

فصل ۵

ترمودینامیک

پرواز با بالن هوای گرم، یک سفر اکتشافی واقعی است. وقتی در درون بالن و از آن بالا، به فضای اطراف و طبیعت بکر زیر پایتان، نگاه می‌کنید، آنچنان متحیر می‌شوید که متوجه گذر زمان نخواهید شد؛ ولی تمامی چیزهایی که در حرکت خاطره‌انگیز شما با بالن، انجام می‌شود به کمک قوانین حاکم بر گازها است که به آن علم ترمودینامیک می‌گوییم.

شماره صفحه	عنوان
۲۲۸	مفاهیم اولیه ترمودینامیک
۲۳۲	فرایندهای خاص ترمودینامیکی
۲۳۹	چرخه‌های ترمودینامیکی
۲۴۲	ماشین‌های گرمایی
۲۴۶	یخچال‌ها
۲۴۹	پاسخنامه تست
۲۷۰	پاسخنامه صفر کلوین
۲۷۳	پاسخنامه آزمون ۱
۲۷۴	پاسخنامه آزمون ۲

در یک ظرف بسته مقداری گاز اکسیژن (O_2) در دمای $27^\circ C$ قرار دارد. اگر $\frac{1}{4}$ جرم اکسیژن از ظرف خارج شود و دمای گاز به $47^\circ C$ برسد، انرژی

درونی گاز درون مخزن چند برابر می‌شود؟

(۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{15}{16}$ (۳) $\frac{16}{15}$ (۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ با خارج کردن $\frac{1}{4}$ گاز اکسیژن مقدار $\frac{3}{4}$ دیگر از جرم گاز درون ظرف باقی می‌ماند. طبق رابطه $n = \frac{m}{M}$ می‌دانیم n با m رابطه مستقیم دارد؛

یعنی $n_2 = \frac{3}{4} n_1$ از طرف دیگر داریم:

باید دقت داشته باشید که دماهای T_1 و T_2 بر حسب کلوین جایگزین شوند.

با جایگزینی در رابطه بالا خواهیم داشت:

۱ ۲ ۳ ۴

قانون اول ترمودینامیک: اگر دستگاهی (مثل گاز) با انرژی درونی U_1 به حالت نهایی با انرژی درونی U_2 برسد، تغییر انرژی درونی دستگاه

($\Delta U = U_2 - U_1$) به گرما و کار مبادله شده بین دستگاه و محیط بستگی دارد. به بیان ساده‌تر، ΔU به Q و W بستگی دارد.

این بستگی ΔU به Q و W را به صورت زیر می‌نویسیم که به قانون اول ترمودینامیک معروف است.

FORMULA
 $\Delta U = Q + W$

کار محیط روی دستگاه	گرمای مبادله شده	تغییر انرژی درونی	شناسنامه فرمول
W	Q	ΔU	نماد
ژول (J)	ژول (J)	ژول (J)	یکا

چینکن

۱ قانون اول ترمودینامیک همان اصل پایستگی انرژی است.

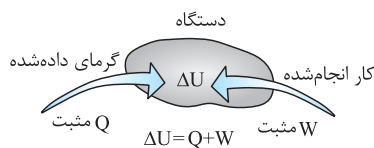
۲ ΔU ، Q و W هر سه می‌توانند مثبت، منفی یا صفر باشند.

۳ منظور از W کاری است که محیط روی دستگاه انجام می‌دهد. کاری که دستگاه روی محیط انجام می‌دهد $-W$ است.

۴ اگر دستگاهی گرما بگیرد، علامت Q را مثبت ($Q > 0$) و اگر گرما از دست بدهد، علامت Q را منفی ($Q < 0$) در نظر می‌گیریم.

۵ اگر گازی را متراکم کنیم؛ یعنی روی گاز کار انجام داده‌ایم. در این حالت علامت W مثبت است ($W > 0$) و اگر گازی منبسط شود؛ یعنی گاز روی

محیط کار انجام داده است که در این حالت علامت W منفی است ($W < 0$).



تست

در یک فرایند ترمودینامیکی مقداری گاز کامل 500J گرما از محیط می‌گیرد و منبسط می‌شود. اگر قدرمطلق کاری که محیط روی دستگاه انجام می‌دهد 100J باشد، انرژی درونی گاز چقدر و چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) 600J افزایش (۲) 400J افزایش (۳) 600J کاهش (۴) 400J کاهش

پاسخ گاز (دستگاه) گرما گرفته است؛ پس $Q = +500\text{J}$ است. از طرفی در انبساط کار محیط روی دستگاه (W) منفی؛ پس $W = -100\text{J}$ است؛

بنابراین از قانون اول ترمودینامیک می‌توان نوشت:

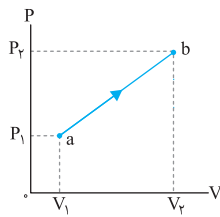
علامت مثبت برای ΔU ؛ یعنی انرژی درونی دستگاه افزایش یافته است.

۱ ۲ ۳ ۴

نمودارهای ترمودینامیکی

نمودار P-V: این نمودار، مهم‌ترین و کاربردی‌ترین نمودار ترمودینامیک است. در نمودار شکل صفحه بعد گازی را نشان داده‌ایم که در یک فرایند آرمانی از

حالت تعادل (P_1, V_1, T_1) به حالت تعادل (P_2, V_2, T_2) منتقل شده است.

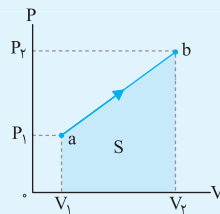


به کمک نمودار $P-V$ می‌توان اطلاعات مهمی را از گاز و رفتار آن به دست آورد. مثلاً می‌توانیم نسبت دماهای مطلق گاز را در دو حالت a و b به سادگی محاسبه کنیم:

$$\frac{T_b}{T_a} = \frac{P_b V_b}{nR} = \frac{P_b V_b}{P_a V_a} \Rightarrow \frac{T_b}{T_a} = \frac{P_b V_b}{P_a V_a}$$

$$\frac{U_b}{U_a} = \frac{T_b}{T_a} = \frac{P_b V_b}{P_a V_a}$$

از آنجا که $U \propto T$ است، می‌توانیم نسبت $\frac{U_b}{U_a}$ را هم به سادگی به دست آوریم:

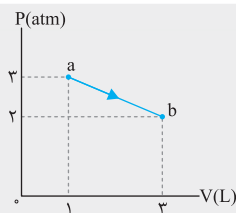


یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های نمودار $P-V$ مساحت زیر نمودار آن است. مساحت زیر نمودار $P-V$ همان کاری است که توسط محیط روی دستگاه انجام می‌شود. اگر حجم گاز زیاد شده باشد؛ یعنی گاز در حال انبساط است، پس علامت کار منفی ($W < 0$) و اگر حجم گاز کم شده باشد؛ یعنی گاز در حال تراکم است پس علامت کار مثبت می‌شود ($W > 0$).

$$W = \pm S \begin{cases} + : \text{تراکم} \\ - : \text{انبساط} \end{cases}$$

در بسیاری از نمودارها فشار (P) بر حسب اتمسفر (atm) و حجم (V) بر حسب لیتر (L) بیان می‌شود. لازم است یکای atm را به یکای Pa و یکای L را به m^3 تبدیل کنیم. این تبدیل یکاها را یادآور می‌شویم:

$$1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}, \quad 1 L = 10^{-3} \text{ m}^3$$



نمودار $P-V$ مقدار معینی گاز کامل در فرایند ab به شکل مقابل است. اگر انرژی درونی گاز در نقطه a ، 450 J و در نقطه b ، 900 J باشد، در این فرایند گاز: **ژول گرما**

- (۱) ۵۰، گرفته است.
- (۲) ۵۰، از دست داده است.
- (۳) ۹۵۰، گرفته است.
- (۴) ۹۵۰، از دست داده است.

$$\Delta U = Q + W$$

پاسخ در حل این تست، لازم است از قانون اول ترمودینامیک استفاده کنیم:

W همان مساحت زیر نمودار و علامت W هم منفی است؛ چون گاز منبسط شده است.

$$W = -S \xrightarrow{\text{مساحت ذوزنقه } S} W = -\frac{(3+2) \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{2} = -500 \text{ J}$$

در محاسبه مساحت زیر نمودار، توجه کنید حتماً یکای مقادیر حجم و فشار بر حسب SI جایگذاری شوند.

$$\Delta U = U_b - U_a = 900 - 450 = 450 \text{ J}$$

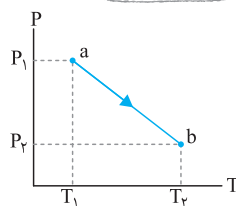
حالا ΔU را به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 450 = Q - 500 \Rightarrow Q = +950 \text{ J}$$

چون ΔU و W را داریم؛ پس می‌توانیم Q را به راحتی محاسبه کنیم:

علامت Q مثبت است؛ یعنی گاز گرما گرفته است.

۱ ۲ ۳ ۴



نمودار P-T: فرایندهای ترمودینامیکی را می‌توان با نمودار $P-T$ هم نمایش داد. مثلاً در نمودار شکل مقابل گاز از حالت P_1 و T_1 به حالت P_2 و T_2 منتقل شده است. نمودارهای $P-T$ اطلاعات زیادی در مورد گاز به ما می‌دهند.

$$\frac{U_b}{U_a} = \frac{T_b}{T_a}$$

۱ به کمک نمودارهای $P-T$ می‌توانیم نسبت انرژی‌های درونی گاز را در دو حالت a و b به دست آوریم:

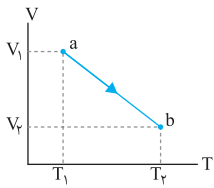
۲ لازم به ذکر است می‌توانیم از معادله حالت ($PV = nRT$) حجم هر نقطه دلخواه را نیز به دست آوریم.

۳ به کمک نمودار $P-T$ می‌توانیم در مورد افزایش یا کاهش حجم گاز اظهار نظر کنیم؛ مثلاً در نموداری که در شکل بالا نشان داده‌ایم، گاز از حالت

a به حالت b می‌رود که دمای گاز زیاد؛ ولی فشار گاز کم شده است. به کمک رابطه زیر می‌توان به سادگی متوجه شد حجم گاز زیاد شده است:

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow \text{حجم گاز زیاد می‌شود.}$$

نمودار V-T: در شکل روبه‌رو گازی را نشان داده‌ایم که از حالت a به حالت b می‌رود. نمودارهای V-T هم مثل نمودارهای P-V و P-T اطلاعات زیادی در مورد گاز به ما می‌دهند. به کمک این نمودار می‌توانیم نسبت انرژی‌های درونی گاز را در دو حالت a و b به دست آوریم $(\frac{U_b}{U_a} = \frac{T_b}{T_a})$.



از طرفی به کمک نمودار V-T می‌توانیم تغییرات فشار را هم بررسی کنیم؛ مثلاً در فرایندی که در نمودار روبه‌رو نشان داده‌ایم دمای گاز در حال افزایش است؛ در حالی که حجم گاز کم شده است، پس به کمک معادله حالت گاز می‌توانیم نشان دهیم که فشار گاز زیاد می‌شود. $PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow$ فشار گاز زیاد می‌شود.

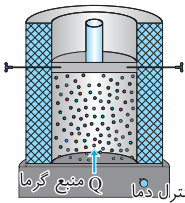
دانش‌آموز عزیز، حالا می‌تونی تست شماره ۱۱۰۳ تا ۱۱۳۰ رو حل کنی.

فرایندهای خاص ترمودینامیکی

بعضی از فرایندهای ترمودینامیکی از بقیه پرکاربردتر هستند که عبارت‌اند از:

- ① فرایند هم‌حجم
 - ② فرایند هم‌فشار
 - ③ فرایند هم‌دما
 - ④ فرایند بی‌دررو
- حالا به ترتیب این فرایندها را بررسی می‌کنیم:

فرایند هم‌حجم



در این فرایند حجم گاز ثابت می‌ماند و کاری هم انجام نمی‌شود. برای انجام این فرایند کافی است به کمک دو گیره، پیستون را در جای خودش ثابت نگه داشته سپس به گاز گرما بدهیم یا از گاز گرما بگیریم.

رابطه کار و گرما در فرایند هم‌حجم:

- ① کار در فرایند هم‌حجم صفر است؛ چون جابه‌جایی وجود ندارد ($W = 0$).
- ② گرمای مبادله شده در فرایند هم‌حجم از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

FORMULA

$$Q = nC_V \Delta T$$

تغییر دما	گرمای ویژه مولی در حجم ثابت	مقدار ماده	گرما	شناسنامه فرمول
ΔT	C_V	n	Q	نماد
کلوین (K)	ژول بر مول کلوین ($J / mol.K$)	مول (mol)	ژول (J)	یکا

③ **گرمای ویژه مولی گاز در حجم ثابت (C_V)**، مقدار گرمایی است که به یک مول از گاز در حجم ثابت می‌دهیم تا دمای گاز یک کلوین افزایش یابد. C_V برای گازهای تک‌اتمی $\frac{3}{2}R$ و برای گازهای دواتمی $\frac{5}{2}R$ است.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W=0} \Delta U = Q = nC_V \Delta T$$

④ برای محاسبه ΔU می‌توانیم از قانون اول ترمودینامیک استفاده کنیم:

⑤ همان‌طور که در رابطه بالا هم دیدید، در فرایند هم‌حجم ΔU و Q با هم برابرند.

تست

در یک فرایند هم‌حجم ۲ مول گاز هیدروژن چند ژول گرما باید دریافت کند تا دمای آن $27^\circ C$ افزایش یابد؟ ($R = 8 J / mol.K$)

(۱) ۱۲۰۰۰ (۲) ۸۱۰۰ (۳) ۷۲۰۰ (۴) ۱۰۸۰

پاسخ

هیدروژن (H_2) یک گاز دواتمی است. در فرایند هم‌حجم Q از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$Q = nC_V \Delta T \xrightarrow{C_V = \frac{5}{2}R, \Delta T = \Delta\theta = 27} Q = 2 \times \frac{5}{2} \times 8 \times 27 = 1080 J$$

① ② ③ ④

رابطه‌های مفید در محاسبه گرما در فرایند هم‌حجم: اگر گاز مورد نظر ما تک‌اتمی یا دواتمی باشد، می‌توانیم رابطه‌های دیگری را برای Q و ΔU به دست آوریم:

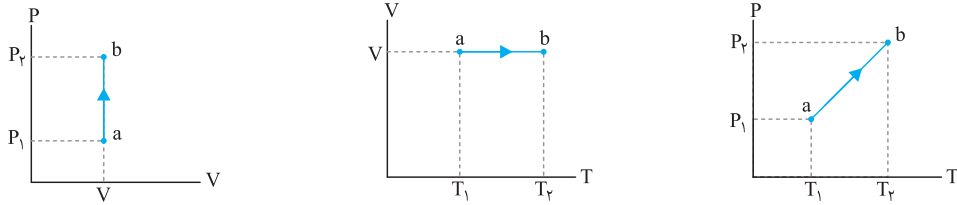
$$Q = nC_V(T_2 - T_1) = nC_V \left(\frac{P_2 V_2}{nR} - \frac{P_1 V_1}{nR} \right) \xrightarrow{V_1 = V_2} \begin{cases} \text{گاز تک‌اتمی} \\ C_V = \frac{3}{2}R \\ \text{گاز دواتمی} \\ C_V = \frac{5}{2}R \end{cases} \begin{cases} Q = \frac{3}{2} V \Delta P \\ Q = \frac{5}{2} V \Delta P \end{cases}$$

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W=0} \Delta U = Q \begin{cases} \text{تک‌اتمی} \\ \Delta U = \frac{3}{2} V \Delta P \\ \text{دواتمی} \\ \Delta U = \frac{5}{2} V \Delta P \end{cases}$$

قانون اول ترمودینامیک: $\Delta U = Q + W$



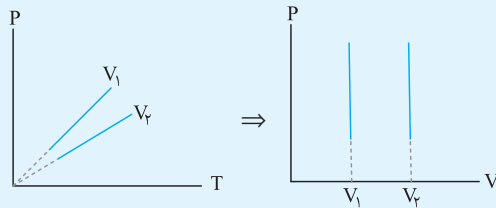
در شکل‌های زیر نمودارهای $P - V$ ، $V - T$ و $P - T$ فرایند هم‌حجمی را رسم کرده‌ایم که در آن دمای گاز در حال افزایش است.



نمودار $P - T$ یک خط راست است که از مبدأ می‌گذرد.

محاسبه ساده‌ی روبه‌رو علت این مسئله را نشان می‌دهد:

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nR}{V} T$$

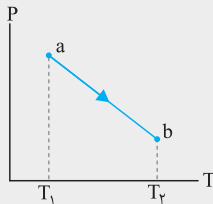


معادله به دست آمده معادله یک خط راست است (مثل $y = ax$) که همان شیب خط است. دقت کنید که حجم گاز در مخرج کسر $\frac{nR}{V}$ قرار دارد. هر چقدر حجم گاز بیشتر باشد، شیب نمودار کمتر می‌شود.

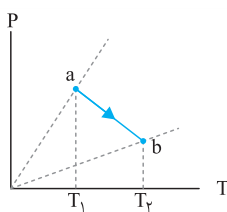
تست

نمودار $P - T$ مربوط به فرایند (تحول) ترمودینامیکی مقدار معینی از یک گاز کامل در شکل روبه‌رو رسم شده است. کدام عبارت در مورد فرایند ab درست است؟

(سراسری ۸۸)



- (۱) حجم گاز افزایش یافته است.
- (۲) گاز گرما از دست داده است.
- (۳) انرژی درونی گاز کاهش یافته است.
- (۴) کار انجام شده روی گاز مثبت است.



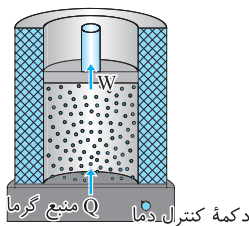
با بررسی نمودار در می‌یابیم دمای گاز در حال افزایش است؛ پس انرژی درونی گاز افزایش یافته و گاز گرما گرفته است؛ در نتیجه گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست است. با رسم دو خط راست از نقاط a و b که از مبدأ می‌گذرند خواهیم دید شیب خط در نقطه b کمتر از شیب خط در نقطه a است؛ یعنی حجم در نقطه b بیشتر از حجم در نقطه a است و این موضوع نشان می‌دهد که فرایند ab انبساطی بوده و کار انجام شده روی گاز منفی است؛ در نتیجه گزینه (۴) هم نادرست است، پس تنها گزینه درست گزینه (۱) است.

۱ ۲ ۳ ۴

فرایند هم‌فشار

فرایند هم‌فشار فرایندی است که در آن فشار گاز ثابت می‌ماند.

در شکل روبه‌رو به آرامی به گاز گرما می‌دهیم و پیستون که هیچ اصطکاک با استوانه ندارد به آرامی به سمت بالا حرکت می‌کند.



در فرایند هم‌فشار، کار انجام شده توسط محیط روی گاز از رابطه زیر به دست می‌آید:

FORMULA

$$W = -P\Delta V$$

شناسنامه فرمول	کار محیط روی دستگاه	فشار	تغییر حجم
نماد	W	P	ΔV
یکا	ژول (J)	پاسکال (Pa)	متر مکعب (m^3)

$$W = -P\Delta V \xrightarrow{P\Delta V = nR\Delta T} W = -nR\Delta T$$

با استفاده از معادله حالت گاز کامل ($PV = nRT$) می‌توانیم رابطه دیگری برای کار

انجام شده توسط محیط روی گاز به دست آوریم:

برای محاسبه گرمای مبادله شده در فرایند هم‌فشار از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

FORMULA

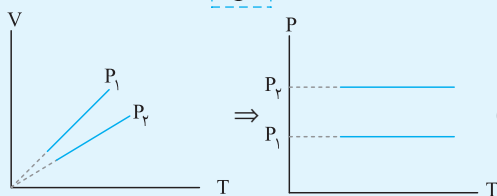
$$Q = nC_p\Delta T$$

شناسنامه فرمول	گرما	مقدار ماده	گرمای ویژه مولی در فشار ثابت	تغییر دما
نماد	Q	n	C_p	ΔT
یکا	ژول (J)	مول (mol)	کلوین بر مول کلوین ($J/mol.K$)	کلوین (K)



در فرایند هم‌فشار، نمودار $V-T$ یک خط راست است که از مبدأ می‌گذرد.

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nR}{P} T$$



رابطه‌ای که در بالا به دست آمد معادله‌ی یک خط است که شیب آن $\frac{nR}{P}$ است. فشار گاز در مخرج کسر قرار دارد؛ بنابراین هر چقدر فشار گاز بیشتر باشد، شیب نمودار $V-T$ کمتر است.

تست

در فشار ثابت P به مقدار معینی گاز کامل به اندازه Q گرما می‌دهیم. دمای گاز به اندازه ΔT افزایش می‌یابد. اگر تغییر انرژی درونی گاز ΔU باشد، کدام رابطه در SI درست است؟

- (۱) $\Delta U < 0 < Q$ (۲) $0 < \Delta U < Q$ (۳) $0 < \Delta U = Q$ (۴) $0 < \Delta U = \frac{3}{2}Q$

پاسخ از آنجا که به گاز گرما می‌دهیم و دمای گاز هم زیاد می‌شود؛ پس Q و ΔU هر دو مثبت هستند. حالاً می‌توانیم علامت W را نیز به دست آوریم:

$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T \xrightarrow[Q=nC_p\Delta T]{\Delta T > 0} W < 0$$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W$$

در آخر به کمک قانون اول ترمودینامیک داریم:

می‌دانیم Q و ΔU هر دو مثبت هستند؛ در حالی که W منفی است؛ پس $Q > \Delta U$ است.

۱ ۲ ۳ ۴

تست

دمای ۱۰ گرم گاز هیدروژن در فشار ثابت از 27°C به 127°C می‌رسد. کار انجام‌شده توسط گاز در این فرایند چند کیلوژول است؟

$$(M_{H_2} = 2\text{g/mol}, R = 8\text{J/mol.K})$$

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

$$n = \frac{m}{M} = \frac{10}{2} = 5\text{mol}$$

پاسخ در ابتدای حل تعداد مول‌های گاز را به دست می‌آوریم:

$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T = -5 \times 8 \times (127 - 27) = -4000\text{J}$$

حالاً کاری را که محیط روی گاز انجام می‌دهد محاسبه می‌کنیم:

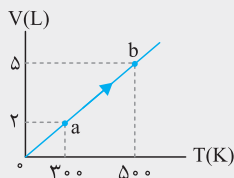
$$-W = 4000\text{J} = 4\text{kJ}$$

اما کاری که توسط گاز روی محیط انجام می‌شود $-W$ است؛ پس:

۱ ۲ ۳ ۴

تست

شکل زیر نمودار $V-T$ دو مول گاز دواتمی است. کاری که دستگاه روی محیط انجام می‌دهد، چند ژول است؟ ($R = 8\text{J/mol.K}$)



(۱) ۳۲۰۰

(۲) -۳۲۰۰

(۳) ۲۳۰۰

(۴) -۲۳۰۰

پاسخ در فرایند هم‌فشار، W از فرمول‌های $-P\Delta V$ یا $-nR\Delta T$ به دست می‌آید. در این تست بهتر است که از فرمول $-nR\Delta T$ استفاده کنیم:

$$W = -nR\Delta T = -2 \times 8 \times (500 - 300) = -3200\text{J}$$

از آنجا که تست کار دستگاه (گاز) روی محیط را خواسته است؛ پس لازم است که $-W$ را حساب کنیم:

$$-W = 3200\text{J}$$

۱ ۲ ۳ ۴



اگر به مقادیر فشار و حجم در دو حالت توجه کنیم به رابطه مقابل می‌رسیم: $P_1 V_1 = 100 \text{ cmHg} \times 6/4 \text{ L} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$ ۱۱۳۲
 یعنی دمای گاز در دو حالت، یکسان است و از آنجا که انرژی درونی U تنها تابع دمای مطلق T است؛ پس U ثابت می‌ماند.

کافی است درس‌نامه را به خوبی خوانده باشید. ۱۱۳۳
 انرژی درونی در فرایند ab و abc یکسان است. طبق قانون اول ترمودینامیک روابط زیر را می‌نویسیم: ۱۱۳۴

$\Delta U_{ac} = \Delta U_{abc} \xrightarrow{\Delta U=Q+W} 20 = Q_{abc} + W_{abc} \Rightarrow 20 = 65 + W_{abc} \Rightarrow W_{abc} = -45 \text{ J}$
 می‌دانیم وقتی گاز روی محیط کار انجام می‌دهد یعنی فرایند انبساط است. دستگاه ۱۴۰۰ J کار روی محیط انجام داده است؛ پس کار محیط روی دستگاه ۱۴۰۰ J - است. اکنون ΔU ؛ را حساب می‌کنیم. ۱۱۳۵

علامت + برای ΔU ؛ یعنی انرژی درونی دستگاه افزایش یافته است.

در گازهای آرمانی انرژی درونی فقط تابع دما است. به این صورت که با افزایش دما انرژی درونی افزایش و با کاهش دما انرژی درونی آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین: $\Delta U = -300 \text{ J}$. از طرفی گاز گرما از دست می‌دهد؛ بنابراین: $Q = -200 \text{ J}$. ۱۱۳۶

حالا طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:
 کاری که محیط روی گاز انجام می‌دهد ۱۰۰ J - است؛ اما خواسته سؤال کار گاز روی محیط است که برابر با $W' = -W = +100 \text{ J}$ است.

نمودارهای ترمودینامیکی

این فرایند انبساط است؛ یعنی گاز کار انجام داده است ($W < 0$). ۱۱۳۷

حالا به دمای دو نقطه A و B توجه می‌کنیم:

$P_b V_b > P_a V_a \Rightarrow T_b > T_a \Rightarrow \Delta U > 0$
 $\Delta U = W + Q$, $W + Q > 0$, $W < 0 \Rightarrow Q > 0$
 بنابراین گاز گرما دریافت کرده است.

فرایند انبساط است؛ پس کار محیط روی دستگاه منفی ($W < 0$) است؛ اما بدون داشتن مقادیر P_a, V_a, P_b, V_b نمی‌توان در مورد T_a و T_b اظهار نظر کرد و نمی‌توان گفت که ΔU مثبت است یا منفی؛ پس علامت Q هم قابل تعیین نیست. ۱۱۳۸

این فرایند انبساط است؛ پس گاز کار انجام می‌دهد ($W < 0$). در این مرحله دمای a و b را با هم مقایسه می‌کنیم: ۱۱۳۹

دما و انرژی درونی زیاد شده است. $\Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow T_b > T_a \Rightarrow P_b V_b > P_a V_a$
 یعنی گاز گرما دریافت کرده است. $\Rightarrow Q > 0$, $\Delta U > 0$, $W < 0$

برای مقدار معینی گاز کامل انرژی درونی فقط تابع دمای مطلق گاز است؛ چون در این سؤال ابتدا و انتهای فرایندها برای هر سه مسیر یکسان است، تغییرات انرژی درونی در هر سه مسیر یکسان خواهد بود. از طرفی حاصل ضرب فشار و حجم در انتهای مسیر بیشتر از ابتدای مسیر است؛ یعنی دمای مطلق در حالت f بیشتر از حالت i است، بنابراین داریم: ۱۱۳۰

این را هم می‌دانیم مساحت زیر نمودار $P - V$ اندازه کاری است که محیط روی گاز انجام می‌دهد. از آنجا که فرایند انبساطی است کار محیط روی گاز منفی می‌شود. حالا می‌توانیم بنویسیم:

$S_a < S_b < S_c \Rightarrow |W_a| < |W_b| < |W_c| \xrightarrow{\text{فرایند انبساطی}} W_c < W_b < W_a < 0$ ۱

باتوجه به قانون اول ترمودینامیک داریم:

با مقایسه رابطه‌های ۱ و ۲ می‌توانیم گرمای مبادله شده در فرایندهای a، b، c را به صورت روبه‌رو با هم مقایسه کنیم: $Q_c > Q_b > Q_a > 0$ ۱ و ۲

فرایندهای خاص ترمودینامیکی

فرایند هم‌حجم

گرمای مبادله شده در فرایند هم‌حجم برابر است با: $Q = nC_V(T_f - T_i)$ ۱۱۳۱

حالا Q را برای یک مول گاز با افزایش دمای یک کلین حساب می‌کنیم:

در فرایند هم‌حجم گرما از رابطه $Q = nC_V \Delta T$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم: $Q = 2 \times \frac{5}{2} \times 8 \times 27 = 1080 \text{ J}$ ۱۱۳۲

دقت کنید گاز هیدروژن (H_2) یک گاز دواتمی است.

با توجه به قانون اول ترمودینامیک داریم: $\Delta U = W + Q$ ۱۱۳۳

می‌دانیم کار انجام شده در فرایند هم‌حجم صفر است و گرمای مبادله شده در این فرایند از رابطه $Q = \frac{3}{2} V \Delta P$ به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta U = Q \\ Q = \frac{3}{2} V \Delta P \end{cases} \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} V \Delta P, \quad \Delta U = \frac{3}{2} \times 2 \times 10^{-2} \times (2 \times 10^5 - 10^5) = 300 \text{ J}$$

علامت مثبت برای ΔU نشان می‌دهد که انرژی درونی گاز افزایش یافته است.

در این فرایند هم حجم ($W = 0$) دمای گاز افزایش یافته است که می‌توانیم طبق معادله حالت نشان دهیم فشار آن نیز زیاد می‌شود:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \xrightarrow{T_2 > T_1} P_2 > P_1$$

در ضمن با توجه به افزایش دما انرژی درونی هم زیاد می‌شود. طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W=0} \Delta U > 0 \Rightarrow Q > 0$$

بنابراین گاز گرما دریافت کرده است. کافی است از فرمول Q در فرایند هم حجم استفاده کنیم (گاز تک‌اتمی است).

$$Q = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} V \Delta P \Rightarrow Q = \frac{3}{2} \times 5 \times 10^{-2} \times (4 - 3) \times 10^5 = 750 \text{ J}$$

می‌دانیم ΔU در همه فرایندها از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\Delta U = nC_V \Delta T \Rightarrow \Delta U = n \times \frac{5}{2} R \times \left(\frac{P_2 V_2}{nR} - \frac{P_1 V_1}{nR} \right) = \frac{5}{2} V \Delta P = \frac{5}{2} \times 2 \times 10^{-2} \times 1/5 \times 10^5 = 750 \text{ J}$$

چون حجم ثابت است ابتدا دمای ثانویه گاز را با استفاده از رابطه $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \xrightarrow{\frac{P_2 = P_1 + \frac{1}{4} P_1 = \frac{5}{4} P_1}{T_2 = 200 \text{ K}}} \frac{\frac{5}{4} P_1}{P_1} = \frac{T_2}{300} \Rightarrow T_2 = 375 \text{ K}$$

با توجه به رابطه گرمای مبادله شده در حجم ثابت داریم:

$$Q = nC_V \Delta T \xrightarrow{\frac{n = 5 \text{ mol}}{C_V = \frac{5}{2} R}} Q = 5/2 \times \frac{5}{2} R \times (T_2 - T_1) \Rightarrow Q = 5/2 \times \frac{5}{2} \times 8 \times (375 - 300) = 750 \text{ J}$$

اگر کار انجام شده توسط دستگاه منفی باشد؛ پس کاری که محیط روی گاز انجام می‌دهد مثبت می‌شود؛ یعنی فرایند باید تراکم باشد؛ چون در تراکم $W > 0$ است.

در ۱ و ۴ حجم گاز در حال افزایش و در ۲ حجم گاز ثابت است. تنها در ۳ حجم گاز در حال کاهش است.

با توجه به نمودار $P - T$ داده شده می‌بینیم گاز یک فرایند هم حجم را طی کرده است؛ همچنین می‌دانیم کار در فرایند هم حجم صفر است ($W = 0$)؛ در نتیجه طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = W + Q \xrightarrow{W=0} \Delta U = Q \xrightarrow{Q = nC_V \Delta T} \Delta U = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T = \frac{3}{2} \times 5 \times 8 \times 300 = 1800 \text{ J}$$

با توجه به اینکه نمودار $P - T$ خطی است و از مبدأ می‌گذرد می‌توان نتیجه گرفت که در معادله $P = \frac{nR}{V} T$ ؛ شیب نمودار ($\frac{nR}{V}$) ثابت است؛ پس فرایند هم حجم است؛ بنابراین $W_{ab} = 0$ است. گرمای مبادله شده نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T \Rightarrow Q = \frac{3}{2} \times 5 \times 8 \times (900 - 300) = 36000 \text{ J} = 36 \text{ kJ}$$

فرایند هم فشار

برای گازهای آرمانی تک‌اتمی، گرمای ویژه مولی در حجم ثابت $\frac{3}{2} R$ و گرمای ویژه مولی در فشار ثابت $\frac{5}{2} R$ است؛ بنابراین:

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5}{2} R}{\frac{3}{2} R} = \frac{5}{3} > 1$$

دسته سرنگ می‌تواند آزادانه حرکت کند؛ بنابراین به گونه‌ای قرار می‌گیرد که فشار در دو طرف آن برابر باشد و از آنجایی که فشار آب تقریباً ثابت است، فشار هوای درون سرنگ نیز ثابت می‌ماند (فرایند هم فشار). همچنین در فرایند هم فشار رابطه بین حجم و دما به صورت مقابل است:

$$V = \frac{nR}{P} T$$

بنابراین با افزایش دمای هوای درون سرنگ حجم آن نیز افزایش می‌یابد، پس هوای داخل سرنگ به صورت هم فشار منبسط می‌شود.

با توجه به رابطه مربوط به کار در فرایند هم فشار و با استفاده از معادله حالت داریم:

$$W = -P \Delta V \xrightarrow{P \Delta V = nR \Delta T} W = -nR \Delta T \Rightarrow W = -2 \times 8/3 \times (80 - 30) \Rightarrow W = -830 \text{ J}$$

در فرایند هم فشار کار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W = -P \Delta V \Rightarrow W = -P(V_2 - V_1) = -(P V_2 - P V_1) \xrightarrow{\frac{PV = nRT}{n = \frac{m}{M} = \frac{1}{2} \text{ mol}}} W = -(nRT_2 - nRT_1) = -nR \Delta T$$

$$\xrightarrow{\frac{T_2 = 127 + 273 = 400 \text{ K}}{T_1 = 27 + 273 = 300 \text{ K}}} W = -5 \times 8 \times (400 - 300) = -4000 \text{ J} \text{ (کار محیط روی دستگاه)}$$

$$W' = -W = +4000 \text{ J} = 4 \text{ kJ}$$

می‌دانیم کار دستگاه روی محیط برابر منفی کار محیط روی دستگاه است.

$$V_2 = V_1 - \frac{25}{100} V_1 = \frac{75}{100} V_1 = \frac{3}{4} V_1$$

حجم گاز ۲۵ درصد کاهش یافته است؛ یعنی:

$$W = -P \Delta V = -10^5 \times \left(\frac{3}{4} V_1 - V_1 \right) \Rightarrow W = -10^5 \times \left(-\frac{1}{4} \times 1 \right) \times 10^{-2} = 25 \text{ J}$$

کار در فرایند هم فشار برابر است با:

همان طور که می‌دانیم از معادله حالت در فشار ثابت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \xrightarrow{P_1=P_2} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \xrightarrow{\substack{T_1=27+273 \\ T_2=127+273}} \frac{2}{300} = \frac{V_2}{400} \Rightarrow V_2 = \frac{2}{3} L$$

کار W' که گاز روی محیط انجام می‌دهد برابر است با منفی کار محیط روی دستگاه. از طرفی می‌دانیم در فشار ثابت $W = -P\Delta V$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت

$$W' = -W = P\Delta V = (1/5 \times 10^5) \times \left[\left(\frac{2}{3} - 2 \right) \times 10^{-2} \right] = 100 \text{ J}$$

یادتان باشد در این رابطه P برحسب پاسکال و V برحسب مترمکعب است.

$$Q = nC_p \Delta T = n \left(\frac{9}{2} R \right) \Delta T = 2 \times \frac{9}{2} \times 8/31 \times 200 = 14958 \text{ J} = 15 \text{ kJ}$$

کافی است فرمول گرما در فرایند هم‌فشار را بنویسیم:

می‌دانیم گرمای مبادله شده در فشار ثابت برابر است با: $Q = nC_p(T_2 - T_1)$ همان طور که در درس‌نامه آمده است می‌توانیم بنویسیم:

$$C_p = \frac{\gamma}{2} R \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{گاز دو اتمی;} \\ \text{PV} = nR \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} \end{array} \right. \Rightarrow Q = n \times \frac{\gamma}{2} R \left(\frac{PV_2}{nR} - \frac{PV_1}{nR} \right) \Rightarrow Q = \frac{\gamma}{2} P(V_2 - V_1) \xrightarrow{\substack{V_2=2/3 V_1 \\ V_1=L}} Q = \frac{\gamma}{2} \times 10^5 \times [(0/8 - 1) \times 10^{-2}] = -70 \text{ J}$$

دقت داشته باشید در جایگزینی اعداد در رابطه بالا یکای اتمسفر را به پاسکال ($1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$) و یکای لیتر را به مترمکعب ($1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$) تبدیل می‌کنیم.

گرمای مبادله شده در فرایند هم‌فشار طبق آنچه در درس‌نامه آمده است از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$Q = \frac{5}{2} P\Delta V = \frac{5}{2} \times 1/5 \times 10^5 \times 8 \times 10^{-2} = 30 \times 10^2 \text{ J} = 3 \text{ kJ}$$

چون در این فرایند (انبساط هم‌فشار) حجم افزایش یافته است؛ پس کار انجام شده روی گاز منفی است. از طرفی، طبق رابطه $V = \left(\frac{nR}{P} \right) T$

در فشار ثابت اگر حجم گازی زیاد شود دما نیز زیاد می‌شود؛ پس گرمای داده شده به گاز مثبت است. در نتیجه، طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W < 0, Q > 0} \Delta U > 0$$

گرمای لازم برای تغییر دمای یک درجه سلسیوسی گاز هیدروژن در فشار ثابت برابر است با:

$$Q_H = nC_p \Delta T \quad n_H = \frac{m}{M} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ mol} \Rightarrow Q_H = 0.5 \times 28 \times 1 = 14 \text{ J}$$

ابتدا تعداد مول‌های گاز هیدروژن را محاسبه می‌کنیم:

$$Q_{\text{آب}} = mc\Delta\theta \Rightarrow Q_{\text{آب}} = 1 \times 4/2 \times 1 = 4/2 \text{ J}$$

و حالا گرمای لازم را برای تغییر دمای یک درجه سلسیوس آب محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{Q_H}{Q_{\text{آب}}} = \frac{14}{4/2} = \frac{10}{3}$$

گرمای ویژه آب برحسب واحد ژول بر گرم درجه سلسیوس جایگزین شده است.

در فرایند هم‌فشار کار از رابطه $W = -P\Delta V$ به دست می‌آید؛ همچنین می‌دانیم کار محیط روی دستگاه منفی کار دستگاه روی محیط

$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T \Rightarrow -40 = -nR\Delta T \Rightarrow nR\Delta T = 40$$

است؛ در نتیجه داریم:

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} \times 40 = 60 \text{ J}$$

حالا فرمول ΔU را برای گازهای تک‌اتمی می‌نویسیم:

$$Q = nC_p \Delta T = \frac{\gamma}{2} P\Delta V \Rightarrow Q = \frac{\gamma}{2} \times 2 \times 10^5 \times (5 - 4) = 7 \times 10^5 \text{ J}$$

حالا مقدار کار را حساب می‌کنیم:

$$W = -P\Delta V = -2 \times 10^5 \times (5 - 4) = -2 \times 10^5 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U = -2 \times 10^5 + 7 \times 10^5 = 5 \times 10^5 \text{ J}$$

طبق قانون اول ترمودینامیک انرژی درونی را به سادگی به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = nC_v \Delta T = \frac{5}{2} P\Delta V \Rightarrow \Delta U = \frac{5}{2} \times 2 \times 10^5 \times (5 - 4) = 5 \times 10^5 \text{ J}$$

روش دوم می‌توانیم ΔU را مستقیماً به کمک رابطه روبه‌رو به دست آوریم:

چون دما افزایش یافته است؛ پس ΔU مثبت است. در نتیجه ① نادرست است. از طرفی طبق درس‌نامه داریم: $Q = \frac{\gamma}{2} |W|$ ، $Q = \frac{5}{2} |W|$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U = \frac{5}{2} W - W = \frac{3}{2} W$$

دقت کنید که Q و W هم‌علامت نیستند؛ پس طبق قانون اول ترمودینامیک می‌توان نوشت:

$$0 < \Delta U < Q$$

یعنی Q از ΔU بزرگ‌تر است؛ پس:

ابتدا کار انجام شده را روی گاز محاسبه می‌کنیم و در نهایت با استفاده از قانون اول ترمودینامیک می‌توانیم به راحتی تغییرات انرژی درونی را

$$Q = -2800 \text{ J}$$

$$W = -P\Delta V = -P(V_2 - V_1) \Rightarrow W = -2 \times 10^5 \times (2 - 6) \times 10^{-2} = 800 \text{ J} \Rightarrow \Delta U = Q + W = -2800 + 800 = -2000 \text{ J}$$

محاسبه کنیم:

گرمای مبادله شده در فرایند هم‌فشار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = nC_p(T_2 - T_1) \Rightarrow Q = n \times \frac{5}{2} R \left(\frac{PV_2}{nR} - \frac{PV_1}{nR} \right) \Rightarrow Q = \frac{5}{2} P(V_2 - V_1) \Rightarrow \frac{5}{2} P(V_2 - V_1) \Rightarrow P(V_2 - V_1) = 200$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} P\Delta V \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} P(V_2 - V_1) = \frac{3}{2} \times 200 = 300 \text{ J}$$

حالا با استفاده از رابطه زیر تغییر انرژی درونی گاز را محاسبه می‌کنیم:

یادآور می‌شویم که برای گاز تک‌اتمی $\Delta U = -\frac{3}{2} W$ و برای گاز دو اتمی $\Delta U = -\frac{5}{2} W$ است.

می دانیم در فرایند هم فشار، گرما و کار از رابطه های زیر محاسبه می شوند:

$$\left. \begin{aligned} Q &= nC_p \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T \\ W &= -P \Delta V = -nR \Delta T \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q = -\frac{5}{2} W \Rightarrow 2000 = -\frac{5}{2} W \Rightarrow W = -800 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q + W = 2000 + (-800) = 1200 \text{ J}$$



رابطه های کار و گرمای مبادله شده در فرایند هم فشار برای یک گاز تک اتمی به صورت زیر است:

$$\left. \begin{aligned} W &= -P \Delta V \\ Q &= nC_p \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T = \frac{5}{2} P \Delta V \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q = -\frac{5}{2} W$$

$$\Delta U = Q + W = -\frac{3}{2} W \xrightarrow{W=-800 \text{ J}} \Delta U = \frac{-3}{2} \times (-800) = 1200 \text{ J} > 0$$



حالا طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:
بنابراین انرژی درونی افزایش یافته است.

گرمای مبادله شده در فرایند هم فشار از رابطه زیر به دست می آید:



$$Q = nC_p(T_r - T_1) \Rightarrow 10^4 = 2 \times \frac{5}{2} \times 8 \times (T_r - 350) \Rightarrow T_r = 600 \text{ K}$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_r V_r}{T_r} \xrightarrow{P_1=P_r} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_r}{T_r} \Rightarrow \frac{1/75}{350} = \frac{V_r}{600} \Rightarrow V_r = 3 \text{ m}^3$$

در فرایند هم فشار معادله حالت به صورت مقابل درمی آید:

۱) تحلیل گزینه ها: نادرست است؛ چون در فرایند ab که دمای گاز افزایش یافته است، انرژی درونی نیز افزایش می یابد.



۳) نادرست است؛ چون با بالا رفتن حجم گاز و ثابت ماندن جرم آن چگالی گاز کاهش می یابد.

۴) نادرست است؛ چون گاز روی محیط بیرون کار انجام می دهد و از آن گرما می گیرد:

$$\Delta V > 0 \xrightarrow{\text{فرایند انبساط}} W < 0$$

$$\Delta T > 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow \Delta U = Q + W \Rightarrow Q > 0$$

۲) درست است؛ می دانیم در نمودار V-T خط راست با شیب ثابت و گذرنده از مبدأ، نمودار فرایند هم فشار است.

با توجه به نمودار این فرایند هم فشار است. با استفاده از معادله حالت گاز کامل ابتدا حجم گاز را در حالت b به دست می آوریم:



$$\frac{P_a V_a}{T_a} = \frac{P_b V_b}{T_b} \Rightarrow \frac{0.05}{500} = \frac{V_b}{800} \Rightarrow V_b = 0.08 \text{ m}^3$$

از طرفی می دانیم گرمای مبادله شده در فرایند هم فشار از رابطه زیر به دست می آید:

$$Q = \frac{5}{2} P \Delta V = \frac{5}{2} P (V_b - V_a) \Rightarrow Q = \frac{5}{2} \times 2 \times 10^5 \times (0.08 - 0.05) \Rightarrow Q = 15000 \text{ J}$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR \Delta T$$

همان طور که می دانیم تغییر انرژی درونی برای یک گاز تک اتمی از رابطه مقابل به دست می آید:



$$PV = nRT \Rightarrow P \Delta V = nR \Delta T \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} P \Delta V \Rightarrow 9000 = \frac{3}{2} \times 2 \times 10^5 \times \Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{3}{100} \text{ m}^3 = 30 \text{ L}$$

از معادله حالت داریم:

$$V_r - V_1 = 30 \Rightarrow V_r - 20 = 30 \Rightarrow V_r = 50 \text{ L}$$

$$\frac{3}{100} \text{ m}^3 \xrightarrow{\times 10^3} 30 \text{ L}, \quad 9 \text{ kJ} \xrightarrow{\times 10^3} 9000 \text{ J}$$

حواستان باشد که در حل بالاتر تبدیل یکاهای مقابل انجام شده است:

با توجه به اینکه نمودار V-T از مبدأ می گذرد فرایند ab یک فرایند هم فشار است؛ پس:



$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_r V_r}{T_r} \xrightarrow{P_1=P_r} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_r}{T_r} \Rightarrow \frac{20}{600} = \frac{30}{T_r} \Rightarrow T_r = 900 \text{ K}$$

$$W = -P \Delta V = -nR \Delta T = -0.5 \times 8 \times 300 = -1200 \text{ J}$$

نمودار V-T یک خط راست گذرنده از مبدأ با شیب ثابت است؛ یعنی ab یک فرایند هم فشار است؛ پس $P_a = P_b$ است. طبق معادله حالت



گاز می توانیم فشار در نقطه a را به دست آوریم:

$$P_a V_a = nRT_a \Rightarrow P_a \times 12 \times 10^{-3} = 2 \times 8 \times 300 \Rightarrow P_a = 4 \times 10^5 \text{ Pa} = 400 \text{ kPa} \Rightarrow P_b = 400 \text{ kPa}$$

جمله (ا) درست است.

$$Q_{ab} = nC_p \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T \Rightarrow Q_{ab} = \frac{5}{2} \times 2 \times 8 \times 200 = 8000 \text{ J}$$

جمله (ب) نادرست است.

$$W_{ab} = -P \Delta V = -nR \Delta T \Rightarrow W_{ab} = -2 \times 8 \times 200 = -3200 \text{ J}$$

جمله (پ) درست است.

$$\Delta U_{ab} = Q_{ab} + W_{ab} \Rightarrow \Delta U = 8000 - 3200 = 4800 \text{ J}$$

انرژی درونی گاز از رابطه مقابل به دست می آید:

جمله (ت) نیز درست است.

$$\frac{P_1 V_1}{P_r V_r} = \frac{nRT_1}{nRT_r} = \frac{T_1}{T_r} \Rightarrow \frac{P_1}{P_r} = \frac{T_1}{T_r} = \frac{2}{3}$$

هر دو فرایند هم فشار هستند. ابتدا نسبت فشارها را در حجم یکسان V به دست می آوریم:



$$\frac{Q_1}{Q_r} = \frac{nC_p \Delta T}{nC_p \Delta T} = \frac{\frac{5}{2} P_1 \Delta V}{\frac{5}{2} P_r \Delta V} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_r} = \frac{P_1}{P_r} = \frac{2}{3}$$

حالا نسبت گرماها را به دست می آوریم:

۱۳۲۰ (۴) فرایند ab هم دما، فرایند bc هم فشار و فرایند ca هم حجم است. جهت چرخش نمودارهای V-T و P-V خلاف هم است. پس (۴) درست است.

۱۳۲۱ (۳) تحلیل گزینه‌ها: حجم گاز در فرایند ab از حجم گاز در فرایند cd کوچک‌تر است؛ چون شیب cd کمتر از شیب ab است، در نتیجه (۱) نادرست است.

دمای گاز در فرایند da کم شده است و طبق فرمول $Q = nC_p \Delta T$ گاز گرما از دست داده است؛ یعنی (۲) هم نادرست است. در فرایند cd دمای گاز افزایش یافته است؛ پس $\Delta U > 0$ است؛ یعنی (۴) هم نادرست است.

ولی فرایند bc یک فرایند انبساط است و در انبساط هم $W < 0$ منفی است؛ یعنی کار محیط روی گاز منفی است، ولی کار گاز روی محیط مثبت است؛ در نتیجه (۳) درست است.

۱۳۲۲ (۴) خط راست گذرنده از مبدأ در نمودار V-T نشان دهنده یک فرایند هم فشار است؛ پس فرایندهای ab و cd هم فشار هستند؛ همچنین فرایندهای da و bc هم حجم هستند. از طرفی می‌دانیم کار در فرایندهای هم حجم صفر است. حالاً می‌توانیم کار در فرایندهای ab و cd را به دست آوریم:

$$W = -nR\Delta T$$

$$\begin{cases} W_{ab} = -nR(T_b - T_a) \Rightarrow W_{ab} = -0.2 \times 8 \times (125 - 625) = 800 \text{ J} \\ W_{cd} = -nR(T_d - T_c) \Rightarrow W_{cd} = -0.2 \times 8 \times (1875 - 375) = -2400 \text{ J} \end{cases}$$

$$W_{\text{چرخه}} = W_{ab} + W_{cd} \Rightarrow W_{\text{چرخه}} = 800 - 2400 = -1600 \text{ J}$$

چون کار گاز روی محیط قرینه کار محیط روی گاز است؛ پس گاز در هر چرخه ۱۶۰۰J کار انجام می‌دهد.

۱۳۲۳ (۳) تحلیل گزینه‌ها: با توجه به نمودار می‌بینیم که دمای نقاط a و c با هم برابر است؛ زیرا حاصل ضرب PV برای آن‌ها یکسان است.

$P_a V_a = P_c V_c = 3P_1 V_1 \Rightarrow T_a = T_c$
 از طرفی، طبق رابطه $\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T$ می‌دانیم تغییرات انرژی درونی تابع تغییرات دماست؛ بنابراین: $\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta U_{adc} = \Delta U_{ac} = \Delta U_{abc} = 0$
 در نتیجه (۱) و (۲) درست هستند. حالاً (۴) را بررسی می‌کنیم:

$$W_{adc} = W_{ad} + W_{dc} \xrightarrow[\text{فرایند dc هم حجم است}]{W_{dc}=0} W_{adc} = 3P_1 \times (3V_1 - V_1) + 0 = 6P_1 V_1$$

$$W_{abc} = W_{ab} + W_{bc} \xrightarrow[\text{فرایند ab هم حجم است}]{W_{ab}=0} W_{abc} = 0 + P_1 \times (3V_1 - V_1) = 2P_1 V_1$$

$$\Rightarrow \frac{W_{adc}}{W_{abc}} = \frac{6P_1 V_1}{2P_1 V_1} = 3$$

پس (۴) هم درست است؛ اما برای بررسی (۳) می‌توانیم بنویسیم:
 $\Delta U_{adc} = \Delta U_{abc} = 0 \xrightarrow{\Delta U = Q + W} \begin{cases} 0 = Q_{adc} + W_{adc} \Rightarrow Q_{adc} = -W_{adc} \\ 0 = Q_{abc} + W_{abc} \Rightarrow Q_{abc} = -W_{abc} \end{cases}$

از طرفی، در مرحله قبل مقدار کار را در فرایندهای abc و adc محاسبه کردیم و دیدیم که کار در فرایند adc، ۳ برابر کار در فرایند abc است، پس گرمای مبادله شده در این فرایندها با هم یکسان نیست؛ یعنی (۳) نادرست است.

بنابراین طبق تعریف بازده ماشین‌های گرمایی کارنو می‌توان نوشت:
 می‌دانیم حداکثر بازده یک ماشین گرمایی زمانی است که با چرخه کارنو کار کند؛ پس بالاترین بازده ممکن را به دست می‌آوریم:

$$\eta_{\max} = \frac{T_H - T_L}{T_H} \xrightarrow[\eta_{\max} = \frac{|W|}{|Q_{H\min}|}]{|W| = Q_{H\min}} = \frac{T_H - T_L}{T_H} \Rightarrow \frac{1000}{1200 + 277} = \frac{1000}{1477} \Rightarrow Q_{H\min} = 1477 \text{ J}$$

اما در واقعیت در ماشین‌های گرمایی واقعی همواره مقداری از انرژی به وسیله اصطکاک بین اجزای ماشین تلف می‌شود، در نتیجه بازده ماشین‌های گرمایی واقعی همواره کمتر از حالتی است که این ماشین گرمایی با چرخه کارنو کار می‌کند؛ یعنی $\eta < \eta_{\max}$ و این به آن معناست که $Q_H > 1477 \text{ J}$. در حالی که (۱) و (۲) این شرط را ندارند. از طرفی (۴) هم نادرست است؛ چون رابطه $Q_H = |Q_L| + |W|$ در مورد آن صدق نمی‌کند.

۱۳۲۵ (۴) حداقل توان گرمایی چشمه گرم زمانی اتفاق می‌افتد که بازده بیشینه باشد؛ پس بازده کارنو را به دست می‌آوریم:

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_L}{T_H} \xrightarrow[T_L = 27 + 277 = 304 \text{ K}]{T_H = 500 \text{ K}} \eta_{\max} = 1 - \frac{300}{500} = 0.4$$

حالاً W و Q_H را برحسب توان هایشان می‌نویسیم:
 $\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{P_W t}{P_H t} = \frac{P_W}{P_H} \Rightarrow \eta = \frac{P_W}{P_H} \Rightarrow P_H = \frac{P_W}{\eta}$

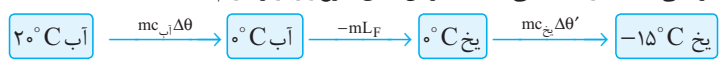
P_H توان گرمایی چشمه گرم و P_W توان ماشین گرمایی است. حالاً اگر بخواهیم P_H حداقل باشد، لازم است که η بیشینه باشد:

$$(P_H)_{\min} = \frac{P_W}{\eta_{\max}} = \frac{60 \text{ kW}}{0.4} = 150 \text{ kW}$$

۱۳۲۶ (۳) می‌دانیم بازده کارنو از همه بازده‌های دیگر بزرگ‌تر است:
 $\eta_{\text{کارنو}} > \eta_{\text{ماشین گرمایی}} \Rightarrow 1 - \frac{T_L}{T_H} > 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} \Rightarrow \frac{T_L}{T_H} < \frac{|Q_L|}{Q_H}$

حالاً عددها را قرار می‌دهیم:
 $\frac{T_L}{400} < \frac{200}{500} \Rightarrow T_L < 160 \text{ K}$

۱۳۲۷ (۳) می‌دانیم گرمایی که یخ‌ساز می‌گیرد، برابر است با گرمایی که آب از دست می‌دهد؛ بنابراین طبق طرح وارده زیر داریم:



$$Q_L = |mc_{\text{آب}} \Delta \theta - mL_F + mc_{\text{یخ}} \Delta \theta'| \Rightarrow Q_L = 10^3 \times (2 \times 4 / 2 \times 20 + 2 \times 340 + 2 \times 2 / 1 \times 15) \Rightarrow Q_L = 911 \times 10^3 \text{ J}$$

دقت کنید گرمای ویژه برحسب یکای $\text{J} / \text{kg} \cdot ^\circ \text{C}$ جایگزین شده است.



$$K = \frac{Q_L}{W} \Rightarrow \Delta = \frac{911 \times 10^7}{W} \Rightarrow W = \frac{911 \times 10^7}{\Delta} \text{ J}$$

حالا با استفاده از ضریب عملکرد یخچال داریم:

$$P = \frac{W}{t} \xrightarrow{t=2600\text{s}} P = \frac{911 \times 10^7}{\Delta \times 2600} = 50.6W$$

در آخر توان را حساب می‌کنیم:

چون توان الکتریکی هر یخچال برابر است با کاری که موتور در یک مدت معین انجام می‌دهد؛ بنابراین:

$$P = \frac{W}{t} \xrightarrow{P_1=P_2} W_1 = W_2, \quad K = \frac{Q_L}{W} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{Q_{L1}}{W}}{\frac{Q_{L2}}{W}} = \frac{Q_{L1}}{Q_{L2}} = 1/5 \Rightarrow Q_{L1} = 1/5 Q_{L2}$$

از طرفی گرمایی که یخچال‌ها به بیرون می‌دهند از قانون اول ترمودینامیک به دست می‌آید؛ پس در حالت مقایسه‌ای داریم:

$$|Q_H| = Q_L + W \Rightarrow \frac{|Q_{H1}|}{|Q_{H2}|} = \frac{Q_{L1} + W}{Q_{L2} + W} = \frac{1/5 Q_{L2} + W}{Q_{L2} + W}$$

واضح است که برای کسر بالانمی‌توان عدد تعیین کرد.

آزمون ۱

$$W = S = \frac{\Delta \times 10^4 + 10^5}{2} \times (4-1) \times 10^{-2} \Rightarrow W = 225 \text{ J}$$

ابتدا مساحت زیر نمودار را که همان W است حساب می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow U_b - U_a = Q + W \Rightarrow 150 - 300 = Q + 225 \Rightarrow Q = -375 \text{ J}$$

حالا از قانون اول ترمودینامیک استفاده می‌کنیم:

پس اندازه گرمای مبادله شده 375 J است.

با توجه به نمودار می‌بینیم که فرایند نشان داده شده هم حجم است؛ بنابراین داریم:

$$Q = nC_V \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T \Rightarrow Q = \frac{5}{2} \times 2 \times 8 \times (400 - 200) = 8000 \text{ J} = 8 \text{ kJ}$$

از طرفی می‌دانیم شیب نمودار $\frac{nR}{V}$ است؛ در نتیجه برای محاسبه حجم گاز می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{شیب نمودار} = \frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{nR}{V} \Rightarrow \frac{(8-4) \times 10^4}{400-200} = \frac{2 \times 8}{V} \Rightarrow V = 0.08 \text{ m}^3 = 80 \text{ L}$$

$$Q = nC_P \Delta T = \frac{7}{2} nR \Delta T \Rightarrow 455 = \frac{7}{2} nR \Delta T \Rightarrow nR \Delta T = 130$$

ابتدا رابطه Q را در فرایند هم‌فشار می‌نویسیم:

$$W = -P \Delta V = -nR \Delta T = -130 \text{ J}$$

حالا W را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W = 455 + (-130) = 325 \text{ J}$$

در آخر با استفاده از قانون اول ترمودینامیک می‌توانیم ΔU را به دست آوریم:

با توجه به نمودار واضح است که ab یک فرایند هم‌حجم است؛ پس به سادگی می‌توانیم T_b را به دست آوریم:

$$Q_{ab} = nC_V \Delta T \Rightarrow 2000 = 1 \times 12/5 \times \Delta T \Rightarrow \Delta T = 160 \text{ K}$$

$$T_b - T_a = T_b - 100 = 160 \Rightarrow T_b = 260 \text{ K}$$

حالا T_b به دست می‌آید:

$$\theta_b = 260 - 273 = -13^\circ \text{ C}$$

دمای T_b را بر حسب درجه سلسیوس به دست می‌آوریم:

$$\theta_b = \theta_c = -13^\circ \text{ C}$$

دقت کنید که دمای نقاط b و c یکسان است؛ یعنی:

در فرایند بی‌دررو، $Q = 0$ است؛ یعنی $\Delta U = W$ ؛ پس کافی است ΔU را محاسبه کنیم:

$$\Delta U = W = \frac{3}{2} nR \Delta T = \frac{3}{2} (P_b V_b - P_a V_a) = \frac{3}{2} \times (10 \times 2 \times 10^2 - 2 \times 4 \times 10^2) = 1800 \text{ J}$$

با توجه به نمودار می‌بینیم که فرایند ab یک فرایند هم‌حجم و فرایند bc یک فرایند هم‌فشار است. در نتیجه اندازه کل گرمای مبادله شده بین

$$Q_{Jc} = Q_{ab} + Q_{bc} = nC_V \Delta T + nC_P \Delta T = \frac{3}{2} nR (T_b - T_a) + \frac{5}{2} nR (T_c - T_b)$$

گاز و محیط برابر است با:

$$\Rightarrow Q_{Jc} = \frac{3}{2} \times 0.5 \times 8 \times (215 - 200) + \frac{5}{2} \times 0.5 \times 8 \times (235 - 215) = 90 + 200 = 290 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U = W$$

در فرایند بی‌دررو، $Q = 0$ است، در نتیجه طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = W = nC_V \Delta T = 0.5 \times \frac{3}{2} \times 8 \times (200 - 400) = -1200 \text{ J}$$

پس کافی است که ΔU را حساب کنیم. حواستان باشد که گاز تک‌اتمی است؛ بنابراین:



فرایند مورد نظر فرایندی هم حجم است که فشار آن در حال زیاد شدن است؛ یعنی $Q > 0$ است. از طرفی، دمای گاز زیاد شده است، پس $\Delta U > 0$ است.

۱۳۴۶

فرایند مورد نظر هم فشار است؛ چون امتداد آن از مبدأ مختصات می‌گذرد. پس می‌توانیم W و Q را به دست آوریم. ابتدا W را محاسبه می‌کنیم:

۱۳۴۷

$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T = -\frac{5}{8} \times 8 \times (400 - 600) = 800 \text{ J}$$

پس کار انجام شده توسط گاز 800 J است.

$$Q = nC_p \Delta T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} nR\Delta T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \times \frac{5}{8} \times 8 \times (400 - 600) = -2800 \text{ J}$$

حالا Q را محاسبه می‌کنیم:

$$P_a V_a = nRT_a \Rightarrow 3 \times 10^5 \times 32 \times 10^{-2} = 1 \times 8 \times T_a \Rightarrow T_a = 1200 \text{ K}$$

ابتدا دمای T_a را به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = nC_v \Delta T = 1 \times \frac{3}{2} \times 8 \times (600 - 1200) = -7200 \text{ J}$$

حالا ΔU را محاسبه می‌کنیم:

در این شکل نمودار بالایی که شیب کمتری دارد هم دما و دمای آن $T_1 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$ است. حالا برای T_1 و T_2 رابطه

۱۳۴۹

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{6 \times 1}{300} = \frac{2 \times 1/5}{T_2} \Rightarrow T_2 = 150 \text{ K}$$

زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{V_a}{T_a} = \frac{V_b}{T_b} \Rightarrow \frac{2}{150} = \frac{6}{T_b} \Rightarrow T_b = 450 \text{ K}$$

می‌دانیم فرایند ab هم فشار است؛ در نتیجه با مقایسه دو نقطه a و b داریم:

۱۳۵۰

$$\frac{P_b V_b}{T_b} = \frac{P_c V_c}{T_c}$$

حالا بین دو مثلث، رابطه شباهت را می‌نویسیم ($\frac{P_c}{P_b} = \frac{V_c}{V_b}$) و از طرف دیگر قانون گازها را برای b و c می‌نویسیم:

$$\frac{T_c}{T_b} = \left(\frac{V_c}{V_b}\right)^2$$

کافی است دو رابطه آخر را با هم ترکیب کنیم تا به رابطه روبه‌رو برسیم:

$$\frac{T_c}{450} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \Rightarrow T_c = 1250 \text{ K}$$

حالا عددها را قرار می‌دهیم:

می‌دانیم فرایند ab هم فشار و فرایند bc بی‌دررو است. کافی است کار را در هر یک از فرایندها به طور جداگانه حساب کنیم:

۱۳۵۱

$$W_{ab} = -P\Delta V_{ab} = -2 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-2} = -400 \text{ J}$$

$$W_{bc} = \Delta U_{bc} = nC_v \Delta T \Rightarrow W_{bc} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} nR(T_c - T_b) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (P_c V_c - P_b V_b) = \frac{3}{2} \times (1 \times 6 - 2 \times 4) \times 10^2 = -300 \text{ J}$$

حالا W_{bc} را به دست می‌آوریم:

$$W_{abc} = W_{ab} + W_{bc} = -700 \text{ J}$$

حالا کار کل به دست می‌آید:

برای حل این تست کافی است درسنامه هم دما و بی‌دررو را یک بار دیگر مطالعه کنید.

۱۳۵۲

با توجه به نمودار می‌بینیم که دمای گاز در a و c یکسان؛ یعنی $\Delta U_{abc} = 0$ است.

۱۳۵۳

$$\Delta U_{abc} = W_{abc} + Q_{abc} = 0 \Rightarrow W_{ab} + W_{bc} + Q_{abc} = 0$$

$$W_{ab} = -P\Delta V = -2 \times 10^5 \times (3 - 7) \times 10^{-2} = 800 \text{ J}$$

از طرفی می‌دانیم فرایند ab هم فشار است؛ در نتیجه داریم:

همچنین می‌دانیم فرایند bc هم حجم؛ پس $W_{bc} = 0$ است. حالا گرماها و کارهایی را که حساب کرده‌ایم جایگذاری می‌کنیم:

$$W_{ab} + W_{bc} + Q_{abc} = 0 \Rightarrow 800 + 0 + Q_{abc} = 0 \Rightarrow Q_{abc} = -800 \text{ J}$$

$$\Delta U_{\text{چرخه}} = \Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} + \Delta U_{ca} = 0$$

می‌دانیم تغییر انرژی درونی در هر چرخه‌ای صفر است؛ بنابراین:

۱۳۵۴

از طرفی چون فرایند bc هم دما است؛ پس $\Delta U_{bc} = 0$ است؛ در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$W_{ab} + Q_{ab} + 0 + Q_{ca} + W_{ca} = 0 \xrightarrow{W_{ab}=0} 0 + Q_{ab} + 0 + \left(-\frac{5}{2} W_{ca}\right) + W_{ca} = 0$$

$$\frac{3}{2} W_{ca} = 3000 \Rightarrow W_{ca} = 2000 \text{ J}$$

از طرفی می‌دانیم $Q_{ab} = 3000 \text{ J}$ است؛ پس:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow 0.4 = \frac{|W|}{3000} \Rightarrow |W| = 1200 \text{ J}$$

ابتدا با استفاده از رابطه بازده کار ماشین اول را به دست می‌آوریم:

۱۳۵۵

$$|Q_L| = Q_H - W = 3000 - 1200 = 1800 \text{ J}$$

حالا $|Q_L|$ را برای ماشین اول محاسبه می‌کنیم:

$$Q'_H = |Q_L| = 1800 \text{ J}$$

از طرفی، می‌دانیم گرمای خارج شده از ماشین اول همان گرمای ورودی به ماشین دوم است؛ یعنی:



$$\eta' = \frac{|W'|}{Q_H'} \Rightarrow 0.4 = \frac{|W'|}{1800} \Rightarrow |W'| = 720 \text{ J}$$

حالا با استفاده از رابطه بازده کار ماشین دوم را حساب می‌کنیم:

$$|Q_L'| = Q_H' - |W'| = 1800 - 720 = 1080 \text{ J}$$



و در نهایت Q_L' را به دست می‌آوریم:

$$Q_{H_r} = 1/25 Q_{H_1}, \quad Q_{L_r} = 1/25 Q_{L_1}$$

ابتدا مقدار Q_H و Q_L را ۲۵ درصد زیاد می‌کنیم:   ۱۳۵۶

سپس با استفاده از رابطه بازده در ماشین گرمایی بازده در دو حالت را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} \Rightarrow \frac{\eta_r}{\eta_1} = \frac{1 - \frac{|Q_{L_r}|}{Q_{H_r}}}{1 - \frac{|Q_{L_1}|}{Q_{H_1}}} = \frac{Q_{H_r} - |Q_{L_r}|}{Q_{H_r}} = \frac{Q_{H_1} (Q_{H_r} - Q_{L_r})}{Q_{H_r} (Q_{H_1} - Q_{L_1})} = \frac{Q_{H_1} (1/25 Q_{H_1} - 1/25 Q_{L_1})}{1/25 Q_{H_1} (Q_{H_1} - Q_{L_1})} = 1$$

ابتدا Q_L مقدار گرمایی را که آب صفر درجه سلسیوس از دست می‌دهد تا به یخ صفر درجه سلسیوس تبدیل شود حساب می‌کنیم:   ۱۳۵۷



$$Q_L = mL_F = 1 \times 336 = 336 \text{ kJ}$$

$$K = \frac{Q_L}{W} \Rightarrow 4 = \frac{336}{W} \Rightarrow W = 84 \text{ kJ}$$

سپس مقدار کار را با استفاده از تعریف ضریب عملکرد به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow 800 = \frac{84 \times 10^3}{t} \Rightarrow t = 105 \text{ s} = 1/75 \text{ min}$$

حالا به کمک رابطه توان، زمان به دست می‌آید:

با توجه به نمودار می‌بینیم که گاز در فرایند bc گرما می‌گیرد و در فرایند ab گرما از دست می‌دهد؛ بنابراین داریم:   ۱۳۵۸

$$\begin{cases} Q_L = Q_{bc} = \frac{5}{\gamma} P \Delta V = \frac{5}{\gamma} \times 1 \times 10^5 \times 0.04 = 10000 \text{ J} \\ Q_H = Q_{ab} = \frac{\gamma}{\gamma-1} V \Delta P = \frac{\gamma}{\gamma-1} \times 0.04 \times (-2) \times 10^5 = -12000 \text{ J} \end{cases}$$

$$K = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{|Q_H| - Q_L} = \frac{10000}{12000 - 10000} = 5$$

حالا ضریب عملکرد را به دست می‌آوریم: