فصل ۱ پایه‌های شمارش

بخش ۱ اصل ضرب

گام نخست

■ گاهی برای شمارش تعداد حالت‌های انجام یک کار باید آن را به چند بخش مختلف تقسیم کنیم، به طوری که بتوان این بخش‌ها را جدا از هم شمرد. آن‌گاه بنابر اصل ضرب تعداد راه‌های انجام این کار با حاصل ضرب تعداد حالت‌های انجام آن چند بخش برابر اســت. مثلاً فرض کنید بخواهیم یک خط هوایی بین یکی از شــهرهای اســتان گیلان و کرمان راه‌اندازی کنیم. در صورتی که ۶ تا از شــهرهای گیلان و ۴ تا از شــهرهای کرمان فرودگاه داشته باشند، آن‌گاه به $۶\times۴=۲۴$ حالت می‌توان شهرهای ابتدا و انتهای این خط هوایی را انتخاب کرد. همچنین هر وقت بتوانیم کاری را به‌ترتیب در چند مرحله‌ی متوالی انجام دهیم، آن‌گاه برای به‌دســت آوردن تعداد حالت‌های انجام آن کار، کافی است تعداد حالت‌های انجام هرکدام از این مرحله‌ها را در هم ضرب کنیم.

مثال - ۱

۵ پیچ به رنگ‌های قرمز، آبی، سبز، زرد و بنفش و همچنین ۳ مهره به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز در اختیار داریم.

الف) به چند طریق می‌توانیم یک پیچ و یک مهره را انتخاب کرده و آن‌ها را به هم ببندیم؟

ب) در چند تا از حالت‌های قسمت قبل پیچ و مهره‌ی انتخاب شده هم‌رنگ نیستند؟

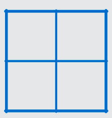
راه‌حل

الــف) بــرای انتخاب پیچ و مهره به‌ترتیب ۵ و ۳ حالت وجــود دارد. بنابر اصل ضرب تعداد حالت‌ها برابر است با: $۳\times۵=۱۵$

ب) ابتدا یکی از ۳ مهره را انتخاب می‌کنیم. حالا از بین ۴ پیچِ غیر هم‌رنگ با مهره‌ی انتخاب شده یکی از آن‌ها را برمی‌داریم. بنابراین برای انجام این کار $۳\times۴=۱۲$ حالت وجود دارد.

مثال - ۲

به چنــد طریق می‌توان خانه‌های جدول روبه‌رو را با رنگ‌های قرمز، آبی و سبز رنگ آمیزی کرد؟



راه‌حل

از آن‌جــا که برای رنگ آمیــزی هر خانه ۳ حالت داریم، بنابه اصل ضرب در مجموع $۳^۴=۸۱$ روش مختلف برای رنگ آمیزی خانه‌های جدول وجود دارد.

مثال - ۳

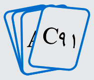
چند عدد ۵ رقمی داریم که رقم ده هزارگانش ۴ باشــد و هر رقم آن از رقم چپ‌اش یک واحد بیش‌تر و یا یک واحد کم‌تر باشد؟

راه‌حل

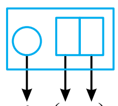
رقم هزارگان این عدد می‌تواند یکی از دو مقدار ۳ یا ۵ باشد. به همین ترتیب برای هر یــک از ارقام صدگان، دهــگان و یکان ۲ حالت وجود دارد. بنابراین $۲^۴=۱۶$ عدد مانند ۴۳۲۱۰ و ۴۵۴۵۶ ویژگی بالا را دارند.

مثال ٤ -

می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که سمت چپ آن‌ها یکی از حروف A، B، C و D و سمت راست آن‌ها عددی دو رقمی با ارقام غیر صفر نوشته شده باشد. چند کارت مختلف می‌توانیم بسازیم؟



راه‌حل با استفاده از اصل ضرب تعداد حالت‌ها مطابق شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید.

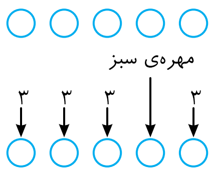


$۴\times(۹\times۹)=۳۲۴$

مثال ۵ -

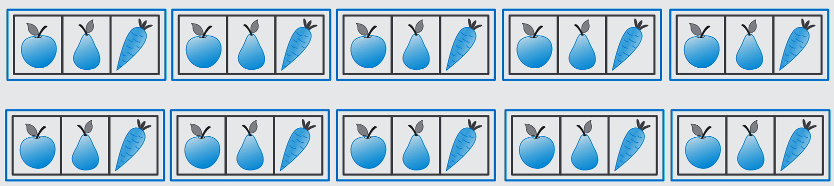
تعداد زیادی مهره به رنگ‌های قرمز، آبی، سبز و سفید در اختیار داریم. می‌خواهیم با ۵ تا از این مهره‌ها یک دنباله درست کنیم. این‌کار به چند حالت امکان‌پذیر است؟ چندتا از این دنباله‌ها دقیقاً یک مهره‌ی سبز دارند؟

راه‌حل از آن‌جا که مطابق شکل روبه‌رو برای انتخاب رنگ مهره‌ی هر جایگاه ۴ حالت داریم، در مجموع $۴^۵$ دنباله می‌توان تولید کرد. برای محاسبه‌ی تعداد دنباله‌هایی که دقیقاً یک مهره‌ی سبز دارند، ابتدا باید مشخص کنیم که تنها مهره‌ی سبز در کدام‌یک از جایگاه‌های اول تا پنجم قرار گیرد. در ادامه برای انتخاب رنگِ مهره‌ی هر یک از جایگاه‌های دیگر ۳ حالت داریم. پس ۵×۳^۴ دنباله دقیقاً یک مهره‌ی سبز دارند.



مثال ۶ -

۱۰جعبه داریم که در هر کدام از آن‌ها یک سیب، یک گلابی و یک هویج قرار دارد. می‌خواهیم از هرکدام از این جعبه‌ها فقط یک میوه برداریم.



الف) این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

ب) در چند تا از تعداد حالت‌های قسمت قبل دقیقاً یک سیب برداشته‌ایم؟

پ) در چند تا از حالت‌ها ۹ سیب برداشته شده است؟

راه‌حل الف) ابتدا از جعبه‌ی اول یکی از ۳ میوه‌ای را که در آن قرار دارد برمی‌داریم. همین کار را به طور متوالی برای سایر جعبه‌ها انجام می‌دهیم. بنابراین برای برداشتن میوه از هر کدام از جعبه‌ها ۳ حالت وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌های انجام این کار $۳^{۱۰}$ تا است.

ب) ابتدا یکی از ۱۰ جعبه‌ای را که می‌خواهیم از آن سیب برداریم انتخاب می‌کنیم. سپس از هرکدام از ۹ جعبه‌ی دیگر به ۲ حالت یکی از دو میوه‌ی گلابی یا هویج را برمی‌داریم. بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با: ۱۰×۲^۹

پ) ابتدا یکی از ۱۰ جعبه‌ای را که نمی‌خواهیم از آن سیب برداریم انتخاب می‌کنیم. سپس از این جعبه به ۲ حالت یکی از دو میوه‌ی هویج یا گلابی را برمی‌داریم. از سایر جعبه‌ها هم سیب برداشته می‌شود. بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با: $۱۰\times۲=۲۰$

دو مثال بعدی ما را با یک روش جالب و پرکاربرد برای حل مسائل شمارشی آشنا می‌کنند. این روش را «یکتایی در حالت» می‌نامیم.

مثال - ۷

آقـای مُقبلی، کوکب و ۷ نوه‌ی دیگر خود را به شـهربازی برده اسـت. او می‌خواهد برای تعـدادی از نوه‌هـا بلیط چرخ و فلک بخرد. از آن‌جا کـه صندلی‌های چرخ و فلک دوتایی اسـت، او باید تعدادِ زوجی از نوه‌ها را برای سـوار شـدن انتخاب کنـد. او به چند حالت می‌تواند این کار را انجام دهد؟

راه‌حل

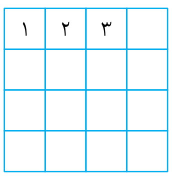
آقای مُقبلی می‌تواند ابتدا کوکب را کنار گذاشته و از بین ۷ نوه‌ی دیگر، به طور دلخواه تعدادی از آن‌ها را انتخاب کند. هر کدام از نوه‌ها می‌توانند سوار چرخ و فلک بشوند یا نشوند. پس بـرای هر یک، ۲ حالت وجود دارد و در مجموع به $۲^{۷}$ حالت می‌توان تعدادی از آن‌ها را انتخاب کرد. حالا اگر تعداد نوه‌های انتخاب شده فرد بود، کوکب به آن‌ها اضافه شده و سوار چرخ و فلک می‌شود و در غیر این صورت سوار نمی‌شود تا تعداد آن‌ها زوج باقی بماند.
بنابراین آقای مُقبلی به $۲^{۷}=۱۲۸$ حالت می‌تواند تعداد زوجی از نوه‌هایش را انتخاب کند.

■ سؤالاتی را که در آن‌ها می‌خواهیم از بین چند عضو تعداد زوج و یا فردی را انتخاب کنیم می‌توان به کمک همین روش حل کرد. مثلاً می‌توان گفت که تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی $۲^{n-۱}$ تاست.

مثال - ۸

یک جدول ۴×۴ داریم. به چند طریق می‌توانیم اضلاعِ خانه‌های این جدول را به رنگ‌های آبـی، قرمز و زرد درآوریـم، به طوری که در رنگ‌آمیزیِ اضلاعِ هر خانه دقیقاً از ۲ رنگ استفاده شود و هر یک از این رنگ‌ها در رنگ آمیزی دقیقاً دو تا از اضلاعِ آن خانه به کار رفته باشد؟

راه‌حل



ابتدا رنگ اضلاع ردیف بالایی و سمت چپ را با خیال راحت تعیین می کنیم. این کار به $۳^{۸}$ حالت می‌تواند انجام شود. در مرحله‌ی بعد رنـگ دو ضلع باقی‌مانده‌ی خانه‌ی شـماره‌ی ۱ درشـکل روبه‌رو را تعیین می‌کنیم.

اگر اضلاع بالایی و چپی این خانه هم‌رنگ باشند، آن‌گاه دو ضلع دیگر به طور هماهنگ به یکی از ۲ رنگ باقی‌مانده در می‌آیند. اگر اضلاع بالایی و چپی غیرهم‌رنگ (مثلاً قرمز و آبی) باشند، آن‌گاه رنگ‌آمیزی دو ضلع دیگر با همان رنگ‌ها به ۲ روش امکان‌پذیر اسـت(قرمز-آبی یا آبی- قرمز).
پس دو ضلع باقی‌مانده در هر صورت به ۲ حالت رنگ می‌شوند.
به همین روش رنگ ضلع‌های باقی‌مانده‌ی خانه‌های ۲ ، ۳ و... را تعیین می‌کنیم. برای رنگ‌آمیزی دو ضلع باقی‌مانده‌ی هر مربع ۲ حالت داریم. پس به $۳^{۸}\times۲^{۱۶}$ حالت می‌توان تمام ضلع‌ها را رنگ کرد.

■ در حل مسـائل با روش یکتایی در حالت با این‌که با شـرایط متفاوتی روبه‌رو هستیم، چون برای شرایط مختلف تعداد حالت‌های یکسـانی وجود دارد، صرف نظر از این‌که کدام‌یک از این شـرایط پیش بیاید می‌توان تعداد حالت‌ها را تعیین کرد. مثلاً در مثال قبل چه دو ضلع بالایی و چپی هم‌رنگ باشند چه غیر هم‌رنگ، برای رنگ‌آمیزی دو ضلع باقی‌مانده ۲ حالت وجود دارد. روش یکتایی در حالت همیشه جواب‌گو نیست اما گاهی مسائل را به شکل بسیار زیبایی حل می‌کند.

در ادامه با روش محاسبه‌ی تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد به کمک اصل ضرب آشنا می‌شویم.

مثال – ۹

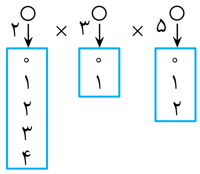
تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲۰۰ را به‌دست آورید.

راه‌حل

تجزیه‌ی عدد ۱۲۰۰ به شکل روبه‌رو است: $۱۲۰۰=۲^{۴}\times ۳^{۱}\times ۵^{۲}$

می‌دانیم هر مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ تجزیه‌ای به شکل $۲^{\bigcirc}\times ۳^{\bigcirc}\times ۵^{\bigcirc}$ دارد. زیرا اگر یک عدد عوامل اولی مثل ۷، ۱۱ و... داشته باشد، در این صورت نمی‌تواند مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ باشد.

مطابق شکل برای توانِ ۲، ۵ حالت و برای توانِ ۳، ۲ حالت و بالاخره برای توانِ ۵، ۳ حالت داریم.



در نتیجه طبق اصل ضرب تعداد مقسوم‌علیه‌ها برابر است با:

$۵\times۲\times۳=۳۰$

تعداد مقسوم‌علیه های هر عددِ دیگر را هم می‌توان با همین روش به‌دست آورد. یعنی پس از تجزیه، توان‌های عوامل اول را یکی اضافه کرده و سپس آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

نکته‌ی جالبی که می‌توان به آن اشاره کرد این است که از روی تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد می‌توانیم بفهمیم که آن عدد مربع کامل است یا نه!

مثلاً عدد ۱۴۴ تجزیه‌ای به شکل $۱۴۴=۳^{۲}\times۲^{۴}$ دارد. از آن‌جا که توان‌های موجود در تجزیه‌ی یک عدد مربع کامل همگی زوج هستند، پس وقتی آن‌ها را به علاوه‌ی یک می‌کنیم همگی فرد می‌شوند. اگر این اعدادِ فرد را در هم ضرب کنیم، باز هم به یک عدد فرد می‌رسیم. پس تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد مربع کامل فرد است. اگر همین مسیر را به طور عکس طی کنیم، می‌فهمیم که اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد فرد باشد، آن عدد حتماً مربع کامل است. بنابراین، یک عدد مربع کامل است، اگر و فقط اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن فرد باشد.

مثال – ۱۰

۱۳۷۶ لامپ داریم که همه در حالت اولیه خاموش هستند. این لامپ‌ها را از ۱ تا ۱۳۷۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای هر عدد طبیعی k، کلید p_k وضعیت خاموش و روشن لامپ‌هایی را که شماره‌ی آن‌ها مضربی از k است عوض می‌کند. کلیدهای $p_۱$ ، $p_۲$ ، ... و $p_{۱۳۷۶}$ را متوالیاً می‌زنیم. در آخر چند لامپ روشن می‌ماند؟

۱) ۱۳۷۶ ۲) ۱۳۳۹ ۳) ۷۶ ۴) ۳۹ ۵) ۳۷

راه‌حل

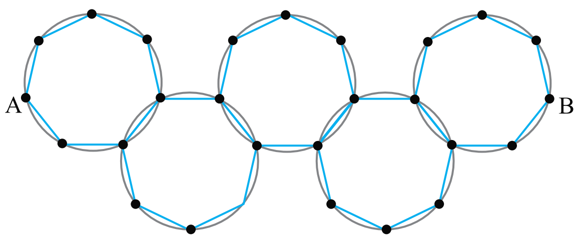
لامپِ شماره‌ی ۹ را در نظر بگیرید. این لامپ ابتدا توسط کلید ۱ روشن شده، با کلید ۳ خاموش و در پایان با کلید ۹ دوباره روشن می‌شود. لامپ ۶ هم با کلید ۱ روشن شده، پس از آن ابتدا با کلید ۲ خاموش و سپس با کلید ۳ روشن می‌شود و در پایان با کلید ۶ خاموش شده و تا آخر خاموش می‌ماند. با کمی بررسی می‌توان دریافت که هر لامپ به اندازه‌ی تعداد مقسوم‌علیه‌هایِ عدد متناظرش تغییر وضعیت می‌دهد. یک لامپ در صورتی روشن می‌ماند که تعداد فردی تغییر وضعیت داده باشد. در نتیجه لامپ‌هایی روشن می‌مانند که عدد متناظرِ آن‌ها تعداد فردی مقسوم‌علیه داشته باشد. از آن‌جا که فقط اعداد مربع کامل تعداد فردی مقسوم‌علیه دارند، در نتیجه لامپ‌هایی که اعداد متناظرِ آن‌ها مربع کامل‌اند در پایان روشن خواهند ماند.

حالا می‌خواهیم بدانیم از ۱ تا ۱۳۷۶ چند عدد مربع کامل وجود دارد. از آن‌جا که $۳۷^{۲}=۱۳۶۹$ بزرگ‌ترین عدد مربع کامل بین اعداد ۱ تا ۱۳۷۶ است، پس از ۱ تا ۱۳۷۶ ، ۳۷ عدد مربع کامل وجود دارد و ۳۷ لامپ در پایان روشن می‌مانند.

مسائل شمارشی مربوط به تعداد حالت‌های تجزیه‌ی اعداد طبیعی پای ثابت سؤالات مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی است.

گام المپیاد

◀ ۱- در نقشه‌ی روبه‌رو نقاط پررنگ نشان دهنده‌ی شهر و کمان‌ها و پاره‌خط‌های مستقیم بین آن‌ها جاده هستند. برای ما استفاده از جاده‌های مستقیم و کمانی تفاوتی ندارد. به چند طریق می‌توان با کم‌ترین تعداد جاده از شهر A به شهر B رفت؟

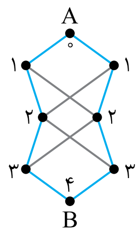


المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۶

۱) $۲^{۷}\times ۳^{۴}$ ۲) $۲^{۸}\times ۳^{۳}$ ۳) $۲^{۱۱}\times ۳^{۴}$

۴) $۲^{۷}\times ۳^{۱۱}$ ۵) $۲^{۵}\times ۶^{۴}$

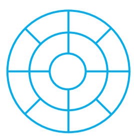
◀ ۲- در شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B رفت، به طوری که هر یک از اعداد صفر تا ۴ دقیقاً یک بار روی نقاطی که از آن‌ها عبور می‌کنیم مشاهده شوند؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۸



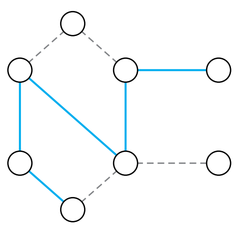
۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸

۴) ۱۵ ۵) ۱۶

◀ ۳- به چند طریق می‌توان ناحیه‌های شکل روبه‌رو را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، به طوری که هیچ دو ناحیه‌ی مجاوری از یک رنگ نباشند؟ دو ناحیه با هم مجاورند اگر مرز مشترکی داشته باشند.



◀ ۴- می‌خواهیم توپ‌های شکل مقابل را با رنگ‌های سبز، زرد و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که هر دو توپی که با خط ممتد به هم وصل شده‌اند رنگ متفاوت داشته باشند و هر دو توپی که با خط‌چین به هم وصل شده‌اند هم‌رنگ باشند. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟



المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۹

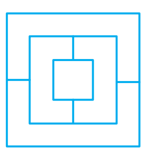
۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸

۴) ۱۲ ۵) ۲۴

◀ ۵- شخصی در اصفهان زندگی می‌کند و می‌خواهد از سه شهر تبریز، مشهد و یزد دیدن کند و به شهر اصفهان بازگردد، به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه بین این سه شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روزهای زوج موجود است. اگر این شخص سفر خود را در روز شنبه آغاز کند، به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟ المپیاد ریاضی ۱۳۸۸

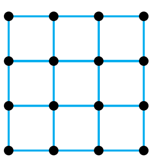
۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰ ۵) ۲۱۶

◀ ۶- در شکل روبه‌رو تصویری هوایی از ۵ ساختمان شهر اتوپیا را می‌بینید که خطوط در آن نشان‌دهنده‌ی اختلاف ارتفاع ساختمان‌هاست. در واقع هر ناحیه‌ی بسته یک ساختمان را نشان می‌دهد که ارتفاعش عددی طبیعی بین ۱ تا ۴ است و با هیچ یک از ساختمان‌های مجاورش هم ارتفاع نیست. ارتفاع ساختمان‌های این شهر چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ مرحله‌ی دوم المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۲



۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۹۶ ۵) ۲۴

◀ ۷- شکل روبه‌رو از ۲۴ پاره‌خط و ۱۶ نقطه تشکیل شده است. می‌بینید که برای رسیدن از هر نقطه به هر نقطه‌ی دیگر پیمایش ۶ پاره‌خط یا کم‌تر کافی است. می‌خواهیم از مجموع ۱۸ قطر مربع‌های کوچک ۲ تا را رسم کنیم، به طوری که پیمایش ۵ پاره‌خط یا کم‌تر برای رسیدن از هر نقطه به هر نقطه‌ی دیگر کافی باشد. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۰



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۹

۴) ۳۶ ۵) ۸۱

۸- مهندس شش‌دیواری قصد دارد نقشه‌ی خانه‌ای با شش دیوار را طراحی کند. او می‌خواهد سه تا از دیوارها در امتداد شمالی – جنوبی و با طول‌های ۲، ۴ و ۶ متر باشند و سه تا از دیوارها نیز در امتداد شرقی – غربی و با طول‌های ۴، ۶ و ۱۰ متر باشند. او چند نقشه‌ی مختلف با این ویژگی‌ها می‌تواند بکشد؟ المپیاد ریاضی ۱۳۹۳

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰ ۵) ۲۴

۹- چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد و مجموع هر دو رقم متوالی آن بر ۲ یا ۳ (یا هر دو) بخش پذیر باشد؟ المپیاد ریاضی ۱۳۹۱

۱۰- یک عدد «آینه‌ای» است اگر از هر دو طرف راست و چپ یک مقدار خوانده شود، مثلاً اعداد ۱۲۲۱ و ۵۹۵ آینه‌ای هستند ولی ۱۰۱۰ آینه‌ای نیست. یک ساعت دیجیتال زمان را با یک عدد شش رقمی به صورت hh:mm:ss نشان می‌دهد که hh نشان‌دهنده‌ی ساعت (از ۰۰ تا ۲۳)، mm و ss نشان‌دهنده‌ی دقیقه و ثانیه (از ۰۰ تا ۵۹) هستند. ساعت در ابتدای هر شبانه‌روز ۰۰:۰۰:۰۰ و در آخرین ثانیه‌ی آن ۲۳:۵۹:۵۹ است. عدد نشان داده شده در یک ساعت دیجیتال چند بار در یک شبانه‌روز آینه‌ای می‌شود؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۲

۱) ۳۶ ۲) ۹۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۴۰ ۵) ۱۰۰۰

۱۱- یک ماشین‌حساب، نمایش‌گر دیجیتالی دارد که فقط می‌تواند اعداد ۳ رقمی را نشان دهد. می‌دانیم ماشین حساب ارقام را به شکل زیر نمایش می‌دهد.

به ازای چند عدد سه رقمی اگر این ماشین‌حساب در مقابل آینه قرار بگیرد و به آینه نگاه کند، عددِ سه رقمی و معناداری را خواهد دید؟ توجه کنید که رقم سمت چپ یک عدد سه‌رقمی صفر نیست.

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۴۰ ۵) ۹۶

۱۲- در چند تا از تعداد حالت‌های سؤال قبل عددی که ماشین‌حساب در آینه می‌بینند همان عددی است که نمایش می‌دهد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲ ۵) ۱۶

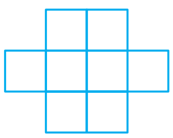
۱۳- تعداد رشته‌های به طول ۱۰ متشکل از G ، A ، T و C که در آن‌ها A و T مجاور هم نباشند، C و G نیز مجاور هم نبوده و همچنین هیچ دو حرف کنار هم یکسان نباشند، چند است؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۷۸

۱) ۲۰۴۸ ۲) $۴^{۹}$ ۳) $۴^{۱۰}\times ۵\times ۲^{۱۱}$ ۴) ۱۰۲۴ ۵) $۴^{۶}$

۱۴- ۱۱ کوتوله دور یک دایره نشسته‌اند. به چند حالت می‌توان ۵ گردو به ۵ نفر از آن‌ها داد، به طوری که هیچ دو نفر کنار هم، هم‌زمان گردو نگرفته باشند؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۲۱ ۵) ۲۲

۱۵- می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را درون خانه‌های جدولی به شکل روبه‌رو بچینیم، به طوری که اختلاف هر دو عدد مجاور بیش از ۱ باشد. دو خانه مجاور هستند اگر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند. برای مثال خانه‌های وسط جدول با ۶ خانه مجاور هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ مرحله‌ی دوم المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۲



۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۱۶

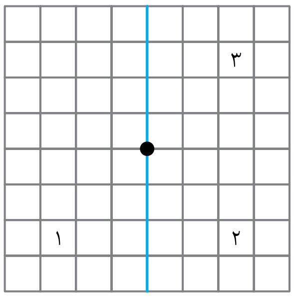
۱۶- چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر محور xها را قطع می‌کنند؟ المپیاد ریاضی ۱۳۸۵

$(۲,۳)\quad(۵,-۵)\quad(۱۲,-۷)\quad(۷,۸)\quad(-۱۵,۶)$

$(۹,۴)\quad(۱۹,-۱۱)\quad(۵,۱۵)\quad(-۹,۱)\quad(-۱,-۳)$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱ ۵) ۲۴

۱۷- یک جدول ۸×۸ داریم. هر خانه یک خانه‌ی قرینه نسبت به نقطه‌ی وسط دارد. برای مثال خانه‌ی ۳ در شکل قرینه‌ی خانه‌ی ۱ نسبت به نقطه‌ی وسط می‌باشد. همچنین هر خانه یک خانه‌ی قرینه نسبت به خط عمودی مرکزی نیز دارد. برای مثال خانه‌ی ۲ قرینه‌ی خانه‌ی ۱ نسبت به خط عمودی مرکزی می‌باشد. می‌خواهیم این جدول را با ۳ رنگ، رنگ کنیم به شرطی که هر خانه‌ی این جدول حداقل با یکی از دو نقطه‌ی قرینه‌ی خود (قرینه نسبت به نقطه‌ی مرکز و قرینه نسبت به خط عمودی وسط) هم‌رنگ باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۲



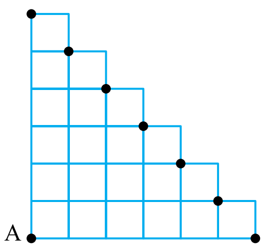
۱) $۱۶^{۵}$ ۲) $۳^{۶۴}$ ۳) $۳^{۱۶}$
۴) $۹^{۱۶}$ ۵) $۱۵^{۱۶}$

۱۸- اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شکرستان هستند از طریق خط راه‌آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده‌اند. جهان‌گردی، سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می‌خواهد از همه‌ی بلیط‌های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود، به چند طریق می‌تواند سفر خود را انجام دهد؟ المپیاد ریاضی ۱۳۹۰

۱۹- امروز بانک شهر فسقلی‌ها ۵۰ مشتری دارد. مشتری‌ها در یک صف ایستاده‌اند و هر کدام کارتی دارد که نوبت او را مشخص می‌کند (عددی بین ۱ تا ۵۰). این بانک سه باجه برای پاسخ‌گویی دارد و هر مشتری اگر نوبت به او برسد، می‌تواند به یکی از این سه باجه مراجعه کند. ساعت ۱۲ ظهر است و هم‌اکنون به‌ترتیب در سه باجه نوبت مشتری‌های ۴۴، ۴۸ و ۵۰ است. این ۵۰ مشتری به چند طریق از سه باجه می‌توانند استفاده کرده باشند؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۳

۱) $۳^{۴۳}\times۲^{۳}$ ۲) $۳^{۴۷}$ ۳) $۳^{۴۴}\times۲^{۴}$ ۴) $۳^{۴۳}\times۲^{۴}$ ۵) $۳^{۴۴}\times۲^{۳}$

۲۰- می‌خواهیم از نقطه‌ی A در شکل مقابل به یکی از نقاطی برویم که با دایره‌ی پر رنگ مشخص شده‌اند. با فرض این‌که فقط می‌توانیم به سمت راست یا بالا حرکت کنیم، چند مسیر مختلف وجود دارد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۱



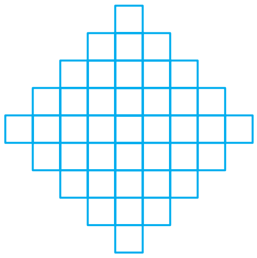
۱) $۲^{۶}$ ۲) $\dfrac{۱۲!}{۲\times۶!\times۶!}$ ۳) $۲^{۵}$
۴) $\dfrac{۱۰!}{۲\times۵!\times۵!}$ ۵) $\dfrac{۱۲!}{۶!\times۶!}$

۲۱- مجید در خانه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت چپ یک جدول ۶×۶ قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی پایین و سمت راست جدول برود. در هر گام او می‌تواند به یکی از سه خانه‌ی پایینی، سمت راستی و یا سمت چپی خودش(در صورت وجود) برود. دقت کنید که مجید مجاز نیست یک خانه را دو بار برود و الزامی هم ندارد که کوتاه‌ترین مسیر را طی کند. با رعایت قوانین بالا، مجید به چند حالت می‌تواند به مقصدش برسد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۰

۱) ۲۵۲ ۲) ۱۵۶۲۵ ۳) ۴۶۶۵۶
۴) ۱۲۹۶ ۵) ۷۷۷۶

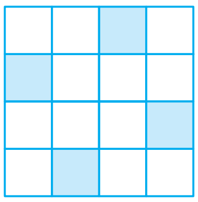
۲۲- دو سینی داریم که در یکی از آن‌ها ۱۰ بشقاب روی هم چیده شده و سینی دیگر خالی است. هر بشقاب، یکی از ۵ رنگ را دارد و هر رنگ دقیقاً ۲ بار آمده است. در یک حرکت، می‌توان هر کدام از بشقاب‌های روی سینی اول را برداشت و روی بشقاب‌های موجود در سینی دوم گذاشت. توجه کنید که این بشقاب را فقط روی بشقاب‌های سینی دوم می‌توان قرار داد و نمی‌توانیم زیر بشقاب دیگری قرار دهیم. هدف این است که بعد از ۵ حرکت، رنگ بشقاب‌های دو سینی به‌ترتیب از پایین به بالا دقیقاً یکسان شود. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۲

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۰
۴) ۲۵۲ ۵) بستگی به وضعیت ابتدایی دارد.



۲۳- به چند طریق می‌توان در شکل روبه‌رو ۸ خانه را انتخاب کرد که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند؟ المپیاد ریاضی ۱۳۹۴

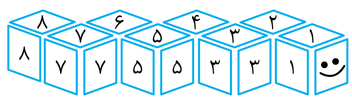
۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۸
۴) ۳۲
۵) ۶۴



۲۴- شکل روبه‌رو جزیره‌ای را نشان می‌دهد که ۱۶ خانه دارد. مساحت هر خانه هم یک واحد است. ۴ تا از این خانه‌ها که در شکل مشخص شده‌اند حاوی معدن طلا هستند. یک مزرعه یک مستطیل روی این جزیره است که اضلاع آن روی مرزهای خانه‌ها قرار دارد و مساحت آن حداقل یک واحد است. ارزش یک مزرعه برابر تعداد معادن طلای داخل آن است. برای مثال ارزش مزرعه‌ی شامل سه ستون سمت چپ و دو سطر بالایی (به مساحت ۶) برابر ۲ و ارزش مزرعه‌ای که شامل تمام خانه‌های جدول باشد، برابر ۴ است. مجموع ارزش‌های تمام مزرعه‌های متفاوت این جزیره کدام است؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۸

۱) ۱۰۴ ۲) ۲۴ ۳) ۲۴۰ ۴) ۱۲۰ ۵) ۹۶

۲۵- مار کوچکی متشکل از ۸ مکعب به ضلع ۱ همانند شکل زیر داریم که از سر تا دم با شماره‌های ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند. هر دو مکعب پشت سر هم با مفصل کوچکی به هم وصل شده‌اند و فقط قابلیت چرخش نسبت به یک‌دیگر را دارند. این مار کوچک را به چند حالت مختلف می‌توان در یک جعبه‌ی مکعبی به ضلع ۲ جا داد؟ دو حالت مختلف در نظر گرفته می‌شوند اگر دو قطعه با شماره‌های مختلف از بدن مار در یک مکان از جعبه‌ی مکعبی قرار بگیرند. یعنی اگر دو حالت با چرخش جعبه‌ی مکعبی به هم تبدیل شوند، یکسان نیستند. المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۲



۱) ۱۹۲ ۲) ۹۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴ ۵) ۱۴۴

۲۶- ۱۰ لامپ خاموش در یک ردیف، به‌ترتیب پشت سر هم قرار دارند. در هر مرحله، یکی از لامپ‌های خاموش را روشن می‌کنیم، این کار را آن‌قدر انجام می‌دهیم تا تمام لامپ‌ها روشن شوند. می‌خواهیم به‌ترتیبی لامپ‌ها را روشن کنیم که هیچ‌گاه بین لامپ‌های روشن لامپ خاموش قرار نداشته باشد. به عنوان مثال، اگر لامپ‌های اول و سوم روشن باشند، لامپ دوم نیز باید حتماً روشن باشد. به چند طریق می‌توان ترتیبی برای روشن کردن لامپ‌ها ارائه داد، به طوری که شرط مذکور حفظ شود؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۶

۱) ۱۲۰ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۵۰۴۰ ۵) ۴۰۳۲۰

۲۷- ۱۳۹۳ بادکنک را به‌ترتیب در یک ردیف قرار داده‌ایم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از بادکنک‌ها را بترکانیم. فقط باید این شرط رعایت شود که هر بادکنکی که می‌ترکد تعداد بادکنک‌های سمت چپ و راست آن که ترکیده‌اند حداکثر یکی اختلاف داشته باشد. به چند طریق می‌توانیم این بادکنک‌ها را بترکانیم؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۲

۱) $۳^{۶۹۷}$ ۲) $۲^{۶۹۷}$ ۳) $۲^{۶۹۶}$ ۴) $۳^{۶۹۶}$ ۵) $۲^{۱۳۹۳}$

۲۸- ۱۵ شتر در یک صف پشت سر هم ایستاده‌اند. می‌دانیم که وزن هر شتر عددی طبیعی از ۱ تا ۱۵ است و ممکن است وزن دو شتر یکسان باشد. هر شتر مجموع وزن خود و دو برابر وزن نفر جلویی‌اش را حساب می‌کند به جز نفر اول صف که شتری جلویش نیست. در کمال تعجب شترها متوجه می‌شوند که همه‌ی ۱۴ عدد محاسبه شده بر ۱۵ بخش‌پذیر است. وزن این ۱۵ شتر چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۹۱

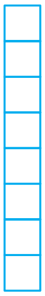
۱) $۱۵!$ ۲) $۲^{۱۴}$ ۳) ۱۵ ۴) ۲۲۵ ۵) $۱۵^{۲}-۱$

۲۹- به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های A و B از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را تعیین کرد، به طوری که $A\cap B$ دقیقاً یک عضو داشته باشد؟

۳۰- چند سه تایی (A,B,C) از زیرمجموعه‌های $\{v,w,x,y,z\}$ داریم که $A\cap B\subseteq C\subseteq A\cup B$؟ المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

۱) ۷۵۰۰ ۲) ۷۶۵۵ ۳) ۷۶۵۶ ۴) ۷۷۰۰ ۵) ۷۷۷۶

۳۱- در شکل روبه‌رو یک جدول کامل ۱×۸ نمایش داده شده است. با حذف دقیقاً یکی از اضلاع (افقی یا عمودی) به طول ۱ از یک جدول کامل، یک جدول ناقص به دست می‌آید. برای مثال در این شکل ۲۵ ضلع وجود دارد که با حذف هر کدام، یک جدول ناقص تولید می‌شود. قیمت یک جدول ناقص برابر است با تعداد مسیرهای به طول ۹ که از نقطه‌ی پایین سمت چپ به نقطه‌ی بالایی سمت راست و فقط با عبور از ضلع‌ها به دست می‌آید. فرض کنید S مجموعه‌ی تمام قیمت‌های جداول ناقص است. باقی‌مانده‌ی تعداد اعضای غیرتکراری S بر ۵ چند است؟



المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۷

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

۳۲- با رقم‌های ۳، ۵ و ۷ چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت که بر ۳ بخش‌پذیر باشند؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۷۵

۱) ۲۱ ۲) ۲۷ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴ ۵) ۱۹

۳۳- مجموعه‌ی $\{۶,۷,۱۲,۱۳,۲۱,۲۵,۳۰,۳۱\}$ چند زیرمجموعه دارد که حاصل‌جمع اعداد آن زوج باشد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۷

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۹۶ ۵) ۱۲۸

۳۴- فرض کنید A یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی و B زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد. تعداد زیرمجموعه‌هایی مانند C از مجموعه‌ی A که $B\cap C$ تعداد فردی عضو داشته باشد برابر است با: المپیاد ریاضی ۱۳۸۱

۱) ۵۹۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۴۶۴ ۴) ۳۴۸ ۵) بستگی به تعداد اعضای B دارد.

۳۵- تعداد زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ که مجموع اعضای آن بر ۸ بخش‌پذیر است چند تاست؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۱

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۲۶ ۳) ۱۲۷ ۴) ۱۲۸ ۵) ۱۲۹

۳۶- عدد $۲^۶\times۳^۵\times۵^۳\times۷^۱\times۱۳^۴$ چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد که تعداد عامل‌های اولِ آن عددی فرد باشد؟ به عنوان مثال $۵\times۲^۳\times۳^۲$ سه عامل اول دارد.

۱) ۶۸۰ ۲) ۸۴۰ ۳) ۹۲۰ ۴) ۹۶۰ ۵) ۱۱۸۰

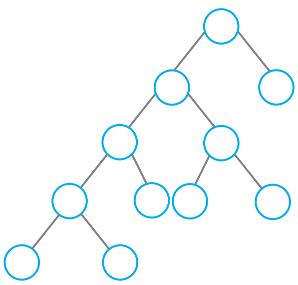
۳۷- چند عدد ۱۳ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۳

۱) $۲^{۱۳}$ ۲) $۲^{۱۵}$ ۳) $۲^{۱۱}$ ۴) ۳×۲^{۱۱} ۵) ۴×۳^{۱۱}

۳۸- به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه‌ی A, B و C از مجموعه‌ی $U=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ انتخاب کرد به طوری که رابطه‌ی $C=B\cap A$ برقرار باشد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۰

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) ۳×۲^۷ ۳) ۵×۲^۷ ۴) $۲^۷$ ۵) ۳×۲^{۱۰}

۳۹- در شکل روبه‌رو می‌خواهیم دایره‌ها را با سه رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ کنیم. به طوری که رنگ هر دایره و دو دایره‌ی زیر آن، که به آن متصل‌اند یا با هم برابر باشد و یا رنگ هر سه‌تای آن‌ها متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این رنگ آمیزی را انجام داد؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۶



۱) ۲۴۳
۲) ۷۲۸
۳) ۷۲۹
۴) ۱۴۵۸
۵) ۲۰۴۸

۴۰- به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول $۱۰×۳$ (۱۰ سطر و ۳ ستون) را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرد به طوری که:

- رنگ خانه‌ها نسبت به ستون وسط متقارن باشد.
- از هر دو سطر متوالی حداقل یک خانه سیاه شده باشد.
- هیچ دو خانه‌ی سیاه مجاور هم نباشد. (دو خانه مجاورند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.) المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۳

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۲۰۴۸ ۳) ۳۰۷۳ ۴) ۱۵۳۶ ۵) ۷۶۸

۴۱- مجموعه‌ی همه‌ی انسان‌ها از آغاز تاکنون را M بنامید. اگر مجموع تعداد فرزندان اعضای M برابر n و مجموع تعداد نوه‌های اعضای M برابر n' باشد، $\frac{n'}{n}$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۷

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱ ۵) $\frac{۱}{۲}$

۴۲- توپ فوتبال از تکه‌های چرمی سیاه و سفید ساخته شده است. تکه‌های سیاه پنج‌ضلعی منتظم و تکه‌های سفید شش ضلعی منتظم‌اند. هر پنج ضلعی با ۵ شش ضلعی و هر شش ضلعی با ۳ پنج ضلعی و ۳ شش ضلعی احاطه شده است. دوازده تکه‌ی سیاه در توپ به کار رفته است. توپ چند تکه‌ی سفید دارد؟ المپیاد مقدماتی ریاضی ۱۳۸۵

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۵ ۵) ۱۸

۴۳- یک عدد طبیعی را «تقسیمی» می‌نامیم، هرگاه از قرار گرفتن یک عدد مضرب ۵ در سمت راست یک عدد مضرب ۳ به دست آمده باشد. تعداد اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که تقسیمی نیستند، چند تاست؟ المپیاد ریاضی ۱۳۸۲

۱) ۵۸۸ ۲) ۲۹۴ ۳) ۸۸۲ ۴) ۱۲۰۰ ۵) ۴۳۲

۴۴- چند عدد طبیعی وجود دارد که عامل اول بیش از ۱۵ نداشته باشد و بر هیچ عدد مکعب کامل بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر نباشد؟ المپیاد ریاضی ۱۳۸۶

۱) ۶۴ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۲۹ ۴) ۲۱۸۷ ۵) ۴۰۹۶

۴۵- عدد n دارای ۳۵ مقسوم‌علیه مثبت است. تعداد مقسوم‌علیه‌های $n^۲$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۴۶- تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۱۴۳۰+!۱۳۸۷)×۲۰۰۸$ چند برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۴۳۰+!۱۳۸۷$ است؟ المپیاد ریاضی ۱۳۸۷

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰ ۵) ۲۰۰

۴۷- فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت a ، b و ab به‌ترتیب برابر ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد $b^۲$ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟ المپیاد ریاضی ۱۳۹۰

۴۸- در یک زمستان سرد، خرس قطبی ۸۸ قطعه گوشت دقیقاً به اندازه‌های ۱، ۲،... تا ۸۸ را در غاری ذخیره کرده است. او هر روز یکی از قطعه گوشت‌ها را به‌صورت تصادفی (و با احتمال برابر) انتخاب می‌کند. اگر اندازه‌ی گوشت عدد فردی بود، آن را کاملاً می‌خورد. اگر زوج بود، آن را دقیقاً نصف می‌کند، یک نصف آن را می‌خورد و نصف دیگر را مجدداً در غار قرار می‌دهد. اگر گوشتی موجود نباشد، خرس می‌میرد. با این الگوریتم، این خرس چند روز می‌تواند زنده بماند؟ المپیاد کامپیوتر ۱۳۸۸

۱) ۸۵ روز ۲) ۸۷ روز ۳) ۸۸ روز ۴) ۱۷۳ روز ۵) ۱۷۵ روز