

فهرست

۵	فصل اول: مجموعه‌ها
۲۴	فصل دوم: عددهای حقیقی
۳۷	فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه
۵۱	فصل چهارم: توان و ریشه
۶۶	■ آزمون نیم‌سال اول
۶۸	فصل پنجم: عبارات‌های جبری
۸۸	فصل ششم: خط و معادله‌های خطی
۱۰۳	فصل هفتم: عبارات‌های گویا
۱۱۵	فصل هشتم: حجم و مساحت
۱۲۶	■ آزمون نیم‌سال دوم
۱۲۸	■ پاسخ‌نامه تشریحی



درس اول: معرفی مجموعه

مجموعه

در ریاضیات برای نشان دادن دسته‌ای از اشیا یا اعضا که همگی مشخص و متمایز هستند، از مفهومی به نام مجموعه استفاده می‌کنیم. به هر یک از این اشیا و اعضای مشخص و متمایز عضو مجموعه می‌گویند.^۱

آقا اجازه! می‌شه راجع به مفهوم اشیا یا اعضای مشخص و متمایز توضیح بدهید؟

بله، تماماً! بپه‌ها، منظور از مشخص بودن اعضا و اشیا مجموعه اینه که عضو بودن یا نبودن اعضا و اشیا مختلف در یک مجموعه به طور روشن و واضح بیان شده باشه. به عنوان مثال وقتی می‌گیم مجموعه سه استان زیبای ایران، به طور مشخص اعضای این مجموعه رو بیان نکرده‌ایم و این عبارت یک مجموعه رو مشخص نمی‌کنه، یعنی مشخص نکردیم دقیقاً کدوم شهرها در این مجموعه هستند و کدوم شهرها در مجموعه نیستند. از نظر یک شخص سه استان زیبای ایران شامل استان‌های اصفهان، یزد و کرمان و از نظر ششمنی دیگه ایلام، کردستان و کرمانشاه سه استان زیبای ایران هستند. اما وقتی می‌گیم مجموعه سه استان ساحلی فزر در ایران، در ذهن همه افراد نام سه استان گیلان، مازندران و گلستان نقش می‌بندد؛ بنابراین این عبارت به صورت واضح اعضای مجموعه رو مشخص می‌کنه. متمایز بودن اعضای مجموعه هم به این معنیه که هیچ دو عضو مجموعه نباید تکراری باشند.

مثال با توجه به ویژگی‌های مجموعه در ریاضی، کدام یک از عبارتهای زیر بیان‌کننده یک مجموعه در ریاضی است؟

- ۱ عدد اول
- ۲ اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰
- ۳ دانش‌آموزان قدبلند مدرسه
- ۴ دانش‌آموزان مدرسه که وزن آن‌ها بیش از ۴۰ کیلوگرم است.

پاسخ با توجه به مفهوم مشخص بودن و متمایز بودن اعضای یک مجموعه داریم:

۱ مجموعه نیست؛ چون اعداد اول زیادی وجود دارد و هر کس می‌تواند به انتخاب و براساس سلیقه خود ۳ عدد اول انتخاب کند و مجموعه‌های متفاوتی را بسازد.

۱- در ریاضیات برخی از مفاهیم تعریف‌ناپذیر هستند؛ یعنی آن‌ها را درک و از آن‌ها استفاده می‌کنیم، اما نمی‌توانیم آن‌ها را تعریف کنیم. مفاهیمی مانند نقطه، خط و مجموعه از معروف‌ترین مفاهیم تعریف‌ناپذیر در ریاضیات هستند که ما بدون این‌که بتوانیم آن‌ها را تعریف کنیم از آن‌ها استفاده می‌کنیم.



۲ مجموعه است. اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷، اعداد اول کوچک‌تر از 10 را تشکیل می‌دهند. این اعضا کاملاً مشخص و متمایزند؛ پس این عبارت بیانگر یک مجموعه است.

۳ مجموعه نیست؛ زیرا اعضای این مجموعه براساس سلیقه افراد مختلف متفاوت‌اند. ممکن است یک فرد براساس نظر یک شخص بلندقد محسوب شود و براساس نظر شخص دیگر کوتاه‌قد.

۴ مجموعه است؛ زیرا معیار این‌که دانش‌آموزان عضو مجموعه باشند یا نباشند، کاملاً مشخص است و وزن هر دانش‌آموز یا بیش از 40 کیلوگرم است که در نتیجه عضو مجموعه به حساب می‌آید یا کم‌تر از 40 کیلوگرم است که عضو مجموعه نیست.

◀ نمایش یک مجموعه

برای نمایش یک مجموعه راه‌های گوناگونی وجود دارد که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم:

۱- نوشتن اعضای مجموعه: اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد، (یعنی مجموعه بی‌نهایت عضو نداشته باشد) یا تعداد اعضای آن بی‌شمار باشد ولی اعضا طبق الگوی مشخصی در کنار هم قرار گیرند، می‌توان با نوشتن اعضای مجموعه، آن را نمایش داد. برای این کار، در ابتدای مجموعه علامت « $\{$ » و در انتهای آن علامت « $\}$ » را قرار می‌دهیم. هم‌چنین برای جداکردن اعضای مجموعه از هم، بین آن‌ها علامت « $,$ » را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال نمایش مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از 10 و کوچک‌تر از 100 به ترتیب به شکل روبه‌رو است:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

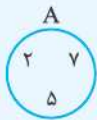
$$B = \{2, 3, 5, 7, \dots, 97\}$$

نکته ...

برای نام‌گذاری مجموعه‌ها از حروف بزرگ انگلیسی مانند A ، B و ... استفاده می‌کنیم.

۲- استفاده از نمودار ون: یک مجموعه را می‌توان به وسیله یک حلقه بسته نمایش داد؛ به گونه‌ای که هر چیزی درون آن قرار بگیرد به معنی عضویت آن در مجموعه باشد. به این حلقه بسته، نمودار ون می‌گویند.

به عنوان مثال نمودار ون مجموعه $A = \{2, 7, 5\}$ به صورت روبه‌رو است:

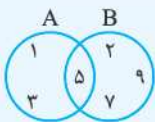


در نمایش مجموعه‌ها به کمک نمودار ون، اعضای هر مجموعه در داخل ناحیه درون حلقه بسته نوشته می‌شوند.

توجه ...

برای نمایش یک مجموعه از روش دیگری به نام نمایش اعضای مجموعه به زبان ریاضی هم می‌توان استفاده کرد که پس از معرفی مجموعه‌های اعداد پرکاربرد (مانند مجموعه اعداد طبیعی) در ادامه فصل به توضیح آن خواهیم پرداخت.
(پس این روش فعلاً باشه طلبتون 😊)

مثال با توجه به نمودار ون شکل روبه‌رو، اعضای مجموعه A و B را مشخص کنید.



پاسخ هر چه درون حلقه A هست، عضو مجموعه A و هر چه درون حلقه B هست، عضو مجموعه B محسوب می‌شود.

توجه داشته باشید عدد 5 در هر دو حلقه است، پس عضو هر دو مجموعه است. $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{5, 2, 7, 9\}$

نکته ...

در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. مثلاً دو مجموعه $\{1, 2\}$ و $\{2, 1\}$ ، یک مجموعه به حساب می‌آیند، نه دو مجموعه. هم‌چنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. مثلاً به جای مجموعه $\{2, 2, 3\}$ می‌توانیم بنویسیم $\{2, 3\}$. این دو مجموعه کاملاً یکسان هستند.

«نمایش عضویت اعضا در یک مجموعه»

مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید. برای این که بتوانیم به زبان ریاضی بیان کنیم که مثلاً عدد ۲ عضو مجموعه A است، از نماد « \in » استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم: $2 \in A$. هم‌چنین برای این که بگوییم عدد ۴ عضو مجموعه A نیست می‌نویسیم: $4 \notin A$ (نمادهای زبان ریاضی هم شبیه زبان پینی‌هاست! 😊)

مثال «مجموعه A نشان‌دهنده شماره‌های عدد ۶۰ است.

۱. مجموعه A را به وسیله نوشتن اعضای آن نمایش دهید.

۲. مجموعه A چند عضو دارد؟

۳. کدام یک از عبارات‌های زیر در مورد مجموعه A درست است؟

الف: $3 \in A$

ب: $8 \notin A$

ج: $60 \notin A$

د: $120 \in A$

پاسخ > با توجه به مطالب بیان‌شده در قسمت قبل داریم:

۱. شماره‌های عدد ۶۰، اعدادی هستند که ۶۰ بر آن‌ها بخش‌پذیر است. این اعداد عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰ و ۶۰.

برای نمایش آن‌ها در قالب مجموعه به صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

۲. همان‌طور که در پاسخ قسمت ۱ مشاهده می‌کنید، ۱۲ عدد متفاوت بین آکولدها ($\{\}$) قرار دارند؛ پس تعداد اعضای این مجموعه ۱۲ تا است.

۳. گزینه «الف»: این عبارت درست است؛ زیرا عدد ۳ در مجموعه A قرار دارد.

گزینه «ب»: این عبارت نیز درست است؛ زیرا ۸ عضو مجموعه A نیست.

گزینه «ج»: نادرست است؛ زیرا همان‌طور که در پاسخ قسمت ۱ مشاهده کردید، $60 \in A$ است.

گزینه «د»: نادرست است؛ زیرا عدد ۱۲۰ در مجموعه A قرار ندارد و باید بنویسیم: $120 \notin A$.

«مجموعه تهی»

اگر در مجموعه‌ای هیچ عضوی وجود نداشته باشد، می‌گوییم آن مجموعه تهی است و آن را با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

توجه...

مجموعه‌هایی مانند $\{\emptyset\}$ یا $\{\emptyset\}$ تهی نیستند؛ زیرا بین دو آکولاد، \emptyset و \emptyset قرار دارند و هر کدام برای مجموعه‌هایشان یک عضو محسوب می‌شوند.

مثال «کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای تهی است.

۱. مجموعه اعداد زوج اول بزرگ‌تر از ۱۰ ۲. مجموعه شماره‌های فرد عدد ۲۱ ۳. مجموعه شماره‌های زوج عدد ۲۱

پاسخ > ۱. تنها عدد زوج اول، عدد ۲ است. از آنجایی که بقیه عددهای زوج بر ۲ بخش‌پذیر هستند، هیچ‌کدام عدد اول به حساب نمی‌آیند و

بنابراین این مجموعه تهی است.

۲. شماره‌های عدد ۲۱، اعداد ۱، ۳، ۷ و ۲۱ هستند که همگی فردند. پس این مجموعه عضو دارد و تهی نیست.

۳. همان‌طور که در پاسخ قسمت ۲ بیان شد، شماره‌های عدد ۲۱، (یعنی ۱، ۳، ۷ و ۲۱) همگی فرد هستند و هیچ عدد زوجی وجود ندارد

که شماره‌دهنده عدد ۲۱ باشد؛ بنابراین این مجموعه تهی است.

«مجموعه تک‌عضوی»

به مجموعه‌ای که فقط یک عضو دارد، مجموعه تک‌عضوی یا مجموعه یکانی می‌گویند. به عنوان مثال مجموعه اعداد زوج اول، تنها شامل عدد

۲ است؛ بنابراین این مجموعه تنها یک عضو دارد و مجموعه‌ای تک‌عضوی به حساب می‌آید.

پرسش‌های درس اول

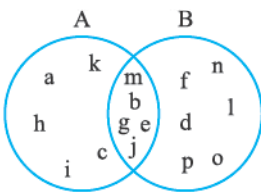
۱ جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

- ۱ در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن اعضوها مهم
- ۲ با جابجایی اعضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ای جدید تولید
- ۳ مجموعه $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ شامل عضو است.
- ۴ از مجموعه در ریاضیات برای بیان و دستهای از اشیای و استفاده می‌کنیم.
- ۵ اگر مجموعه‌ای عضو نداشته باشد، آن را مجموعه می‌نامیم و با نماد یا نمایش می‌دهیم.
- ۶ با توجه به مجموعه $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ داریم:

۶ عضو A است و با نماد ریاضی و 12 عضو A نیست و با نماد ریاضی نمایش داده می‌شود.

۱ ۲ با توجه به نمودار ون مقابل مجموعه‌های A و B را به همراه اعضوهایشان مشخص کنید.

۲ سه عضو بنویسید که هم در مجموعه A و هم در مجموعه B باشند.



۳ سه مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ و $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ را در یک نمودار ون نمایش دهید.

۱ مجموعه‌های عضوایی که هم در مجموعه A و هم در مجموعه B قرار دارند را بنویسید.

۲ مجموعه‌های عضوایی که هم در مجموعه B و هم در مجموعه C قرار دارند را بنویسید.

۳ مجموعه‌های عضوایی که در هر سه مجموعه قرار دارند را بنویسید.

۴ در بین مجموعه‌های زیر، مجموعه‌های تهی را مشخص کنید.

۱ مجموعه عددهای اول و زوج بین 1^0 و 2

۲ اعداد طبیعی بین 1396 و 1397

۳ اعداد بین $\frac{1}{1396}$ و $\frac{1}{1397}$

۴ مجموعه اعداد اول یک‌رقمی ناکم‌تر از 7

۵ اعداد صحیح بزرگ‌تر از -2 و کم‌تر از -4

۱ ۵ سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان‌دهنده مجموعه تهی باشند.

۲ سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان‌دهنده مجموعه‌ای تک‌عضوی باشند.

۳ سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان‌دهنده مجموعه‌ای سه‌عضوی باشند.

(در هر قسمت حداقل یک مثال غیر عددی مطرح کنید.)

۶ عبارتهایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند با علامت (\checkmark) و عبارتهایی که مجموعه نیستند را با علامت $(*)$ مشخص کنید.

(با ذکر دلیل)

۱ پنج عدد فرد متوالی

۲ سه عدد زوج متوالی بزرگ‌تر از 12 و کوچک‌تر از 20

۳ اعداد اول بین 90 و 100

۴ سه فصل سال

۵ شمارنده‌های مرکب عدد 101

۶ شش عدد کوچک

۷ سه غذای بدمزه

۸ جوابهای معادله $2x + 5 = 11$

۹ اعدادی که مضرب 4 هستند ولی بر 2 بخش‌پذیر نیستند.

۷ هر یک از عبارتهای سمت راست را به مجموعه های مساوی آن در سمت چپ وصل کنید.

- | | | | |
|--|---|---|--|
| $A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47\}$ | ○ | ○ | ۱ $\{4, 5, 6, \dots, 20\}$ |
| $B = \{-2, -3, -5, -7\}$ | ○ | ○ | ۲ $\{4, 6, 12, 8, 2, 10\}$ |
| $C = 7$ مضارب صحیح عدد | ○ | ○ | ۳ مجموعه اعداد اول زوج |
| $D = 21$ و 3 صحیح بین | ○ | ○ | ۴ مجموعه اعداد منفی بزرگ تر از بزرگ ترین عدد دورقمی منفی |
| $E = \{2\}$ | ○ | ○ | که ۴ مقسوم علیه دارند. |
| $F = \{\}$ | ○ | ○ | ۵ مجموعه اعداد اول دورقمی کم تر از 30 یا بیشتر از 80 |
| $G = 12$ تا 2 زوج | ○ | ○ | ۶ $\{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$ |
| $H = \{23, 41, 32, 5, 23, 50, 14\}$ | ○ | ○ | ۷ مجموعه اعداد حداکثر دورقمی با مجموع ارقام ۵ |
| | | ○ | ۸ مجموعه اعداد اول منفی و بزرگ تر از -10 |

۸ متناظر با هر یک از مجموعه های زیر، یک عبارت مناسب بنویسید.

- | | |
|------------------------------------|--|
| ۱ $\{53, 59, 61, 67, 71, 73, 79\}$ | ۲ $\{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121\}$ |
| ۳ $\{64, 125, 216, 343\}$ | ۴ $\{-24, -16, -8, 0, 8, 16, 24, 32\}$ |
| ۵ $\{-6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ | |

۹ متناظر با هر یک از عبارتهای زیر، یک مجموعه نوشته و تعداد اعضای هر مجموعه را مشخص کنید.

- | | |
|--|--|
| ۱ عددهای طبیعی مضرب ۵ و کوچک تر از ۱۳۹۷ | ۲ عددهای طبیعی بزرگ تر از ۹۷ و کم تر از ۹۸ |
| ۳ عددهای صحیح منفی بین -1 و 4 | ۴ مجموعه مضارب اول عدد ۹۷ |
| ۵ مجموعه اعداد دورقمی که مجموع ارقام آنها حداکثر برابر ۳ است. | |
| ۶ مجموعه اعداد طبیعی کم تر از 100 که دقیقاً سه شمارنده مثبت دارند. | |
| ۱۰ سه مجموعه متمایز مثال بزنید که دو عدد ۳ و ۴ عضو آنها باشند. | |
| ۲ حداکثر چند مجموعه چهارعضوی شامل ۳ و ۴ می توان ساخت که دقیقاً شامل سه عدد اول باشند و هیچ یک از اعضای مجموعه از یک کم تر و از 10 بیشتر نباشد؟ | |
| ۱۱ کدام یک از مجموعه های زیر با هم مساوی هستند؟ | ۱ $\{\}$ و \emptyset |
| ۱۲ مجموعه $A = \{\emptyset, \{\}, \{\emptyset\}\}$ چند عضو دارد؟ | ۲ \emptyset و $\{\emptyset\}$ |
| ۱۳ آیا می توان گفت $\emptyset \in \{\}$ ؟ آیا عبارت $\emptyset \in A$ درست است؟ | |

درس دوم: مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

دو مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7\}$ و $B = \{3, 5, 7, 1, 3\}$ را در نظر بگیرید. همان طور که می بینید هر عضو از مجموعه A عضو مجموعه B نیز هست و هر عضو از مجموعه B عضو مجموعه A است. در چنین حالتی می گوئیم دو مجموعه A و B با هم برابرند و می نویسیم:

$$A = B$$

نتیجه ...

- ۱ دو مجموعه A و B با هم برابرند، هر گاه هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد.
- ۲ اگر حداقل یک عضو در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می نویسیم: $A \neq B$

مثال در هر یک از قسمت‌های زیر، x و y را به گونه‌ای تعیین کنید تا مجموعه‌ها با هم برابر باشند.

۱ $\{3, 2, 5, x\} = \{\sqrt{25}, \frac{9}{3}, -7, y\}$

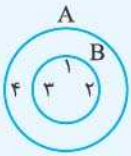
۲ $\{\frac{2}{5}, -3, x, \sqrt{0/04}\} = \{0/2, y, -\sqrt{9}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

پاسخ با توجه به تعریف تساوی دو مجموعه داریم:

۱ $3 = \frac{9}{3}, 5 = \sqrt{25} \Rightarrow x = -7, y = 2$

۲ $\sqrt{0/04} = 0/2, -3 = -\sqrt{9} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{2}{5}$

زیرمجموعه



دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، تمام اعضای

مجموعه B عضو مجموعه A هستند. در این حالت می‌گوییم B زیرمجموعه A است و می‌نویسیم: $B \subseteq A$

تعریف اگر هر عضو مجموعه B ، عضوی از مجموعه A باشد؛ می‌گوییم B زیرمجموعه A است و می‌نویسیم: $B \subseteq A$

توجه...

رابطه زیرمجموعه بودن تنها بین دو مجموعه می‌تواند برقرار شود، یعنی در دو طرف علامت \subseteq باید دو مجموعه قرار بگیرد و بین اعضای یک مجموعه و خود مجموعه نمی‌تواند چنین رابطه‌ای برقرار شود. مثلاً اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، نمی‌توانیم بنویسیم: $2 \subseteq A$ ؛ زیرا ۲ یک عضو مجموعه A است و مجموعه به حساب نمی‌آید، اما می‌توانیم بنویسیم: $\{2\} \subseteq A$ زیرا $\{2\}$ مجموعه است و می‌تواند زیرمجموعه مجموعه دیگری باشد.

آقا اجازه! با توجه به تعریف زیرمجموعه، می‌توانیم بگوییم هر مجموعه، زیرمجموعه خودش؟

بله، کاملاً درست. هر مجموعه، زیرمجموعه خودش.

نتیجه...

۱ اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعه A نیست و می‌نویسیم: $B \not\subseteq A$

۲ مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است و می‌نویسیم: $\emptyset \subseteq A$

مثال کدام یک از روابط زیر به درستی تعریف شده است؟

۱ $\{a, b, d\} \subseteq \{a, b, c, e\}$

۲ $\{-2, 1, 0, 2\} \subseteq \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

۳ $\{5, 7, 9\} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

پاسخ با توجه به تعریف رابطه زیرمجموعه بودن داریم:

۱ چون d عضو مجموعه سمت چپ است ولی عضو مجموعه سمت راست نیست، بنابراین مجموعه سمت چپ زیرمجموعه مجموعه سمت راست نیست و رابطه نوشته‌شده در قسمت ۱ اشتباه است.

۲ از آنجایی که همه اعضای مجموعه سمت چپ در مجموعه سمت راست هم وجود دارند، رابطه بیان شده درست است.

۳ همه اعضای مجموعه سمت چپ در مجموعه سمت راست وجود دارند؛ در نتیجه به جای علامت \subseteq باید علامت $\not\subseteq$ بین دو مجموعه قرار بگیرد؛ بنابراین رابطه بیان شده اشتباه است.

مثال همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ با توجه به این که \emptyset زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است، داریم:

$\{1\}, \{2\}, \{3\}$: زیرمجموعه‌های ۱ عضوی A

$\{1, 2\}, \{1, 3\}$: زیرمجموعه ۳ عضوی A

همان‌طور که می‌بینید، تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه A ، ۸ تا است.

زیرمجموعه تهی A

$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$: زیرمجموعه‌های ۲ عضوی A

نکته ...

اگر مجموعه A دارای n عضو متمایز باشد، آن گاه 2^n زیرمجموعه متمایز دارد.

مثال مجموعه A دارای 5 عضو متمایز است. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ با توجه به نکته قبل، این مجموعه $2^5 = 32$ زیرمجموعه دارد.

مجموعه های عددی پر کاربرد

در سال های گذشته با مجموعه های عددی مختلف مانند طبیعی، حسابی و صحیح آشنا شدید. این مجموعه ها را به ترتیب با حروف \mathbb{N} ، \mathbb{W} و \mathbb{Z} نمایش می دهیم و به صورت زیر می نویسیم:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد صحیح

مثال کدام یک از روابط زیر درست نوشته شده است؟

الف: $\mathbb{N} \in \mathbb{W}$

ب: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

ج: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W}$

پاسخ با توجه به تعریف هر یک از مجموعه های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح داریم:

گزینه «الف»: این رابطه نادرست است؛ زیرا اعدادی مانند -1 ، -2 ، -3 و ... وجود دارند که عضو مجموعه اعداد صحیح هستند، ولی عضو مجموعه اعداد حسابی نیستند؛ بنابراین مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه، مجموعه اعداد حسابی نیست و بنابراین داریم:

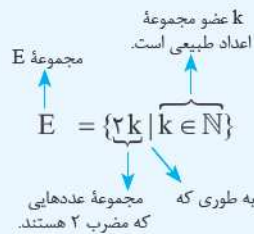
$\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{W}$

گزینه «ب»: این رابطه درست است؛ زیرا همه اعضای مجموعه اعداد طبیعی، عضو مجموعه اعداد صحیح نیز هستند.

گزینه «ج»: نادرست است؛ زیرا \mathbb{N} خود یک مجموعه است و عضو مجموعه اعداد حسابی نیست، بلکه زیرمجموعه آن است. شکل درست این رابطه به صورت $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$ است.

نمایش مجموعه ها به زبان ریاضی

در قسمت نمایش یک مجموعه گفتیم سه راه برای نمایش یک مجموعه وجود دارد. دو روش نوشتن اعضا و نمودار ون را توضیح دادیم (وگفتیم روش سوم بمونه طلبتون!) حالا نوبت روش سومه! گاهی اوقات می توانیم با استفاده از خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه و بیان آن ها در قالب زبان ریاضی، مجموعه ها را نمایش دهیم. مثلاً مجموعه اعداد طبیعی زوج را که با حرف E نمایش می دهند، در نظر بگیرید: $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ می دانیم اعضای این مجموعه یک خاصیت مشترک دارند، یعنی همگی آن ها مضرب 2 هستند؛ بنابراین می توانیم هر عدد زوج را به صورت $2k$ نمایش دهیم که در آن k عددی طبیعی ($k \in \mathbb{N}$) است. با توجه به مطالب گفته شده برای نمایش مجموعه E به زبان ریاضی می نویسیم:



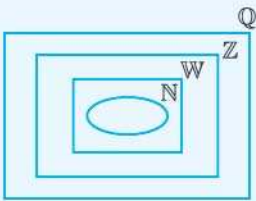
مثال مجموعه $A = \{3n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$ را با نوشتن اعضای آن نشان دهید.

پاسخ برای پاسخ به این سؤال باید در عبارت $3n - 1$ ، مقادیر مختلف n که خود یک عدد طبیعی است را جای گذاری کنیم.

n	1	2	3	4	...
$3n - 1$	$3 \times 1 - 1$	$3 \times 2 - 1$	$3 \times 3 - 1$	$3 \times 4 - 1$...
	2	5	8	11	

$\Rightarrow A = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا



به هر عددی که بتوان آن را به صورت $\frac{a}{b}$ نوشت، به طوری که a و b اعداد صحیح و $b \neq 0$ باشد، عدد گویا می‌گوییم.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا را با حرف Q نمایش می‌دهند و داریم:

نمایش اعداد گویا به وسیله نمودار ون به صورت روبه‌رو است و با توجه به شکل داریم:

$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$$

توجه...

هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح مانند a داریم: $a = \frac{a}{1}$ و در نتیجه $Z \subseteq Q$ است.

مثال درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر مثال مشخص کنید.

نادرست	درست
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

۱ هر عدد گویا، عددی حسابی است.

۲ هر عدد حسابی، عددی گویا است.

۳ هر عدد طبیعی، عددی گویا است.

۴ بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح هستند.

پاسخ با توجه به نمودار ون در قسمت قبل و تعریف هر یک از این مجموعه اعداد داریم:

۱ نادرست است؛ زیرا عددی مانند $\frac{2}{3}$ ، براساس تعریف گویا است ولی حسابی نیست.

۲ درست است؛ زیرا مجموعه اعداد حسابی به صورت $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ تعریف می‌شوند که همگی این اعداد را می‌توان به صورت $\{0, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots\}$ نوشت. بنابراین همگی گویا هستند.

۳ درست است؛ زیرا مجموعه اعداد طبیعی را به صورت $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ تعریف می‌کنیم که می‌توان آن‌ها را به صورت: $\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots\}$ نیز نمایش داد که همگی اعداد گویا هستند.

۴ درست است؛ زیرا برخی از اعداد گویا مانند $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}$ و ... اعداد صحیح هستند.

پرسش‌های درس دوم

۱۲ جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

۱ اگر همهٔ عضوهای مجموعه در مجموعه باشند، آن‌گاه می‌نویسیم $X \subseteq Y$

۲ بزرگ‌ترین زیرمجموعهٔ هر مجموعه (از نظر تعداد اعضا)، است.

۳ مجموعه زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.

۴ تنها مجموعه‌ای که یک زیرمجموعه دارد، مجموعه است.

۵ مجموعه همهٔ اعداد فرد را به صورت $O = \{ \dots \mid \dots \}$ نمایش می‌دهند.

۶ مجموعه همهٔ اعداد گویا را به صورت $Q = \{ \dots \mid \dots, \dots \}$ نمایش می‌دهند.

۱۵ مجموعه A شامل چهار عدد طبیعی متوالی است که مجموع آن‌ها برابر ۳۴ است.

۱ مجموعه A را مشخص کنید. ۲ دو عبارت فارسی بنویسید که معادل مجموعه A باشند.

۱۶ در هر یک از قسمت‌های زیر مقدارهای مجهول را طوری پیدا کنید که مجموعه‌های داده‌شده با هم برابر باشند. (فوزستان - فرادر ۹۶ - با تغییر)

۱ $\{2, x+1, \frac{3}{5}, 0, 25\} = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{24}, \frac{\sqrt{y}}{32}, \sqrt{9}\}$

۲ $\{\frac{y}{5}, -7, 2x+1, -0, 75\} = \{\frac{y}{21}, 3x+y, -\frac{3}{4}, \sqrt{25}\}$

۱۷) درستی یا نادرستی هر یک از روابط زیر را با ذکر دلیل، تعیین کنید.

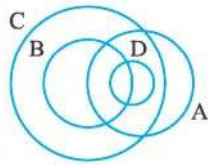
۱ $\{1, 2, 3\} \subseteq \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

۲ مجموعه اعداد زوج نامنفی زیر مجموعه، مجموعه اعداد زوج مثبت است.

۳ اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه B حداکثر به اندازه تعداد عضوهای A ، عضو دارد.

۴ $\{\emptyset\} \notin \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ۵ $\{\{a\}\} \subseteq \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

۱۸) اگر دو مجموعه B و C هر دو زیر مجموعه A باشند و هم چنین بدانیم C و B زیر مجموعه یکدیگر نیستند و علاوه بر آن بدانیم عضوی از A وجود دارد که هم عضو B است و هم عضو C ، آن گاه به کمک نمودار ون شکل مناسب برای سه مجموعه A ، B و C رسم کنید.



۱۹) با توجه به شکل مقابل علت درستی یا نادرستی روابط داده شده را تعیین کنید. (در صورت نادرست بودن، رابطه ای درست در مورد مجموعه های داده شده بیان کنید.)

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|---------------------------|-------------------|
| ۱ $D \in A$ | ۲ $A \not\subseteq C$ | ۳ $D \subseteq B$ | ۴ $B \subseteq C$ |
| ۵ $D \not\subseteq C$ | ۶ $B \notin C$ | ۷ $D \subseteq \emptyset$ | ۸ $A \subseteq A$ |

۲۰) به کمک رسم نمودار ون نشان دهید که اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آن گاه $A \subseteq C$ است.

۲۱) مجموعه های A ، B ، C و D به صورت زیر نشان داده شده اند؛ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل نشان دهید.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 13\}$ $B = \{2, 3, 5, 7\}$ $C = \{2, 7, 1, 3, 5, 13\}$ $D = \{3, 13\}$

- | | | |
|-------------------|---------------------------|-----------------------|
| ۱ $B \subseteq A$ | ۲ $A \subseteq C$ | ۳ $D \not\subseteq B$ |
| ۴ $B \subseteq C$ | ۵ $1 \in C$ | ۶ $\{2, 3\} \in B$ |
| ۷ $1, 2, 7 \in C$ | ۸ $\{1, 13\} \subseteq C$ | ۹ $D \in A$ |

۲۲) همه زیر مجموعه های هر یک از مجموعه های زیر را بنویسید.

۱ مجموعه اعداد اول یک رقمی. ۲ مجموعه حروف صدادار انگلیسی. ۳ $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

۲۳) با توجه به مجموعه $A = \{-10, -9, -8, \dots, 13, 14\}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- ۱ زیر مجموعه ای از A بنویسید که اعضای آن همگی زوج باشند. این زیر مجموعه حداکثر چند عضو دارد؟
- ۲ زیر مجموعه ای از A بنویسید که اعضای آن همگی اول باشند. این زیر مجموعه حداکثر چند عضوی است؟
- ۳ چند زیر مجموعه از A می توان نوشت که اعضای آن ها همگی مضرب ۷ باشند؟
- ۴ چندتا از مجموعه های موجود در قسمت ۳، زیر مجموعه، مجموعه شامل حداکثر عضو قسمت ۱ هستند؟

۲۴) با توجه به مجموعه مقابل: $A = \{\{\}, \{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}, \{2\}, \{3\}\}$

۱) درستی یا نادرستی روابط داده شده را بررسی کنید.

- | | | | |
|-------------------------------|------------------------|---|------------------------------|
| الف: $\{\} \subseteq A$ | ب: $\{\} \in A$ | پ: $\{\{\}, \{2\}, \{3\}\} \subseteq A$ | ت: $\{1, 2, 3\} \subseteq A$ |
| ث: $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ | ج: $\{1, 2, 3\} \in A$ | ح: $\{1, 2\} \subseteq A$ | |

۲) چندتا از زیر مجموعه های این مجموعه، عضوی از خود مجموعه هم هستند؟

۲۵) در هر یک از قسمت های زیر، کوچک ترین مجموعه ممکن با شرایط داده شده را بنویسید.

- | | |
|--|--|
| ۱ $\{2\} \in A, \{2\} \subseteq A$ | ۲ $\{2\} \in A, \{3\} \subseteq A$ |
| ۳ $\{2\} \in A, \{3\} \in A, \{2, 3\} \subseteq A$ | ۴ $\{2, 3\} \subseteq A, \{\{2\}, 3\} \subseteq A$ |
| ۵ $\{2, 3\} \in A, \{2, 3\} \subseteq A, \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} \subseteq A$ | |



۳۶ هر یک از مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

۱ $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} =$

۳ $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} =$

۵ $\{7, 11, 15, 19, 23, 27, \dots\} =$

۷ $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\} =$

۹ $W =$

۲ $\{7, 14, 21, 28, 35, \dots\} =$

۴ $\{-7, -6, -5, -4, -3, \dots\} =$

۶ $\left\{\frac{3}{7}, \frac{7}{5}, \frac{11}{8}, \frac{15}{11}, \frac{19}{14}, \frac{23}{17}, \frac{27}{20}, \dots\right\} =$

۸ $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}\right\} =$

۱۰ $Q =$

۳۷ مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوهایشان مشخص کنید.

۱ $A = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ (گیلان - فرورد ۹۵)

۳ $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x \leq 5\}$

۵ $E = \{3x \mid x = 0, 3, 4, 9\}$

۷ $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4)(3x^2 - 27) = 0\}$

۹ $I = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{N}, \frac{24}{x} \in \mathbb{Z}\}$

۲ $B = \{4n - 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

۴ $D = \{x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\}$ (اصفهان - فرورد ۹۵)

۶ $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3x + 4 = 31\}$

۸ $H = \left\{\frac{x-1}{x+1} \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq -2\right\}$

۱۰ $g = \left\{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 7, y = x + 2\right\}$

۳۸ مجموعه $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم برابرند؟

$B = \{x \mid x \in A, x^2 \leq 2\}$

$C = \{x \mid x \in A, -4 < x < 2\}$

۳۹ هر یک از مجموعه‌های زیر را به (زبان ریاضی) بنویسید.

۱ $A = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$

۳ $C = \{x \mid (x-2)(x+2) = 0\}$

۲ $B = \{3x + 5 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2\}$

۴۰ به کمک رسم نمودار ون، وضعیت مجموعه‌های $Q, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ و W را نسبت به هم نشان دهید و سپس با توجه به نمودار و با ذکر دلیل،

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

درست نادرست

درست نادرست

درست نادرست

درست نادرست

درست نادرست

درست نادرست

۱ هر عدد حسابی، عددی گویا است.

۲ هر عدد گویا، عددی صحیح است.

۳ هر عدد حسابی، عددی طبیعی است.

۴ بعضی از اعداد صحیح، گویا هستند.

۵ بعضی از اعداد گویا، حسابی‌اند.

۶ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که حسابی باشد.

۳۱ تعداد زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

الف: $A = \{x^2 - 2 \mid x \in \mathbb{W}, x < 6\}$

ب: $B = \{5x - 3 \mid x \in \mathbb{Z}, 3 \leq x < 10\}$

۲ A چند زیرمجموعه دارد که همهٔ عضوهای آن، اعداد اول باشند؟

۳ B چند زیرمجموعه دارد که همهٔ اعضای آن‌ها، عددهای زوج باشند؟

۳۲ فرض کنید مجموعهٔ A، $n+1$ تا عضو دارد، در این صورت اگر تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر ۶۴ باشد، آن گاه مقدار n

چقدر است؟

۲ اگر سه تا از اعضای A را حذف کنیم، آن گاه مجموعهٔ جدید چندتا زیرمجموعه از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اول، کم‌تر دارد؟

۳۳ ثابت کنید با اضافه شدن یک عضو به هر مجموعهٔ دلخواه، تعداد زیرمجموعه‌های آن مجموعه ۲ برابر می‌شود.



۶۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۲ را داخل یک جعبه قرار داده و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم:

- ۱ مجموعه همه حالت‌های ممکن را بنویسید.
- ۲ اگر پیشامد A ، انتخاب کارتی با شماره‌ای بیشتر از ۸ باشد، مجموعه A را تشکیل دهید و احتمال رخداد این پیشامد را به دست آورید.
- ۳ اگر تعریف کنیم، پیشامد $B = \{\text{خارج شدن عددی اول}\}$ و پیشامد $C = \{\text{خارج شدن عددی فرد}\}$ ، آن‌گاه با تشکیل مجموعه‌های B و C و محاسبه احتمال رخدادن هر یک تعیین کنید که آیا این دو پیشامد هم‌شانس هستند یا نه؟
- ۴ پیشامدی مثال بزنید که احتمال رخدادن آن برابر $\frac{1}{3}$ باشد.
- ۵ اگر تعریف کنیم: پیشامد $D = \{\text{خارج شدن عددی که مضرب ۳ است}\}$ ، آن‌گاه پیشامدی مثال بزنید که احتمال رخدادن آن ۲ برابر احتمال رخدادن پیشامد D باشد.

پرسش‌های چهار گزینه‌ای فصل اول

۱ کدام یک از گزینه‌های زیر بیانگر یک مجموعه است؟

- الف: پنج‌تا از دانش‌آموزان یک مدرسه
ب: چهارتا از زیباترین نقاشی‌های پیکاسو
ج: دوتا از بلندقدترین کارمندان یک شرکت
د: روزهای بارانی سال ۱۳۹۶

(قم - فرورداد ۹۶)

۲ کدام یک از عبارتهای زیر، معرف مجموعه تهی است؟

- الف: اعداد اول یک‌رقمی
ب: اعداد طبیعی بین ۱ و -۱
ج: مضرب‌های اول عدد ۵
د: $\{\emptyset\}$

(فراسان شمالی - فرورداد ۹۶)

۳ اگر $A = \{2, 3, 8\}$ ، کدام گزینه درست نیست؟

- الف: $2 \in A$
ب: $\{2, 8\} \in A$
ج: $\emptyset \subseteq A$
د: $5 \notin A$

۴ با توجه به مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ، چه تعداد از روابط زیر صحیح است؟

- الف: ۱
ب: ۲
ج: ۳
د: ۴
- ۱ $\emptyset \subseteq A$ ۲ $\emptyset \in A$ ۳ $\{\emptyset\} \subseteq A$ ۴ $\{\emptyset\} \in A$

(غوزستان - فرورداد ۹۶)

۵ کدام یک از مجموعه‌های زیر، اعضای مجموعه $\{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ را نشان می‌دهد؟

- الف: $\{5, 8, 11, \dots\}$
ب: $\{2, 5, 8, \dots\}$
ج: $\{..., -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$
د: $\{5, 8, 11, \dots, 32\}$

(پوشهر - فرورداد ۹۶)

۶ در مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 2\}$ ، مقدار $n(A)$ کدام است؟

- الف: ۳
ب: ۲
ج: ۱
د: ۴

(کرمان - فرورداد ۹۶)

۷ اگر $\{3\} = \{3a, 4a - b\}$ ، کدام گزینه در مورد a و b درست است؟

- الف: $a + b = 1$
ب: $a + b = 2$
ج: $a + b = 3$
د: $a + b = 4$

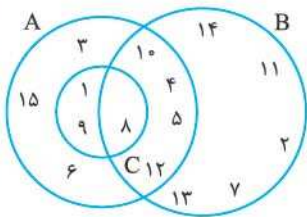
(کوهنیلویه و بویراحمد - فرورداد ۹۶)

۸ کدام عبارت زیر نادرست است؟

- الف: $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$
ب: $\mathbb{Q} - \mathbb{Z} = \mathbb{N}$
ج: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
د: $\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \{\}$

۹ اگر $A = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{4}{x} \in \mathbb{Z}\}$ و B مجموعه اعداد زوج بین -۵ و ۵ باشد، آن‌گاه مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟

- الف: ۶ عضو
ب: ۵ عضو
ج: ۴ عضو
د: ۳ عضو



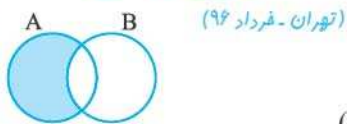
۱۰ با توجه به شکل مقابل، مجموع اعضای مجموعه $X = ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A - B) - C)$ برابر است با

الف: ۵۵

ب: ۶۵

ج: ۷۳

د: ۶۳



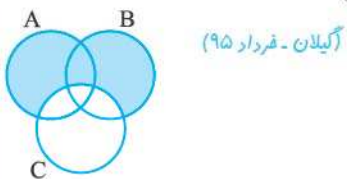
(تهران - فرداد ۹۶)

الف: $B - A$

ب: $(A \cup B) - A$

ج: $A - B$

۱۱ کدام گزینه قسمت رنگ شده را نشان می‌دهد؟



(گیلان - فرداد ۹۵)

الف: $(A \cup B) \cap C$

ب: $(A \cup B) - C$

ج: $A - B$

۱۲ قسمت رنگی در نمودار ون مقابل چه مجموعه‌ای را مشخص می‌کند؟

۱۳ اگر $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cap B = \{a\}$ ، $A = \{a, b, c\}$ ، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های B که شامل حرف صدادارند، چندتا است؟

الف: ۳ تا

ب: ۴ تا

ج: ۵ تا

د: ۶ تا

۱۴ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی ۳۲ تا است. اگر سه عضو جدید به این مجموعه اضافه کنیم، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های

حداکثر یک عضوی مجموعه جدید چندتا می‌شود؟

الف: ۷

ب: ۸

ج: ۹

د: ۱۰

۱۵ احتمال این که دبیر ریاضی شما در روز پنجشنبه به دنیا آمده باشد، چه قدر است؟

الف: $\frac{1}{30}$

ب: $\frac{1}{31}$

ج: $\frac{1}{7}$

د: $\frac{1}{365}$

۱۶ اگر تاسی را بیندازیم، احتمال این که عدد روشده شمارنده ۴ باشد، چه قدر است؟

الف: $\frac{2}{3}$

ب: $\frac{1}{2}$

ج: $\frac{1}{3}$

د: $\frac{1}{4}$

۱۷ در یک جعبه ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این مهره آبی نباشد،

چه قدر است؟

الف: $\frac{1}{3}$

ب: $\frac{2}{3}$

ج: $\frac{1}{2}$

د: $\frac{3}{4}$

۱۸ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، چه قدر احتمال دارد این خانواده دقیقاً دو پسر داشته باشد؟

الف: $\frac{3}{8}$

ب: $\frac{1}{8}$

ج: $\frac{5}{8}$

د: $\frac{1}{7}$

۱۹ اگر تاسی را دو بار پرتاب کنیم، احتمال این که هر دو بار عددهای روشده اول باشند، چه قدر است؟

الف: $\frac{9}{12}$

ب: $\frac{9}{36}$

ج: $\frac{12}{36}$

د: $\frac{1}{2}$

۲۰ اگر پیشامدهای $A =$ «انتخاب عددی اول از بین اعداد طبیعی تک‌رقمی» و $B =$ «انتخاب عددی طبیعی بین دو عدد ۳ و a از بین اعداد

طبیعی تک‌رقمی» هم‌شانس باشند، آن‌گاه مقدار عددی a کدام است؟

الف: ۶

ب: ۷

ج: ۸

د: ۹



پاسخ نامه تشریحی

پاسخ پرسش‌های فصل اول

- ۴ تنها عدد اول یکرقمی موجود در این مجموعه است. چون صورت سؤال اعداد اول یکرقمی ناکم‌تر از ۷ را خواسته، یعنی خود ۷ هم قبول است. پس این مجموعه تهی نیست.
- ۵ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که از ۲- بزرگ‌تر باشد و در عین حال از ۴- کم‌تر باشد، پس این مجموعه تهی است.

پاسخ ۵

- ۱- مجموعه انسان‌هایی که بیش از ۱۰ متر قد دارند!
- ۲- مجموعه اعدادی که هم اول اند و هم مرکب.
- ۳- مجموعه شترهایی که قادر به صحبت کردن هستند.
- ۲- ۱- مجموعه اعداد اول زوج.
- ۲- مجموعه اعدادی که نه مثبت‌اند و نه منفی.
- ۳- مجموعه سیاره‌های منظومه شمسی که در آن‌ها اکسیژن وجود دارد.
- ۳- ۱- مجموعه اعداد اول بین ۲ و ۱۰
- ۲- مجموعه اعداد طبیعی بین ۵ و ۹
- ۳- مجموعه ماه‌های تابستان

پاسخ ۶

- ۱ (×) به علت مشخص نبودن اعضا، عبارت موردنظر مجموعه به حساب نمی‌آید.
- ۲ (✓) مجموعه موردنظر، مجموعه {۱۴, ۱۶, ۱۸} است.
- ۳ (✓) مجموعه موردنظر {۹۷} است.
- ۴ (×) اعضای عبارت داده شده مشخص نیستند، پس تشکیل مجموعه نمی‌دهند.
- ۵ (✓) ۱۰۱ عددی اول است و شمارنده مرکبی ندارد، پس مجموعه موردنظر مجموعه { } است.
- ۶ (×) اعضا مشخص نیستند.

پاسخ ۱

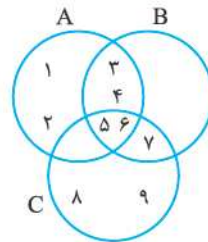
- ۱ نیست
- ۲ نمی‌شود.
- ۳ ۳
- ۴ نمایش - مشخص - متمایز
- ۵ تهی - \emptyset - { }
- ۶ $12 \notin A - 6 \in A$

پاسخ ۲

- ۱ $A = \{a, k, h, i, c, m, b, g, e, j\}$
- $B = \{m, b, g, e, j, f, n, d, l, o, p\}$
- ۲ سه عضو باید از قسمت مشترک بین A و B در نمودار باشند؛ مثلاً m, b یا g و e, j یا ...

پاسخ ۳

- با توجه به عضوهای مشترک در مجموعه‌ها نمودار را رسم می‌کنیم.
- ۱ عضوهای مشترک A و B با توجه به نمودار، اعداد ۳، ۴، ۵ و ۶ هستند.
- ۲ عضوهای مشترک B و C با توجه به نمودار، اعداد ۵، ۶ و ۷ هستند.
- ۳ عضوهایی که در هر سه مجموعه قرار دارند، فقط اعداد ۵ و ۶ هستند.



پاسخ ۴

- ۱ این مجموعه تهی است؛ چون بین ۲ و ۱۰ هیچ عدد اول زوجی وجود ندارد.
- ۲ واضح است که بین دو عدد طبیعی متوالی ۱۳۹۶ و ۱۳۹۷ هیچ عدد طبیعی دیگری وجود ندارد، پس این مجموعه هم تهی است.
- ۳ دو عدد $\frac{1}{1396}$ و $\frac{1}{1397}$ گویا هستند و می‌دانیم بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، پس این مجموعه تهی نیست.

پاسخ ۱۱

- ۱ هر دو عبارت، معرف مجموعه تهی اند؛ بنابراین با هم مساوی اند.
 ۲ مجموعه اول تهی است و شامل هیچ عضوی نیست، در حالی که مجموعه دوم یک عضو دارد؛ بنابراین این دو مجموعه با هم برابر نیستند.

پاسخ ۱۲

دو عضو زیر، $\{\}$ و \emptyset دو عضو یکسان هستند و یک شیء در نظر گرفته می‌شوند؛ بنابراین مجموعه، دو عضو \emptyset و $\{\emptyset\}$ را دارد.

پاسخ ۱۳

خیر، $\emptyset \notin \{\}$ چون $\{\}$ هیچ عضوی ندارد، اما واضح است که $\emptyset \in A$ برقرار است.

پاسخ ۱۴

- ۱ $Y - X$ ۲ خود آن مجموعه
 ۳ \emptyset (تهی) ۴ تهی
 ۵ $O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ۶ $Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

پاسخ ۱۵

- ۱ اعداد موردنظر را پیدامی‌کنیم. فرض کنید این اعداد به صورت $x, x+1, x+2, x+3$ باشند، در این صورت داریم:
 $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 34 \Rightarrow 4x + 6 = 34$
 $\Rightarrow 4x = 28 \Rightarrow x = 7$
 \Rightarrow مجموعه موردنظر $\{7, 8, 9, 10\}$
 ۲ -۱ مجموعه اعداد طبیعی بین ۶ و ۱۱.
 ۳ -۲ مجموعه چهار عدد طبیعی متوالی با شروع از ۷.

پاسخ ۱۶

۱ ابتدا اعضای مجموعه سمت راست را به ساده‌ترین حالت نوشته و سپس با مجموعه سمت چپ تساوی مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{y}}{3^2} = \frac{\sqrt{y}}{9}, \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}, \frac{1}{4} = \frac{0}{25}$$

$$\Rightarrow \{2, x+1, \frac{3}{5}, \frac{0}{25}\} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{y}}{9}, \frac{3}{5}\}$$

حالا با مقایسه دو مجموعه متوجه می‌شویم که مقدارهای زیر باید برابر باشند:

$$x+1 = \frac{1}{8} \text{ و } \frac{\sqrt{y}}{9} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{8} - 1 \Rightarrow x = -\frac{7}{8} \\ \frac{\sqrt{y}}{9} = 2 \Rightarrow \sqrt{y} = 18 \Rightarrow y = 18^2 \Rightarrow y = 324 \end{cases}$$

- ۷ (*) اعضا مشخص نیستند. (البته اصلاً مله غذای اروپایی بدمزه داریم!)
 ۸ (✓) جواب معادله برابر $x=3$ بوده و در نتیجه مجموعه موردنظر $\{3\}$ است.
 ۹ (✓) این مجموعه همان مجموعه تهی است، چون هیچ عددی وجود ندارد که ضرب ۴ باشد ولی زوج نباشد.

پاسخ ۷

- ۱ D ۲ G ۳ E ۴ B
 ۵ A ۶ C ۷ H ۸ F

پاسخ ۸

- ۱ مجموعه اعداد اول بین ۵۰ و ۸۰.
 ۲ مجموعه مربع اعداد طبیعی بین ۱ و ۱۲.
 ۳ مجموعه مکعب اعداد طبیعی بین ۳ و ۸.
 ۴ مجموعه مضارب صحیح عدد ۸ از -24 تا 32 .
 ۵ مجموعه مضارب صحیح عدد ۳ که بزرگ‌تر یا مساوی -6 هستند.

پاسخ ۹

- ۱ $\frac{1395-5}{5} + 1 = 279$
 \Rightarrow تعداد اعضا $= 278 + 1 = 279$
 ۲ $\{0\}$ = تعداد اعضا \Rightarrow (عدد طبیعی بین ۹۷ و ۹۸ وجود ندارد)
 ۳ $\{-1\}$ (بین -1 و 4 عدد صحیح منفی نداریم، همگی نامنفی اند!)
 \Rightarrow تعداد اعضا $= 0$
 ۴ $\{97\}$ (تنها مضرب اول، هر عدد اول خود آن عدد است).
 \Rightarrow تعداد اعضا $= 1$
 ۵ $\{10, 20, 11, 30, 21, 12\}$
 باید مجموعه اعداد دورقمی که مجموع ارقام آن‌ها صفر، ۱، ۲ یا ۳ است را تشکیل دهیم.
 \Rightarrow تعداد اعضا $= 6$
 ۶ $\{4, 9, 25, 49\}$
 فراموش نکنید که مربع هر عدد اول، همواره شامل سه شمارنده مثبت است.
 \Rightarrow تعداد اعضا $= 4$

پاسخ ۱۰

- ۱ $\{3, 4, 5\}$ و $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{3, 4\}$
 ۲ دقت کنید که اعضای مجموعه موردنظر از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب می‌شوند. حالا چون این مجموعه شامل سه عدد اول است و ۳ نیز خود عددی اول است، بنابراین در این مجموعه حتماً باید دو تا از اعداد ۲، ۵ و ۷ حضور داشته باشند. پس مجموعه‌های قابل قبول به صورت زیر ساخته می‌شوند: $\{3, 4, 2, 5\}$, $\{3, 4, 2, 7\}$, $\{3, 4, 5, 7\}$
 که تعداد آن‌ها نیز برابر ۳ تا است.



۲ مشابه قسمت قبل ابتدا اعضای مجموعه سمت راست را ساده‌سازی می‌کنیم: $\frac{y}{21} = \frac{1}{3}, -\frac{3}{4} = -\frac{0}{75}, \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{y}{5}$
 $\Rightarrow \left\{ \frac{y}{5}, -7, 2x+1, -\frac{0}{75} \right\} = \left\{ \frac{1}{3}, 2x+y, -\frac{0}{75}, \frac{y}{5} \right\}$
 حالا با توجه به برابری دو مجموعه باید داشته باشیم:
 $2x+1 = \frac{1}{3}, 2x+y = -7$ پس:

$$2x+1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \quad (I)$$

$$2x+y = -7 \xrightarrow{(I)} 2\left(-\frac{1}{3}\right) + y = -7$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} + y = -7 \Rightarrow y = -6$$

پاسخ ۱۷

۱ نادرست است، ۳ عضو مجموعه سمت چپ هست ولی در مجموعه سمت راست نیست، پس مجموعه $\{1, 2, 3\}$ نمی‌تواند زیرمجموعه $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ باشد.

۲ نادرست است، مجموعه اعداد زوج نامنفی به صورت $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ است و مجموعه اعداد زوج مثبت نیز به صورت $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ است، بنابراین مجموعه اول چون شامل صفر است ولی صفر در مجموعه دوم نیست.

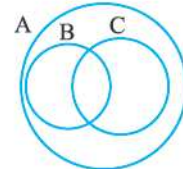
۳ درست است. چون $A \subseteq B$ ، پس هر عضوی که در A باشد، باید در B هم باشد، یعنی حداکثر می‌تواند به اندازه تعداد اعضای B عضو داشته باشد، در غیر این صورت عضوی در A است که در B نیست و این خلاف رابطه $A \subseteq B$ است.

۴ نادرست است. $\{\emptyset\}$ عضوی از مجموعه $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ است، نه زیرمجموعه آن. در واقع اگر \emptyset عضو مجموعه‌ای باشد، آن‌گاه $\{\emptyset\}$ زیرمجموعه‌اش است.

۵ درست است. چون $\{a\}$ عضو مجموعه $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ است، پس $\{\{a\}\}$ یک زیرمجموعه تک‌عضوی آن است.

پاسخ ۱۸

چون B و C هر دو زیرمجموعه A هستند، پس نمودارهای مربوط به B و C داخل نمودار مربوط به A قرار می‌گیرند؛ از طرف دیگر چون B و C زیرمجموعه هم نیستند، پس نمودارهای آن‌ها نباید به طور کامل داخل هم قرار بگیرد، اما باید همدیگر را قطع کنند، چون عضو مشترک دارند، در واقع عضو مشترک باید در فضای مشترک بین دو مجموعه قرار گیرد.



پاسخ ۱۹

۱ نادرست است. $D \notin A$ باید گفته شود $D \subseteq A$ ، چون به طور کامل داخل A قرار دارد.

۲ درست است. چون A به طور کامل درون C قرار نگرفته، پس $A \not\subseteq C$.

۳ نادرست است. D به طور کامل داخل B قرار ندارد، پس $D \not\subseteq B$.

۴ درست است. B به طور کامل درون C قرار دارد.

۵ نادرست است. D به طور کامل داخل C قرار دارد، پس $D \subseteq C$.

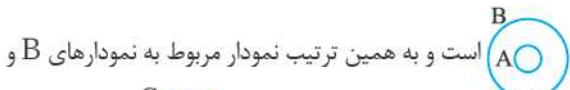
۶ درست است. $B \notin C$ باید گفته شود $B \subseteq C$.

۷ نادرست است. \emptyset مجموعه‌ای است که زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است، پس $\emptyset \subseteq D$ نه $D \subseteq \emptyset$.

۸ درست است؛ زیرا هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است.

پاسخ ۲۰

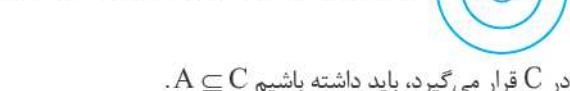
چون $A \subseteq B$ پس نمودار مربوط به مجموعه‌های A و B به صورت



است و به همین ترتیب نمودار مربوط به نمودارهای B و C با توجه به رابطه $B \subseteq C$ ، به صورت



است. حالا چون A درون B قرار دارد، پس نمودار مربوط به هر سه مجموعه به صورت



خواهد بود و در نتیجه چون A هم به طور کامل در C قرار می‌گیرد، باید داشته باشیم $A \subseteq C$.

پاسخ ۲۱

۱ $2 \in B$ ولی $2 \notin A$ ، پس B نمی‌تواند زیرمجموعه A باشد، در نتیجه این رابطه نادرست است.

۲ $9 \in A$ ولی $9 \notin C$ ، پس $A \not\subseteq C$ ، بنابراین این رابطه نادرست است.

۳ $13 \in D$ ولی $13 \notin B$ ، پس $D \not\subseteq B$ ، بنابراین این رابطه درست است.

۴ همه اعضای B ، عضو مجموعه C هم هستند، پس رابطه $B \subseteq C$ درست است.

۵ عدد ۱ عضو مجموعه C است، پس رابطه $1 \in C$ درست است.

۶ $\{2, 3\}$ عضو مجموعه B نیست، پس رابطه $\{2, 3\} \in B$ نادرست است و درست آن به صورت $\{2, 3\} \subseteq B$ است.

۳ عضوهایی از A که مضرب ۷ هستند، عبارتند از اعداد $۷, ۱۴, ۲۱, ۲۸, ۳۵, ۴۲, ۴۹, ۵۶, ۶۳, ۷۰$ و همچنین هر زیرمجموعه‌ای از این اعداد، زیرمجموعه A نیز محسوب می‌شود که عبارت‌اند از:

$$\{-7\}, \{0\}, \{7\}, \{14\}, \{-7, 0\}, \{-7, 7\}, \{-7, 14\}, \{0, 7\}, \\ \{0, 14\}, \{7, 14\}, \{-7, 0, 7\}, \{-7, 0, 14\}, \{-7, 7, 14\}, \\ \{0, 7, 14\}, \{-7, 0, 7, 14\}$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر با ۱۵ تا است.

۴ زیرمجموعه‌های قابل قبول همگی زیرمجموعه مجموعه شامل مضارب زوج ۷، یعنی مجموعه $\{0, 14\}$ هستند که عبارت‌اند از: $\{0\}, \{14\}, \{0, 14\}$ که تعداد آن‌ها نیز برابر ۳ تا است.

پاسخ ۲۳

۱ الف درست است. تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.
ب نادرست است. $1 \in A$ ، نه $\{1\}$. به عبارت دیگر چون $1 \in A$ پس $\{1\} \subseteq A$.

۲ نادرست است. چون $\{1\} \notin A$ ، پس $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ نمی‌تواند زیرمجموعه A باشد.

۳ درست است. $1, 2, 3 \in A$ ، پس $\{1, 2, 3\} \subseteq A$.

۴ درست است. $2 \in A$ و $\{2\} \in A$ ، پس $\{2, \{2\}\} \subseteq A$.

۵ درست است. $\{1, 2, 3\}$ عضوی از A است.

۶ درست است. چون ۱ و ۲ هر دو عضو A هستند. پس $\{1, 2\} \subseteq A$.

۲ زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست که در خود A نیز هست. ضمناً چون $1, 2, 3 \in A$ ، پس $\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}$ و $\{3\}$ همگی زیرمجموعه‌های A اند که اعضای A نیز محسوب می‌شوند، پس جمعاً ۵ تا از زیرمجموعه‌های A عضو A هم هستند.

پاسخ ۲۵

۱ $\{2\}$ باید عضو مجموعه A باشد و ضمناً چون $\{2\} \subseteq A$ ، پس $2 \in A$ ، بنابراین کوچک‌ترین مجموعه با شرایط مطرح شده، مجموعه $\{2, \{2\}\}$ است.

۲ $\{2\}$ و ۳ باید عضو A باشند، پس مجموعه موردنظر به صورت $\{3, \{2\}\}$ است.

۳ $\{2\}, \{3\}$ و هر دو عدد ۲، ۳ با توجه به رابطه $\{2, 3\} \subseteq A$ باید عضو مجموعه A باشند، پس این مجموعه به صورت $\{2, 3, \{2\}, \{3\}\}$ قابل نمایش است.

۷ هر سه عدد ۱، ۲ و ۷ عضو مجموعه C هستند، پس رابطه داده‌شده درست است.

۸ هم ۱ و هم ۱۳ عضو مجموعه C هستند، پس مجموعه $\{1, 13\}$ زیرمجموعه دو عضوی C است. در نتیجه رابطه داده‌شده درست است.

۹ عضو A نیست، بلکه زیرمجموعه A است، یعنی $D \subseteq A$ ، پس رابطه داده‌شده نادرست است.

پاسخ ۲۲

۱ مجموعه اعداد اول یک‌رقمی به صورت $\{2, 3, 5, 7\}$ است، پس زیرمجموعه‌های آن عبارت‌اند از:

$$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \\ \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$$

۲ مجموعه حروف صدادار انگلیسی به صورت $\{a, o, i, u, e\}$ بوده و زیرمجموعه‌های آن به صورت زیر خواهند بود:

$\{\}$: صفر عضوی‌ها

$\{a\}, \{o\}, \{u\}, \{e\}, \{i\}$: تک‌عضوی‌ها

$\{a, o\}, \{a, i\}, \{a, e\}, \{a, u\}, \{o, u\}, \{o, e\}, \\ \{o, i\}, \{u, e\}, \{u, i\}, \{e, i\}$: دو عضوی‌ها

$\{a, o, u\}, \{a, o, e\}, \{a, o, i\}, \{a, u, e\}, \{a, u, i\}, \\ \{a, e, i\}, \{o, u, e\}, \{o, u, i\}, \{o, e, i\}, \{u, e, i\}$: سه عضوی‌ها

$\{a, o, u, e\}, \{a, o, u, i\}, \{a, u, e, i\}, \\ \{o, u, e, i\}, \{a, o, i, e\}$: چهار عضوی‌ها

$\{a, o, u, e, i\}$: پنج عضوی‌ها

۳ زیرمجموعه‌های مجموعه موردنظر به صورت زیر هستند:
 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\ \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

پاسخ ۲۳

۱ کافی است زیرمجموعه‌های مثال بز نیم که اعضای آن جزو اعداد زوج بین -۱۲ و ۱۶ باشند، مثلاً مجموعه $\{-۸, -۲, ۲, ۴, ۶, ۱۴\}$. مجموعه موردنظر نیز حداکثر می‌تواند به تعداد اعداد زوج بین -۱۲ و ۱۶ یعنی

اعداد $-۱۲, -۱۰, -۸, -۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴$ که تعداد آن‌ها برابر ۱۴ تا است، عضو داشته باشد.

۲ $\{2, 3, 5, 7\}$. این مجموعه حداکثر می‌تواند به تعداد اعداد

اول بین ۱ و ۱۴ یعنی اعداد $۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳$ که تعداد آن‌ها برابر ۶ تا است، عضو داشته باشد.



۸ مشابه قسمت قبل داریم: $\frac{1}{۳^۱} = \frac{1}{۳}, \frac{1}{۳^۲} = \frac{1}{۹}, \frac{1}{۳^۳} = \frac{1}{۲۷}, \dots$

پس مجموعه به صورت روبه‌رو است: $\{\frac{1}{۳^n} | n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$

۹ $W = \{x | x + 1 \in \mathbb{N}\}$ یا $W = \{x - 1 | x \in \mathbb{N}\}$

۱۰ $Q = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

پاسخ ۲۷

۱ به جای x مقادیر ۱، ۲، ۳ و ... را قرار داده و مجموعه را به دست می‌آوریم، البته واضح است که مجموعه داده‌شده، مجموعه اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱ هستند:

$\Rightarrow A = \{2 \times 1 + 1, 2 \times 2 + 1, 2 \times 3 + 1, \dots\}$

$\Rightarrow A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

۲ مشابه قسمت قبل داریم:

$B = \{4 \times 1 - 2, 4 \times 2 - 2, 4 \times 3 - 2, 4 \times 4 - 2, \dots\}$

$\Rightarrow B = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, \dots\}$

۳ مجموعه داده‌شده، مجموعه اعداد صحیح از ۳- تا ۵ است، پس داریم:

$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

۴ به جای x مقادیر ۲، ۱۰، -۱، -۲ را قرار می‌دهیم، پس داریم:

$D = \{-2 - 1, -1 - 1, 0 - 1, 1 - 1, 2 - 1\}$

$\Rightarrow D = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

۵ $E = \{3 \times 0, 3 \times 3, 3 \times 4, 3 \times 9\}$

$\Rightarrow E = \{0, 9, 12, 27\}$

۶ ابتدا معادله داده‌شده را حل می‌کنیم.

$3x + 4 = 31 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9$

پس مجموعه داده‌شده، معادل مجموعه زیر است:

$F = \{x | x \in \mathbb{N}, x = 9\} \Rightarrow F = \{9\}$

۷ ابتدا معادله داده‌شده را حل می‌کنیم.

$(x^2 - 4)(3x^2 - 27) = 0$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2 \\ \text{یا} \\ 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = +3 \text{ یا } x = -3 \end{cases}$$

پس مجموعه داده‌شده معادل مجموعه زیر است:

$G = \{x \in \mathbb{Z} | x = 2 \text{ یا } x = -2 \text{ یا } x = 3 \text{ یا } x = -3\}$

$\Rightarrow G = \{-2, 2, 3, -3\}$

۴ چون $\{2, 3\} \subseteq A$ ، پس $2 \in A$ و $3 \in A$ ، به همین ترتیب چون

$\{\{2\}, 3\} \subseteq A$ ، پس رابطه $\{2\} \in A$ نیز برقرار است، بنابراین

مجموعه موردنظر به صورت $\{2, \{2\}, 3\}$ قابل نمایش است.

۵ چون $\{2, 3\} \in A$ ، پس A شامل عضو $\{2, 3\}$ است. از طرفی

چون $\{2, 3\} \subseteq A$ ، پس $2 \in A$ و $3 \in A$ و به همین ترتیب چون

$\{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} \subseteq A$ ، پس $\{2\} \in A$ و $\{3\} \in A$ ، بنابراین

مجموعه A مجموعه $\{2, 3, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ است.

پاسخ ۱۶

۱ مجموعه موردنظر برابر مضارب حسابی عدد ۲ است، پس به

صورت روبه‌رو قابل نمایش است: $\{2k | k \in \mathbb{W}\}$

۲ مجموعه داده‌شده برابر مضارب طبیعی عدد ۷ است، پس به

صورت روبه‌رو قابل نمایش است: $\{7k | k \in \mathbb{N}\}$

۳ مجموعه داده‌شده اعداد صحیح بین ۴- و ۶ هستند، پس مجموعه

به صورت روبه‌رو قابل نمایش است: $\{x | x \in \mathbb{Z}, -4 < x < 6\}$

۴ مجموعه داده‌شده اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۸- هستند، پس

به صورت روبه‌رو قابل نمایش است: $\{x | x \in \mathbb{Z}, x > -8\}$

۵ اعداد مجموعه داده‌شده ۴ تا ۴ تا در حال اضافه‌شدن هستند،

پس اعداد داده‌شده باید با مضارب طبیعی عدد ۴ رابطه خاصی

داشته باشند. حالا دقت کنید که:

$7 = 4 \times 1 + 3, 11 = 4 \times 2 + 3, 15 = 4 \times 3 + 3, 19 = 4 \times 4 + 3, \dots$

پس مجموعه موردنظر به صورت زیر قابل نمایش است:

$\{4k + 3 | k \in \mathbb{N}\}$

۶ اعداد موجود در صورت ۴ تا ۴ تا و اعداد موجود در مخرج ۳ تا

۳ تا در حال اضافه‌شدن هستند، پس مثل قسمت قبل الگوی اعداد

صورت و مخرج به صورت زیر به دست می‌آید:

$\dots = 4 \times 2 + 3, 11 = 4 \times 1 + 3, 7 = 4 \times 0 + 3, 3 = 4 \times 0 + 3$ اعداد صورت

اعداد مخرج: $2 = 3 \times 0 + 2, 5 = 3 \times 1 + 2, 8 = 3 \times 2 + 2,$

$\dots = 3 \times 3 + 2, 14 = 3 \times 4 + 2, \dots$

\Rightarrow مجموعه موردنظر: $\{\frac{4k+3}{3k+2} | k \in \mathbb{W}\}$

۷ دقت کنید که $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32$

و ...، پس مجموعه داده‌شده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$\{2^n | n \in \mathbb{N}\}$

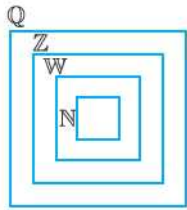
حالا با توجه به اعضای B می توان این مجموعه را به صورت زیر

$$B = \{3x + 2 \mid x \in \mathbb{W}, x < 3\}$$

هم نمایش داد:

۳ با توجه به معادله داده شده در مجموعه C می دانیم که x می تواند برابر هر یک از مقادیر ۲ یا -۲ باشد. از طرفی جواب های معادله $x^2 - 4 = 0$ هم اعداد +۲ و -۲ هستند، پس مجموعه C به صورت روبه رو هم قابل نوشتن است: $C = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$

پاسخ ۳۰



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

- ۱ درست است. ($\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$)
- ۲ نادرست است. ($\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$)
- ۳ نادرست است. ($\mathbb{W} \not\subseteq \mathbb{N}$)
- ۴ نادرست است. (چون $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، پس همه اعداد صحیح گویا اند.)
- ۵ درست است. ($\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$)
- ۶ نادرست است. (همه اعداد صحیح نامنفی، حسابی اند.)

پاسخ ۳۱

۱ ابتدا دو مجموعه داده شده را به همراه اعضایشان مشخص

$$A = \{0^2 - 2, 1^2 - 2, 2^2 - 2, \dots, 5^2 - 2\}$$

می کنیم:

$$\Rightarrow A = \{-2, -1, 2, 7, 14, 23\}$$

$$B = \{5 \times 3 - 3, 5 \times 4 - 3, \dots, 5 \times 9 - 3\}$$

$$\Rightarrow B = \{12, 17, 22, 27, 32, 37, 42\}$$

الف و ب چون A، ۶ عضو دارد، پس $2^6 = 64$ تا زیرمجموعه دارد و چون B دارای ۷ عضو است، پس تعداد زیرمجموعه هایش برابر $2^7 = 128$ تا است.

۲ با توجه به اعضای A برای به دست آوردن تعداد زیرمجموعه هایی که همه اعضا آن ها اول اند باید تعداد زیرمجموعه های مجموعه $\{2, 7, 23\}$ را به دست آوریم که این تعداد نیز برابر $2^3 = 8$ تا است، البته باید حواسمان باشد که \emptyset جزو مجموعه های قابل قبول نیست، پس پاسخ مسئله، برابر $8 - 1 = 7$ است.

۳ پاسخ مسئله برابر تعداد زیرمجموعه های مجموعه $\{12, 22, 32, 42\}$ به غیر از \emptyset است، که برابر است با $2^4 - 1 = 15$ تا.

پاسخ ۳۲

۱ چون تعداد زیرمجموعه های این مجموعه برابر $2^6 = 64$ تا

$$\text{است، پس داریم: } 2^{n+1} = 64 \Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$$

۸ به جای x مقادیرهای صحیح از -۴ تا -۲ را قرار می دهیم،

$$H = \left\{ \frac{-4-1}{-4+1}, \frac{-3-1}{-3+1}, \frac{-2-1}{-2+1} \right\}$$

پس داریم:

$$\Rightarrow H = \left\{ \frac{-5}{-3}, \frac{-4}{-2}, \frac{-3}{-1} \right\} \Rightarrow H = \left\{ \frac{5}{3}, 2, 3 \right\}$$

۹ ابتدا دقت کنید که چون $\frac{24}{x}$ باید صحیح باشد، بنابراین x

نیز حتماً باید جزو شمارنده های مثبت ($x \in \mathbb{N}$) عدد ۲۴ باشد، در نتیجه x می تواند برابر هر یک از مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲، ۲۴ باشد، پس مجموعه مورد نظر به صورت زیر به دست می آید:

$$I = \{1^2 - 1, 2^2 - 1, 3^2 - 1, 4^2 - 1, 6^2 - 1, 8^2 - 1, 12^2 - 1, 24^2 - 1\}$$

$$\Rightarrow I = \{0, 3, 8, 15, 35, 143, 575\}$$

۱۰ دقت کنید با توجه به مجموعه داده شده x می تواند برابر هر

یک از مقادیر ۲، ۴، ۵ و یا ۶ باشد و در نتیجه چون $y = x + 2$ ، پس y نیز به ازای x های داده شده مقادیر زیر را می گیرد:

$$x = 3 \Rightarrow y = 3 + 2 = 5, x = 4 \Rightarrow y = 4 + 2 = 6$$

$$x = 5 \Rightarrow y = 5 + 2 = 7, x = 6 \Rightarrow y = 6 + 2 = 8$$

پس مجموعه مورد نظر برابر است با:

$$g = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8} \right\} \Rightarrow g = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4} \right\}$$

پاسخ ۲۸

مجموعه های B، C و D را با اعضایشان مشخص کرده و سپس با هم مقایسه می کنیم.

B: چون $x^2 \leq 2$ و از بین اعضای A فقط اعداد -۱، ۰، ۱ و این خاصیت را دارند (که توان دوم آن ها کم تر یا مساوی ۲ است)، بنابراین مجموعه B برابر است با: $B = \{-1, 0, 1\}$

C: چون $-4 < x < 2$ ، پس داریم: $C = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ در پایان با توجه به مجموعه های به دست آمده نتیجه می گیریم که هیچ کدام از مجموعه های داده شده با هم برابر نیستند.

پاسخ ۳۱

۱ ابتدا مجموعه A را به دست می آوریم.

$$A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1\} \Rightarrow A = \{1, 3, 5\}$$

حالا مجموعه A را می توان به صورت زیر هم نمایش داد:

$$A = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 2\}$$

۲ x می تواند برابر هر یک از مقادیر ۰، -۱ و یا ۱ باشد، پس مجموعه B برابر است با:

$$B = \{3 \times (-1) + 5, 3 \times 0 + 5, 3 \times 1 + 5\} \Rightarrow B = \{2, 5, 8\}$$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول

۸ گزینه ب عددی گویا و غیر صحیح در نظر بگیرید، مثلاً $\frac{2}{3}$.
 حالا چون $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ و $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ پس $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ و این در حالی است که $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ پس $\mathbb{Q} - \mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$.

۹ گزینه د باید مجموعه‌های A و B را پیدا کنیم.
 در رابطه با مجموعه A دقت کنید که چون $\frac{4}{x} \in \mathbb{Z}$ پس x باید حتماً شمارنده 4 باشد؛ بنابراین x می‌تواند برابر هر یک از مقادیر $+1, -1, +2, -2, +4, -4$ باشد و در نتیجه داریم:

$$A = \{2 \times (-4), 2 \times (-2), 2 \times (-1), 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 4\}$$

$$\Rightarrow A = \{-8, -4, -2, 2, 4, 8\}$$

$$B = \{-4, -2, 0, 2, 4\} \quad \text{از طرفی B برابر است با:}$$

پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A - B = \{-8, 8\} \\ \text{و} \\ B - A = \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{-8, 0, 8\}$$

$$\Rightarrow n((A - B) \cup (B - A)) = 3$$

۱۰ گزینه الف با توجه به شکل داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = \{8, 4, 5, 10, 12\} \\ \text{و} \\ A \cap C = \{1, 8, 9\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cap B) - (A \cap C) = \{4, 5, 10, 12\}$$

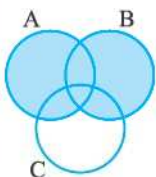
$$A - B = \{1, 3, 9, 6, 15\} \Rightarrow (A - B) - C = \{3, 6, 15\}$$

$$\Rightarrow X = \{3, 4, 5, 6, 10, 12, 15\}$$

$$\Rightarrow X \text{ مجموع اعضای } X = 3 + 4 + 5 + 6 + 10 + 12 + 15 = 55$$

۱۱ گزینه ج قسمت رنگ‌شده نمایشگر عضوهایی است که در A هستند ولی در B نیستند، که همان $A - B$ می‌باشد.

۱۲ گزینه ب $A \cup B$ به صورت مقابل است:



حالا اگر از قسمت رنگ‌شده، قسمت‌های رنگی که در دایره مربوط به مجموعه C است را حذف کنیم، به شکلی می‌رسیم که صورت سوال به ما داده است. پس پاسخ مسئله مجموعه $(A \cup B) - C$ است.

۱ گزینه د هیچ کدام از موارد مطرح‌شده در گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) شامل اعضای معلوم و مشخصی نیستند، اما می‌توان به کمک گزارش‌های هواشناسی روزهای بارانی سال ۱۳۹۶ (سال قبل) را تعیین کرد؛ پس گزینه «د» یک مجموعه به حساب می‌آید.

۲ گزینه ب بین دو عدد -1 و 1 هیچ عدد طبیعی‌ای وجود ندارد؛ پس این مجموعه همان مجموعه تهی است.

۳ گزینه ب $\{2, 8\}$ مجموعه است و چون $2 \in A$ و $8 \in A$ بنابراین $\{2, 8\} \subseteq A$ ، نه عضو A.

۴ گزینه د هر چهار عبارت داده‌شده صحیح‌اند.

۱ تهی زیرمجموعه هر مجموعه است.

۳ چون $\emptyset \in A$ ، پس $\{\emptyset\} \subseteq A$.

۲ و ۴ \emptyset و $\{\emptyset\}$ هر دو عضو مجموعه A هستند.

۵ گزینه ج چون k عضو \mathbb{Z} است، پس می‌توان به جای k

هر یک از مقادیر $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ را در رابطه $3k + 2$ قرار داد و مجموعه را به دست آورد، که در این صورت داریم:

$$k = -3 \Rightarrow 3k + 2 = -9 + 2 = -7$$

$$k = -2 \Rightarrow 3k + 2 = -6 + 2 = -4$$

$$k = -1 \Rightarrow 3k + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$k = 0 \Rightarrow 3k + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$k = 1 \Rightarrow 3k + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$k = 2 \Rightarrow 3k + 2 = 6 + 2 = 8$$

⋮

در نتیجه مجموعه موردنظر به صورت زیر است:

$$\{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

۶ گزینه الف چون x عددی حقیقی است و مربع آن باید از

۲ کوچک‌تر یا با آن مساوی باشد، پس x تنها می‌تواند مقدارهای $0, 1, -1$ را داشته باشد؛ بنابراین مجموعه A سه عضو دارد،

$$\text{یعنی } n(A) = 3$$

۷ گزینه ب چون $\{3a, 4a - b\} = \{3\}$ ، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 & (I) \\ \text{و} \\ 4a - b = 3 \xrightarrow{(I)} 4 - b = 3 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 1 + 1 = 2$$



گزینه **ب** $3+4+5=12$ در کل مهره در جعبه موجود است؛ پس $n(S)=12$.

از طرفی $3+5=8$ تا مهره داریم که آبی نیستند؛ پس احتمال موردنظر برابر می‌شود با:

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

گزینه **الف** تعداد کل حالت‌ها برای فرزندان این خانواده به صورت زیر به دست می‌آید: (d: دختر، p: پسر)

$$\{(p,p,p), (p,p,d), (p,d,p), (d,p,p), (p,d,d), (d,p,d), (d,d,p), (d,d,d)\} \Rightarrow n(S)=8$$

حالا با توجه به حالت‌های بالا، تعداد حالت‌های موردنظر مسئله برابر ۳ تا است؛ در نتیجه احتمال موردنظر برابر است با $\frac{3}{8}$.

گزینه **ب** تعداد کل حالت‌های پرتاب دو تاس برابر ۳۶ تا است. از طرفی حالت‌های مطلوب مسئله عبارت‌اند از:

$$\{(2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5), (5,2), (5,3), (5,5)\}$$

که تعداد آن‌ها برابر ۹ تا است. بنابراین احتمال موردنظر برابر است با $\frac{9}{36}$.

گزینه **ج** احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{4}{9}$ است. حالا چون A و B هم‌شانسی‌اند، بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد B نیز باید برابر $\frac{4}{9}$ باشد. در نتیجه تعداد اعضای مجموعه B نیز باید برابر ۴ تا باشد؛ پس B باید شامل اعداد ۴، ۵، ۶ و ۷ باشد و این یعنی: $a=8$

گزینه **د** چون $A \cap B = \{a\}$ و $A = \{a, b, c\}$ پس $a \in B$ ولی $b \notin B$ و $c \notin C$. از طرفی چون $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ پس $d \in B$ و $e \in B$ بنابراین مجموعه B برابر است با:

$$B = \{a, d, e\}$$

حالا دقت کنید که B سه عضو دارد، پس $2^3 = 8$ تا زیرمجموعه دارد که به غیر از زیرمجموعه‌های $\{d\}$ و \emptyset بقیه زیرمجموعه‌ها حداقل شامل یک حرف صدا دار هستند؛ پس پاسخ مسئله برابر می‌شود با:

$$8 - 2 = 6$$

گزینه **ج** چون مجموعه π عضو شامل ۳۲ تا زیرمجموعه است، پس داریم:

$$2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

بنابراین وقتی به مجموعه داده شده سه عضو جدید اضافه کنیم، به یک مجموعه هشت‌عضوی می‌رسیم که ۸ تا زیرمجموعه تک‌عضوی و یک زیرمجموعه صفرعضوی (\emptyset) دارد؛ بنابراین جواب مسئله برابر می‌شود با: $8 + 1 = 9$

گزینه **ج** هر فرد می‌تواند، در هر یک از روزهای شنبه، یکشنبه، ... و جمعه به دنیا بیاید، پس $n(S) = 7$ ؛ بنابراین احتمال موردنظر برابر است با: $\frac{1}{7}$

گزینه **ب** برای روشن اعداد یک تاس ۶ حالت مختلف وجود دارد؛ پس $n(S) = 6$.

از طرفی شمارنده‌های عدد ۴ عبارت‌اند از اعداد $\{1, 2, 4\}$ ؛ پس احتمال موردنظر برابر است با: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

پاسخ پرسش‌های فصل دوم

$$\frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{7}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{4+2-1}{4}}{\frac{7 \times 2 + 5 - 10}{20}} \div \frac{6 \times 3 + 2}{3} = \left(\frac{4}{9}\right) \div \frac{20}{3}$$

$$= \frac{5 \times \cancel{3}^0}{4 \times \cancel{9}^0} \times \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{3}^0} = \frac{5}{12}$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{-7}{6} \div \frac{8}{3} \times \frac{8}{9} + \frac{5}{3} = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{7}{6} \times \frac{\cancel{8}^1}{\cancel{8}^1}\right) \times \frac{8}{9} + \frac{5}{3}$$

$$= -\frac{3}{2} + \left(\frac{-7}{2 \times \cancel{3}^1}\right) \times \frac{\cancel{8}^1}{9} + \frac{5}{3} = -\frac{3}{2} - \frac{7}{18} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{-3 \times 9 - 7 + 5 \times 6}{18} = \frac{-27 - 7 + 30}{18} = \frac{-4}{18} = \frac{-2}{9}$$

پاسخ ۱

- ۱ بی‌شمار ۲ نمی‌توان ۳ $\{a \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
۴ متناوب ۵ مختوم ۶ ۲ و ۵

پاسخ ۲

با توجه به اولویت‌های محاسبه، حاصل هر بخش را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} & (-3 - \frac{3}{8} + \frac{5}{4}) \div (3 - \frac{1}{2} + 4) = (-3 - \frac{3}{8} + \frac{5}{4}) \div (\frac{7}{2} + 4) \\ & = (2 - \frac{3}{8} + \frac{1 \times 2}{4 \times 2}) \div (\frac{7 + 4 \times 2}{2}) = (2 + \frac{-3 + 2}{8}) \div (\frac{7 + 8}{2}) \\ & = (2 - \frac{1}{8}) \div (\frac{15}{2}) = (\frac{16 - 1}{8}) \div (\frac{15}{2}) = \frac{15}{8} \div \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{15}^1}{\cancel{8}^1} \times \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{15}^1} = \frac{1}{4}$$