# فیزیک ۳

## دوازدهم

جلد دوم

رشته ریاضی و فیزیک


مؤلفین:

مهدی شیرزاد

علی پیمانی

علیرضا رمضانی

احمد سیدی

امید برزوئی

ناظر علمی: غلامعلی محمودزاده

## مقدمه:

*«همه شناخت جهان از یک واقع‌گرایی کودکانه شروع می‌شود با این باور که هرچیزی دقیقاً همان است که دیده می‌شود. فکر می‌کنیم، سبزه، سبز است. سنگ، سخت است و برف، سرد است. امّا فیزیک، درک و تجربه‌ای را برای سبزی، سختی و سردی ایجاد می‌کند که با درکِ کودکانه اولیه بسیار فاصله دارد.» «برتراند راسل»*

### باور به افسانه‌ها: بخشی از فرهنگ عمومی

در داستانی که نقل می‌کنند، «ادموند هالی» (یار غار اسحاق نیوتون و هم او که دنباله‌دارِ هالی به نام او نامگذاری شده است)؛ از ملاقات خود با نیوتون یاد می‌کند و عنوان می‌دارد که نیوتون از فروافتادن سیبی از درخت با شگفتی به «قانون جهانی گرانش» پی برده است. ولی واقعیت این نیست.

نیوتون هیچ‌گاه از سقوط سیب تعجب نکرد. شگفتی او این بود که چرا ماه روی زمین سقوط نمی‌کند! ولی تمایل مردم، بیشتر به دانستن «علت سقوط سیب» بود تا «علت عدم سقوط ماه».

نیوتون نشان داد علت آن سقوط و علت این عدم سقوط، هر دو یکی است.

### انبساط دنیای طبیعی، انقباض دنیای انسانی:

منشأ کیهان یک «مهبانگ[1] یا انفجار بزرگ» است. طبق یافته‌های کیهان‌شناسی، دنیا در حال انبساط و تورم است. ولی در مقابل، دنیای انسانی در حال انقباض و مینیاتوری شدن است. «مارشال مک لوهان»[2] در نیمه دوم قرن بیستم، با توجه به رواج رادیو و تلویزیون و البته در زمانی که هنوز اینترنت به این درجه از رشد و نفوذ نرسیده بود، عنوانِ «دهکده جهانی» را به کار برد و جهانِ با این عظمت را در حکم یک دهکده دانست[3]. در این دهکده جهانی، «نوشتن» کاری سهل و ممتنع است. یعنی هم کاری آسان و در عین حال کاری دشوار است. به دلیل دسترسی سریع و آسان به انواع منابع و مراجع، می‌توان رهِ صدساله را یک شبه پیمود و از خیلی دستاوردهای قبل به سرعت و آسانی بهره گرفت. در مقابل در این دهکده جهانی و دنیای شیشه‌ای، کوچک‌ترین خبط و خطای نویسندگان به سرعتِ برق وباد و پیش از آن که مجال تصحیح آن پیدا شود، منتشر می‌شود تا «سیه روی شود هر که در او غش باشد!!»

### چرا تألیف گروهی؟

یک تألیف «واقعاً گروهی» باید دارای مشخصه‌ای باشد که در علوم اجتماعی به آن «ظهور ویژگی‌های جدید Emergence می‌گویند. یعنی چه؟ برای توضیح مطلب از یک توضیح کاملاً فیزیکی استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم دمای اتاقی که در آن درس می‌خوانید ۲۵ درجه سانتی‌گراد باشد. از شما می‌پرسیم که این دما دقیقاً به چه معنا است؟ احتمالاً پاسخ می‌دهید که این دما حاصل حرکت مولکول‌های هوا است و به نوعی به انرژی جنبشی مولکول‌های هوا مرتبط است. حالا اگر «فقط» یک مولکول از این مولکول‌ها را انتخاب کنیم، دمای آن مولکول چند درجه است؟ و شما به درستی پاسخ خواهید داد که: یک مولکول به تنهایی، دما ندارد. اصلاً دما، برای مولکول‌های منفرد تعریف نمی‌شود. دما برای تعداد زیادی از مولکول‌ها قابل تصور است.

حالا کمی رندی می‌کنیم. واقعاً هر یک مولکول چه سهمی در دمای ۲۵°C دارد؟ اگر بخواهیم صادقانه جواب دهیم، واقعاً هیچ سهمی ندارد. در واقع اگر شما دیواری در میانه اتاق بکشید و اتاق را به دو نیمه بخش کنید، دمای هر نیمه هنوز ۲۵°C است. حالا می‌پرسیم، اگر هر مولکول به تنهایی نقشی در دمای اتاق ندارد، پس اگر تمام مولکول‌های هوا را از اتاق خارج کنیم، آیا باز

---

1. Big Bang

۲. «مارشال مک لوهان» فیلسوف و جامعه‌شناس برجسته کانادایی

۳. توضیح کامل‌تر در کتاب «مقدمه‌ای بر سیستم‌های پیچیده» نوشته «محمدرضا شعبانعلی»

هم اتاق $25^\circ C$ است؟ اینجاست که شما متوجه رندی ما می‌شوید و به سرعت جواب می‌دهید که این دیگر درست نیست. اگر مولکول‌های هوا نباشند، داستان متفاوت می‌شود، چون اصلاً دما به نوعی به انرژی جنبشی مولکول‌های هوا وابسته است.
درواقع دما، یک «ویژگی سطح بالا» یا «سطح کلان» است که بر اثر تک‌تک اعضای سیستم قابل مشاهده است. کافی است شما، دمای گاز را با کمیت دیگری مثل «جرم گاز» مقایسه کنید. جرم یک «ویژگی سطح پایین» است. درواقع سهم هر مولکول گاز در جرم کل گاز، سر راست و مشخص است. اگر شما اتاق را به دو نیمه مساوی تقسیم کنید، دقیقاً جرم گاز را به دو نیمه مساوی تقسیم کرده‌اید.
یک تألیف گروهی، باید چیزی مشابه یک «ویژگی سطح بالا» باشد؛ درواقع باید اثری از مجموعه بروز کند که «مساوی مجموع اثرات تک‌تک اعضاء نباشد» این‌که یک نفر درسنامه بنویسد، نفر دیگر سؤال بنویسد، احیاناً کسی هم سؤالات را حل کند و اشخاصی هم تست و جواب آن را فراهم کنند و سپس این موارد سرهم بندی شود، اصلاً شایسته و بایستهٔ یک تألیف گروهی نیست. در یک کار گروهی باید ویژگی‌هایی بروز کند که در کار تک‌تک افراد به تنهایی قابل مشاهده و ردگیری نیست.
در این کتاب‌ها، سعی کرده‌ایم تا حدّممکن، در اثر تعامل و چالش و بعضاً بحث و گفتگوهای نفس‌گیر، کتابی فراهم آوریم که واجد ویژگی‌هایی باشد که صرفاً سرجمع کار چند مؤلف نباشد؛ بلکه ویژگی تعاملی در همه بخش‌های کتاب جاری و ساری باشد.

اهداف اصلی کتاب را می‌توان در موارد زیر شماره کرد:
(۱) ارایه درسنامه‌ای دقیق، روان و بی‌پیرایه با انطباق کامل با کتاب نونگاشت درسی. گرچه مؤلفین نسبت به بعضی روش‌ها و سلیقه‌های کتاب درسی جدید، انتقاداتی دارند ولی به جدّ بر این باور هستند که مبنای اصلی باید همین کتاب درسی باشد و اساساً درگیر نمودن دانش‌آموزانِ مخاطب این کتاب با بحث‌های چالشی و اختلافی، کاری عبث و بی‌فایده می‌باشد.
(۲) حل مسایل فراوان مفهومی و محاسباتی در قالب یک شیب آموزشی منطقی.
هدف‌گیری ارائه مسایل، تعلیم فیزیک است نه خودنمایی بی‌معنا یا درگیر نمودن دانش‌آموز با مسایل بی‌هدف و پراکنده.
(۳) درگیر نمودن دانش‌آموزان با آزمون‌های تشریحی (با توجه به اهمیت بیشتری که امتحانات نهایی پیدا کرده‌اند.)
(۴) طراحی تست‌های «واقعاً تالیفی» مطابق با رویکرد جدید ارائه مطالب (خصوصاً در فصل (۳) (نوسان و موج) و فصل (۴) (برهم‌کنش امواج)) و پرهیز از ساخت تست‌های تصنّعی و تکراری.
(۵) ارائه مطالب جذّاب و خواندنی در قالب تاریخ علم، فناوری و مطالب طنزآمیز همراه با گرافیکی چشم‌نواز

این اثر در قالب سه مجلّد، به شکل زیر تنظیم شده است:
- جلد (۱): سینماتیک ـ دینامیک
- جلد (۲): نوسان و موج ـ برهم‌کنش‌های موج
- جلد (۳): آشنایی با فیزیک اتمی ـ آشنایی با فیزیک هسته‌ای

مؤلّفین نهایت سعی خود را کرده‌اند، که اثری مفید و بی‌غلط ارائه کنند. امیدواریم که سعی ما اثری خوب و شایسته را رقم زده باشد.
دراینجا بر خود لازم می‌دانیم از راهنمایی‌های ارزنده جناب استاد غلامعلی محمودزاده به عنوان معلّمی پیشکسوت و نویسنده‌ای چیره‌دست و صاحب سبک در حوزه آموزش فیزیک، قدردانی نماییم. همچنین از زحمات اعضای محترم واحد طراحی و تایپ، سرکار خانم‌ها، «سمانه‌ایمانفرد»، «حمیده نوروزی»، «ملیحه محمدی آندرس» و «رضیه صفریان» بسیار سپاسگزاریم. درخاتمه مراتب تشکر و قدردانی ویژه‌ای از مدیریّت توانمند و محترم مجموعه وزین مبتکران **جناب آقای یحیی دهقانی** به جهت حمایت ویژه و فراهم نمودن کلیه امکانات در نشر این کتاب، ابراز می‌داریم.

گریه شام و سحر، شکر که ضایع نگشت
قطره بارانِ ما، گوهر یکدانه شد

تابستان ۹۸

# فهرست

عنوان صفحه

# فهرست

عنوان | صفحه

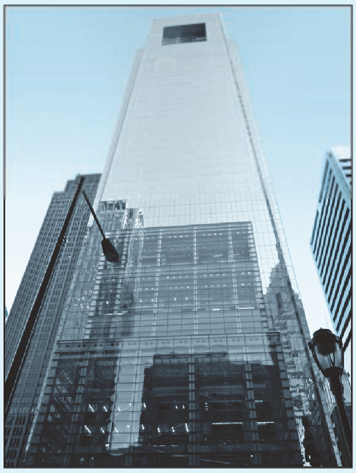
این همه نقش عجب بر در و دیوار وجود
هر که فکرت نکند، نقش بود بر دیوار

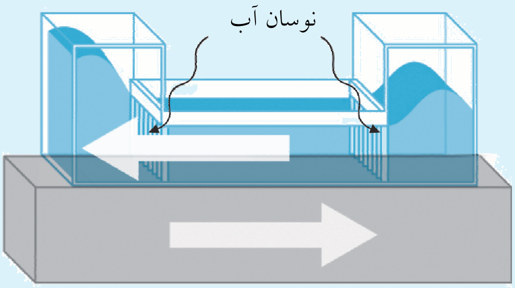
# فصل ۳

# نوسان و موج

**به نظر شما هر صدای بلندی (به قدرکافی بلند) قادر به شکستن لیوان شیشه‌ای است؟...**

**تشدید (رزونانس) به این پرسش پاسخ می‌گوید**





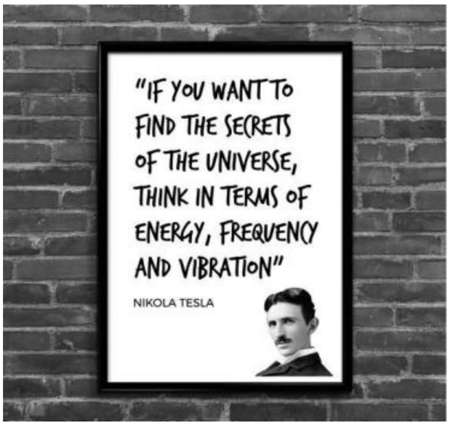

یکی از بلندترین آسمان‌خراش‌های دنیا Comcast Center Building در فیلادلفیای آمریکا است. ساخت این اَبرسازه در سال ۲۰۰۱ میلادی آغاز و در سال ۲۰۰۸ به اتمام رسید. این ساختمان در ۵۸ طبقه به ارتفاع تقریبی ۲۹۷ متر ساخته شده است ....

در این برج برای حذف نوسان‌های ناخواسته، از تکنولوژی ویژه‌ای استفاده شده است. کف این سازه مخزن بزرگی با گنجایش چند صد تُن آب تعبیه شده است. در اثر نوسان‌های ناخواستهٔ ساختمان، این میزان آب فراوان، همگام و هم‌بسامد با لرزش ساختمانی ولی با فاز مخالف، دچار ارتعاش شده و درواقع نوسانات ساختمان را خنثی می‌کند. این فناوری هوشمندانه TLCD (Tuned Liquid Column Damper) نام دارد. قبلا در برج معروف تایپه – ۱۰۱، از فناوری دیگری استفاده شده بود که در آن از نوسان ناهم‌فاز گلوله‌های چند صدتنی برای حذف لرزش‌های ساختمان، بهره می‌برد.

## مقدمه

هر حرکت تکرار شونده را می‌توان **«حرکت نوسانی»** نامید. دنیای ما پُر از نوسان است. حرکت رفت و برگشت یک تاب، مثالِ مشهوری است که از کودکی با آن آشنا می‌شویم. تپشِ قلب، ضربانِ نبضِ انسان و زمین‌لرزه مثال‌های آشنای دیگر هستند.

بلافاصله پس از «نوسان» با **«موج»** روبه‌رو می‌شویم. موج در واقع **«انتشار نوسان‌ها»** است. حرکت موجی تقریباً در هر شاخه‌ای از علم فیزیک ظاهر می‌شود. امواج صوتی، امواج نوری، موج‌های رادیویی و سایر موج‌های الکترومغناطیسی وجود دارند که هر یک در بخش‌های مهمی از دانش فیزیک همچون آکوستیک، اُپتیک و الکترومغناطیس مورد بررسی قرار می‌گیرند. از آن طرف در قلمرو ذرات خُرد، یعنی فرمول‌بندی مکانیک اتم‌ها و ذره‌های زیر اتمی، موج از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است به‌طوری که یکی از روایت‌های مکانیک کوانتومی، «مکانیک موجی» نام دارد.




**اگر می‌خواهید،رموز دنیا را بفهمید، بر اساس انرژی، بسامد و نوسان فکر کنید.**
**(نیکولا تسلا)**

در این فصل مبحث‌هایی از نوسان، موج مکانیکی و موج الکترومغناطیس را خواهیم آموخت.

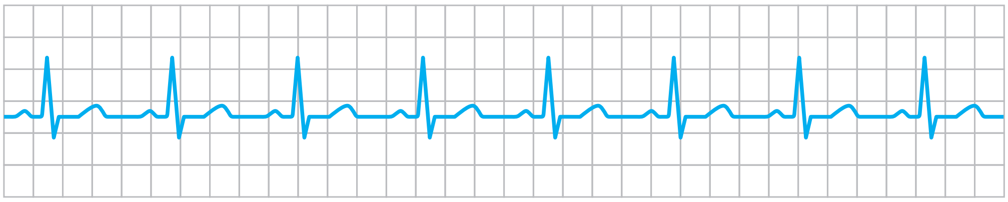
## انواع نوسان

نوسان را می‌توان به دو شاخهٔ **۱- دوره‌ای** **۲- غیردوره‌ای** تقسیم کرد.

### نوسان دوره‌ای[1]

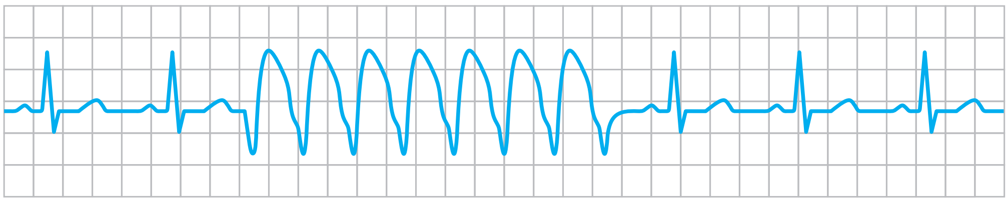
این نوع نوسان به گونه‌ای است که هر **چرخه (یا سیکل)** آن در دوره‌های دیگر عیناً تکرار می‌شود. مثلاً نوسانِ تپش قلب سالم، یک نوسان دوره‌ای است. در شکل زیر یک نوار قلب یا سیگنال ECG[2] از یک قلب سالم نمایش داده شده است. دقت کنید! این نوسان از چرخه‌های مشابهی تشکیل یافته که عیناً تکرار می‌شوند.

1. Periodic Vibration
2. Electrocardiogram



نوار قلب یک ریتم طبیعی(نوسان دوره‌ای)

از آن طرف بیمار مبتلا به آریتمی (یا اختلال ریتمِ تپشِ قلب) دارای یک نوار قلب با نوسان غیردوره‌ای است. متخصص قلب از سیگنال غیردوره‌ایِ ECG می‌تواند عارضهٔ قلب بیمار را تشخیص دهد.



نوار قلب یک اختلال ریتم(نوسان غیردوره‌ای)

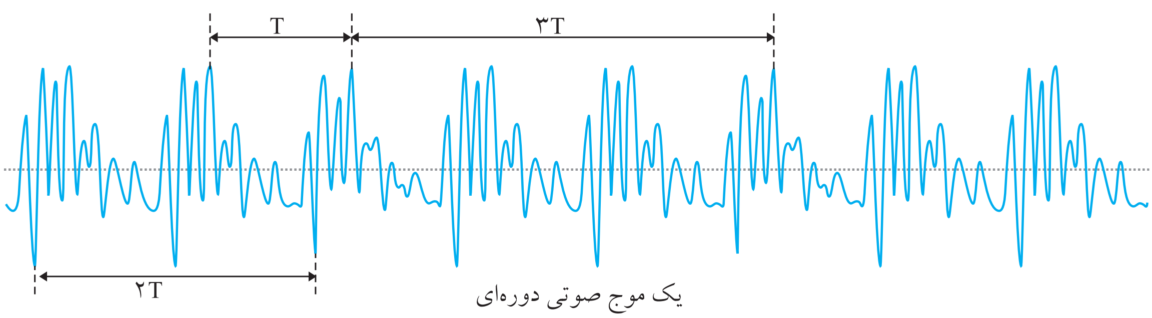
**توجه:** در یک نوسان دوره‌ای، مدت زمان یک چرخه **«دورهٔ تناوب»** است و با T نمایش داده می‌شود. یکای دورهٔ تناوب **«ثانیه s»** است.

**تعداد نوسان‌های کامل (تعداد چرخه‌ها)** در هر ثانیه **بسامد (فرکانس)** نامیده می‌شود و آن را با نماد f نمایش می‌دهند. روشن است که بسامد و دورهٔ تناوب وارون هم هستند.

$$f = \frac{1}{T} \quad , \quad T = \frac{1}{f}$$

یکای بسامد را در SI **«هرتز Hz»** نامیده‌اند که در واقع عکس ثانیه است: $1Hz = 1s^{-1}$

در شکل زیر نمودار یک نوسان صوتیِ دوره‌ای نمایش داده شده است. به فاصله‌های روی محور افقی (که در واقع محور زمان است) توجه کنید. این فاصله‌ها یا برابر دوره (T) یا مضرب درستی از دوره (۲T و ۳T و ...) هستند.




یک موج صوتی دوره‌ای

**مثال: در نوار قلب یک شخص سالم، در هر ده ثانیه ۱۲ چرخه مشاهده می‌شود. دورهٔ نوسان و بسامد این نوسان چه‌قدر است؟**

**پاسخ:** در هر ده ثانیه ۱۲ چرخه، معادل ۱/۲ چرخه در هر ثانیه می‌شود. پس:

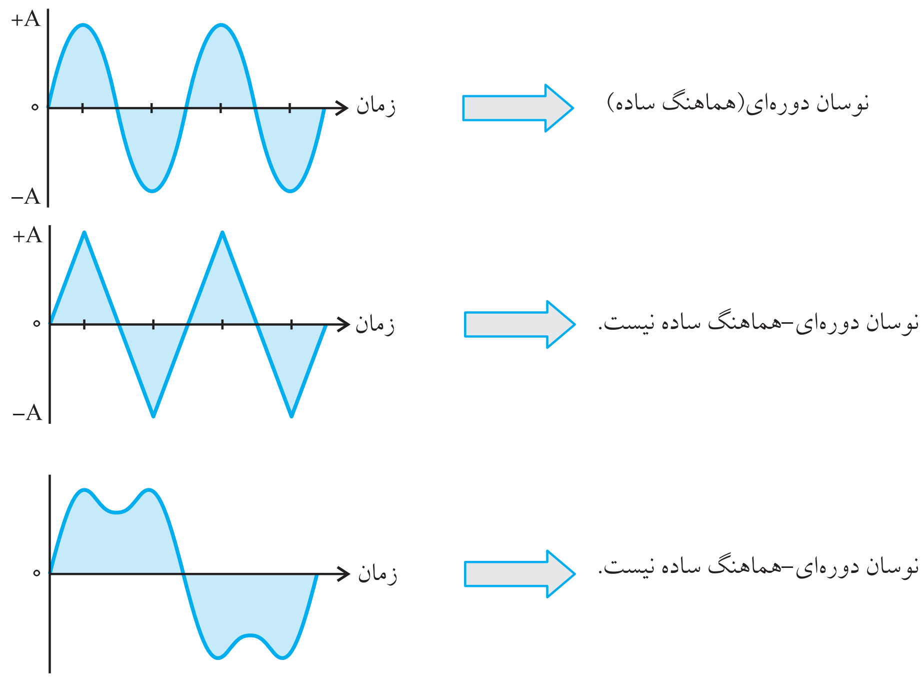
$$f = 1/2\,Hz \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 0/83\,s$$

**توجه:** در یک نوسان غیردوره‌ای **(مثل نویز)** چون چرخه‌های تکراری نداریم، دورهٔ تناوب هم قابل تعریف نیست.

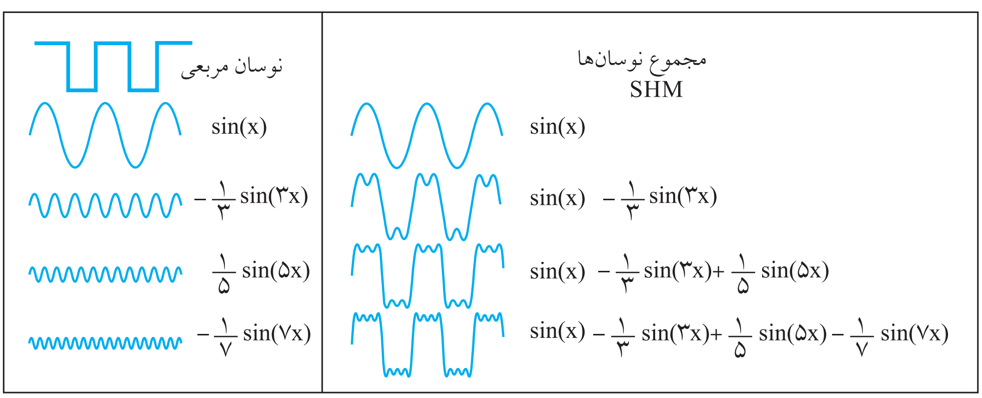
## حرکت هماهنگ ساده

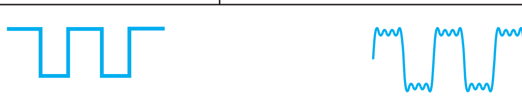
اگر نمودار مکان ـ زمان یک حرکت نوسان دوره‌ای به‌صورت سینوسی (یا کسینوسی) تغییر کند، بـه آن **«حرکت هماهنگ ساده یا SHM»**[1] گفته می‌شود.

به نمودارهای نوسانی زیر توجه کنید! هر سه نمودار مربوط به نوسان دوره‌ای هستند ولی فقط نمودار اول مربوط به **«هماهنگ ساده»** است.




**توجه:** طبق قضیهٔ معروفی در ریاضیات **(قضیهٔ فوریه)** می‌توان نشان داد که هر تابع دوره‌ای را مـی‌تـوان بـه‌صـورت ترکیبـی از تـابع‌هـای سینوسـی و کسینوسی (با بسامدهای متفاوت) نمایش داد. در واقع حرکت هماهنگ ساده، مبنایی برای درک هر نوع نوسان دوره‌ای دیگر اسـت. بـه شـکل زیـر توجـه کنید! تابع دوره‌ای **«مربعی»** را می‌توان با ترکیب یک سریِ نامتناهی از توابع مناسب سینوسی (یا کسینوسی) تولید کـرد. دقـت کنیـد کـه هـر چـه تعـداد تابع‌های سینوسی جمع شونده بیش‌تر می‌شود، مجموع این تابع‌ها به تابع دوره‌ای مربعی، شبیه‌تر می‌شود. هر یک از تابع‌های سینوسی در ایـن مجمـوع را «هماهنگ یا هارمونیک» می‌گویند. (دربارهٔ هماهنگ، بعداً بیش‌تر خواهیم آموخت.)[2]



مجموع چهار هماهنگ سینوسی مناسب تا حد خوبی به نوسان مربعی شبیه شده است

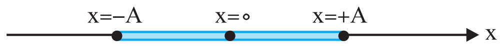
1. Simple Harmonic Motion

۲. بحث دقیق قضیه فوریه خارج از بحث مقدماتی ما است. هدف از بیان بالا فهمِ اهمیتِ حرکت هماهنگ ساده (SHM) است، به‌طوری که با ترکیب مناسب انواع حرکت‌های هماهنگ ساده، می‌توان هر حرکت نوسانی دلخواه را پدید آورد.

## توصیف حرکت هماهنگ ساده

در حرکت هماهنگ ساده، نقطه‌ای که نیروی خالصی بر جسم وارد نمی‌شود، **«نقطهٔ تعادل»** نام دارد. حداکثر فاصلهٔ نوسانگر تا نقطهٔ تعادل، را **«دامنهٔ نوسان»** می‌گویند. **دامنهٔ**[1] نوسان را با $A$ نمایش می‌دهند.

اگر مبدأ مختصات را منطبق بر نقطهٔ تعادل بگیریم، آنگاه می‌توان گفت که نوسان‌کننده در محدودهٔ $x = -A$ تا $x = +A$ نوسان می‌کند.



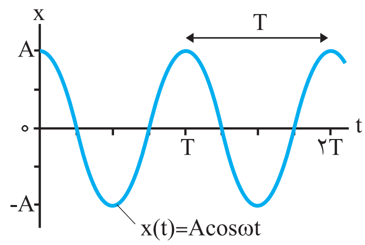

اگر فرض کنیم در مبدأ زمان $(t = ۰)$ نوسانگر از $x = +A$ شروع به حرکت کند، آنگاه معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده به شکل زیر قابل نمایش است:

$$x(t) = A\cos\omega t$$

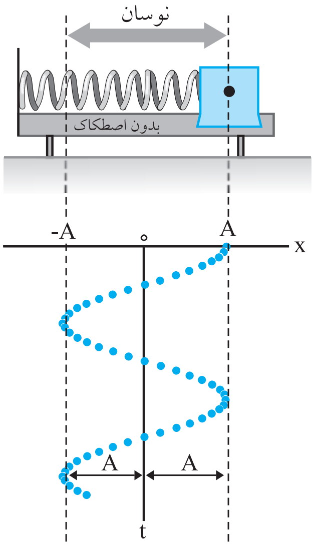
$$\omega = ۲\pi f = \frac{۲\pi}{T}$$

$\omega$ بسامد زاویه‌ای است.

یکای $\omega$ رادیان بر ثانیه $\frac{rad}{s}$ است.



نمودار مکان-زمان برای حرکت هماهنگ ساده




**توجه:** کوچک‌ترین دورهٔ تناوب تابع سینوسی (یا کسینوسی) برابر $۲\pi$ است. پس:

$$x(t+T) = x(t)$$

$$A\cos\omega(t+T) = A\cos\omega t$$

$$A\cos(\omega t + \omega T) = A\cos\omega t \Rightarrow \omega T = ۲\pi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{۲\pi}{T}}$$

همچنین با توجه به برابری $f = \frac{۱}{T}$ داریم: $\boxed{\omega = ۲\pi f}$

دقت کنید پس از گذشت زمان‌های $T$، $۲T$، $۳T$، ...، $nT$ نوسانگر از **همان مکان و با همان سرعت قبل** می‌گذرد.

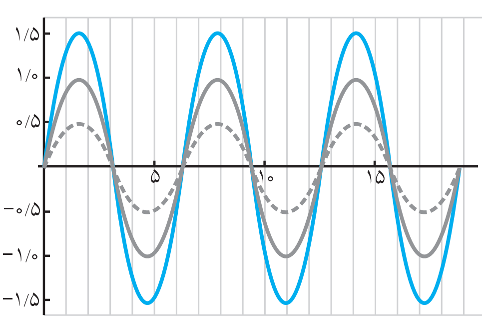
**توجه:** هر حرکت هماهنگ ساده با دو مشخصهٔ اصلی توصیف می‌شود: **دامنه و بسامد**

■ دو حرکت هماهنگ ساده می‌توانند **هم‌بسامد ولی با دامنه‌های متفاوت** باشند. در شکل زیر نمودار مکان ـ زمان حرکت‌های هماهنگ ساده با بسامد یکسان و دامنهٔ متفاوت نمایش داده شده‌اند.

اگر یکای محور افقی «ثانیه» باشد، آنگاه با توجه به عددهای روی شکل می‌توانیم دوره و بسامد را حساب کنیم:

$$T \simeq ۶/۳s$$

$$f = \frac{۱}{T} \simeq ۰/۱۶Hz$$



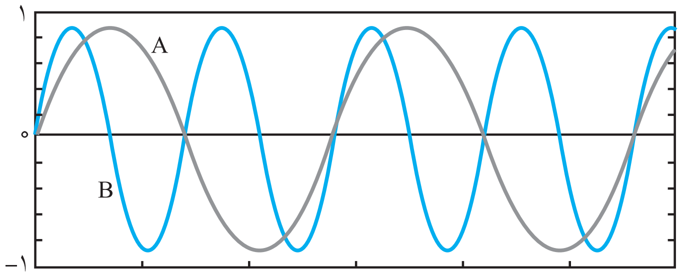
نمودار مکان زمان حرکت‌های هماهنگ ساده با بسامد یکسان و دامنه‌های متفاوت



1. Amplitude

■ ممکن است دو حرکت هماهنگ ساده «**هم‌دامنه**» **ولی دارای بسامد متفاوت** باشند. به نمودارهای مقابل توجه کنید. دامنهٔ این دو نمودار «مکان ـ زمان» یکسان است ولی در هر چرخهٔ (سیکل) نوسان A، نوسانگر B دو چرخه را کامل می‌کند.

پس می‌توان نوشت: $T_A = ۲T_B \Rightarrow f_A = \frac{۱}{۲} f_B$



نمودار مکان زمان دو حرکت هماهنگ ساده (هم دامنه با بسامد متفاوت)

**مثال: در معادلهٔ هماهنگ سادهٔ $x(t) = A\cos\omega t$، در چه لحظه‌هایی برحسب دورهٔ حرکت، متحرک از $x = +A$، $x = ۰$ و $x = -A$ می‌گذرد؟**

**پاسخ:**

$$\begin{cases} x = +A \Rightarrow A\cos\omega t = A \Rightarrow \cos\omega t = ۱ \Rightarrow \omega t = ۲k\pi \\ \omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} \times t = ۲k\pi \Rightarrow t = kT \quad \{۰, T, ۲T, ۳T, \ldots\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow A\cos\omega t = ۰ \Rightarrow \cos\omega t = ۰ \Rightarrow \omega t = (۲k-۱)\frac{\pi}{۲} \\ \omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} \times t = (۲k-۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow t = (۲k-۱)\frac{T}{۴} \quad \{\frac{T}{۴}, \frac{۳T}{۴}, \frac{۵T}{۴}, \ldots\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -A \Rightarrow A\cos\omega t = -A \Rightarrow \cos\omega t = -۱ \Rightarrow \omega t = (۲k-۱)\pi \\ \omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} \times t = (۲k-۱)\pi \Rightarrow t = (۲k-۱)\frac{T}{۲} \quad \{\frac{T}{۲}, \frac{۳T}{۲}, \frac{۵T}{۲}, \ldots\} \end{cases}$$

**توجه:** به راحتی می‌توان بررسی کرد که در حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ A، **مسافت طی شده** در هر دوره برابر $۴A$ و در هر نیم‌دوره برابر $۲A$ است.

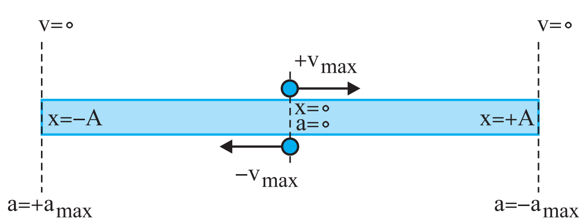
**توجه:** نقطه‌های $x = \pm A$ **نقطه‌های بازگشت** نوسانگر است. در این دو نقطه جهت حرکت نوسانگر عوض شده و به‌طور لحظه‌ای سرعت، **صفر می‌شود**.

■ در نقطهٔ $x = +A$ علامت سرعت از مثبت به یکباره منفی می‌شود **پس این نقطه حداکثر شتاب منفی را دارا است.**

■ در نقطهٔ $x = -A$ علامت سرعت از منفی به یکباره مثبت می‌شود **پس این نقطه حداکثر شتاب مثبت را دارا است.**[1]

■ در نقطهٔ $x = ۰$ تندی حداکثر و شتاب صفر است.[2]

| مکان | سرعت | شتاب |
|---|---|---|
| $x = ۰$ | $\pm V_{max}$ | ۰ |
| $x = +A$ | ۰ | $-a_{max}$ |
| $x = -A$ | ۰ | $+a_{max}$ |




**مثال: نوسانگر جرم ـ فنری در هر دوره، مسافت $۴۰cm$ را طی می‌کند و حداقل فاصلهٔ زمانی میان دو بیشینه شدن تندی، ۰/۱ ثانیه است.**

**الف) بسامد زاویه‌ای و دامنهٔ حرکت را حساب کنید.**

**ب) معادلهٔ مکان ـ زمان را بنویسید. (با فرض این‌که نوسانگر در مبدأ زمان از بیشینهٔ مثبت مکان شروع به حرکت کند.)**

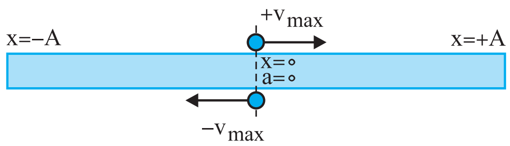
**پاسخ:** الف) مسافتی که نوسانگر هماهنگ ساده در یک دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه است:

$۴A = ۴۰cm \Rightarrow A = ۱۰cm$ (دامنهٔ نوسان)

۱. در نقاط بازگشت، تغییر طول فنر به بیشترین مقدار خود می‌رسد، بنابراین نیروی کشسانی و شتاب بیشینه می‌شود.

۲. در نقطه تعادل، فنر طول طبیعی خود را دارد و نیروی کشسانی (و درنتیجه شتاب) صفر است.

به شکل مقابل توجه کنید! حداقل فاصلهٔ زمانی میان دو بیشینه شدن تندی برابر $\frac{T}{2}$ است زیرا تندی هنگام عبور از وضع تعادل بیشینه می‌شود.




$$\frac{T}{2}=\frac{1}{10}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s\Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T}=10\pi\ \ rad/s$$ (بسامد زاویه‌ای)

ب) معادلهٔ مکان ـ زمان:

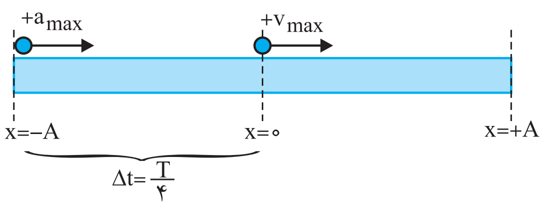
$$x(t)=A\cos\omega t$$

$$x(t)=0/1\cos(10\pi t)$$ (برحسب متر)

**مثال:** **در یک نوسانگر جرم ـ فنر، فاصلهٔ دو نقطهٔ بازگشت برابر $10cm$ و حداقل فاصلهٔ زمانی بین بیشینه شدن بزرگی شتاب تا بیشینه شدن بزرگی سرعت برابر ۰/۵ ثانیه است.**

**الف) بسامد نوسان چند هرتز است؟** **ب) معادلهٔ مکان ـ زمان را بنویسید.**

**پاسخ:** به شکل زیر توجه کنید! فاصلهٔ دو نقطهٔ بازگشت برابر $2A$ است. حداقل فاصلهٔ زمانی بین لحظه‌ای که بزرگی شتاب بیشینه است تا وقتی که بزرگی سرعت بیشینه است معادل مدت زمانی است که نوسانگر از یک نقطهٔ بازگشت به مبدأ تعادل می‌رسد. این زمان برابر $\frac{T}{4}$ است:




الف) $$\frac{T}{4}=0/5\Rightarrow T=2s\Rightarrow f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2}Hz$$ (بسامد نوسان)

ب) $$\omega=2\pi f=2\pi\times\frac{1}{2}=\pi\ \ rad/s$$ (بسامد زاویه‌ای)

$$2A=10cm\Rightarrow A=5cm=0/05m$$ (دامنهٔ نوسان)

$$x(t)=A\cos\omega t=0/05\cos(\pi t)$$ (معادلهٔ حرکت)

**مثال:** **در انتهای سه ثانیهٔ متوالی، فاصلهٔ متحرکی که حرکت هماهنگ ساده دارد از نقطهٔ تعادلش به ترتیب $1cm$، $5cm$ و $5cm$ است. نشان دهید حداقل بسامد این نوسانگر برابر است با** $f=\dfrac{\cos^{-1}(\frac{3}{5})}{2\pi}\simeq 0/15Hz$.

**پاسخ:** این مسئله بیش از فیزیک، درگیر مثلثات است؛ ولی چون در کتاب‌ها سابقهٔ طرح دارد، آشنایی با چنین مسائلی چندان بی‌وجه نیست. مطابق با فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases}x(t_1)=1\Rightarrow A\cos\omega t_1=1\\ x(t_1+1)=5\Rightarrow A\cos\omega(t_1+1)=5\Rightarrow A\cos\omega t_1\cos\omega-A\sin\omega t_1\sin\omega=5\\ x(t_1+2)=5\Rightarrow A\cos\omega(t_1+2)=5\Rightarrow A\cos\omega t_1\cos 2\omega-A\sin\omega t_1\sin 2\omega=5\end{cases}$$

در بسط مثلثاتی بالا از فرمول زیر استفاده شده است:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

حال از برابری $A\cos\omega t_1=1$ در عبارت‌های دوم و سوم جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}\cos\omega=5+A\sin\omega t_1\sin\omega\\ \cos 2\omega=5+A\sin\omega t_1\sin 2\omega\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\sin\omega t_1=(\cos\omega-5)/A\sin\omega\\ \sin\omega t_1=(\cos 2\omega-5)/A\sin 2\omega\end{matrix}$$

دو عبارت آخر را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\cos\omega-5}{A\sin\omega}=\frac{\cos 2\omega-5}{A\sin 2\omega}$$

از مثلثات می‌دانیم:

$$\sin 2\omega=2\sin\omega\cos\omega$$

$$\cos 2\omega=2\cos^2\omega-1$$

$$\frac{\cos\omega-5}{\sin\omega}=\frac{2\cos^2\omega-1-5}{2\sin\omega\cos\omega}\Rightarrow 2\cos^2\omega-10\cos\omega=2\cos^2\omega-6$$

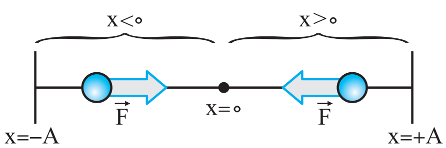
$$\Rightarrow 10\cos\omega=6\Rightarrow\cos\omega=\frac{3}{5}\Rightarrow\omega=\cos^{-1}(\frac{3}{5})$$ (این حداقل $\omega$ است.)

$$f=\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow f=\frac{\cos^{-1}(\frac{3}{5})}{2\pi}$$

$\cos^{-1}(\frac{3}{5})=53^\circ=\frac{53\times\pi}{180}\text{rad}\simeq\frac{3\pi}{10}\text{rad}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$f\simeq\frac{\frac{3\pi}{10}}{2\pi}\Rightarrow f\simeq 0/15\text{Hz}$$

## نیرو در حرکت هماهنگ ساده




در حرکت هماهنگ ساده، نیرو در هر مکان، به طرف نقطهٔ تعادل نوسانگر است و می‌خواهد جسمِ در حال نوسان را به نقطهٔ تعادل برگرداند. این نیروی بازگرداننده را «**نیروی کشسانی**» می‌گویند.

$$F=-kx\Rightarrow\begin{cases}x>0\Rightarrow F<0\\x<0\Rightarrow F>0\end{cases}$$

$k$ را «**ثابت کشسانی**» می‌گویند.

**توجه:** درست مشابه «**نیروی مرکزگرا**» در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اینجا هم نیروی کشسانی اسم نیروی خاصی نیست! بلکه کشسانی صفت نیروهایی است که همواره به‌طور بازگرداننده عمل می‌کنند. انواع نیروهای حقیقی (مثل نیروی فنر، نیروی وزن، نیروی اصطکاک و ...) می‌توانند در نقش نیروی کشسانی ظاهر شوند.

**توجه:** برای فنری که از «**قانون هوک**» پیروی می‌کند، معادلهٔ نیروی فنر به شکل نیروی کشسانی است. در این حالت «ثابت کشسانی» همان «**ثابت فنر**» است. پس مجموعهٔ جرم ـ فنر می‌تواند به‌صورت «هماهنگ ساده» نوسان کند.

به راحتی قابل اثبات است که ثابت کشسانی از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید: $k=m\omega^2$

از رابطهٔ بالا می‌توان بسامد زاویه‌ای، بسامد و دورهٔ تناوب مجموعهٔ جرم ـ فنر در حال نوسان را حساب کرد:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**مثال: جاهای خالی را پر کرده یا از داخل پرانتز عبارت مناسب را انتخاب کنید:**

**الف) هرچه فنر سفت‌تر باشد، بسامد نوسان‌ها ......... می‌شود.**

**ب) در نوسانگر جرم ـ فنر هرچه جرم کوچک‌تر باشد، دورهٔ نوسان‌ها ......... می‌شود.**

**پ) ثابت فنر (وابسته به / مستقل از) بسامد نوسان‌ها است.**

**ت) اگر فنری را از وسط نصف کنیم، با همان وزنهٔ قبلی، بسامد نوسان‌ها (بیش‌تر / کم‌تر) می‌شود.**

**پاسخ:** الف) مطابق با رابطهٔ $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ با افزایش $k$، بسامد افزایش می‌یابد.

ب) مطابق با رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ با کاهش m، دورهٔ نوسان کم‌تر می‌شود.

پ) ثابت فنر به ویژگی‌های ساختاری فنر (مثل جنس حلقه‌ها، تعداد حلقه‌ها، قطر حلقه‌ها و ...) وابسته است. بسامد، وابسته به ضریب سختی است نه برعکس. ثابت فنر مستقل از بسامد نوسان‌ها است.

ت) اگر فنری را نصف کنیم، فنر سفت‌تر و ثابت فنر دو برابر می‌شود. پس بسامد نوسان‌ها $\sqrt{2}$ برابر خواهد شد.[1]

**مثال: مجموعهٔ جرم ـ فنری روی سطح افقی بدون اصطکاک با دامنهٔ کم با بسامد $5\,Hz$ نوسان می‌کند. اگر ثابت فنر $1000\frac{N}{m}$ باشد، جرم جسم چند گرم است؟ $(\pi^2 \simeq 10)$**

**پاسخ:** برای ثابت فنر می‌توان نوشت:

$$k=m\omega^2=m(4\pi^2f^2)$$

$$\pi^2\simeq 10 \Rightarrow 1000=m\times 4\times 10\times 5^2 \Rightarrow m=1kg=1000g$$

**توجه:** نیروهای وابسته به حرکت هماهنگ ساده، عام‌ترین نیروهایی هستند که در مکانیک بررسی می‌شوند. در حرکت شتابدار ثابت، هم بزرگی نیرو و هم جهت نیرو ثابت است. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بزرگی نیرو ثابت است ولی جهت نیروی مرکزگرا، لحظه‌به‌لحظه تغییر می‌کند. از آن طرف نیروهای ضربه‌ای (همانند نیروهایی که در برخورد کوتاه‌مدت وجود دارند) نیروهایی هستند که دارای جهت ثابت ولی بزرگی متغیر هستند. امّا در حرکت هماهنگ ساده با نیروهایی سروکار داریم که هم از لحاظ جهت و هم لحاظ بزرگی تغییر می‌کنند.

این موارد در جدول زیر خلاصه شده‌اند.

| نوع حرکت | جهت نیرو | بزرگی نیرو |
|---|---|---|
| حرکت با شتاب ثابت | ثابت | ثابت |
| حرکت دایره‌ای یکنواخت | متغیر | ثابت |
| برخورد رودررو | ثابت | متغیر |
| حرکت هماهنگ (نوسانی) | متغیر | متغیر |

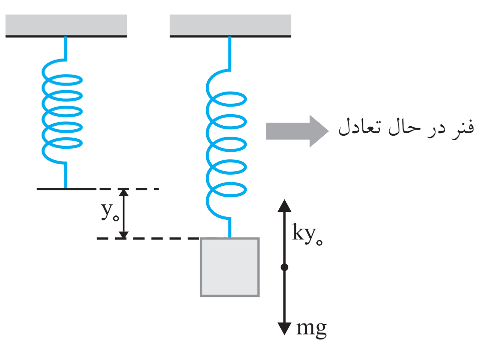
**توجه:** جسمی به جرم m را به انتهای فنری به ثابت k آویزان می‌کنیم. در این صورت، فنر به اندازهٔ $y_0$ تغییر طول پیدا می‌کند و مجموعهٔ جرم ـ فنر به «**حالت تعادل**» می‌رسند. حالا اگر جرم m را از وضعیت تعادل، کمی دورتر کرده و سپس رها کنیم، مجموعه شروع به نوسان می‌کنند.

$$mg=ky_0 \Rightarrow \frac{m}{k}=\frac{y_0}{g}$$

پس برای دورهٔ کم‌دامنه می‌توان نوشت:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}}$$

دقت کنید! این $y_0$ تغییر طول حالت تعادلی فنر است و هیچ ربطی به دامنهٔ نوسان‌ها ندارد.




**مثال: اگر جرمی به انتهای فنری آویزان کنیم، فنر ۱ سانتی‌متر کشیده می‌شود و به حالت تعادل می‌رسد. اگر این مجموعه، با دامنهٔ کم به نوسان درآید، بسامد نوسان‌ها چند هرتز می‌شود؟ $(g\simeq \pi^2\frac{m}{s^2})$**

**پاسخ:** با توجه به تغییر طول فنر در حالت تعادل، می‌توان نوشت:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{100}}{\pi^2}}=2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{5}s$$

$$f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=5\,Hz$$

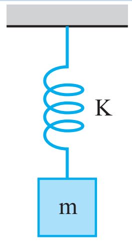




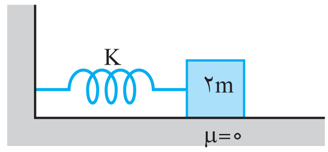
---

۱. اگر فنری با جرم ناچیز و ثابت k به n قسمت مساوی تقسیم شود، ثابت هر قطعه، nk خواهد شد.

**مثال:** در شکل (۱) جرم $m$ در انتهای فنر آویزان شده و پس از تغییر طول فنر به میزان $1cm$، مجموعه به حالت تعادل می‌رسد. حال اگر همین فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک به همراه وزنهٔ $2m$ مشابه شکل (۲) به نوسان درآید، بسامد نوسان‌ها چند هرتز می‌شود؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$



شکل (۱)



شکل (۲)

**پاسخ:** برای شکل (۱) می‌توان نوشت:

$$mg = ky_0 \Rightarrow k = \frac{mg}{y_0} = \frac{10m}{\frac{1}{100}} = 1000m \ (\frac{N}{m})$$

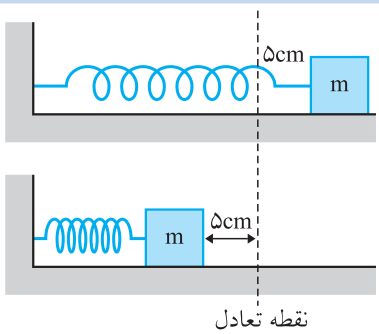
برای شکل (۲) داریم:

$$k = (2m)\omega^2$$
$$1000m = (2m)\omega^2$$
$$\omega^2 = 500 = 5 \times 100 \Rightarrow \omega = 10\sqrt{5} \ rad/s$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\sqrt{5}}{2\pi} = \frac{5\sqrt{5}}{\pi} Hz$$

**مثال:** در شکل‌های زیر دو جرم یکسان $m = 9kg$ به دو فنر یکسان متصل هستند. فنر بالایی $5cm$ کشیده و فنر پایینی $5cm$ فشرده می‌شوند. این دو همزمان شروع به نوسان می‌کنند. مشاهده می‌شود که در هر دقیقه، وزنه‌ها ۲۰ مرتبه از روبه‌روی هم عبور می‌کنند.

الف) ثابت فنر چند $\frac{N}{cm}$ است؟ $(\pi^2 \simeq 10)$

ب) بسامد نوسان چند هرتز است؟




**پاسخ:** این دو نوسان‌کننده در هر رفت و برگشت دو مرتبه یک‌دیگر را ملاقات می‌کنند. پس ۲۰ مرتبه ملاقات، مربوط به ده نوسان کامل است:

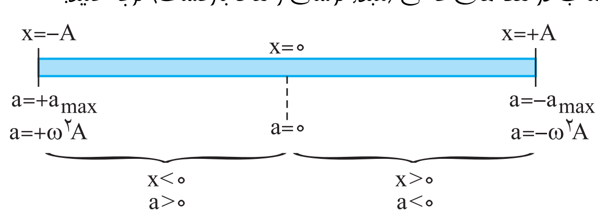
$$f = \frac{n}{60} = \frac{10}{60} \quad (\text{تعداد نوسان‌ها در دقیقه } n)$$
$$f = \frac{1}{6}Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{\pi}{3} \ rad/s$$
$$k = m\omega^2 = 9 \times \frac{\pi^2}{9} = \pi^2 \simeq 10\frac{N}{m} = \frac{10N}{100cm} = 0/1 \frac{N}{cm}$$

**توجه:** با ترکیب معادلهٔ نیرو و قانون دوم نیوتون می‌توان معادلهٔ **شتاب برحسب مکان** در حرکت هماهنگ ساده را پیدا کرد:

$$\begin{cases} F = ma \\ F = kx \\ k = m\omega^2 \end{cases} \Rightarrow m\omega^2 x = ma \Rightarrow \boxed{a = \omega^2 x}$$

دقت داریم که رابطهٔ بالا **بزرگی شتاب** را می‌دهد. در هر مکان، شتاب (همچون نیروی کشسانی) با مکان نوسان‌کننده، مختلف‌العلامت است.

**توجه:** به علامت شتاب و به اندازهٔ شتاب در نقطه‌های خاص (مبدأ نوسان و نقاط بازگشت) توجه کنید!

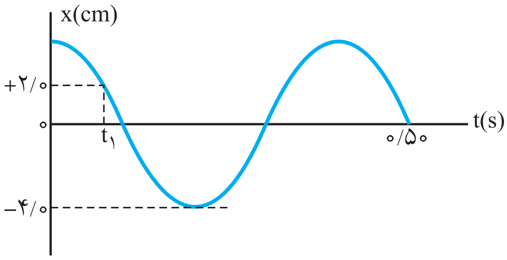


**مثال:** **نمودار مکان ـ زمان نوسانگری مطابق شکل مقابل است.**

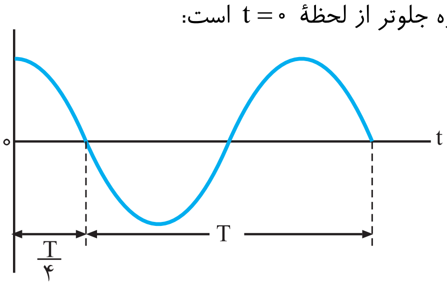
**الف) معادلهٔ حرکت این نوسانگر را بنویسید.**

**ب) مقدار $t_1$ را به‌دست آورید.**

**پ) اندازهٔ شتاب نوسانگر در لحظهٔ $t_1$ چه‌قدر است؟**




**پاسخ:** الف) مطابق شکل: لحظهٔ $t = 0/5\,s$ در واقع از یک دوره، به اندازهٔ یک‌چهارم دوره جلوتر از لحظهٔ $t = 0$ است:




$$T + \frac{T}{4} = \frac{5}{4}T = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \frac{2}{5}\,s \quad (\text{دورهٔ تناوب})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times \frac{5}{2} = 5\pi \ \ rad/s \quad (\text{بسامد زاویه‌ای})$$

دامنهٔ حرکت از روی شکل پیداست که برابر $A = 4\,cm = 0/04\,m$ است. پس معادلهٔ حرکت برحسب یکاهای SI به شکل زیر می‌باشد:

$$x(t) = A\cos\omega t$$

$$x(t) = 0/04\cos(5\pi t)$$

ب) در لحظهٔ $t = t_1$ مکان لحظه‌ای نوسان‌کننده برابر $x = 2\,cm = 0/02\,m$ است:

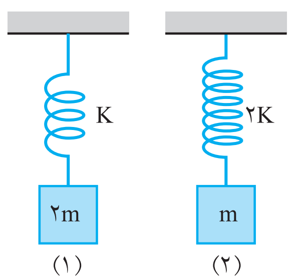
$$0/02 = 0/04\cos(5\pi t_1)$$

$$\cos(5\pi t_1) = \frac{1}{2} \Rightarrow 5\pi t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{15}\,s$$

پ) در لحظهٔ $t = t_1$ مکان نوسانی معلوم است. پس برای اندازهٔ شتاب داریم:

$$a = \omega^2 x \Rightarrow a = (5\pi)^2 \times \frac{2}{100} = 25\pi^2 \times \frac{2}{100} \Rightarrow a = \frac{1}{2}\pi^2\ \frac{m}{s^2} \simeq 5\frac{m}{s^2} \qquad (\pi^2 \simeq 10)$$

**مثال:** **در شکل‌های زیر جرم فنرها ناچیز است. اگر هر دو دستگاه همزمان به نوسان طبیعی شروع کنند، پس از $n_1$ نوسانِ وزنه یک، وزنه دو $n_2$ نوسان کرده است. $\frac{n_2}{n_1}$ چه‌قدر است؟**




**پاسخ:** در مدت زمان $t$، تعداد نوسان‌های کامل هر نوسان‌کننده عبارت است از:

$$\begin{cases} n_1 = f_1 \times t \\ n_2 = f_2 \times t \end{cases} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

از طرفی برای هر مجموعهٔ جرم ـ فنر در حال نوسان داریم:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} k = (2m)\omega_1^2 \\ 2k = m\omega_2^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2 \times \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$$

پس داریم: $\frac{n_2}{n_1} = 2$

## انرژی در حرکت هماهنگ ساده

در حرکت هماهنگ سادهٔ وزنه ـ فنر، به‌طور مداوم، انرژی‌های جنبشی وزنه و پتانسیل کشسانی فنر به هم تبدیل می‌شوند. به شکل‌های متوالی زیر توجه کنید!

■ در $x=+A$ تندی وزنه صفر و فنر در حداکثر کشیدگی است. پس در این نقطه انرژی جنبشی صفر و تمام انرژی به شکل انـرژی پتانسیل است.

■ با حرکت وزنه به سوی نقطهٔ تعادل، تندی رو به افزایش گذاشته و در مقابل از کشیدگی فنر کاسته می‌شـود. پـس انـرژی جنبشـی افزایش یافته ولی در مقابل انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.

■ در $x=۰$ (نقطهٔ تعادل) تندی وزنه به حداکثر مقدار خود می‌رسد و فنر به طول عادی خود برمی‌گردد. پـس در ایـن نقطـه انـرژی پتانسیل صفر و انرژی جنبشی بیشینه می‌گردد.

■ از $x=۰$ به طرف $x=-A$ فنر در حال فشرده شدن و تندی وزنه در حال کاهش است. پس انرژی پتانسیل کشسـانی فنـر رو بـه افزایش و انرژی جنبشی وزنه رو به کاهش است.

■ در $x=-A$ تندی وزنه صفر و فنر به حداکثر فشردگی می‌رسد. پس در این نقطه انرژی جنبشی وزنه صفر و تمام انرژی به شـکل انرژی پتانسیل است.

■ در مسیر برگشت، عین مراحل بالا (از انتها به ابتدا) تکرار می‌شود.

| x | K | U |
|---|---|---|
| $-A$ | ۰ | $U_{max}$ |
| ۰ | $K_{max}$ | ۰ |
| $+A$ | ۰ | $U_{max}$ |

**توجه:** اگر نوسانگر روی سطح بدون اصطکاک نوسان کند و به علاوه از عامل‌های دیگر اتلاف انرژی (مثل مقاومت هوا) هم صـرف‌نظر شـود، آنگـاه انـرژی مکانیکی در کل مسیر نوسان، پایسته است: $\mathbf{E=K+U=}$ **ثابت**

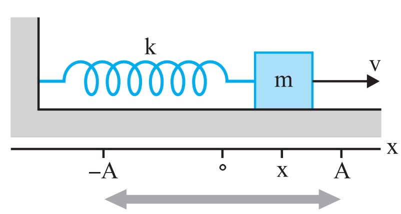
می‌توان نشان داد که بیان بالا برای هر نوسانگر ساده‌ای درست است.

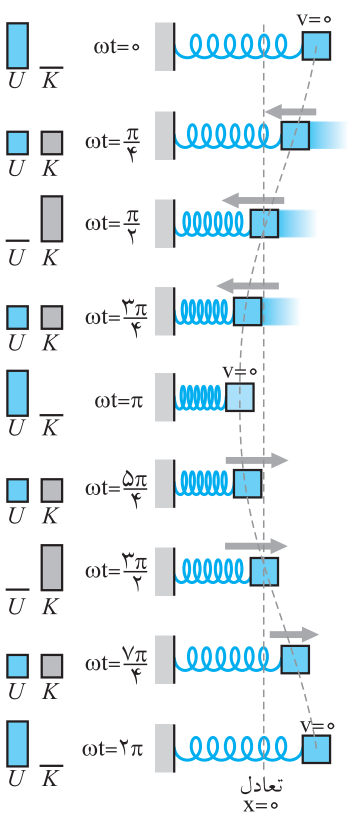
**توجه:** در شـکل زیـر نمودارهـای انـرژی جنبشـی و انـرژی پتانسـیل کشسانی برحسب مکان رسم شده‌اند. دقت کنید:

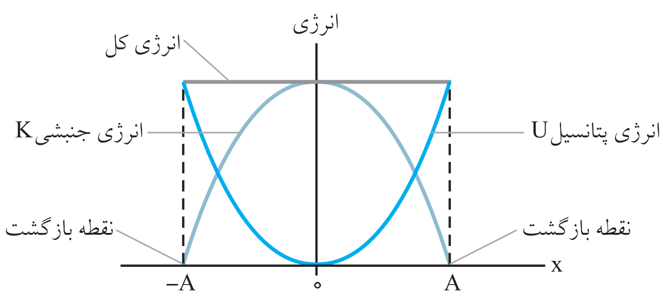
**انرژی جنبشی** ← سهمی با تقعر منفی (دهانه رو به پایین) است.

**انرژی پتانسیل** ← سهمی با تقعر مثبت (دهانه رو به بالا) است.

**انرژی مکانیکی** ← مقدار ثابت (پاره‌خط افقی) است.






تبدیل انرژی در حین حرکت هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر. توجه کنید که در نقطهٔ $x=0$ انرژی، صرفاً جنبشی و در نقطه‌های $x=\pm A$ انرژی، صرفاً پتانسیل است. در این حرکت انرژی مکانیکی پایسته است، به گونه‌ای که به‌طور پیوسته از انرژی پتانسیل $U$ به انرژی جنبشی $K$ تبدیل می‌شود و بالعکس.

معادله‌های انرژی‌های جنبشی و پتانسیل به شکل مقابل است:

$$\begin{cases} K=\frac{1}{2}mV^2 \\ U=\frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

در $x=\pm A$ تمام انرژی به‌صورت انرژی پتانسیل بوده و انرژی جنبشی صفر است:

$$E=U_{max}\Rightarrow \boxed{E=\frac{1}{2}kA^2}$$

**توجه:** معادلهٔ انرژی کل (یا انرژی مکانیکی) را می‌توان به شکل دیگری هم نوشت. برای ثابت کشسانی داریم: $k=m\omega^2$

این مقدار را در معادلهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$ قرار می‌دهیم:

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}m(2\pi f)^2\times A^2\Rightarrow \boxed{E=2\pi^2mA^2f^2}$$

در حالت کلی برای هر نوسان هماهنگ ساده، **انرژی کل** متناسب با **مجذور دامنه** و **مجذور بسامد نوسان** است:

$$\boxed{\begin{matrix} E\propto A^2 \\ E\propto f^2 \end{matrix}}$$

**توجه:** بر پایهٔ معادله‌های انرژی می‌توان **بیشینهٔ تندی نوسانگر** را **(که در نقطهٔ تعادل نوسان رخ می‌دهد)** به‌دست آورد:

$$E=K_{max}$$

$$\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}mV_{max}^2\Rightarrow m\omega^2A^2=mV_{max}^2\Rightarrow \boxed{V_{max}=A\omega}$$

**مثال: الف) در چه فاصله‌ای از نقطهٔ تعادل، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده برابر می‌شوند؟ (محل برخورد نمودارهای انرژی جنبشی و پتانسیل برحسب مکان)**

**ب) در این نقطه، تندی نوسانگر چه کسری از تندی بیشینه است؟**

**پاسخ:** الف) در این نقطه انرژی پتانسیل کشسانی فنر و انرژی جنبشی وزنه هر یک نصف انرژی کل هستند:

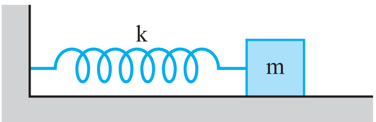
$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}A^2\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

ب)

$$\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow mV^2=\frac{kA^2}{2}=\frac{m\omega^2A^2}{2}\Rightarrow V=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}V_{max}$$

دقت کنید، این وضعیت در هر دورهٔ نوسان، چهار مرتبه رخ می‌دهد. (چرا؟)

**مثال:** **در شکل زیر نوسانگر جرم ـ فنر روی سطح افقی بدون اصطکاکی نوسان‌های کم‌دامنه بر روی پاره‌خطی به طول $۱۰cm$ انجام می‌دهد. جرم جسم $۲kg$ و بسامد زاویه‌ای نوسان‌ها $۱۰rad/s$ است.**




**الف) ثابت فنر چه‌قدر است؟**

**ب) انرژی مکانیکی مجموعه چند ژول است؟**

**پ) بیشینهٔ تندی نوسانگر چه‌قدر است؟**

**ت) شتاب نوسانگر در $x=+A$ و $x=۰$ و $x=-A$ را محاسبه کنید.**

**پاسخ:** الف) برای ثابت فنر می‌توان نوشت: $k=m\omega^۲=۲\times۱۰^۲=۲۰۰\dfrac{N}{m}$

ب) طول پاره‌خط نوسان $۱۰cm$ است پس دامنهٔ نوسان، $A=۵cm$ است. برای انرژی کل نوسان می‌توان نوشت:

$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰\times(\frac{۵}{۱۰۰})^۲\Rightarrow E=۰/۲۵J$$

پ) بیشینهٔ تندی نوسانگر در نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد و داریم:

$$V_{max}=A\omega=\frac{۵}{۱۰۰}\times۱۰=۰/۵\frac{m}{s}$$

ت) برای شتاب نوسانگر داریم:

$$\begin{cases} x=+A\rightarrow a=-a_{max}=-A\omega^۲=-\dfrac{۵}{۱۰۰}\times۱۰۰=-۵\dfrac{m}{s^۲} \\ x=۰\rightarrow a=۰ \\ x=-A\rightarrow a=+a_{max}=+A\omega^۲=+\dfrac{۵}{۱۰۰}\times۱۰۰=+۵\dfrac{m}{s^۲} \end{cases}$$

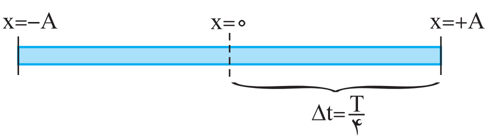
**مثال:** **معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده‌ای در SI به‌صورت مقابل است:** $x=۰/۵\cos(۲۰\pi t)$

**الف) در چه لحظه‌ای پس از لحظهٔ صفر، نخستین بار تندی به بیشینه می‌رسد؟**

**ب) در چه لحظه‌ای پس از لحظهٔ صفر، برای نخستین بار تندی صفر می‌شود؟**

**پ) در لحظه‌ای که انرژی جنبشی با انرژی پتانسیل نوسانگر برابر می‌شود، تندی نوسانگر چه‌قدر است؟**

**پاسخ:** الف) هنگام عبور از نقطهٔ تعادل، تندی بیشینه می‌شود. چون نوسانگر از $x=+A$ شروع به حرکت کرده اولین لحظهٔ عبور از $x=۰$، در لحظهٔ $t=\dfrac{T}{۴}$ است.




در معادلهٔ حرکت نوسانی، ضریب $t$ همان بسامد زاویه‌ای است، پس:

$$\omega=۲۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۱}{۱۰}s\Rightarrow\frac{T}{۴}=\frac{۱}{۴۰}s$$

ب) اولین لحظه‌ای که پس از شروع حرکت تندی صفر می‌شود وقتی است که نوسانگر به $x=-A$ می‌رسد و این وضعیت در $\Delta t=\dfrac{T}{۲}$ رخ می‌دهد:

$$\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲۰}s$$

پ) وقتی انرژی جنبشی با انرژی پتانسیل برابر می‌شود، در واقع هر کدام نصفِ کل انرژی می‌شوند:

$$K=\frac{۱}{۲}E\Rightarrow\frac{۱}{۲}mV^۲=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲$$

$$V^۲=\frac{۱}{۲}A^۲\omega^۲\Rightarrow V=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A\omega=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times۲۰\pi\Rightarrow V=۵\sqrt{۲}\pi\ \frac{m}{s}$$