

مقدمه مؤلف

و اما خان دوازدهم

دوران مدرسه با همهٔ خاطرات تلخ و شیرین، قهرها و آشتی‌ها، اشک‌ها و لبخندها آرام، آرام به روزهای آخرش نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و تو با اندوخته‌ای که از این سال‌ها کسب کرده‌ای، آمادهٔ ورود به مرحلهٔ جدیدی از زندگی خود می‌شوی؛ مرحله‌ای که در آن، جامعه از تو انتظار دارد تا خوب زندگی کنی و برای دیگران هم شرایط خوب زندگی کردن را فراهم کنی. انتخاب رشتهٔ علوم انسانی مسئولیت شما را در این مرحله دوجندان می‌کند. اکثر مشکلات و نابسامانی‌های موجود در جامعهٔ ما ریشه در کم‌توجهی و گاهاً بی‌توجهی به علوم انسانی دارد و ورود شما به این عرصه با اندیشه‌های نو، ما را به آینده امیدوارتر می‌کند. من در کنار خانوادهٔ بزرگ خیلی سبز، تمام تلاشمان را کردیم تا کتاب حاضر به بهترین شکل ممکن به دست شما عزیزان برسد و بتواند کمک حال شما در رسیدن به اهداف بزرگتان باشد.

چند توصیه برای استفاده مؤثر از این کتاب:

- ۱- لطفاً بدون قلم و کاغذ سراغ این کتاب نیایید.
- ۲- با توجه به پیوستگی مطالب ریاضی لطفاً از وسط یک فصل شروع به مطالعه نکنید.
- ۳- در مثال‌های حل‌شدهٔ درس‌نامه، بعد از بررسی کامل پاسخ سؤال، سعی کنید بار دوم بدون نگاه به پاسخ، آن را به طور کامل حل کنید.
- ۴- بعد از مطالعهٔ کامل درس‌نامه به سراغ نمونه سؤالات امتحانی آن بروید. در این مرحله با دقت خیلی زیاد صورت سؤال را بخوانید و هر چیزی که به ذهنتان می‌رسد را یادداشت کنید و سعی کنید با استفاده از آن‌ها به پاسخ مسئله برسید. در صورت نیاز، پاسخ‌های تشریحی این قسمت هم می‌تواند به شما کمک کند. لطفاً در این مرحله همان اول کار به سراغ پاسخ‌نامه نروید.
- ۵- سؤالاتی که در قسمت قبل به کمک پاسخ‌نامه حل کردید را علامت بزنید تا در فرصتی دیگر دوباره آن‌ها را حل کنید.
- ۶- بعد از مطالعه و تسلط روی هر فصل، می‌توانید آموخته‌های خودتان را با آزمون جمع‌بندی آخر فصل بسنجید. از خودتان آزمون بگیرید و سپس با اسکن QRcode موجود در شناسنامهٔ کتاب حل ویدیویی سؤالات آزمون را ببینید.

توصیه‌های مشاوره‌ای:

- ۱- استفاده از جملات با بار معنایی منفی مانند «ریاضی درس سختی است و من نمی‌توانم یاد بگیرم» را به طور کامل کنار بگذارید. حتی اگر سال‌های قبل نتیجهٔ مناسبی کسب نکرده‌اید.
- ۲- با مطالعهٔ مستمر در طول سال تحصیلی از انباشته‌شدن مطالب برای روزهای امتحان جلوگیری کنید.
- ۳- هر چند وقت یک بار به سؤالاتی که در حل آن‌ها دچار مشکل شده‌اید مراجعه و دوباره آن‌ها را بررسی کنید.

این اثر که حاصل کار گروهی افراد ارزشمندی با تخصص‌های مختلف از تایپ، صفحه‌بندی، ویراستاری، طراحی جلد، چاپ و ... است. (می‌توانید نام برخی از این دوستان ارزشمند را در صفحهٔ اول کتاب مشاهده کنید) که تلاش در کنار آن‌ها باعث افتخار من است. از تمامی تلاش‌های این عزیزان قدردانی می‌کنم و سپاسگزارم.

همیشه سبز باشید

فرشاد پورالیاس

فهرست

آمار و احتمال

۷	فصل اول: آمار و احتمال
۷	درس ۱: شمارش
۱۱	درس ۲: جایگشت
۱۸	درس ۳: ترکیب n تایی از n شیء
۲۳	درس ۴: پدیده‌های تصادفی و قطعی
۳۳	درس ۵: احتمال یک پیشامد
۳۹	درس ۶: چرخه آمار در حل مسائل (قسمت اول)
۴۶	درس ۷: چرخه آمار در حل مسائل (قسمت دوم)
۵۲	پاسخ سؤال‌های امتحانی

۶۴

فصل دوم: الگوهای خطی

الگوهای خطی

۶۴	درس ۱: مدل‌سازی و دنباله
۷۵	درس ۲: نمودار دنباله‌ها
۷۹	درس ۳: دنباله‌های حسابی
۸۳	درس ۴: ضابطه بازگشتی دنباله‌های حسابی
۸۹	پاسخ سؤال‌های امتحانی

الگوهای غیر خطی

۹۹	فصل سوم: الگوهای غیر خطی
۹۹	درس ۱: دنباله هندسی
۱۰۵	درس ۲: واسطه هندسی
۱۱۰	درس ۳: ریشه n ام و توان گویا
۱۱۶	درس ۴: تابع نمایی
۱۲۲	پاسخ سؤال‌های امتحانی

شماره صفحه امتحان

شماره صفحه پاسخ

۱۳۰	نمونه امتحان نیم‌سال اول: امتحان شماره ۱
۱۳۴	نمونه امتحان نیم‌سال اول: امتحان شماره ۲
۱۳۸	نمونه امتحان نیم‌سال دوم: امتحان شماره ۳ (خرداد ۱۴۰۱)
۱۴۱	نمونه امتحان نیم‌سال دوم: امتحان شماره ۴ (خرداد ۱۴۰۰)
۱۴۴	نمونه امتحان نیم‌سال دوم: امتحان شماره ۵ (شهریور ۱۴۰۰)
۱۴۷	نمونه امتحان نیم‌سال دوم: امتحان شماره ۶ (دی ۱۴۰۰)
۱۳۲	
۱۳۶	
۱۴۰	
۱۴۳	
۱۴۶	
۱۴۸	



شمارش



شمارش یعنی شمردن! فب، شمردن پی؟؟؟ شمردن تعداد حالت‌ها و انتخاب‌هایی که می‌تواند در هر مسئله‌ای اتفاق بیفتد. فب می‌شیم می‌شمریم!!!
 ای بابا در این درس می‌خواهیم تکنیک‌هایی برای شمارش سریع‌تر و دقیق‌تر حالت‌ها یاد بگیریم. توصیه من به شما قبل از وارد شدن به این درس این است که اصلاً در پاسخگویی به سؤالات عجله نکنید و در صورت نیاز چندین بار صورت سؤال را با صبر و حوصله بخوانید.

اصل جمع

در منوی یک کافی‌شاپ، سه نوع بستنی و چهار نوع قهوه وجود دارد و شما تصمیم دارید بستنی «یا» قهوه میل کنید. به چند طریق می‌توانید این انتخاب را انجام دهید؟

با توجه به این که فقط یک نوع بستنی یا یک نوع قهوه انتخاب خواهید کرد، کافی است تعداد بستنی‌ها را با تعداد قهوه‌ها جمع کنید؛ یعنی شما $3 + 4 = 7$ انتخاب دارید. در این سؤال ما از اصل جمع استفاده کردیم.

اصل جمع: اگر عملی را بتوان به m طریق و عمل دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، به طوری که این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، آن‌گاه به $m + n$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد.

توجه: قبل از استفاده از اصل جمع در صورت سؤال به دنبال لفظ «یا» و یا مفهومی باشید که این دو عمل هم‌زمان انجام نشوند.

مثال: می‌تواند به چند طریق می‌تواند فقط یک تبلت «یا» یک گوشی از بین ۱۲ تبلت و ۱۵ گوشی موجود در فروشگاه خریداری کند؟

پاسخ: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده است. هم‌چنین با توجه به صورت سؤال فقط یکی از دو عمل خرید تبلت یا خرید گوشی اتفاق خواهد افتاد؛ پس با توجه به اصل جمع $12 + 15 = 27$ حالت خرید برای می‌تواند از این فروشگاه وجود دارد.

مثال: دبیر ورزش قصد دارد از ۷ نفر دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۱۲ نفر دانش‌آموز پایه یازدهم فقط یک نفر را به عنوان سرگروه ورزشی انتخاب کند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

پاسخ: در این سؤال خبری از لفظ «یا» نیست. اما با توجه به این که فقط یک نفر قرار است از پایه دوازدهم یا یازدهم انتخاب شود و این عمل نمی‌تواند هم‌زمان اتفاق بیفتد (یعنی سرگروه انتخاب‌شده نمی‌تواند هم از پایه یازدهم و هم از پایه دوازدهم باشد)، با توجه به اصل جمع تعداد نفرات هر دو پایه را با هم جمع می‌کنیم.

$$7 + 12 = 19$$

۱۹ حالت برای انتخاب سرگروه وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اصل جمع را می‌توان برای بیشتر از دو عمل نیز به کار برد. به شرطی که این عمل‌ها را نتوانیم هم‌زمان انجام دهیم.

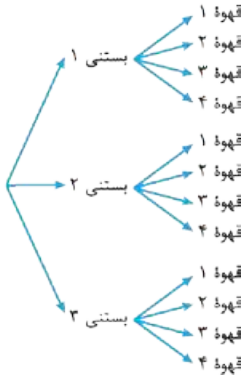
مثال می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟

پاسخ با توجه به این که قرار است یک خودرو از این سه نوع خودرو انتخاب شود و این کار نمی‌تواند هم‌زمان اتفاق بیفتد (خودروی انتخاب‌شده سواری یا وانت یا کامیون است) طبق اصل جمع داریم:

$$10 + 12 + 6 = 28$$

انتخاب یک خودرو از خودروهای موجود به ۲۸ طریق ممکن است.

اصل ضرب



دوباره به همان کافی‌شاپی که ۳ نوع بستنی و ۴ نوع قهوه داشت می‌رویم و این بار شما قصد دارید یک نوع بستنی «و» یک نوع قهوه میل کنید. به چند طریق می‌توانید این انتخاب را انجام دهید؟

برای روشن‌تر شدن موضوع، بستنی‌ها و قهوه‌های موجود را شماره‌گذاری می‌کنیم و آن‌ها را در نمودار درختی نمایش می‌دهیم.

برای رسم نمودار درختی، ابتدا در مرحله اول بستنی‌ها را نوشتیم (انتخاب بستنی) و در مرحله دوم قهوه‌ها را قرار دادیم (انتخاب قهوه). با توجه به نمودار در کل ۱۲ حالت داریم که با ضرب کردن تعداد بستنی‌ها در تعداد قهوه‌ها، تعداد حالت‌های انتخاب یک نوع بستنی و یک نوع قهوه به دست می‌آید. $3 \times 4 = 12$ یعنی کسی که بستنی «۱» را انتخاب می‌کند، ۴ حالت برای انتخاب قهوه دارد. روشی که در به دست آوردن تعداد حالت‌ها استفاده کردیم اصل ضرب نام دارد.

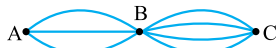
برای درک بهتر اصل ضرب به کافی‌شاپ مهلتون برید و انواع بستنی «و» قهوه‌ها رو میل کنید و تعداد حالت‌ها رو بشمیرید و بعد با دندانه‌های ترک‌فورده به دندان‌پزشکی مراجعه کنید. 😊

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» مرحله دوم به n طریق انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است.

توجه قبل از استفاده از اصل ضرب در صورت سؤال به دنبال لفظ «و» یا مفهومی باشید که انتخاب‌ها مرحله‌به‌مرحله انجام شود.

مثال میترا به چند طریق می‌تواند یک تبلت «و» یک گوشی از بین ۱۲ تبلت و ۱۵ گوشی موجود در فروشگاه خریداری کند؟

پاسخ در صورت مسئله لفظ «و» بین تبلت و گوشی مشاهده می‌شود. هم‌چنین با توجه به صورت مسئله، در مرحله اول بایستی تبلت و در مرحله دوم گوشی انتخاب شود؛ پس طبق اصل ضرب $12 \times 15 = 180$ انتخاب برای خرید یک گوشی و یک تبلت برای میترا وجود دارد.



مثال با توجه به شکل مقابل به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟

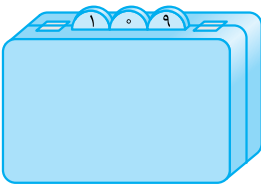
پاسخ برای سفر از شهر A به C، در مرحله اول از A به B (۳ حالت) و در مرحله دوم از B به C (۴ حالت) را باید طی کرد. پس طبق

$$3 \times 4 = 12$$

↓ ↓
 مسیرها از مسیرها از
 B به A C به B

اصل ضرب:

تعمیم اصل ضرب: اصل ضرب را می‌توان برای بیشتر از دو عمل نیز به کار برد به شرطی که هر کدام از آن‌ها مرحله‌به‌مرحله انجام بگیرد.



مثال تعداد حالت‌های ممکن برای رمزگذاری کیف مقابل را به دست آورید. رمز این کیف شامل سه

رقم است که هر کدام می‌تواند یکی از رقم‌های صفر تا ۹ باشد.

پاسخ تعداد ارقام صفر تا ۹ برابر ۱۰ است. برای رمزگذاری این کیف هر کدام از قسمت‌ها مرحله‌به‌مرحله باید انجام گیرد. پس طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های هر کدام از مراحل را در هم ضرب می‌کنیم.

$$10 \times 10 \times 10 = 1000$$

مثال تعداد حالت‌های پاسخگویی به پنج سؤال یک آزمون چهارگزینه‌ای را در شرایط زیر به دست آورید.

(الف) پاسخگویی به سؤالات اجباری باشد. (ب) پاسخگویی به سؤالات اختیاری باشد.

پاسخ (الف) پاسخگویی به سؤالات اجباری است و آزمون چهارگزینه‌ای یعنی حتماً یکی از گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) انتخاب خواهند شد؛ پس هر سؤال ۴ حالت دارد و هم‌چنین به سؤالات مرحله‌به‌مرحله پاسخ داده می‌شود. طبق اصل ضرب داریم:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$$

(ب) پاسخگویی به سؤالات اختیاری است، یعنی علاوه بر گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) یک حالت دیگر پاسخ‌ندادن به سؤال (اختیاری است و اجباری نیست) اضافه می‌شود. پس برای هر سؤال ۵ حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$$

سؤال‌های امتحانی

۹- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) در جایگشت r تایی از n شیء متمایز جابه‌جایی اشیا اهمیت ندارد.

ب) تعداد جایگشت‌های r تایی n شیء متمایز برابر $\frac{n!}{(n-r)!}$ است.

۱۰- جاهای خالی را کامل کنید.

الف) هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۵ شیء متمایز را یک از آن ۵ شیء می‌نامیم.

(نوبتی شهریور ۱۴۰۰)

ب) تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر است.

(نوبتی دی ۹۹ و فرورد ۱۴۰۰)

پ) انتخاب r شیء از n شیء وقتی ترتیب و جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم باشد، r تایی از n شیء نامیده می‌شود.

(نوبتی فرورد ۱۴۰۰)

ت) حاصل عبارت $P(2, 2)$ برابر است.

۱۱- با توجه به حروف انگلیسی A, B, C, D, E و F به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) تعداد کل جایگشت‌های این ۶ حرف را به دست آورید.

ب) تعداد جایگشت‌های ۶ تایی که A و B کنار هم باشند را به دست آورید.

پ) تعداد جایگشت‌های ۶ تایی که D دقیقاً بعد از C بیاید را به دست آورید.

۱۲- ۳ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به طوری که:

الف) دانش‌آموزان پایه یازدهم در کنار هم باشند.

ب) دانش‌آموزان پایه یازدهم در کنار هم و دانش‌آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند.

پ) دانش‌آموزان پایه یازدهم و پایه دوازدهم یک‌درمیان در صف بایستند.

۱۳- با حروف کلمه «برجام» و بدون تکرار حروف: (بامعنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «م» ختم شود؟

ت) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ب» شروع و به «ج» ختم شوند؟

۱۴- با حروف کلمه «انسانی» چند کلمه ۶ حرفی متمایز می‌توان نوشت؟

(نوبتی شهریور ۹۹)

۱۵- با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف: (بامعنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «د» ختم شوند؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟

۱۶- در یک لیگ فوتبال با ۱۴ تیم که بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، چند بازی باید انجام شود؟

۱۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

پ) $P(5, 3)$

ب) $P(4, 4)$

الف) $P(6, 2)$

(نوبتی فرورد ۹۹)

۱۸- با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۷، ۸ و ۹ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(نوبتی دی ۹۹)

۱۹- با ارقام ۱، ۲، ۴، ۷، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰ چند عدد سه‌رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(نوبتی شهریور ۹۸)

۲۰- به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهاررقمی ساخت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست).

۲۱- ارقام ۱ تا ۹ مفروض است. (بدون تکرار ارقام)

الف) چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

(نوبتی دی ۹۷)

ب) چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۲۲- با ارقام ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ چند عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که:

الف) عدد زوج باشد.

ب) عدد مضرب ۵ باشد.

ت) عدد بزرگ‌تر از ۶۰۰ باشد.

۲۳- با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷ و ۸ چند عدد چهاررقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که:

الف) عدد زوج باشد.

ب) عدد مضرب ۵ باشد.

ت) عدد بزرگ‌تر از ۶۰۰۰ باشد.

می‌خواهیم از یک کلاس ۱۵ نفره دو نفر انتخاب کنیم که ترتیب یا جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم نباشد. برای مثال در انتخاب‌هایمان اگر علی و سپس محمد انتخاب شود با این که اول محمد و سپس علی انتخاب شود فرقی ندارد. در این مثال، تعداد انتخاب‌های ۲ نفر از ۱۵ نفر که ترتیب یا جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم نباشد، ترکیب ۲ تا از ۱۵ تا نامیده می‌شود.

تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء در صورتی که ترتیب یا جابه‌جایی اشیا در انتخاب‌ها مهم نباشد، ترکیب r شیء از n شیء نامیده می‌شود. (r ≤ n) و برابر $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ است و آن را با نماد C_r^n یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

مثال: از یک کلاس ۱۴ نفره به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد؟

پاسخ: مدّ نظر سؤال به دست آوردن تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۱۴ نفر است. برای مشخص شدن اهمیت ترتیب و جابه‌جایی در انتخابمان یک انتخاب فرضی انجام می‌دهیم.

علی، قلی، ولی ← اعضای انتخابی را جابه‌جا می‌کنیم. ← قلی، ولی، علی
 جابه‌جا کردن اعضای انتخاب‌شده تغییری در انتخابمان به وجود نیاورد، ما می‌خواستیم سه نفر انتخاب کنیم که کردیم. این که کدام یک از افراد اول یا دوم انتخاب شوند مهم نیست، پس با قراردادن r = ۳ و n = ۱۴ در رابطه $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ داریم:

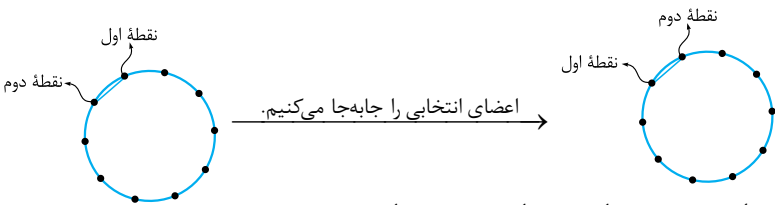
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \Rightarrow \binom{14}{3} = \frac{14!}{(14-3)!3!} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{\cancel{14}! \times 12 \times 13 \times 14}{\cancel{14}! \times 3!} = \frac{12 \times 13 \times 14}{1 \times 1 \times 1} = 364$$

مثال: با ۱۰ نقطه روی یک دایره:

(الف) چند وتر متمایز می‌توان رسم کرد؟

(ب) چند چهارضلعی متمایز می‌توان رسم کرد؟

پاسخ: الف) برای رسم هر وتر به دو نقطه روی دایره نیاز داریم. تعداد انتخاب‌های ۲ نقطه از ۱۰ نقطه را به دست می‌آوریم.

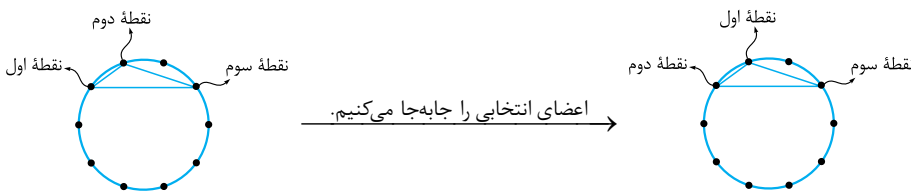


هواستون باشه اون‌هایی که انتخاب کردین رو بابه یا کینین. نلکه یهو نقطه‌هایی که انتخاب کردین رو عوض کینین!!!

با توجه به شکل با جابه‌جا کردن دو نقطه انتخاب‌شده وتر جدیدی به دست نمی‌آید، پس ترتیب و جابه‌جایی انتخاب‌ها مهم نیست. در نتیجه:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{\cancel{10}! \times 9 \times 10}{\cancel{10}! 2!} = \frac{9 \times 10}{1 \times 2} = 45$$

ب) برای رسم هر مثلث به سه نقطه روی دایره نیاز داریم.



با جابه‌جا کردن سه نقطه انتخاب‌شده، مثلث دیگری ایجاد نمی‌شود (ترتیب مهم نیست)، برای به دست آوردن تعداد مثلث‌های متمایز،

ترکیب ۳ نقطه از ۱۰ نقطه را به دست می‌آوریم:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{\cancel{10}! \times 8 \times 9 \times 10}{\cancel{10}! 3!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{1 \times 1 \times 1} = 120$$

پ) برای به دست آوردن تعداد چهارضلعی‌های متمایز ترکیب ۴ نقطه از ۱۰ نقطه را به دست می‌آوریم.

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{\cancel{10}! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{\cancel{10}! \times 1 \times 1 \times 1 \times 1} = 210$$

تعداد همهٔ پیشامدهای یک فضای نمونه Ω عضو برابر 2^n است. (چون یک مجموعهٔ Ω عضو دارای 2^n زیرمجموعه است.)

مثال: تمام پیشامدهای مربوط به پرتاب یک سکه را بنویسید.

پاسخ: فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه به صورت $S = \{R, P\}$ است. هر کدام از زیرمجموعه‌های S ، یک پیشامد از این آزمایش است برای مشخص کردن تمام پیشامدهای آن تمام زیرمجموعه‌های $S = \{R, P\}$ را می‌نویسیم:

فضای نمونه، ۲ عضو است، پس تعداد پیشامدها $2^2 = 4$ است.

مثال: تعداد پیشامدهای ممکن در پرتاب یک تاس را به دست آورید.

پاسخ: فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس به صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و دارای ۶ عضو است. تعداد پیشامدهای ممکن برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S است. مجموعهٔ S ، ۶ عضو است و تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $2^6 = 64$ است. (تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ Ω عضو برابر 2^n است.)

مثال: بر روی سه کارت حروف a ، b و c را نوشته‌ایم و در داخل کیسه‌ای قرار داده‌ایم. به تصادف یکی از کارت‌ها را از کیسه خارج می‌کنیم. تمام پیشامدهای دوعضوی این پدیدهٔ تصادفی را بنویسید.

پاسخ: فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی به صورت $S = \{a, b, c\}$ است. برای نوشتن پیشامدهای دوعضوی آن کافی است زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ S را بنویسیم:

مثال: سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم (یا دو سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم):

(الف) فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را با اعضایش مشخص کنید. (ب) پیشامد این که فقط یک بار رو بیاید را مشخص کنید.

(پ) پیشامد این که حداقل یک بار رو بیاید را مشخص کنید. (ت) پیشامد این که حداکثر یک بار رو بیاید را مشخص کنید.

پاسخ: الف) برای هر سکه ۲ حالت وجود دارد. طبق اصل ضرب $n(S) = 2 \times 2 = 4$ ، اولش تعدادش حساب کن تا تو نوشتن فضای نمونهٔ پیروی از قلم نیفته.

$S = \{(R, R), (R, P), (P, R), (P, P)\}$

$\{(R, P), (P, R)\}$

ب) اونایی که فقط به R دارند رو انتخاب کن.

پ) حداقل یک بار «رو» یعنی کم‌ترین تعداد «رو» یک بار باشد (دو بار می‌تونه باشه)، پس اونایی که ۱ یا ۲ دارند رو از فضای نمونه انتخاب کن.

$\{(R, P), (P, R), (R, R)\}$

ت) حداکثر یک بار «رو» یعنی بیشترین تعداد «رو» یک بار باشد (می‌تونه اصلاً رو نداشته باشه)، پس اونایی که ۱ یا صفر، دارند رو از فضای نمونه

$\{(R, P), (P, R), (P, P)\}$

انتخاب کن.

مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است:

(الف) فضای نمونهٔ جنسیت فرزندان این خانواده را مشخص کنید.

(ب) پیشامد این که این خانواده یک دختر داشته باشد را بنویسید.

(پ) پیشامد این که این خانواده دو دختر داشته باشد را بنویسید.

(ت) پیشامد این که این خانواده حداقل دو دختر داشته باشد را بنویسید.

(ث) پیشامد این که این خانواده حداکثر یک دختر داشته باشد را بنویسید.

(ج) پیشامد این که این خانواده یک درمیان دختر و پسر داشته باشد را بنویسید.

(چ) پیشامد این که فرزند اول پسر و فرزند دوم دختر باشد را بنویسید.

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

پاسخ: الف) برای هر فرزند دو حالت (دختر - پسر) وجود دارد، پس طبق اصل ضرب:

$S = \{(P, P, P), (P, P, D), (P, D, P), (P, D, D), (D, P, P), (D, P, D), (D, D, P), (D, D, D)\}$

$\{(D, P, P), (P, D, P), (D, P, D)\}$

ب) از فضای نمونه اون‌هایی که فقط یک دختر دارند را انتخاب می‌کنیم.

$\{(D, D, D), (D, P, D), (D, D, P)\}$

$\{(D, D, D), (D, P, D), (D, D, P)\}$

ت) حداقل دو تا دختر یعنی اون‌هایی که ۲ تا یا ۳ تا دختر دارند.

ث) حداکثر یک دختر یعنی اون‌هایی که یک دختر دارند یا هیچ دختری ندارند.

$\{(D, P, P), (P, D, P), (D, P, D)\}$

$\{(D, P, P), (P, D, P)\}$

$\{(P, D, D), (D, D, P)\}$

توجه: در سؤالات مربوط به تاس، همواره دو تاس را متمایز در نظر می‌گیریم (با رنگ‌های مختلف)؛ یعنی حالت $(1, 2)$ و $(2, 1)$ یکسان نیستند.

مثال: در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

- (الف) مجموع دو عدد رو شده برابر ۳ باشد.
 (ب) مجموع دو عدد رو شده برابر ۸ باشد.
 (ت) حاصل ضرب دو عدد رو شده برابر ۹ باشد.
 (ث) حاصل ضرب دو عدد رو شده برابر ۱۲ باشد.
 (ج) حاصل ضرب دو عدد رو شده برابر ۲۸ باشد.

پاسخ: الف

ب

پ

ت

ث

ج

- $\{(1, 2), (2, 1)\}$
 $\{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
 $\{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$
 $\{(3, 3)\}$
 $\{(2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

پیشامد نشدنی (\emptyset) است.

۴ اعمال بر روی پیشامدها فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند. در این صورت طبق جدول زیر اجتماع، اشتراک و تفاضل پیشامدها را تعریف می‌کنیم.

اعمال روی پیشامدها	نمودار ون	نمایش مجموعه‌ای	نمایش توصیفی
اجتماع دو پیشامد A و B ($A \cup B$)		$\{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$ علامت \vee یا	پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا B رخ بدهد. (حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد).
اشتراک دو پیشامد A و B ($A \cap B$)		$\{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$ علامت \wedge و	پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A و B رخ بدهد. (پیشامدهای A و B هر دو رخ دهند).
تفاضل B از A ($A - B$)		$\{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B اتفاق نیفتد.
تفاضل A از B ($B - A$)		$\{x \in S \mid x \in B \wedge x \notin A\}$	پیشامد $B - A$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد B رخ دهد و پیشامد A اتفاق نیفتد.
متمم پیشامد A (A')		$\{x \in S \mid x \notin A\}$	پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

توجه:

۱ دو پیشامد A و A' هیچ‌گاه با هم رخ نمی‌دهند (اشتراک دو پیشامد A و A' برابر تهی است) و اجتماع دو پیشامد A و A' برابر فضای نمونه است.
 $A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = S$

۲ برای این که پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی رخ دهد.

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامد روشن شدن عددی زوج را با A و پیشامد روشن شدن عددی بزرگ‌تر از ۳ را با B در نظر می‌گیریم. ابتدا

مفهوم پیشامدهای زیر را به زبان فارسی بنویسید؛ سپس هر کدام از پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

- (الف) $A \cap B$ (ب) $A \cup B$ (پ) $A - B$
 (ت) $B - A$ (ث) A'

پاسخ: فضای نمونه پرتاب یک تاس به صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است و پیشامد A (روشن شدن عددی زوج) $A = \{2, 4, 6\}$ و پیشامد B (عددی بزرگ‌تر از ۳) $B = \{4, 5, 6\}$ است.

۴۹- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید.

الف) A و A' را دو پیشامد می‌نامند و $P(A') =$ است.

ب) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، در این صورت $P(A \cup B) =$ است.

(نهایی فرورد ۱۴۰۰ و شهریور ۱۴۰۰)

پ) احتمال پیشامد نشدنی برابر و احتمال پیشامد حتمی برابر است.

ت) احتمال پیشامد A از فضای نمونه همواره عددی بین و است.

ث) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S و $A \subseteq B$ باشد، در این صورت احتمال پیشامد B از احتمال پیشامد A است.

ج) اگر $P(A) = 0/3$ باشد، در این صورت $P(A')$ برابر است.

(نهایی دی ۹۸)

۵۰- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب) احتمال آن که سکه «پشت» و تاس عددی زوج بیاید را به دست آورید.

پ) احتمال آن که عدد ظاهر شده برای تاس حداکثر ۳ باشد را به دست آورید.

(نهایی فرورد ۹۹)

۵۱- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبه احتمال این که عدد تاس حداکثر ۳ یا سکه «رو» بیاید. (نهایی فرورد ۹۹)

۵۲- احتمال این که ریحانه امشب سریال را تماشا نکند برابر $\frac{32}{99}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال این که ریحانه سریال را تماشا کند.

(نهایی شهریور ۹۹)

۵۳- در پرتاب دو تاس مطلوب است:

الف) احتمال این که مجموع دو عدد رو شده برابر ۵ باشد.

ب) احتمال این که حاصل ضرب دو عدد رو شده برابر ۲۴ باشد.

پ) احتمال این که مجموع دو تاس مضرب ۶ باشد.

ت) احتمال این که مجموع دو عدد رو شده بزرگ‌تر از ۱۰ نباشد.

۵۴- خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است.

الف) فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب) احتمال آن که هر دو فرزند از یک جنس باشند را به دست آورید.

(نهایی فرورد ۹۸)

پ) احتمال آن که حداکثر یک فرزند پسر باشد را به دست آورید.

۵۵- خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) فضای نمونه‌ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب) مطلوب است احتمال آن که هر سه فرزند از یک جنسیت نباشند.

(نهایی دی ۹۷ و فرورد ۹۹)

۵۶- در خانواده‌ای با چهار فرزند مطلوب است:

الف) احتمال این که فرزند اول دختر و فرزند دوم پسر باشد.

ب) احتمال این که سه فرزند آخر هم جنس باشند.

(نهایی دی ۹۹)

۵۷- یک تاکسی دارای ۴ سرنشین است، مطلوب است محاسبه احتمال این که هر ۴ نفر در ماه خرداد متولد شده باشند.

۵۸- برای ۴ نفر که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، مطلوب است:

الف) احتمال این که تولد هر ۴ نفر در آذرماه باشد.

ب) احتمال این که تولد هر ۴ نفر در یک ماه خاص باشد.

پ) احتمال این که تولد هیچ کدام در یک ماه نباشد.

ت) احتمال این که تولد هر ۴ نفر در روز دوشنبه باشد.

ث) احتمال این که تولد هر ۴ نفر در یک روز خاص هفته باشد.

ج) احتمال این که تولد هر ۴ نفر در روز ۱۲ آذر باشد. (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید).

۵۹- هر یک از اعداد فرد طبیعی ۱ تا ۱۵ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال این که عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

(نهایی شهریور ۹۹)

۶۰- از بین ۲ دانش‌آموز رشته ریاضی، ۳ دانش‌آموز رشته تجربی و ۲ دانش‌آموز رشته انسانی، ۳ دانش‌آموز را به تصادف برای اردوی مشهد انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش‌آموز انتخاب شود؟

(نهایی فرورد ۱۴۰۰)

۶۱- از جعبه‌ای شامل ۷ مهره قرمز و ۳ مهره سفید، ۳ مهره را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است احتمال این که دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

(نهایی دی ۹۸)



دنباله هندسی



در فصل گذشته با دنباله‌هایی که با جمع شدن هر جمله با یک مقدار ثابت (اختلاف مشترک) جمله بعدی به دست می‌آید، آشنا شدیم (دنباله‌های حسابی). شاید این به ذهنتان می‌رسید که خب تکلیف آن‌هایی که با ضرب شدن هر جمله در یک مقدار ثابت، جمله بعدی به دست می‌آید چه می‌شود؟ انگار این قهقهه سر دراز دارد. این شما و این هم ادامه مبحث دنباله‌ها ...

دنباله‌های هندسی



به دنباله‌هایی که هر جمله از ضرب شدن مقداری ثابت در جمله قبلی‌اش به دست می‌آید، دنباله‌های هندسی گفته می‌شود. این مقدار ثابت می‌تواند عددی مثبت یا منفی باشد. به دنباله‌های زیر توجه کنید:

الف $2, 6, 18, 54, \dots$

(Diagram showing multiplication by 3: 2 x 3 = 6, 6 x 3 = 18, 18 x 3 = 54)

با ضرب شدن هر جمله در ۳، جمله بعدی به دست آمده است:

ب $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$

(Diagram showing multiplication by -1/3: 1 x (-1/3) = -1/3, -1/3 x (-1/3) = 1/9, 1/9 x (-1/3) = -1/27)

با ضرب شدن هر جمله در $-\frac{1}{3}$ ، جمله بعدی به دست آمده است:

پ $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}, \dots$

(Diagram showing multiplication by 1: sqrt(5) x 1 = sqrt(5), sqrt(5) x 1 = sqrt(5), sqrt(5) x 1 = sqrt(5))

با ضرب شدن هر جمله در ۱، جمله بعدی به دست آمده است:

به مقدار ثابت ضرب شده در هر مرحله، نسبت مشترک دنباله هندسی می‌گوییم و معمولاً آن را با حرف انگلیسی r نمایش می‌دهیم.

در مثال (الف)، نسبت مشترک برابر ۳، در قسمت (ب) برابر $\frac{1}{3}$ و در قسمت (پ) برابر ۱ است. در واقع مقدار ثابت ضرب شده در هر مرحله یعنی r برابر نسبت دو جمله متوالی (نسبت هر جمله، به جمله قبلی‌اش) دنباله هندسی است و چون این نسبت در هر دو جمله متوالی یکسان است به آن نسبت مشترک گفته می‌شود. از این روش نیز می‌توان در تشخیص دنباله‌های هندسی استفاده کرد؛ یعنی نسبت جمله‌های متوالی دنباله را به دست می‌آوریم و اگر در هر دو جمله متوالی این مقدار یکسان بود، یک دنباله هندسی داریم:

جمله چهارم جمله سوم جمله دوم جمله اول

$2, 6, 18, 54, \dots$

(Diagram showing ratios: 6/2 = 3, 18/6 = 3, 54/18 = 3)

برای مثال (الف) داریم:

نسبت جمله دوم به اول $\frac{6}{2} = 3$

نسبت جمله سوم به دوم $\frac{18}{6} = 3$

نسبت جمله چهارم به سوم $\frac{54}{18} = 3$

توجه: در دنباله‌های هندسی جمله اول و نسبت مشترک نمی‌توانند برابر صفر باشند.

مثال دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و در هر قسمت نسبت مشترک آن‌ها را نیز به دست آورید.

الف) $2, 7, 12, 17, \dots$

ب) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$

پ) $1, 1, 2, 3, 5, \dots$

ت) $5, 0, 0, 0, 0, \dots$

ث) $\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

پاسخ

الف) $2, 7, 12, 17, \dots$

نسبت a_2 به $a_1 = \frac{7}{2}$

دنباله، دنباله هندسی نیست. $\frac{7}{2} \neq \frac{12}{7}$ نسبت a_3 به a_2

جملات در هر مرحله با ۵ جمع شدند، پس دنباله حسابی است.

ب) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$

نسبت a_2 به $a_1 = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$

نسبت a_3 به $a_2 = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}$

نسبت a_4 به $a_3 = \frac{\frac{2}{81}}{\frac{2}{27}} = \frac{1}{3}$

دنباله، دنباله هندسی و نسبت مشترک آن $r = \frac{1}{3}$ است. (جملات در هر مرحله در $\frac{1}{3}$ ضرب شدند، پس دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{3}$ است.)

پ) $1, 1, 2, 3, 5, \dots$

نسبت a_2 به $a_1 = \frac{1}{1} = 1$

نسبت a_3 به $a_2 = \frac{2}{1} = 2$

$1 \neq 2$

دنباله هندسی نیست.

ت) $5, 0, 0, 0, 0, \dots$

نسبت a_2 به $a_1 = \frac{0}{5} = 0$

نسبت a_3 به $a_2 = \frac{0}{0}$

نسبت a_4 به $a_3 = \frac{0}{0}$

مخرج کسرها برابر صفر شده است. (مگه می‌شه مخرج کسری برابر صفر بشه؟)

دنباله هندسی نیست.

ث) $\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

نسبت a_2 به $a_1 = \frac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = 1$

نسبت a_3 به $a_2 = \frac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = 1$

نسبت a_4 به $a_3 = \frac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = 1$

دنباله هندسی با نسبت مشترک $r = 1$ است.

جمله عمومی یا nام دنباله‌های هندسی با در نظر گرفتن جمله اول a_1 و نسبت مشترک r می‌توانیم جمله n ام دنباله‌های هندسی را

مشخص کنیم.

شماره جمله	۱	۲	۳	۴	۵	...	n	...
مقدار جمله	a_1	$a_1 r$	$a_1 r^2$	$a_1 r^3$	$a_1 r^4$...	$a_1 r^{n-1}$...

$\xrightarrow{\times r}$ $\xrightarrow{\times r}$ $\xrightarrow{\times r}$ $\xrightarrow{\times r}$

با توجه به شماره جمله و مقدار جمله، توان نسبت مشترک (r) همواره از شماره جمله یکی کمتر است، پس جمله n ام دنباله‌های هندسی به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

پس هر جمله دنباله‌های هندسی را می‌توان به صورت حاصل ضرب جمله اول در نسبت مشترک به توان یکی کمتر از شماره آن نوشت. با در نظر گرفتن جمله اول a_1 و نسبت مشترک r داریم:

$a_2 = a_1 r^1$ ، $a_3 = a_1 r^2$
 یکی کمتر یکی کمتر

سؤال‌های امتحانی

۱۶- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید.

(الف) اگر a_n و a_m دو جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی باشند، در این صورت حاصل $\frac{a_m}{a_n}$ برابر r به توان است.

(ب) اگر a, b و c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، رابطهٔ بین آن‌ها برقرار است و b را میان a و c می‌نامند.
 (پ) با قراردادن n جمله میان دو عدد a و b (شروع از a و ختم به b) دنبالهٔ هندسی با نسبت مشترک r^{n+1} به دست می‌آید.
 (ت) مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و نسبت مشترک r از رابطهٔ به دست می‌آید.

(نهایی دی ۹۹)

۴, ۱۲,, ۱۰۸,,

(نهایی فرورد ۹۹)

۷,,, ۱۱۲

(نهایی شهریور ۱۴۰۰)

۱۹- اگر $x+3, x+4, x-3$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقادیر x را به دست آورید.

(نهایی دی ۱۴۰۰)

۲۰- اگر $\sqrt{x}+2, \sqrt{x}-2, 3$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

(نهایی شهریور ۹۹)

۲۱- اگر $x+3, x+2, x$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشد، مقدار x را به دست آورید.

۲۲- یک واسطهٔ هندسی مثبت بین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{75}$ مشخص کنید.

۲۳- بین دو عدد $\frac{1}{3}$ و 27 سه عدد را طوری قرار دهید که جملات با شروع از $\frac{1}{3}$ و ختم به 27 تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند. (نسبت مشترک دنباله را مثبت در نظر بگیرید).

۲۴- بین دو عدد 2 و 64 چهار واسطهٔ هندسی قرار دهید (شروع از 2).

۲۵- اگر در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ سوم برابر 8 و جملهٔ هفتم برابر $\frac{81}{4}$ باشد، نسبت مشترک این دنباله را به دست آورید.

(نهایی فرورد ۹۹)

۲۶- مجموع شش جملهٔ اول دنبالهٔ زیر را با استفاده از فرمول به دست آورید.

۱, ۴, ۱۶, ...

(نهایی دی ۹۸)

۲۷- در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ اول 1024 و نسبت مشترک دنباله $\frac{1}{4}$ است.

(الف) چندمین جملهٔ دنباله برابر 64 می‌باشد؟

(ب) مجموع شش جملهٔ اول این دنباله را به دست آورید.

۲۸- مجموع شش جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول 5 و جملهٔ هفتم 320 را به دست آورید. (نسبت مشترک دنباله را مثبت در نظر بگیرید).

۲۹- مجموع چند جمله از دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول 4 و نسبت مشترک 3 برابر 160 می‌شود؟

۳۰- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

(الف) $3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 1536$

(ب) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4096}$

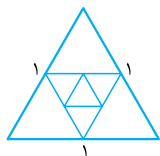
(پ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{1458}$

۳۱- حد مجموع دنباله‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \dots$

(ب) $16, 8, 4, 2, 1, \dots$

۳۲- مربعی به ضلع واحد داریم، در هر مرحله $\frac{1}{4}$ قسمت رنگ نشده آن را رنگ می‌کنیم. بعد از 7 مرحله چه مساحتی از این مربع رنگی شده است؟ (مربع در ابتدا سفید بوده است.)



۳۳- اگر مطابق شکل مقابل در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 1 وسط‌های اضلاع آن را به یکدیگر وصل کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع جدید پدید آید و همین روند را ادامه دهیم، آن‌گاه مجموع محیط‌های مثلث‌های به دست آمده پس از 6 مرحله را به دست آورید.

۳۴- بعد از 24 ساعت از مصرف 120 میلی‌گرم از دارویی با نیمه‌عمر 8 ساعتی میزان آن در بدن به چه مقداری می‌رسد؟

۱- الف) درست

ب) نادرست؛ جملات دنباله هندسی با نسبت مشترک منفی یک‌درمیان مثبت و منفی می‌شود و دنباله هندسی نه صعودی و نه نزولی است.

$$2, -6, 18, -54, \dots$$

$\times(-3) \quad \times(-3) \quad \times(-3)$

پ) نادرست؛

$$-2, -6, -18, -54, \dots$$

$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

ت) نادرست؛

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{1} \neq \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{4}$$

ب) صفر

۲- الف) هندسی

پ) $r > 1$ (بزرگ‌تر از ۱) ت) $0 < r < 1$ (بین صفر و یک)

ث) $a_{n+1} = ra_n$

ج) $a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{2}$ و $r = \frac{1}{2}$ است.

$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

۳- در هر قسمت نسبت‌های دو جمله متوالی را به دست می‌آوریم؛ اگر برابر بودند، دنباله هندسی در غیر این صورت دنباله هندسی نیست.

الف) دنباله هندسی نیست.

$$4, 12, 20, 28, \dots$$

$$\frac{12}{4} = 3, \frac{20}{12} = \frac{5}{3}, 3 \neq \frac{5}{3}$$

ب) دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{2}{3}$ است.

$$\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \dots$$

$\times \frac{2}{3} \quad \times \frac{2}{3} \quad \times \frac{2}{3}$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}, \frac{3}{1} = 3, \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4}$$

پ) دنباله هندسی با نسبت مشترک ۲ است.

$$\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2, \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2, \frac{8\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 2$$

ت) دنباله هندسی نیست.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3, \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \neq \frac{2}{3}$$

۴- الف) دنباله هندسی و نسبت مشترک برابر ۴ است.

$$2, 8, 32, \dots$$

$\times 4 \quad \times 4$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{2} = 4, \frac{a_3}{a_2} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{2} \neq \frac{a_3}{a_2} = \frac{14}{8}$$

ب) دنباله هندسی نیست.

پ) دنباله هندسی و نسبت مشترک برابر ۱۰ است.

$$10, 100, 1000, \dots$$

$\times 10 \quad \times 10$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{100}{10} = 10, \frac{a_3}{a_2} = \frac{1000}{100} = 10$$

۵- جمله عمومی دنباله‌های هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ است.

در این دنباله هندسی $a_1 = \frac{1}{27}$ و $r = 3$ است؛ در نتیجه جمله

عمومی آن به صورت $a_n = \frac{1}{27} r^{n-1}$ است.

$$n = 9 \Rightarrow a_9 = \frac{1}{27} \times 3^8 = 243 \Rightarrow a_9 = 243$$

۶- دنباله هندسی و $a_1 = \frac{1}{8}$ و $r = 2$ است پس جمله عمومی این

دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{1}{8} \times 2^{n-1}$$

$$n = 9 \Rightarrow a_9 = \frac{1}{8} \times 2^8 = \frac{1}{8} \times 256 = 32 \Rightarrow a_9 = 32$$

$$n = 6 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{8} \times 2^5 = \frac{1}{8} \times 32 = 4 \Rightarrow a_6 = 4$$

$$\frac{14}{a_9 - a_6} = \frac{14}{32 - 4} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

۷- ضابطه بازگشتی دنباله‌های هندسی با نسبت مشترک r به صورت

$$a_{n+1} = ra_n \text{ است.}$$

الف) دنباله هندسی با نسبت مشترک ۳ است.

ب) دنباله هندسی نیست.

پ) دنباله هندسی نیست.

ت) دنباله هندسی نیست.

۸- ضابطه بازگشتی دنباله‌های هندسی با نسبت مشترک r به صورت

$$a_{n+1} = ra_n \text{ است، در نتیجه این دنباله، یک دنباله هندسی است و}$$

نسبت مشترک این دنباله هندسی برابر $\frac{2}{3}$ و جمله اول آن $\frac{1}{3}$ است؛

پس داریم:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$$

$\times \frac{2}{3} \quad \times \frac{2}{3}$

الف)

ب) $a_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

نسبت مشترک برابر $\frac{2}{3}$ و جمله اول برابر $\frac{1}{3}$ است.

۹- الف) دنباله هندسی است.

$$3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

$$\frac{9}{3} = 3, \frac{27}{9} = 3, \frac{81}{27} = 3$$

$$a_5 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{2}{4} \quad -14$$

$$\begin{cases} a_4 r^3 = \frac{2}{4} \\ a_4 r^5 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_4 r^3}{a_4 r^5} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{9}{4} \xrightarrow[\text{طرفین معادله}]{\text{معکوس کردن}} r^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow r = \pm \frac{2}{3}$$

با توجه به صورت سؤال «نسبت مشترک دنباله مثبت است» $r = \frac{2}{3}$ را در نظر می‌گیریم.

$$a_1 r^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow a_1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{27} a_1 = \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{27}} = \frac{2 \times 27}{4 \times 1} = \frac{11}{22} \Rightarrow a_1 = \frac{11}{22}$$

با داشتن $r = \frac{2}{3}$ و $a_1 = \frac{11}{22}$ جمله عمومی دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{11}{22} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{11=3^4}{22=2^5} \rightarrow a_n = \frac{3^4}{2^5} \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{2^5} \times \frac{3^4}{3^{n-1}}$$

$$\xrightarrow[\text{پایهها برابر، توانها را از هم کم می‌کنیم.}]{\text{پایهها برابر، توانها را از هم کم می‌کنیم.}} a_n = 2^{n-6} \times 3^{-n+5}$$

۱۵- جمله سوم این دنباله هندسی برابر ۹ و جمله ششم آن برابر ۲۴۳ است. ابتدا جمله عمومی این دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$a_3 = a_1 r^2 = 9, a_6 = a_1 r^5 = 243$$

$$\Rightarrow \frac{a_6}{a_3} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{243}{9} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

نسبت مشترک این دنباله برابر ۳ است.

$$a_3 = a_1 r^2 \Rightarrow 9 = a_1 \times 3^2 \Rightarrow 9 = 9a_1 \Rightarrow a_1 = 1$$

جمله اول این دنباله برابر ۱ است؛ در نتیجه جمله عمومی این دنباله هندسی به صورت $a_n = 1 \times 3^{n-1}$ است و جمله دهم این دنباله نیز به صورت $a_{10} = 3^9$ خواهد بود.

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 r^{m-1}}{a_1 r^{n-1}} = r^{m-n} \quad \text{(الف) } m-n$$

$$\text{(ب) } b^2 = ac, \text{ واسطه هندسی (پ) } \frac{b}{a}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{(ت)}$$

۱۷- نسبت مشترک این دنباله هندسی برابر ۳ است.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{4} = 3$$

$$4, 12, 36, 108, 324, 972$$

$\xrightarrow{\times 3} \quad \xrightarrow{\times 3} \quad \xrightarrow{\times 3}$

$$\text{(ب) } \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

$$\text{(پ) } a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

$$\text{(ت) } a_{10} = 3^{10}$$

۱۰- الف) دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{5}$ و جمله اول ۱ است.

$$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$$

$\times \frac{1}{5} \quad \times \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}, \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$$

جمله اول ۱ است.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

$$a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{(پ)}$$

$$a_{11} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \quad \text{(ت)}$$

۱۱- جمله اول دنباله هندسی برابر ۹۶ و نسبت مشترک آن برابر ۲ است، پس جمله عمومی این دنباله هندسی به صورت $a_n = 96 \times 2^{n-1}$ است. حال مقدار ۷۶۸ را برابر جمله عمومی این دنباله قرار می‌دهیم.

$$96 \times 2^{n-1} = 768 \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{768}{96} = 8$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = 8 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^3 \Rightarrow n-1 = 3 \Rightarrow n = 4$$

۱۲- جمله اول دنباله هندسی برابر $\frac{1}{6}$ و نسبت مشترک آن برابر ۶ است؛ پس جمله عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{1}{6} \times 6^{n-1} = 6^{n-2}$$

با برابر قرار دادن ۲۱۶ با جمله عمومی این دنباله داریم:

$$a_n = 6^{n-2} = 216 = 6^3 \Rightarrow 6^{n-2} = 6^3 \Rightarrow n-2 = 3$$

$$\Rightarrow n = 5$$

$$a_6 = 320, a_3 = 40 \quad -13$$

$$a_3 = a_1 r^2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^2 = 40 \\ a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^5 = 320 \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{معادلهها}]{\text{تقسیم طرفین}} \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{320}{40}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{1}{8} \xrightarrow[\text{طرفین معادله}]{\text{معکوس کردن}} r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{1}{8} \xrightarrow[\text{طرفین معادله}]{\text{معکوس کردن}} r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

حال با توجه به $a_1 r^2 = 40$ ، جمله اول دنباله را به دست می‌آوریم:

$$a_1 r^2 = 40 \Rightarrow a_1 \times 2^2 = 40 \Rightarrow 4a_1 = 40 \Rightarrow a_1 = 10$$

با داشتن $r = 2$ و $a_1 = 10$ جمله عمومی دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = 10 \times 2^{n-1}$$

	ریاضی و آمار ۳	رشته انسانی	نمونه امتحان نیم سال اول
نمره	kheilisabz.com	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	امتحان شماره ۱
۰/۷۵		با توجه به شکل مقابل به چند طریق می توان از شهر A به شهر D رفت؟	۱
۰/۵ ۰/۵ ۰/۷۵		۲ با توجه به ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید. (تکرار ارقام در این سؤال مجاز نیست). الف) چند عدد چهاررقمی می توان نوشت؟ ب) چند عدد چهاررقمی با یکان ۲ می توان نوشت؟ پ) چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ می توان نوشت؟	۲
۰/۵ ۰/۵		۳ روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه وجود دارد. الف) چند وتر متمایز می توان با این نقاط تشکیل داد؟ ب) چند مثلث متمایز می توان با این نقاط تشکیل داد؟	۳
۰/۵		۴ در یک دوره بازی فوتبال بین ۱۶ تیم که بازی ها به صورت رفت و برگشت انجام می شود، اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام خواهد شد؟	۴
۰/۵ ۰/۵ ۱		۵ از بین ۱۰ نفر دانش آموز پایه یازدهم و ۱۵ نفر دانش آموز پایه دوازدهم یک مدرسه: الف) به چند طریق می توانیم دو نفر انتخاب کنیم؟ ب) به چند طریق می توانیم دو نفر یکی برای امور ورزشی و دیگری برای امور آموزشی انتخاب کنیم؟ پ) به چند طریق می توانیم سه نفر انتخاب کنیم به طوری که دو نفر پایه یازدهم و یک نفر از پایه دوازدهم انتخاب شود؟	۵
۰/۷۵ ۰/۵		۶ سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر «رو» ظاهر شد، آن گاه تاس را می ریزیم. در غیر این صورت یک بار دیگر سکه را می اندازیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را با اعضایش مشخص کنید. ب) پیشامد این که عدد ظاهر شده روی تاس فرد یا سکه پشت بیاید را با اعضایش مشخص کنید.	۶
۰/۷۵ ۰/۷۵		۷ اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، پیشامدهای زیر را با نماد مجموعه ها نشان داده و سپس نمودار ون آن ها را رسم کنید. الف) پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C اتفاق نیفتد. ب) پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C اتفاق نیفتد.	۷
۰/۷۵ ۱ ۰/۵		۸ از جعبه ای شامل ۷ مهره قرمز و ۵ مهره آبی، سه مهره به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال این که: الف) هر سه مهره آبی باشد. ب) دو مهره قرمز و یک مهره آبی باشد. پ) حداقل یک مهره قرمز باشد. (با محاسبه $P(A')$)	۸
۰/۲۵ ۰/۷۵		۹ خانواده ای دارای ۴ فرزند است: الف) فضای نمونه جنسیت فرزندان این خانواده دارای چند عضو است؟ ب) احتمال این که فرزند سوم و چهارم این خانواده دختر باشد را مشخص کنید. (نوشتن اعضای پیشامد الزامی است.)	۹
۰/۷۵		۱۰ مشخص کنید در بررسی کدام یک از موارد زیر، اندازه نمونه بزرگ تری لازم است؟ پاسخ خود را توضیح دهید. الف) سن دانش آموزان کلاس شما ب) معدل سال گذشته دانش آموزان کلاس شما	۱۰

ردیف	نمونه امتحان نیم سال دوم		رشته انسانی		ریاضی و آمار ۳
	امتحان شماره ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۱	kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل $\frac{8!}{4!}$ برابر ۲! است. ب) احتمال روشن شدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر صفر است. پ) در دنباله $a_{n+1} = a_n + 3$ ، اگر جمله پنجم ۱۷ باشد، جمله ششم آن ۲۳ است. ت) نمایش $\sqrt[3]{-7}$ را به صورت $(-7)^{\frac{1}{3}}$ می‌توان نوشت.				
۲	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) فضای نمونه برای ترکیب جنسیت فرزندان خانواده‌ای با ۳ فرزند، چند عضو دارد؟ ب) احتمال این‌که فردا بارانی باشد، ۰/۰۱ است. احتمال این‌که فردا بارانی <u>نباشد</u> ، چه قدر است؟ پ) تفسیر نتایج به دست آمده، کدام گام در چرخه حل مسائل آماری است؟ (۱) بیان مسئله (۲) گردآوری داده‌ها (۳) تحلیل داده‌ها (۴) بحث و نتیجه‌گیری				
۳	مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $\binom{5}{3}$ باشد.				
۴	کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ الف) مشاهده عدد ۳ در پرتاب یک تاس که روی هر شش وجه آن، عدد ۳ حک شده باشد. ب) نتیجه یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سؤالات آن را شانس پاسخ داده‌ایم.				
۵	از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، به تصادف ۲ مهره انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که هر دو مهره سفید باشد، محاسبه کنید.				
۶	داده‌های زیر، میزان حقوق ماهیانه (برحسب میلیون تومان) کارمندان یک شرکت خصوصی را نشان می‌دهد: ۸, ۶, ۶, ۵, ۱۱, ۲۰, ۹, ۸, ۳۵, ۱۲, ۱۰ الف) دامنه تغییرات و میانه داده‌ها را به دست آورید. ب) آیا میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی برای توصیف این داده‌ها است؟ چرا؟				
۷	الف) چهار جمله اول دنباله $a_n = 3n + 2$ را بنویسید. ب) رابطه بازگشتی دنباله $5, 11, 17, \dots$ را بنویسید.				
۸	در یک دنباله حسابی، جمله اول ۵ و اختلاف مشترک برابر ۷ است. الف) جمله یازدهم این دنباله را به دست آورید. ب) کدام جمله دنباله، برابر ۹۶ است؟				
۹	در دنباله حسابی $3, 7, 11, 15, \dots$ مجموع بیست جمله اول این دنباله را به دست آورید.				
۱۰	کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، نسبت مشترک را به دست آورید. الف) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ ب) $1, 4, 9, 16, \dots$				
۱۱	جمله دوم یک دنباله هندسی، ۶ و جمله پنجم همین دنباله، ۴۸ است. الف) نسبت مشترک این دنباله را پیدا کنید. ب) جمله هفتم این دنباله را بنویسید.				
۱۲	عبارت توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. الف) $\sqrt[5]{12^3}$ ب) $(\frac{2}{24})^{\frac{2}{7}}$				
۱۳	در تساوی $8^x \times 8^3 = 8^{10}$ ، مقدار x را مشخص کنید.				

پاسخ نامه تشریحی

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -17 + (n-1) \times 3 \quad (0/5)$$

$$a_n = 3n - 20 \quad (0/5)$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad -9$$

$$S_{16} = \frac{16}{2} [2 \times (11) + 15 \times (-3)] \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow S_{16} = 8(22 - 45) = -184 \quad (0/5)$$

۱۰- ب) دنباله حسابی هست. (0/5)

$$-3, 0, 3, 6, \dots \Rightarrow d = 3 \quad (0/5)$$

$$\text{الف) } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9} \quad (0/5)$$

$$\text{ب) } r = \frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \quad (0/5) \quad a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (0/5)$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow 768 = 96 \times 2^{n-1} \quad (0/5) \quad -12$$

$$\Rightarrow 8 = 2^{n-1} \quad (0/5) \Rightarrow n-1 = 3 \Rightarrow n = 4 \quad (0/5)$$

$$\text{الف) } \sqrt[3]{4} \quad (0/5) \quad \text{ب) } \sqrt[3]{(0/8)^2} \quad (0/5) \quad -13$$

$$\text{ب) } 2^{1/5} \quad (0/5) \quad \text{ت) } (0/47)^{2/3} \quad (0/5)$$

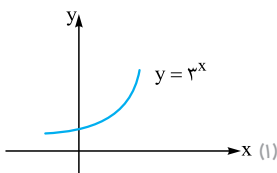
$$\text{الف) } 8^x \times 9^x = 8^4 \times 9^4 \Rightarrow x = 4 \quad (0/5) \quad -14$$

$$\text{ب) } 5^{6x} = 5^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \quad (0/5)$$

$$\text{ب) } (0/6)^{x+4} = (0/6)^8 \Rightarrow x+4 = 8 \Rightarrow x = 4 \quad (0/5)$$

$$\text{الف) } \frac{a^{1/2}}{a^{1/4}} = \frac{a^{1/2}}{a} = a^{-1/4} = a \quad (0/5) \quad \text{ب) } 5^{1/3 - 1/2} = 5^{-1/6} = 1 \quad (0/5) \quad -15$$

$$-16$$



$$y = 20000000(1 + 0/2)^x \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow y = 20000000(1/44)^x \quad (0/5) \Rightarrow y = 28800000 \quad (0/5) \quad -17$$

$$\text{ب) } m \times n \quad (0/5)$$

$$\text{ت) } \text{جعبه‌ای} \quad (0/5)$$

$$\text{ج) } A \cap B = \emptyset \quad (0/5)$$

$$\text{۱- الف) } 1 \quad (0/5)$$

$$\text{ب) } n! \quad (0/5)$$

$$\text{ث) } 1 \quad (0/5)$$

$$\text{۲- الف) درست} \quad (0/5)$$

ب) نادرست؛ برای توصیف داده‌های کتبی، گزارش درصد همیشه با

گزارش تعداد همراه است. (0/5)

پ) نادرست؛ مرتب کردن داده‌ها در گام سوم اتفاق می‌افتد. (0/5)

ت) درست (0/5)

$$\text{۳- الف) گزینه } 3 \quad (0/5)$$

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

ب) گزینه ۱ (0/5)

ب) گزینه ۴ (0/5)

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 1 \times 2 \times 3} = 56 \quad (0/5)$$

$$\text{ت) گزینه } 3 \quad (0/5) \quad P(2,2) = \frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2!}{0!} = \frac{2!}{1} = 2$$

۴- از C به A، 3 مسیر و از A به D چهار مسیر در نتیجه:

$$3 \times 4 = 12 \quad (0/5)$$

-5

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35 \quad (0/5) \\ n(A) &= \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 12 \quad (0/5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{12}{35} \quad (0/5)$$

۶- چهار جمله اول دنباله: 3, 5, 7, 9 (1)

فرمول بازگشتی: $a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 3 \quad (0/5)$

$$a_1 = 3^3 = 27 = 8 \quad (0/5), \quad b_4 = \frac{15}{5} = 3 \quad (0/5), \quad -7$$

$$c_7 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \quad (0/5)$$

$$a_1 - b_4 + c_7 = 8 - 3 + 1 = 6 \quad (0/5)$$

۸- با توجه به فرمول $d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$ داریم:

$$d = \frac{10 - (-17)}{10 - 1} = \frac{27}{9} = 3 \quad (0/5)$$