}{\equiv}1 \Rightarrow 54x\overset{7}{\equiv}1$$

$$\xrightarrow{54\overset{7}{\equiv}-2} -2x\overset{7}{\equiv}1 \Rightarrow 2x\overset{7}{\equiv}-1+7=6$$

$$\xrightarrow[(2,7)=1]{\div 2} x\overset{7}{\equiv}3$$

پس باقی‌ماندهٔ x بر ۷ برابر ۳ می‌شود.

آزمون ۴۲

۴۷۶- گزینهٔ ۲ اجازه بدهید ببینیم از آن رابطه، چه چیزی درمی‌آید: $a|ab, ab|a+b \Rightarrow a|a+b \Rightarrow a|b$

شبیه همین ثابت می‌شود $b|a$، بنابراین $|a|=|b|$. چون a و b مثبت هستند، پس $a=+b$. با جای‌گذاری داریم:

$$a=b \Rightarrow a^2|2a \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} \begin{cases} a=1\\ a=2\end{cases}$$

برای بقیهٔ اعداد، سمت چپ، بزرگ‌تر از سمت راست شده و رابطه برقرار نمی‌شود، پس a دو مقدار طبیعی می‌تواند باشد.

۴۷۷- گزینهٔ ۲ $4k+1$ و $6k'+5$ اعدادی فرد هستند پس a و b هم فرد هستند. حالا a^2 و b^2 هم فرد هستند. از طرفی مربع هر عدد فرد به شکل $8q+1$ است. پس:

$$a^2b^2+1=(8q+1)(8q'+1)+1\overset{8}{\equiv}(1\times1)+1=2$$

۴۷۸- گزینهٔ ۳ رابطهٔ تقسیم به صورت $a=153(76)+r$ درمی‌آید که $0\le r<153$ است. از طرفی $2a+1$ مضرب ۱۵ است؛ یعنی $2a+1\overset{15}{\equiv}0$. حالا با جای‌گذاری داریم:

۱۵×۵ کم

$$2(153(76)+r)+1\overset{15}{\equiv}0 \Rightarrow 2(3\times1+r)+1\overset{15}{\equiv}7+2r\overset{15}{\equiv}0$$

۱۵۰تا کم می‌کنیم.

$$2r\overset{15}{\equiv}-7 \Rightarrow 2r\overset{15}{\equiv}8 \xrightarrow[(2,15)=1]{\div2} r\overset{15}{\equiv}4$$

کوچک‌ترین عدد مثبت r برابر ۴ است، پس کم‌ترین مقدار a می‌شود: $a=153(76)+4$ برای محاسبهٔ یکان، کافی است یکان‌ها را در نظر بگیریم. در واقع داریم از همنهشتی به پیمانهٔ ۱۰ استفاده می‌کنیم که داریم $(3\times6)+4$، یعنی یکان برابر ۲ می‌شود.

۴۷۹- گزینهٔ ۱ فرض کنید $(2a+b,3a+2b)=d$ باشد پس:

$$\begin{matrix} d|2a+b \\ d|3a+2b\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} d|3a+2b-2(2a+b)=-a \Rightarrow d|a \\ d|3(2a+b)-2(3a+2b)=-b \Rightarrow d|b\end{cases}$$

پس d هر دو عدد b و a را عاد می‌کند، یعنی مقسوم‌علیه هر دو است. از طرفی b و a نسبت به هم اول‌اند، یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها برابر یک است، پس $d=1$.

۴۸۰- گزینهٔ ۳ جمع و تفریق دو عدد فرد، زوج می‌شود پس ۲ و ۴ که تابلو درست هستند. از طرفی $a-b$ هم زوج و $a+b$ زوج است، پس ضرب آن‌ها یعنی a^2-b^2 مضرب ۴ می‌شود، پس ۱ هم درست است، اما ۳ نادرست است. مثلاً اگر $a=1$ و $b=3$ بگیریم، $4\nmid 10$.

۴۸۱- گزینهٔ ۳ باید ببینیم اولین عددی مثل n که $3^n\overset{28}{\equiv}1$ می‌شود، کدام است؟ خب $3^3\overset{28}{\equiv}-1$ می‌شود. اگر دو طرف را به توان ۲ برسانیم $3^6\overset{28}{\equiv}1$ می‌شود. اگر دو طرف به توان دلخواه k برسد $3^{6k}\overset{28}{\equiv}1$ می‌شود. پس توان ۳ باید مضرب ۶ باشد تا همنهشتی برقرار گردد. یعنی:

$$14x-2\overset{6}{\equiv}0 \xrightarrow{14\overset{6}{\equiv}2} 2x\overset{6}{\equiv}2 \xrightarrow[\div2]{(2,6)=2} x\overset{3}{\equiv}1$$

پس $x=3k+1$ می‌شود. بزرگ‌ترین عدد دورقمی به ازای $k=32$ یعنی ۹۷ به دست می‌آید.

۴۸۲- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ a بر b برابر ۱۷ شده است. پس $a\overset{b}{\equiv}17$. شبیه همین $7a\overset{b}{\equiv}35$. دو طرف اولی را در ۷ ضرب کنیم، می‌شود $7a\overset{b}{\equiv}119$. طبق رابطهٔ تعدی همنهشتی نتیجه می‌گیریم:

$$119\overset{b}{\equiv}35 \Rightarrow b|119-35=84=2\times42$$

دقت کنید b مقسوم‌علیه است، پس باید از باقی‌مانده بزرگ‌تر باشد یعنی $b>35$. از طرفی با توجه به $b|2\times42$ نتیجه می‌شود $b=42$ یا $b=84$.

۴۸۳- گزینهٔ ۱ اول از همه ببینیم ب.م.م دو عدد $5n-3$ و $7n+2$ چه چیزی می‌تواند باشد. $d=(7n+2,5n-3)$ می‌گیریم، پس:

$$\begin{cases} d|7n+2\\ d|7n+2 \end{cases} \Rightarrow d|5(7n+2)-7(5n-3)=31$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ یا } d=31$$

خب حالا باید ببینیم اولین عددی که $d=31$ می‌شود کدام است.

$$5n-3\overset{31}{\equiv}0 \Rightarrow 5n\overset{31}{\equiv}3+2(31)=65 \xrightarrow[(5,31)=1]{\div5} n\overset{31}{\equiv}13$$

پس $n=31k+13$. اگر $k=0$ بدهیم کوچک‌ترین عدد طبیعی $n=13$ است که به ازای آن ب.م.م دو عدد، برابر ۳۱ می‌شود. به ازای $n=1,2,\dots,12$ ب.م.م دو عدد، برابر یک می‌شود *(ولی برای ۱۳ نه)*. پس بیشترین مقدار t برابر ۱۲ است.

۴۸۴- گزینهٔ ۳ فَهم السُّؤال نصف السؤال! می‌گوید اعداد 7^1، 7^2، 7^3 و ... را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که اعداد هم‌باقی‌مانده در تقسیم بر ۴۳ در یک گروه قرار گیرند. خب ببینید:

$$7\overset{43}{\equiv}7,\ 7^2\overset{43}{\equiv}6,\ 7^3=7^2\times7\overset{43}{\equiv}42\overset{43}{\equiv}-1$$

$$7^4\overset{43}{\equiv}\underbrace{7^3}_{-1}\times7\overset{43}{\equiv}-7\overset{43}{\equiv}36$$

$$7^5\overset{43}{\equiv}7^3\times7^2\overset{43}{\equiv}-49\overset{43}{\equiv}-6\overset{43}{\equiv}37$$

$$7^6\overset{43}{\equiv}7^3\times7^3\overset{43}{\equiv}(-1)(-1)=1$$

خب باقی‌مانده 7^6 برابر یک می‌شود. از این‌جا به بعد دوباره باقی‌مانده‌ها تکرار می‌شوند، مثلاً $7^7\overset{43}{\equiv}7$ می‌شود و ... خلاصه این‌که باقی‌مانده‌ها ۷، ۶، ۴۲، ۳۶، ۳۷ و ۱ می‌شوند یعنی $\{7^1,7^7,7^{13},\dots\}$ در یک دسته، $\{7^2,7^8,\dots\}$ در یک دسته و ... همین‌جوری ۶ دسته به وجود می‌آید.

۴۸۵- گزینهٔ ۲ سؤال ساده‌ای به نظر نمی‌رسد! این‌که چهار گزینه را امتحان کنیم منطقی به نظر نمی‌رسد. احتمالاً نکته‌ای دارد که به آن بی‌توجه بوده‌ایم. تمرین مهمی در کتاب درسی می‌گوید $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$. پس $(۹+۷)^n \overset{۶۳}{\equiv} ۹^n + ۷^n$. بنابراین داریم:

$$a^{۵۷} - (۷^{۵۷} + ۹^{۵۷}) \overset{۶۳}{\equiv} a^{۵۷} - (۹+۷)^{۵۷} \overset{۶۳}{\equiv} a^{۵۷} - ۱۶^{۵۷}$$

حالا ببینیم به ازای کدام گزینه‌ها $a^{۵۷} - ۱۶^{۵۷} \overset{۶۳}{\equiv} ۰$ می‌شود. خب به ازای $a = ۱۶$ که $۱۶^{۵۷} - ۱۶^{۵۷} \overset{۶۳}{\equiv} ۰$ می‌شود، پس تابلو بر ۶۳ بخش‌پذیر است. $۱۶ \overset{۶۳}{\equiv} ۷۹$ است، پس به ازای $a = ۷۹$ هم بخش‌پذیر می‌شود. به ازای $a = ۱۳۰$ چه‌طور؟ $۱۳۰ \overset{۶۳}{\equiv} ۴$ می‌شود، پس داریم:

$$۱۳۰^{۵۷} - ۱۶^{۵۷} \overset{۶۳}{\equiv} ۴^{۵۷} - ۱۶^{۵۷} \overset{۶۳}{\equiv} ۴^{۵۷}(۱ - ۴^{۵۷}) \overset{۶۳}{\equiv} ۴^{۵۷}(۱-۱) \overset{۶۳}{\equiv} ۰$$

چون:

$$۴^{۵۷} = (۴^۳)^{۱۹} \overset{۶۳}{\equiv} ۱^{۱۹} = ۱$$

پس $a = ۱۳۰$ هم می‌تواند باشد.

۴۸۶- گزینهٔ ۴ دو طرف $۹x \overset{m}{\equiv} ۶$ بدون این‌که پیمانه دست بخورد بر ۳ تقسیم شده و رابطهٔ $۳x \overset{m}{\equiv} ۲$ به دست آمده است. این وقتی درست است که $(m,۳) = ۱$ باشد. به ازای $m = ۲,۴,۵,۷,۸,۱۰$، دو عدد m و ۳ نسبت به هم اول بوده و $۳x \overset{m}{\equiv} ۲ \Leftrightarrow ۹x \overset{m}{\equiv} ۶$. پس به ازای ۶ مقدار از آن مجموعه!

۴۸۷- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۰، همان رقم یکان آن عدد را می‌دهد. شبیه همین باقی‌مانده بر ۱۰۰، دو رقم آخر (یکان و دهگان)! پس از هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۰۰ استفاده می‌کنیم:

$$۲! + ۴! + ۶! + ۸! + \underbrace{۱۰! + \cdots + ۱۰۰!}_{\text{همگی مضرب ۱۰۰ هستند.}} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲ + ۲۴ + ۷۲۰ + ۸ \times ۷ \times \underbrace{۷۲۰}_{۲۰}$$

$$\overset{۱۰۰}{\equiv} ۲ + ۲۴ + ۲۰ + \underbrace{۱۱۲۰}_{۲۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۶۶$$

۴۸۸- گزینهٔ ۲ معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ وقتی جواب دارد که $(a,b) \mid c$، پس باید $(m+n, m-n) \mid ۴$. من می‌گویم $(m+n, m-n) = d$ بگیریم، پس:

$$\begin{cases} d \mid m+n \\ d \mid m-n \end{cases} \Rightarrow d \mid ۲m, d \mid ۲n$$

پس d مقسوم‌علیه مشترکی از $۲m$ و $۲n$ است. گفته $(m,n) = ۱$ یعنی n و m هیچ مقسوم‌علیه مشترکی غیر از یک ندارند، پس $d = ۱$ یا $d = ۲$ ممکن است باشد. در هر دو صورت $d \mid ۴$. بنابراین معادله به ازای هر n و m صحیح جواب دارد. (با امتحان چندتا عدد هم می‌توانستیم به همین جواب برسیم!)

۴۸۹- گزینهٔ ۲ از هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۳ استفاده می‌کنیم یعنی معادله را می‌بریم به پیمانهٔ ۱۳:

$$۲۳x \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۱۰x \overset{۱۳}{\equiv} ۷ + ۱۳ = ۲۰ \xrightarrow[(۱۰,۱۳)=۱]{\div ۱۰} x \overset{۱۳}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow x = ۱۳k + ۲$$

با جای‌گذاری داریم:

$$۲۳(۱۳k + ۲) + ۱۳y = ۷ \Rightarrow y = \frac{۷ - ۲۳ \times ۱۳k - ۴۶}{۱۳}$$

$$= -۲۳k - ۳$$

حالا ببینیم چند جواب در محدوده‌ای که گفته دارد، یعنی:

$$\begin{cases} -۱۰۰ \leq ۱۳k + ۲ \leq ۱۰۰ \Rightarrow k = -۷, \ldots, ۶, ۷ \\ -۱۰۰ \leq -۲۳k - ۳ \leq ۱۰۰ \Rightarrow k = -۴, -۳, \ldots, +۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} k = -۴, -۳, \ldots, +۴$$

پس معادله در آن محدوده‌ای که گفته ۹ جواب دارد.

۴۹۰- گزینهٔ ۲ عدد موردنظر را x می‌گیریم پس کافی است معادلهٔ هم‌نهشتی زیر را حل کنیم:

$$۱۳x - ۱۱ \overset{۹}{\equiv} ۰ \xrightarrow[۱۱ \overset{۹}{\equiv} ۲]{۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴} ۴x \overset{۹}{\equiv} ۲ \xrightarrow[(۲,۹)=۱]{\div ۲} ۲x \overset{۹}{\equiv} ۱$$

با اضافه‌کردن ۹ به سمت راست داریم:

$$۲x \overset{۹}{\equiv} ۱۰ \xrightarrow[(۲,۹)=۱]{\div ۲} x \overset{۹}{\equiv} ۵$$

پس $x = ۹k + ۵$ است. بزرگ‌ترین عدد دورقمی x به ازای $k = ۱۰$ یعنی ۹۵ به دست می‌آید که مجموع ارقام آن برابر ۱۴ است.

آزمون ۶۲

۷۴۱- گزینهٔ ۲ به جای این‌که سریع جدول ارزش (*که ۸ تا ردیف داره*) بکشید کمی فکر کنید!

با توجه به ترکیب عطفی، اگر $p \Rightarrow r$ یا q نادرست باشد کل گزاره نادرست می‌شود، پس q و $p \Rightarrow r$ هر دو باید درست باشند. $p \Rightarrow r$ در سه حالت از ۴ حالتی که r و p ممکن است داشته باشند، درست می‌شود پس کل گزاره در سه حالت درست می‌شود. (سه حالت زیر)

p	r	q	$(p \Rightarrow r) \wedge q$
د	د	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	د	د

۷۴۲- گزینهٔ ۴ طبق شرکت‌پذیری اجتماع:

$$A \cup (B' \cup A) = (A \cup A) \cup B' = A \cup B'$$

طبق تفاضل به اشتراک: $A' - B = A' \cap B'$

پس چیزی که خواسته می‌شود:

$$(A \cup B') \cap (\underbrace{(A' \cap B')}_{(A \cup B)'} \cap (A \cup B)) = \varnothing$$

اشتراک هر مجموعه با متمم خودش برابر $\varnothing$ می‌شود پس $(A \cup B)' \cap (A \cup B) = \varnothing$، بنابراین حاصل کل هم برابر $\varnothing$ می‌شود.

۷۴۳- گزینهٔ ۴ تعداد کل حالت‌ها برابر با تعداد جایگشت‌های ۶ شیء متمایز است. پس تعداد کل حالت‌ها برابر با $n(S) = ۶!$ می‌شود.

آهنگ‌های خوانندهٔ A را $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ و آهنگ‌های خوانندهٔ B را $B_۱$ و $B_۲$ می‌گیریم. چون می‌خواهیم آهنگ‌های هر خواننده پشت سر هم پخش شود، آهنگ‌های A را به هم بسته و آهنگ‌های B را نیز به هم می‌بندیم تا ۳ شیء $A_۱A_۲A_۳$, $B_۱B_۲$, C به وجود آید که $۳!$ جایگشت دارند. خود اشیای دستهٔ A نیز $۳!$ جایگشت و اشیای دستهٔ B نیز $۲!$ جایگشت دارند.

پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر با $n(A) = ۳! \times ۳! \times ۲!$ می‌شود.

حالا:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۳! \times ۲!}{۶!} = \frac{۳ \times ۲ \times ۲}{۶ \times ۵ \times ۴} = \frac{۱}{۱۰}$$

۷۴۴- گزینهٔ ۲ اول باید احتمال برخورد با هر ناحیه را به دست آوریم. چهار ناحیه داریم پس $k = ۱,۲,۳,۴$ می‌تواند باشد، با جای‌گذاری به جای k می‌شود:

k	۱	۲	۳	۴
احتمال	x	۳x	۵x	۷x

جمع احتمال‌ها باید برابر یک باشد، پس:

$$x + ۳x + ۵x + ۷x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۶}$$

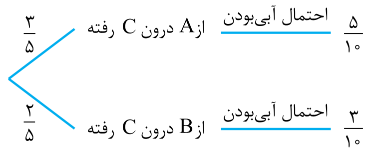
پس احتمال برخورد با هر ناحیه طبق جدول زیر به دست می‌آید:

k	۱	۲	۳	۴
احتمال	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۵}{۱۶}$	$\frac{۷}{۱۶}$

خب چه‌جوری ممکن است ۳ امتیاز بگیریم؟

$$\underset{\text{اولی به ناحیهٔ ۱}}{\underset{\downarrow}{\frac{۱}{۱۶}}} \times \overset{\text{دومی به ناحیهٔ ۲}}{\overset{\uparrow}{\frac{۳}{۱۶}}} \overset{\text{یا}}{+} \underset{\text{اولی به ناحیهٔ ۲}}{\underset{\downarrow}{\frac{۳}{۱۶}}} \times \overset{\text{دومی به ناحیهٔ ۱}}{\overset{\uparrow}{\frac{۱}{۱۶}}} = \frac{۶}{۱۶ \times ۱۶} = \frac{۳}{۱۲۸}$$

۷۴۵- گزینهٔ ۱ با قانون بیز طرف هستیم! اول باید از قانون احتمال کل استفاده کنیم، یعنی احتمال این‌که مهرهٔ خارج‌شده از C، آبی باشد را به دست می‌آوریم. درون ظرف C، ۵ مهره قرار دارد که ۳ مهره از A و ۲ مهره از B آمده است. پس مهره‌ای که از C برمی‌داریم با احتمال $\frac{۳}{۵}$ از A آمده و با احتمال $\frac{۲}{۵}$ از B.



$$\Rightarrow P(\text{مهرهٔ خارج شده از C آبی باشد}) = \frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۱۰}$$

حالا طبق بیز احتمال شاخهٔ مطلوب (یعنی دومی) را در صورت قرار داده و احتمال کلی که در بالا حساب کردیم را در مخرج قرار می‌دهیم:

$$\frac{\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۱۰}}{\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۱۰}}=\frac{۶}{۱۵+۶}=\frac{۶}{۲۱}=\frac{۲}{۷}$$

۷۴۶- گزینهٔ ۴ زاویهٔ ناحیه‌های A، B و C را به ترتیب x، ۲x و ۶x می‌گیریم. خب داریم:

$$x+۲x+۶x=۳۶۰ \Rightarrow x=۴۰^\circ \Rightarrow ۲x=۸۰$$

حالا از فرمول زاویه داریم:

$$\theta=\frac{f}{n}\times۳۶۰^\circ \Rightarrow ۸۰=\frac{f}{۹۰}\times۳۶۰ \Rightarrow f=۲۰$$

۷۴۷- گزینهٔ ۴ خداروشکر داده‌ها مرتب هستند. ۹ عدد داریم پس دادهٔ پنجمی می‌شود میانه، پس $Q_۲=۱۵$. حالا این را کنار گذاشته و میانهٔ داده‌های قبل و بعد از میانه را به دست آورده تا نمودار جعبه‌ای به صورت زیر به دست آید:

$$۱,\underbrace{۲,۳}_{Q_۱=۲/۵},۱۲,\underbrace{۱۵}_{Q_۲},۱۹,\underbrace{۲۱,۳۵}_{Q_۳=۲۸},۴۸$$

داده‌های ۲۱، ۱۹، ۱۵، ۱۲، ۳ درون جعبه می‌افتند. باید ضریب تغییرات این‌ها را محاسبه کنیم. میانگین این‌ها برابر $\bar{x}=\frac{۷۰}{۵}=۱۴$ می‌شود.

اما واریانس:

$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}=\frac{(-۱۱)^۲+(-۲)^۲+۱^۲+۵^۲+۷^۲}{۵}$$

$$=\frac{۲۰۰}{۵}=۴۰$$

حالا:

$$C\cdot V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۴۰}}{۱۴}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۷}$$

۷۴۸- گزینهٔ ۳ دقت کنید نگفته انحراف‌معیار جامعه بلکه گفته انحراف‌معیار برآورد میانگین! رابطهٔ این دوتا می‌شود:

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۰/۲۵=\frac{\sigma}{\sqrt{۱۰۰}} \Rightarrow \sigma=۲/۵$$

با اطمینان ۹۵ درصد میانگین جامعه (μ) در بازهٔ $[\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}]$ قرار دارد:

$$\begin{cases}\bar{x}=۳۰\\ \sigma=۲/۵ \Rightarrow [۳۰-\frac{۵}{۱۰},۳۰+\frac{۵}{۱۰}]=[۲۹/۵,۳۰/۵]\\ n=۱۰۰\end{cases}$$

۷۴۹- گزینهٔ ۱ اول از همه این‌که این حکم درست است. چرا؟ چون هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از صورت‌های $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ نوشته می‌شود. در هر دو حالت نشان می‌دهیم که حکم درست است. بله درست حدس زده‌اید! داریم همهٔ حالت‌ها را در نظر می‌گیریم:

(۱) $p=۶k+۱$ باشد: $(۶k+۱)^۲\overset{۱۲}{\equiv}۳۶k^۲+۱۲k+۱\overset{۱۲}{\equiv}۱$

(۲) $p=۶k+۵$ باشد: $(۶k+۵)^۲\overset{۱۲}{\equiv}۳۶k^۲+۶۰k+۲۵\overset{۱۲}{\equiv}۱$

۷۵۰- گزینهٔ ۲ اگر $a^m\mid a^n$ آن‌گاه $m\le n$ است. *(یعنی عامل a در سمت راست باید بیشتر باشه)* حالا داریم:

$$۲۷^{n+۱}\mid ۱۸^{۲n-۱} \Rightarrow ۳^{۳n+۳}\mid ۲^{۲n-۱}\times۳^{۴n-۲}$$

$$\Rightarrow ۳n+۳\le۴n-۲ \Rightarrow ۵\le n$$

پس $\min(n)=۵$.

$$۶^{m-۱}\mid ۵۴^۳ \Rightarrow ۲^{m-۱}\times۳^{m-۱}\mid(۲\times۳^۳)^۳=۲^۳\times۳^۹$$

پس $m-۱\le۳$ و $m-۱\le۹$ باید باشد. اشتراک این دوتا $m\le۴$ می‌شود یعنی $\max(m)=۴$. حالا: $\min(n)+\max(m)=۹$

۷۵۱- گزینهٔ ۱ رابطهٔ تقسیم $n=۲۹q+۱۷$ می‌شود. حالا $n=۲۹q+۱۷\overset{۱۳}{\equiv}۰$. باید این معادلهٔ هم‌نهشتی را حل کرده و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی n را پیدا کنیم:

$$۲۹q+۱۷\overset{۱۳}{\equiv}۰ \xrightarrow[۱۷\overset{۱۳}{\equiv}۴]{۲۹\overset{۱۳}{\equiv}۳} ۳q+۴\overset{۱۳}{\equiv}۰$$

$$۳q\overset{۱۳}{\equiv}-۴+۱۳=۹ \xrightarrow[\div۳]{(۳,۱۳)=۱} q\overset{۱۳}{\equiv}۳ \Rightarrow q=۱۳k+۳$$

اگر $k=۰$ قرار دهیم $q=۳$ و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی n می‌شود:

$n=۲۹(۳)+۱۷=۱۰۴$ *(پس مجموع ارقامش ۵ می‌شه)*

۷۵۲- گزینهٔ ۲ فعلاً روی $۷^{۴۷}$ کار می‌کنیم! توانی از ۷ که نزدیک مضارب ۱۷ باشد را به دست می‌آوریم. داریم $۷^۲\overset{۱۷}{\equiv}-۲$، پس:

$$۷^۲\overset{۱۷}{\equiv}-۲ \xrightarrow{\text{توان ۲۳}} ۷^{۴۶}\overset{۱۷}{\equiv}-۲^{۲۳} \xrightarrow{\times۷} ۷^{۴۷}\overset{۱۷}{\equiv}-۲^{۲۳}\times۷$$

حالا روی $۲^{۲۳}$ کار می‌کنیم: *(دقت کن* $۲^۴=۱۶\overset{۱۷}{\equiv}-۱$ *می‌شه.)*

$$۲^{۲۳}=(۲^۴)^۵\times۲^۳\overset{۱۷}{\equiv}(-۱)^۵\times۸\overset{۱۷}{\equiv}-۸$$

پس داریم: $۷^{۴۷}\overset{۱۷}{\equiv}-۲^{۲۳}\times۷\overset{۱۷}{\equiv}-(-۸)\times۷=۵۶\overset{۱۷}{\equiv}۵$

حالا داریم: $۶!\overset{۱۷}{\equiv}۶\times۵\times۴\times۳\times۲\overset{۱۷}{\equiv}۱۸\times۴۰\overset{۱۷}{\equiv}۱\times۴۰\overset{۱۷}{\equiv}۶$

پس: $(۷^{۴۷}+۱)(۶!-۱)\overset{۱۷}{\equiv}(۵+۱)(۶-۱)\overset{۱۷}{\equiv}۱۳$

۷۵۳- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ به‌دست‌آوردن باقی‌مانده در تقسیم بر ۱۱ می‌رویم:

$$\overline{۶a۲b} \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \Rightarrow b-۲+a-۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \Rightarrow b+a \overset{۱۱}{\equiv} ۱۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۳$$

از طرفی $۰ \le a \le ۹$ و $۰ \le b \le ۹$ است پس $۰ \le a+b \le ۱۸$ می‌تواند باشد. با توجه به هم‌نهشتی آخر $a+b=۳$ یا $a+b=۱۴$ می‌تواند باشد. حالا:

$$\overline{۶a۲b} \overset{۹}{\equiv} \underbrace{b+۲+a}_{۳ \text{ یا } ۱۴}+۶ \overset{۹}{\equiv} ۴ \text{ یا } ۲$$

پس $\overline{۶a۲b} \in [۲]_۹$ یا $\overline{۶a۲b} \in [۴]_۹$ می‌تواند باشد.

اما هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۰ همان رقم یکان را می‌دهد یعنی $\overline{۶a۲b} \overset{۱۰}{\equiv} b$.

آیا $b=۴$ می‌تواند باشد؟ مسلماً نه! چون b و a دو رقم از صفر تا ۹ هستند؛ جواب هیچ‌کدام از $a+b=۳$ یا $a+b=۱۴$ نمی‌تواند $b=۴$ باشد.

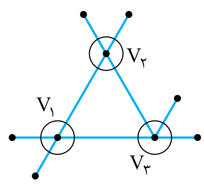
($b=۷$ می‌تونه چون $a=۷$ می‌شه جواب $a+b=۱۴$ باشه.)

۷۵۴- گزینهٔ ۴ کدام قضیه ارتباط بین درجه‌ها و یال‌ها را برقرار می‌کند؟ بله مجموع درجه‌ها، مساوی دو برابر تعداد یال‌ها می‌شود، پس:

$$۲ \times ۱۵ = ۳ \times ۴ + ۷ \times ۲ + \text{مجموع درجه‌های دیگر}$$

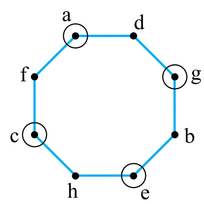
پس مجموع درجه‌های دیگر برابر ۴ می‌شود. اگر گراف ۲ رأس درجهٔ یک داشته باشد رأس دیگر باید از درجهٔ ۲ باشد *(تا مجمعش ۴ بشه)* ولی آن‌وقت ۸ رأس درجهٔ ۲ داریم. اگر ۳ رأس درجهٔ ۱ داشته باشیم درجهٔ رأس باقی‌مانده هم یک می‌شود *(پس می‌شه ۴تا یک)*. تا این‌جا ۲ و ۳ رد می‌شوند. اما می‌توانیم یک رأس درجهٔ ۱ (و البته یکی درجهٔ ۳) یا ۴ رأس درجهٔ یک داشته باشیم. پس ۴ درست می‌شود.

۷۵۵- گزینهٔ ۳ اول γ ـ مجموعه را به دست می‌آوریم. واضح است γ ـ مجموعه یکتا و به صورت مقابل است.



حالا باید ببینیم گراف چند زیرگراف با رأس‌های بالا می‌تواند داشته باشد. ۳ یال $V_۱V_۲$، $V_۱V_۳$ و $V_۲V_۳$ را می‌توانیم قرار بدهیم یا نه *(یعنی هرکدوم دو حالت داره)* پس در کل $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$ زیرگراف با این رأس‌ها می‌توانیم بسازیم.

۷۵۶- گزینهٔ ۳ این گراف همان گراف ۲ ـ منتظم مرتبهٔ ۸ است. آن را به صورت مقابل رسم کنیم بهتر می‌شود. بزرگ‌ترین مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال وقتی به دست می‌آید که رأس‌ها را یکی‌درمیان برداریم؛ یعنی حداکثر ۴ عضو دارد. *(هیچ رأسی رو نمی‌شه حذف کرد هرکدوم رو حذف کنی دیگه خودش احاطه نمی‌شه!)*



۷۵۷- گزینهٔ ۳ جمع چهار متغیر کم‌تر یا مساوی ۷ شده است، پس با اضافه‌کردن متغیری نامنفی مثل t همواره مساوی ۷ می‌شود. به بیان دیگر کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x+y+z+w+t=۷$ را به دست آوریم، چون هر جواب این معادله دقیقاً متناظر با یک جواب نامعادله می‌شود. تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر با $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است، پس تعداد جواب‌ها می‌شود:

$$\begin{cases} n=۷ \\ k=۵ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۱}{۴}=\frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}=۳۳۰$$

۷۵۸- گزینهٔ ۲ ۹ شیء داریم که سه‌تا سه‌تا مثل هم هستند پس کل حالت‌های قراردادن آن‌ها در یک مربع ۳×۳ *(هر خونه با اون یکی فرق داره)* برابر تعداد کل جایگشت‌ها می‌شود. از قضیهٔ جایگشت با تکرار داریم:

$$n(S)=\frac{۹!}{۳!۳!۳!}=۱۶۸۰$$

از طرفی یک نکته را هم حفظ باشید که ۱۲ مربع لاتین ۳×۳ داریم پس $n(A)=۱۲$:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۱۶۸۰}=\frac{۱}{۱۴۰}$$

این‌که چرا ۱۲ مربع لاتین ۳×۳ داریم خیلی ساده است. حالت‌های این خانه‌هایی که پر کردم را نوشته‌ام. از طرفی اگر این‌ها را پر کنیم بقیهٔ خانه‌ها به صورت یکتا به دست می‌آید. پس $۱۲ = ۳ \times ۲ \times ۲$ مربع لاتین می‌شود.

۱ حالت	۲ حالت	۳ حالت
		۲ حالت

۷۵۹- گزینهٔ ۴ خب کافی است تعداد تابع‌های یک‌به‌یک را از تعداد کل تابع‌ها کم کنیم. اجازه بدهید این تست را برای عشق فرمول‌ها هم که شده، فرمولی حل کنم:

نکته تعداد تابع‌ها از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با $|B|^{|A|}$،

پس تعداد کل تابع‌ها از مجموعهٔ ۳عضوی $\{۱,۲,۳\}$ به مجموعهٔ ۶عضوی $\{۱,۲,\ldots,۶\}$ برابر با $۶^۳$ است *(واضحه هر عضو اولی، به ۶تا عدد می‌تونه نظیر بشه).*

نکته تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ mعضوی A به مجموعهٔ kعضوی B که $m \le k$ است برابر با $p(k,m)=\frac{k!}{(k-m)!}$ است

(یعنی دومی باید بیشتر یا مساوی اولی عضو داشته باشه و الا تابع یک‌به‌یک نداریم).

پس تعداد تابع‌های یک‌به‌یک می‌شود: $P(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!}=۱۲۰$

حالا:

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک − تعداد کل تابع‌ها = تعداد تابع‌های غیریک‌به‌یک

$=۶^۳-۱۲۰=۹۶$

۷۶۰- گزینهٔ ۳ $R_f=B$ یعنی تابع پوشا باشد. تعداد تابع‌های پوشا از مجموعهٔ nعضوی به ۳عضوی برابر $۳^n-۳ \times ۲^n+۳$ می‌شود پس تابع‌های پوشا از مجموعهٔ ۴عضوی A به مجموعهٔ ۳عضوی B برابر $۳^۴-۳ \times ۲^۴+۳=۳۶$ تا می‌شود.

در کل $۸۱=۳^۴$ تابع هم داریم پس $۴۵=۸۱-۳۶$ تابع غیرپوشا داریم. آمدیم از شانس بد ما ۴۵ تابع اولی که ساختیم همگی غیرپوشا بودند ولی اگر ۳ تابع دیگر بسازیم *(اینا همه پوشا هستن)* یعنی با ۴۸ تابع قطعاً ۳ تابع پوشا در بین آن‌ها وجود دارد.