مبانی هندسه

بررسی دقیق هندسه به روش نوین، همراه با افق‌های جدید در هندسه

دوره‌ای کامل از مبانی و مفهوم‌های هندسه، روشی جدید درساختن هندسه از مفهوم‌های ابتدایی تا پیشرفته.
تعریف‌ها و اثبات‌های دقیق قضیه‌های هندسه اقلیدسی، همراه با گذری بر هندسه‌های نا اقلیدسی.
مثال‌ها و فعالیت‌ها، با تکیه بر مساله‌های مهم و مشهور، مبحث‌های جدید در هندسه،
با بررسی جامعی از تبدیل‌های هندسی وکاربردهای آنها.
شامل مبحث‌های هندسه‌های (۱) و (۲) متوسطه.

محمود نصیری

فهرست

مقدمه تاریخی ۹
هندسه از گذشته تا هندسه‌های جدید ۹
مدل ون‌هیلی در توسعه تفکر هندسی ۱۵

فصل اول. دستگاه اول موضوعی و هندسه وقوع ۱۷

ساختمان دستگاه اصل موضوعی ۱۸
هندسه وقوع و مدل‌های مختلف ۲۵
قضیه‌هایی در هندسه وقوع ۳۱
تمرین ۱. فصل اول ۳۳

فصل دوم. منطق ریاضی و اثبات‌ها ۳۵

گزاره، نقیض یک گزاره، رابط‌های گزاره‌ای ۳۸
گزاره شرطی ۴۱
گزاره سوری ۴۷
اثبات‌ها و روش‌های اثبات ۴۹
تمرین ۲. فصل دوم ۵۷

فصل سوم. ساختار هندسه مسطحه ۵۹

تعریف‌نشده‌ها و اصل‌ها ۶۰
فاصله و اصل خط‌کش ۶۱
بینیت، پاره‌خط و نیم‌خط ۶۲
ویژگی‌های فاصله و متریک ۶۳
متریک اقلیدسی و متریک تاکسی‌متر ۶۴
متریک کروی ۶۶
اصل استقرار خط‌کش ۶۷
تمرین ۳. فصل سوم ۷۰
مجموعه‌های محدب و اصل جداپذیری صفحه ۷۱
زاویه و درون زاویه ۷۲
اندازه زاویه و اصل نقاله ۷۳
عمود بودن ۷۶
چندضلعی‌ها ۷۷
قضیه‌هایی که از اصل جداپذیری صفحه نتیجه می‌شوند ۸۱
قضیه قطعه‌بر ۸۲
تمرین ۴. فصل سوم ۸۵
مهم‌ترین اصل‌های مطرح شده در هندسه از گذشته تا حال ۸۶
اصل‌های هیلبرت ۸۶
اصل‌های بیرکهف ۸۸
اصل‌های مکلین ۸۹
اصل‌های SMSG ۹۰
پروژه ریاضیات مدرسه‌ای دانشگاه شیکاگو ۹۲
مقایسه روش‌های متریک و ترکیبی ۹۴

فصل چهارم. هم‌نهشتی ـ نامساوی‌ها در مثلث ۹۵

هم‌نهشتی یا قابلیت انطباق ۹۶
اصل ض ـ ز ـ ض ۹۸
حالت‌های دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها ۱۰۰
مکان هندسی ۱۰۲
توضیح‌هایی در مورد تساوی و هم‌نهشتی و مستقل بودن ض ـ ز ـ ض ۱۰۳
تمرین ۵. فصل چهارم ۱۰۶
نامساوی‌ها در هندسه ـ قضیه زاویه بیرونی ۱۰۷
وجود خط‌های عمود ۱۰۸
وجود موازی‌ها و قضیه Z ۱۰۹
سه نامساوی در مثلث ۱۱۰
کاربردهایی از نامساوی‌ها در مثلث ۱۱۲
بیش‌ترین و کم‌ترین فاصله‌ها ۱۱۳
فاصله نقطه از خط و عمود و مایل ۱۱۴
هم‌نهشتی مثلث‌های خاص و قضیه ض ـ ض ـ ز ۱۱۶
هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه ۱۱۸
ویژگی‌های نیمساز و قضیه‌هایی در مثلث متساوی‌الساقین ۱۱۹
تمرین ۶. فصل چهارم ۱۲۱

فصل پنجم. موازی‌ها و سه نوع هندسه ۱۲۳

مقدمه تاریخی ۱۲۴
اصل توازی اقلیدسی ـ اصل پنجم ـ اصل پلی‌فر ۱۲۶
قضیه مجموع اندازه‌های زاویه‌های مثلث در هندسه خنثی ۱۲۷
چهارضلعی و قضیه عمر خیام ۱۲۸
چهارضلعی ساکری و لامبرت ۱۲۹
هندسه بیضوی ۱۳۱
هندسه هذلولوی ۱۳۴
دیسک کلاین ۱۳۵
مدل پوانکاره ۱۳۶
مدل نیم‌صفحه ۱۳۹
معادل بودن اصل پنجم اقلیدس و اصل توازی ۱۴۰
نتیجه‌های اصل توازی یا معادل‌های آن ۱۴۱
تمرین ۷. فصل پنجم ۱۴۷

فصل ششم. چهارضلعی، خط‌های مهم مثلث ۱۴۹

چهارضلعی‌های معروف ۱۵۰
هم‌نهشتی چهارضلعی‌های محدب ۱۵۲

ویژگی‌های چهارضلعی‌های معروف ۱۵۴
متوازی‌الاضلاع ۱۵۴
مستطیل ۱۵۸
لوزی ۱۶۰
مربع ۱۶۰
کایت و دارت و ذوزنقه ۱۶۱
توضیح‌هایی در مورد تعریف چندضلعی‌های معروف ۱۶۳
ویژگی‌های چهارضلعی‌ها در یک نگاه ۱۶۶
تصویرهای موازی و پاره‌خط‌های میانگین ۱۶۷
قضیه پاره‌خط میانگین در مثلث ۱۶۸
پاره‌خط‌های میانگین در چهارضلعی ۱۷۰
همرسی خط‌ها یا پاره‌خط‌های مهم در مثلث ۱۷۱
تمرین ۸. فصل ششم ۱۷۶

فصل هفتم. مساحت و کاربردهای آن ۱۷۹

ناحیه‌های چندضلعی ۱۸۰
هم‌مساحت بودن مثلث‌ها و . . . ۱۸۴
مسأله پروانه در مساحت و کاربرد آن ۱۸۵
قضیه پیک و اثبات‌های آن ۱۸۸
رابطه اویلر و قضیه پیک ۱۹۷
قضیه پیک و ناحیه‌های حفره‌دار ۱۹۸
کاربرد مساحت در حل مسأله ۱۹۹
قضیه وی‌ویانی در مثلث و متوازی‌الاضلاع ۲۰۱
مساحت و رابطه‌های متجانس ۲۰۱
قضیه فیثاغورث ۲۰۲
سه‌تایی‌های فیثاغورثی ۲۰۳
متوازی‌الاضلاع روی دو خط موازی و قضیه پاپوس ۲۰۴
تمرین ۹. فصل هفتم ۲۰۶

فصل هشتم. تصویرهای موازی و تشابه ۲۱۱

نسبت و تناسب ۲۱۲
تصویرهای موازی و قضیه تالس ۲۱۴
قضیه تصویرهای موازی ۲۱۶
تصویرهای موازی و قضیه تالس بدون مساحت ۲۱۷
تشابه و تشابه مثلث‌ها و چندضلعی‌ها ۲۲۰
کاربرد تشابه در مثلث قائم‌الزاویه و قضیه فیثاغورث ۲۲۵
مثلث شبه قائمه، عکس قضیه‌های مثلث قائم‌الزاویه ۲۲۶
تعمیمی از قضیه فیثاغورث در مساحت ۲۳۰
قضیه تالس و قضیه نیمساز زاویه در مثلث ۲۳۰
عکس قضیه نیمساز در مثلث و دو مسأله ۲۳۲
دایره آپولونیوس ۲۳۳
تمرین ۱۰. فصل هشتم ۲۳۴

فصل نهم. دایره ۲۳۹

تعریف دایره و درون دایره ۲۴۰
خط قاطع و مماس ۲۴۱
قضیه خط مماس ۲۴۲
کمان دایره، اندازه درجه کمان، طول کمان ۲۴۳
قضیه وترها و کمان‌های مقابل ۲۴۵
انواع زاویه‌ها در رابطه با دایره زاویه‌های محاطی و ظلی و درونی و بیرونی ۲۴۶
قضیه دو دایره و قضیه وجود مثلث ۲۵۱
رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای بیرون دایره ۲۵۲
یک مکان هندسی مهم (کمان شامل) ۲۵۳
کاربردهایی از کمان شامل ۲۵۴
رابطه‌های طولی در دایره و قضیه‌های وترهای متقاطع و عکس آن‌ها ۲۵۶
قوت نقطه نسبت به دایره ۲۵۸
حالت‌های دو دایره نسبت به هم ۲۶۱
زاویه بین خط و دایره و دو دایره و دایره‌های عمود بر هم ۲۶۴
تمرین ۱۱. فصل نهم ۲۶۷

فصل دهم. مثلثات و هندسه، رابطه‌های طولی در مثلث ۲۷۷

نسبت‌های مثلثاتی ۲۷۸
مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع ۲۷۹
قضیه سینوس‌ها و کاربردهای آن ۲۸۱
هم‌نهشتی ض ــ ض ــ ز ۲۸۵
قضیه کسینوس‌ها ۲۸۶
قضیه استوارت و نتیجه‌های آن ۲۹۰
نامساوی‌های میانه‌ها و مثلث خود میانه ۲۹۱
محاسبه نیمسازها در مثلث ۲۹۲
فرمول هرون در محاسبه مساحت و ارتفاع ۲۹۴
ویژگی‌هایی از ارتفاع ۲۹۷
فرمول‌های نسبت‌های مثلثاتی ۲۹۹
تمرین ۱۲. فصل دهم ۳۰۱

فصل یازدهم. چندضلعی‌های محاطی و محیطی ــ چندضلعی‌های منتظم، محیط و مساحت ۳۰۷

چندضلعی‌های محاطی ۳۰۸
چندضلعی‌های محیطی ۳۱۱
دایره‌های محاطی مثلث ۳۱۵
قضیه بطلمیوس و عکس و تعمیم آن ۳۱۸
چندضلعی‌های منتظم ۳۲۰
محیط و مساحت دایره ۳۲۲
اثبات قضیه ارشمیدس و مساحت قطاع و قطعه ۳۲۵
جارو کردن با مماس ۳۲۷
تمرین ۱۳. فصل یازدهم ۳۲۸

فصل دوازده‌ام. ترسیم‌های هندسی ۳۳۵
ترسیم‌های هندسی ۳۳۶
جبر ترسیم‌ها ۳۴۲
چهار مثال نقض برای چهار مسأله معروف و تاریخی ۳۴۶
رسم n ضلعی‌های منتظم ۳۴۷
نسبت طلایی و پنج ضلعی‌منتظم ۳۴۹
رسم مثلث با معلومات مشخص ۳۵۲
تمرین ۱۴. فصل دوازده‌ام ۳۵۷
فصل سیزده‌ام. تبدیل‌های هندسی ۳۵۹
تبدیل‌های هندسی ۳۶۰
بازتاب و تبدیل ۳۶۱
نگاشت و تبدیل‌های هندسی ۳۶۲
تعریف تبدیل ـ نقطه ثابت ـ طولپا یا ایزومتری ۳۶۴
ترکیب دو تبدیل ۳۶۷
بازتاب و جهت، ویژگی‌هایی از طولپاها ۳۶۷
تبدیل همانی و کاربردهای آن ۳۷۰
تساوی دو طولپا ۳۷۳
انتقال و ویژگی‌های آن ۳۷۳
پاره‌خط جهت‌دار و بردار ۳۷۸
دوران ۳۷۹
ویژگی‌های شرکت‌پذیری و جابه‌جایی بازتاب‌ها ۳۸۸
بازتاب لغزنده ـ لغزه ۳۸۹
قضیه ترکیب سه بازتاب ۳۹۱
هندسه تبدیلاتی و اصل بازتاب ۳۹۳
ترکیب طولپاها ۳۹۶
کاربردهای تبدیل‌ها ۳۹۸
نقطه فرما ۴۰۸
نگاشت‌ها و تبدیل‌ها به روش تحلیلی ۴۱۱
تمرین ۱۵. فصل سیزده‌ام ۴۱۶
فصل چهارده‌ام. تبدیل‌های تشابهی و تجانس ۴۲۳
تبدیل‌های تشابهی و تجانس ۴۲۴
ویژگی‌های تجانس ۴۲۶
کاربردهای تجانس ۴۳۰
ترکیب تجانس‌ها و طولپاها، ترکیب تبدیل‌های تشابهی بازتاب کشیده، دوران کشیده ۴۳۳
شناخت تبدیل‌های تشابهی ۴۳۶
تمرین ۱۶. فصل چهارده‌ام ۴۳۹
فصل پانزده‌ام. تقارن ۴۴۱
تقارن و تقارن‌های خطی و دورانی ۴۴۲
تقارن‌های n ضلعی‌ها ۴۴۶
تقارن‌های دورانی در چندضلعی‌های منتظم ۴۵۰
تقارن و هم‌نهشتی
گروه و گروه تبدیل‌ها ۴۵۲
فرش کردن و کاشی‌کاری ۴۵۴
فرش کردن نیم‌منتظم یا ارشمیدسی ۴۵۶
فرش کردن با چندضلعی‌های غیرمنتظم ۴۵۹
تمرین ۱۷. فصل پانزده‌ام ۴۶۱
فصل شانزده‌ام. قضیه‌های مشهور هندسه ۴۶۳
قضیه مورلی و کرمزاده ۴۶۴
لم کرمزاده و اثبات قضیه مورلی ۴۶۶
ویژگی‌هایی از ارتفاع و مثلث ارتفاعی ۴۷۲
خط اویلر در مثلث ۴۷۴
دایره ۹ نقطه و ۱۲ نقطه ۴۷۵
همرسی خط‌ها در مثلث و هم‌خطی نقطه‌ها ۴۷۷
قضیه سوا ۴۷۸
هم‌خطی نقطه‌ها و قضیه منلائوس ۴۸۰
قضیه دزارگ ۴۸۱
نامساوی‌هایی در هندسه ۴۸۲
تغییر متغیر در اندازه‌های ضلع‌های مثلث ۴۸۹
نامساوی کوشی ـ شوارتز ۴۹۱
نامساوی اردیش ـ مردل و تعمیم آن ۴۹۲
تمرین ۱۸. فصل شانزده‌ام ۴۹۷
پاسخ تمرین‌ها ۵۰۱
پاسخ تمرین ۱ ۵۰۲
پاسخ تمرین ۲ ۵۰۴
پاسخ تمرین ۳ ۵۰۵
پاسخ تمرین ۴ ۵۰۶
پاسخ تمرین ۵ ۵۰۷
پاسخ تمرین ۶ ۵۰۸
پاسخ تمرین ۷ ۵۱۱
پاسخ تمرین ۸ ۵۱۵
پاسخ تمرین ۹ ۵۲۰
پاسخ تمرین ۱۰ ۵۲۷
پاسخ تمرین ۱ ۵۳۲
پاسخ تمرین ۱۲ ۵۴۴
پاسخ تمرین ۱۳ ۵۵۵
پاسخ تمرین ۱۴ ۵۶۶
پاسخ تمرین ۱۵ ۵۶۹
پاسخ تمرین ۱۶ ۵۸۰
پاسخ تمرین ۱۷ ۵۸۳
پاسخ تمرین ۱۸ ۵۸۵

به نام خالق هستی

مقدمه

قدرت حرکت کشف ریاضی استدلال نیست بلکه قدرت تخیل است و آن‌چه قدرت تخیل را بارور می‌کند، قدرت شهودی هندسه است.

هندسه، زیبایی تجسم و قدرت انتزاع را در پیوند با شهود و تئوری‌های کلی، از نظر تاریخی و کاربرد مدرن آن درهم می‌آمیزد. در این کتاب سعی می‌کنیم این واقعیت‌های هندسه را در هم بیامیزیم. تفکر هندسی، استدلال و شهود را به روش مشخصه آن پیوند می‌دهد. جذابیت و اهمیت هندسه، ناشی از همین ترکیب یا پیوند است. ایده‌های هندسی، بینش و خلاقیت دانش‌آموزان را در سایر زمینه‌های ریاضی نیز بالا برده و باعث درک عمیق‌تر ریاضی می‌شود. به همین دلیل است که آموزش هندسه در مدرسه‌ها از اهیمت زیادی برخوردار است، البته به شرطی که به روش صحیح آن آموزش داده شود.

به گفته افلاطون، هندسه عرصه جالبی برای تفکر منطقی است و ناب‌ترین تمرین برای مغز است. هم‌چنین گالیله اعتقاد داشت که کتاب طبیعت به زبان ریاضی نوشته شده است و شکل‌های به کار برده در آن هندسی هستند. حتی افلاطون مطالعه هندسه را مقدمه‌ای ضروری برای مطالعه فلسفه می‌دانست.

امروزه نیز برنامه‌های NCTM و CCSS توسعه شهود هندسی و درک آن و ساختن یک تفکر هندسی را در جهت‌های مختلف توصیه می‌کنند و هندسه را جایگاهی طبیعی برای رشد استدلال و توجیه مهارت‌های دانش‌آموزی می‌دانند.

اما در مورد آموزش هندسه ، لازم است توضیح دهیم که هندسه یکی از پرتلاطم‌ترین شاخه‌های ریاضی نیز از گذشته تا حال بوده و هست. در روش‌هایی که امروزه در ساختار هندسه مطرح می‌شوند این مشکل مشهود است. از یک سو به دلیل سابقه تاریخی آن و از سوی دیگر با پیشرفت هندسه‌های جدید این چالش‌ها به‌وجود آمده‌اند. متأسفانه در کشور ما به ویژه در سال‌های اخیر بی‌توجهی به هندسه آشکار است و در روش‌های آموزش و نگارش هندسه در دوره‌های متوسطه و حتی سطوح بالاتر تحول چندانی صورت نگرفته است. این بی‌توجهی به هندسه چنان شدید بوده است که نه تنها تعریف‌ها و نمادهای به کار برده شده با اکثر کتاب‌های مرجع و درسی امروزی دنیا نتوانسته همگام شود، بلکه در ارایه برنامه درسی مناسب نیز با مشکل روبه‌رو هستیم.

هر چند به دلیل برگزاری مسابقه‌ها و المپیادهای ریاضی با مسأله‌های زیادی از هندسه آن هم برای قشر اندکی از دانش‌آموزان روبرو می‌شویم، که این هیچ کمکی به اشاعه تفکر عمومی نسبت به هندسه نمی‌کند، حتی طرح این مسأله‌های پیچیده هندسه نه تنها برای اکثریت دانش‌آموزان مفید نیست بلکه ممکن است موجب سرخوردگی آن‌ها نیز بشود. بنابراین یکی از هدف‌های مهم این کتاب اشاعه یک تفکر هندسی معنی‌دار در هندسه است و اعتقاد داریم که این تفکر باید در دانش‌آموزان ایجاد شود.

بنابراین در تدوین این کتاب سعی شده است که بر طبق استانداردهای موجود دنیا، ساختار هندسه از ابتدا به‌طور رسمی و با رعایت اصول و پایبندی به ارایه تعریف‌های دقیق و اثبات‌های قابل فهم از مفهوم‌های هندسی و قضیه‌ها همراه با دیدگاه‌های جدید در هندسه مطرح شوند، که این خود یک نقطه قوت در آموزش هندسه است.

هر چند که ارایه رسمی و دقیق مفهوم‌های هندسی، در دوره‌های اولیه برای دانش‌آموزان نباید هدف اصلی باشد، اما باید تعریف‌ها و اثبات‌های غیررسمی چنان مطرح شوند که وقتی در سطح‌های بالاتر دانش‌آموزان با بیان دقیق‌تر آن‌ها آشنا می‌شوند، تناقضی را ایجاد نکند و موجب سردرگمی نشود، و این همان کار اساسی است که از عهده مؤلفین و معلمین توانمند برمی‌آید.

به همین دلیل یکی دیگر از هدف‌های اساسی این کتاب ارایه مبانی و مفهوم‌های هندسه مقدماتی با بیان استدلال‌های رسمی و به روش دقیق و موشکافانه است.

در اساس محتوای این کتاب، **در سطح‌های سوم و چهارم مدل ون‌هیلی در توسعه تفکر هندسی می‌باشد.**

در فصل‌های کتاب، در مورد روش‌های ارایه و یا ساختاری که برای هندسه قایل شده‌ایم توضیح کافی خواهیم داد، در این کتاب، روشی را که برای ساختار هندسه انتخاب کرده‌ایم روش متریک در ارایه هندسه است، که اساس آن بر اعداد حقیقی استوار است. در انتهای فصل سوم تمام اصل‌هایی را که برای ساختمان هندسه از ابتدا تا اکنون ارایه شده‌اند، بیان کرده‌ایم. در واقع اصل‌ها، تعریف‌نشده‌ها، و مفهوم‌های اساسی به کار رفته در کتاب برگرفته از این دسته اصل‌ها می‌باشند.

مفهوم‌های، **فاصله**، **بینیت**، **هم‌نهشتی**، **اصل‌های اندازه پاره‌خط** و **اندازه زاویه** با به کار بردن اعداد حقیقی به سادگی قابل درک می‌باشند.

در فصل اول با دستگاه‌های اصل موضوعی هندسه، و مثال‌هایی از مدل‌های متنوع در هندسه‌های متناهی و نامتناهی آشنا می‌شویم.

در واقع ساختن یک هندسه با تعداد محدودی مفهوم‌های تعریف نشده و اصل و حل مسأله با این معلومات اندک روشی توانا در بیان استدلال‌های منطقی است، زیرا نیاز به دانستن اشیاء اضافی ندارد و با همین محدود بودن معلوم‌ها، دانش‌آموز باید بتواند استدلالی درست ارایه دهد و این خود مهارتی شگفت‌انگیز در یک مبتدی هندسه ایجاد می‌کند. بنابراین توجه به این فصل مهم است. در ریاضی و به ویژه هندسه درست نوشتن و درست بیان کردن جمله‌ها اهمیت زیادی دارد، و این آشنایی کمی با منطق ریاضی را می‌طلبد. در فصل **دوم**، تا حد نیاز به بحث در مورد منطق ریاضی و اثبات‌ها پرداخته شده است.

از فصل **سوم** به بعد، ساختار اساسی هندسه شروع می‌شود، و تا انتهای فصل **چهارم** تمام قضیه‌ها در هندسه‌ای هستند که مستقل از اصل توازی است. این هندسه بدون **اصل توازی را هندسه نتاری یا خنثی** نیز می‌نامند. در واقع بیش‌تر این قضیه‌ها در هندسه‌های نااقلیدسی نیز برقراراند.

ساختار فصل **پنجم** با تمام فصل‌های دیگر متفاوت است، زیرا در این فصل براساس سه نوع اصل توازی، سه نوع هندسه متفاوت، بررسی می‌شوند. در این فصل، مختصری در مورد هندسه‌های نااقلیدسی بحث شده است، زیرا امروزه آشنایی با این نوع هندسه‌ها در برنامه‌های درسی تربیت معلم و به‌طور مختصر آن برای دانش‌آموزان توصیه می‌شود در واقع آشنایی با بعضی از ویژگی‌های هندسه‌های نااقلیدسی به درک بهتر هندسه اقلیدسی کمک می‌کند. همین کشف هندسه‌های نااقلیدسی موجب شد که هیلبرت در ابتدای قرن بیستم هندسه اقلیدسی را از نو بازسازی کند. بخشی از این هندسه‌ها با زندگی واقعی امروزی سروکار دارند.

فصل‌های **ششم** و **هفتم** و **هشتم** از فصل‌های اساسی هندسه اقلیدسی تا قبل از دایره می‌باشند، در این فصل‌ها چهارضلعی‌های معروف و مساحت که یکی از کاربردی‌ترین مبحث‌های هندسه می‌باشند، بررسی می‌شوند و سپس تشابه که آن نیز از بحث‌های ویژه هندسه اقلیدسی است مطرح شده است. یکی از ویژگی‌های مهم این کتاب توجه خاص به قضیه‌ها با شرط اگر و فقط اگر است.

بنابراین سعی شده است عکس هر قضیه در صورتی که درست است اثبات شود و در صورت نادرست بودن با مثال نقض رد شود. به همین دلیل قضیه‌هایی در کتاب وجود دارند که اثبات عکس آن‌ها کم‌تر مورد توجه بوده است یا عکس آن‌ها قبلاً مطرح نشده است.

در مثلث قائم‌الزاویه با تعدادی از این قضیه‌ها روبه‌رو خواهید شد.

فصل‌های **نهم**، **دهم**، **یازدهم** و **دوازدهم** وابستگی نزدیکی با هم دارند، در واقع آن‌چه در مورد دایره و چندضلعی‌ها در ارتباط با دایره مطرح می‌شوند و به ویژه رابطه بین مثلثات و هندسه در این فصل‌ها به‌طور مشروح بررسی شده‌اند. بنابراین فرمول‌های رابطه‌های طولی در مثلث و دایره و مهم‌تر از همه دو قضیه سینوس‌ها و کسینوس‌ها و فرمول هرون و کاربردهای آن‌ها از بخش‌های مهم این فصل‌ها هستند.

در فصل **دوازدهم** که شامل ترسیم‌های هندسی است، علاوه بر روش‌های ارایه شده در ترسیم‌های مهم، قابل رسم نبودن چهار مسأله ترسیمی معروف که از نظر تاریخی اهمیت دارند بررسی می‌شوند.

شاید از نظر اهمیت فصل‌ها، سه فصل **سیزدهم** و **چهاردهم** و **پانزدهم** مهم‌ترین فصل‌های این کتاب هستند، این فصل‌ها شامل دو موضوع جدید در هندسه یعنی تبدیلات و تقارن می‌باشند، دو موضوعی که کم‌تر در طول ۲۰۰۰ سال عمر هندسه مورد توجه بوده است. با گسترش کامپیوتر و به دلیل کاربرد تبدیل‌ها و تقارن در برنامه‌های کامپیوتری این موضوع مورد توجه بسیاری از ریاضی دان‌ها می‌باشد.

امروزه تبدیل‌ها به یک موضوع اساسی در برنامه‌های مدرسه‌ای تبدیل شده است. یکی از اصل‌ها و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای که توسط NCTM توصیه می‌شود، این است که همه دانش‌آموزان در کلاس‌های ششم تا هشتم باید بتوانند، اندازه، موقعیت و جهت شکل‌ها را تحت تبدیل‌هایی مانند **بازتاب**، **دوران** و **انتقال** توصیف کنند. به همین دلیل در این کتاب که قسمت زیادی را نیز شامل می‌شود، تبدیل‌های هندسی و تقارن به‌طور مشروح مورد بررسی قرار گرفته‌اند. روش بیان شده در ارایه تبدیل‌ها کم‌تر مورد توجه بوده است. بنابراین در این سه فصل با مفهوم‌های جدیدتری آشنا می‌شویم.

این سه فصل از مبحث‌های مهم هندسه هستند که به آموزش‌گرهای هندسه در اکثر برنامه‌های درسی دنیا در دوره‌های متوسطه توصیه می‌شوند. این مفهوم‌ها یک نقش اساسی را در آموزش هندسه مدرسه‌ای در حال حاضر ایفا می‌کنند.

فصل شانزدهم از ویژگی‌های متفاوتی با سایر فصل‌ها برخوردار است این فصل در راستای ساختن هندسه نیست، اما شامل قضیه‌های مشهوری از هندسه است که علاوه بر کاربردهای بعضی از آن‌ها، از زیبایی‌های هندسه نیز محسوب می‌شوند. در این فصل با روش اثبات زیبایی از قضیه مورلی که توسط دکتر کرمزاده بیان شده است، همراه با شرح حال مختصری از ایشان و استاد حسین غیور از پیشکسوتان ریاضی و به‌ویژه هندسه آشنا می‌شویم.

سخن آخر این که اصلی‌ترین هدف، ارایه یک کتاب مرجع با رعایت همه مرحله‌های آموزشی است، که طریقه ساختن هندسه را طی سلسله مراتب منطقی آن دنبال می‌کند و وجود چنین کتاب‌هایی با این ویژگی‌ها ضروری است. امروزه با مراجعه به سایت‌های مختلف می‌توانیم با هزاران مسأله هندسه روبه‌رو شویم، پس در این مورد نیازی احساس نمی‌شود، این مفهوم‌های هندسی و روش‌های بیان آن‌ها و همچنین روش‌های حل مسأله و سیر منطقی هندسه و ارایه مفهوم‌های جدید و کاربردی در هندسه است که امروزه به آن‌ها نیاز داریم.

سعی شده است که فعالیت‌های مختلف و پرسش‌های متعدد در مرحله‌های اثبات قضیه‌ها و مثال‌ها مرتباً مطرح شوند، این پرسش‌ها و فعالیت‌ها کمکی در امر آموزش و درک مفهوم‌ها می‌باشند.

در پایان لازم می‌دانم از جناب آقای یحیی دهقانی مدیر مسئول محترم انتشارات مبتکران که امکان چاپ این کتاب را فراهم کردند، تشکر و قدردانی کنم. هم‌چنین از جناب آقای خدایار مبین که هماهنگی‌های لازم را انجام دادند تشکر می‌کنم. از خانم فیروزه مرادی که با تلاش فراوان زحمت صفحه‌آرائی کتاب را کشیدند و خانم‌ها رضیه صفریان و سمانه ایمان‌فرد که رسم شکل‌ها با زحمت فراوان برعهده داشتند و نیز خانم سمانه ایمان‌فرد که طراحی جلد کتاب را انجام دادند، سپاسگزارم و برای آن‌ها آرزوی موفقیت روزافزون دارم.

محمود نصیری

مقدمه تاریخی

هندسه از گذشته تا هندسه‌های جدید

هندسه یک ابداع یونانیان است که بدون آن علوم مدرن غیرممکن است.

«برتراند راسل»

تمام علم چیزی جز تصحیح تفکر روزمره نیست.

«آلبرت انیشتین»

ریاضیات یونان پیش از اقلیدس

یونانی‌ها حق مصری‌ها در ابداع هندسه را محترم داشته‌اند. مصریان باستان و بابلی‌ها ریاضیات خود را روی پاپیروس‌ها و لوحه‌های گلی پخته به خوبی مکتوب کرده بودند و اقلیم خشک این مناطق به حفظ و نگهداری این مدارک کمک کرده و اکنون به دست ما رسیده است. در این یافته‌ها مدارکی از تأثیر ریاضیات هندی نیز مشاهده می‌شود.

مصری‌ها و بابلی‌ها در محاسبات عددی، و حتی در سطح ابتدایی جبر، مانند حل مسایل بهره مرکب مهارت داشته‌اند.

طغیان سالیانه رود نیل و به طبع آن محو شدن مرزهای زمین‌های کشاورزی باعث شده بود تا مصری‌ها نقشه‌برداران ماهری شوند. مصری‌ها و بابلی‌ها مهندسان فوق‌العاده‌ای بودند، اهرام مصر، ساختمان‌های چند طبقه بزرگ، زمین‌های کشاورزی طبقه‌بندی شده و سیستم آبیاری گسترده از شواهد این امر است. باستان‌شناسان مدارک زیادی از محاسبات ریاضی بر روی لوحه‌های گلی یافته‌اند که شامل ضرب، توان، ریشه دوم، توان سوم و ریشه سوم است.

بابلی‌ها و مصری‌ها روش حل معادله‌های درجه دوم را برای ریشه‌های صحیح و مثبت آموخته بودند. و آن‌ها را از طریق مربع کامل حل می‌کردند. در هندسه بابلی‌ها و مصری‌ها خواص مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۵ــ ۴ــ ۳ را می‌شناختند که حداقل حالت خاصی از قضیه فیثاغورث است. فرمول $\frac{(AB+CD)(BC+AD)}{۴}$ را برای محاسبه مساحت چهارضلعی به کار می‌برده‌اند. البته این فرمول فقط برای مستطیل جواب درست ارایه می‌دهد.

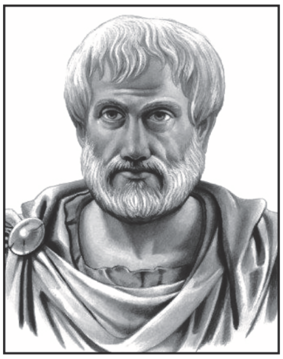
در حالی که مصریان و بابلیان دانش گسترده‌ای از مفاهیم ریاضیات داشته‌اند (برخی درست و برخی نادرست) در یونان، برای نخستین بار مطرح شد که فرمول‌ها و مفاهیم هندسه باید بر اساس استدلال بنا شود و نه بر اساس مقایسه و مشاهده. این مشخص نیست که چگونه و چرا این اتفاق افتاده، اما این مساله یک تغییر بزرگ در چگونگی تفکر مردم بوده است. مردم یونان پیشینه بحث و استدلال در مسائل فلسفی را داشته‌اند برای جهت‌دار بودن این مباحثه‌ها و وضع قوانین برای آن‌ها، دانشمندانی چون سقراط و ارسطو و افلاطون قوانین سخت‌گیرانه منطق را وضع کردند.

درباره ریاضیات اولیه در یونان باستان اطلاعات اندکی در دسترس است و نوشتارهای زیادی باقی نمانده است.

زیرا نوشته‌ها و طومارها به دلیل تفاوت اقلیم یونان با اقلیم کویری مصرو بابل، بیش‌تر از بین رفته‌اند.

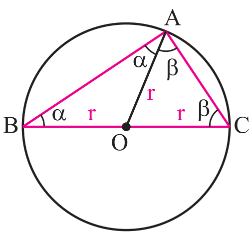
البته در کتاب اصول اقلیدس، وی موفق شده است که متون قبل از خود را تا حدودی جمع‌آوری کند. از ریاضی‌دان‌های قبل از اقلیدس، افراد اندکی را می‌شناسیم. اولین و مؤثرترین آن‌ها تالس است «۵۴۶ تا ۶۲۴ قبل از میلاد» او در مصر تحصیل کرده و اولین فردی بوده است که قوانین استدلال منطقی را وارد هندسه کرده و او اولین اثبات‌ها را در هندسه ارایه داده است. تعدادی از این اثبات‌ها را در زیر مشاهده می‌کنید. (در تمام این جمله‌ها کلمه برابری یا تساوی به کار برده شده است، که به معنی همان انطباق یا هم‌نهشتی امروزی است.)

قضیه‌های منسوب به تالس


«تالس»

❶ تمام زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع برابراند.
❷ اگر دو خط یکدیگر را قطع کنند زاویه‌های روبه‌رو برابراند.
❸ اگر دو مثلث دو زاویه و ضلع بین مساوی داشته باشند، با هم مساوی‌اند.
❹ زاویه محاطی مقابل به نیم‌دایره قائمه است.

$$\alpha+\alpha+\beta+\beta=۱۸۰$$



(۱)

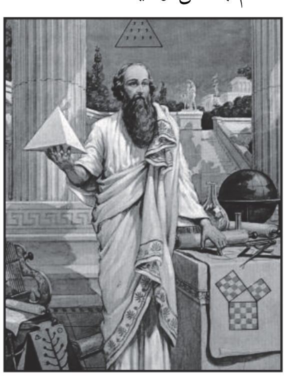
پس $\alpha+\beta=۹۰°$ یعنی ΔABC قائم‌الزاویه است.

تقریباً تمام این مفهوم‌ها شناخته شده بودند و بعضی از آن‌ها توسط بابلیان مطرح شده بود، اما اعتبار اثبات آن‌ها برای اولین بار به تالس رسید. هرچند که این اثبات‌ها در مقابل اثبات‌هایی که اقلیدس ارایه داد بسیار ساده و ابتدایی به نظر می‌رسید، اما این اثبات‌های ابتدایی، سنگ بنای این تفکر بودند که ریاضیات را باید با اثبات به پیش برد، نه با مشاهده مستقیم و اندازه‌گیری و یا به عنوان یک باور عقیدتی مطرح نمود.

فیثاغورث «Pythagoras» از شهر ساموس «Samos» «۵۷۰ ـ ۵۰۰ قبل از میلاد» احتمالاً مطالب نوشته شده توسط تالس را مطالعه کرده بود. او به مصر مسافرت کرده و گویا از هند، هم دیدن کرده بود. او پایه‌گذار جامعه مخفی در سرزمین‌های یونان در جنوب ایتالیا بوده است که این جامعه‌ها تا حدود ۲۰۰ سال پابرجا بوده‌اند. تمام کشف‌های این مردمان، به نام این جامعه تمام شده است، به همین دلیل بیان این‌که کجا وکی و توسط چه کسی انجام شده است، تقریباً غیر ممکن است. فیثاغورث اهمیت ویژه و اسرارآمیزی به اعداد می‌داده است، به گونه‌ای که از او نقل شده است که «همه پدیده‌ها با عدد قابل توجیه است.» این مهم باعث افزایش توجه به مطالعه بر روی علم اعداد شد، که موجب دستاوردهای قابل تقدیری در ریاضیات به ویژه نظریه اعداد گردید. وی در هندسه نیز خدمات ارزنده‌ای انجام داد. ویژگی‌های خط‌های موازی، محاسبه جمع زاویه‌های درونی مثلث و صد البته، قضیه فیثاغورث.

جالب‌ترین کشف فیثاغورثیان، اثبات وجود عددهای اصم یا گنگ می‌باشد، عددی را گنگ گوییم که نتوان آن را به‌صورت یک کسر با دو عدد صحیح در صورت و مخرج نوشت که عدد مخرج مخالف صفر است. اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ به همان گونه که توسط ارسطو ثابت شد در کتاب‌های دبیرستانی امروزی و هر کتاب دیگر نیز معمولاً به همین صورت ثابت می‌شود که، $\sqrt{۲}=\frac{p}{q}$ فرض کرده و با استفاده از بخش‌پذیری به تناقض می‌رسیم.

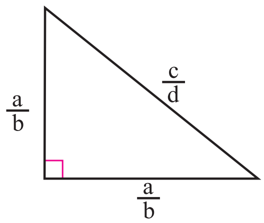
گنگ بودن $\sqrt{۲}$ به‌طور اساسی پایه نظریه‌های فیثاغورثیان (پیروان فیثاغورث) را زیر سؤال برد. کشف اعداد گنگ نادرست بودن این ادعا را اثبات می‌کرد. سوگند رازداری طرفداران فیثاغورث، مانع اطلاع‌رسانی این کشف در عالم ریاضی شد و اعداد گنگ دیرتر جای خود را در استدلال‌های ریاضی باز کرد. گفته شده است که یکی از طرفداران فیثاغورث که به روایتی یکی از اولین شاگردان فیثاغورث که خود بعدها یکی از برجستگان فیثاغورثیان شناخته شده به نام هیپاسوس (Hippasus) بوده است، در یک سفر دریایی این راز را برای شخصی افشا کرده است و هنگامی که دریا طوفانی شده در دریا غرق شده است. برخی گفته‌اند که همکار او وی را به دریا پرت کرده است و برخی گفته‌اند در حمام به قتل رسیده است.


«فیثاغورس»

اما شاید این گفته چندان مهم نباشد، آن‌چه مهم است این است که، این فرد چگونه توانسته است گویا بودن $\sqrt{۲}$ را به تناقض بکشاند، زیرا در آن زمان هنوز اعداد گنگ شناخته شده نبوده و روشی را که در بالا به آن اشاره شد به احتمال زیاد نمی‌توانسته به کار برده باشد. این پرسشی است که با **استاد عزیز دکتر کرم‌زاده** سر یک میز نهاری که در خدمت ایشان بودم مطرح کردم، ایشان پاسخ جالبی را بیان کردند، که در زیر مشاهده می‌کنید.

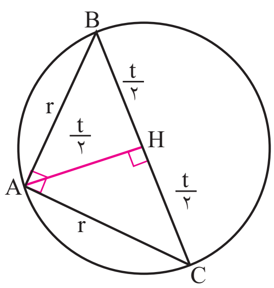
روش اثباتی که براساس خود مفهوم‌های هندسی استوار است، در واقع قضیه زیر، اثبات را آشکار می‌کند.

قضیه . هیچ مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی با ضلع‌های با اندازه‌های گویا وجود ندارد.



(۲)

فرض کنیم اندازه‌های ضلع‌های این مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، $\frac{a}{b}$، $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ (که a، b، c و d اعداد طبیعی هستند) باشند. با ضرب این سه کسر در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها به سه عدد صحیح می‌رسیم. فرض کنیم مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی که اندازه وتر آن کوچک‌ترین باشد (توجه داشته باشیم که این کوچک‌ترین وجود دارد) اندازه‌های ضلع‌های آن r، r، t باشند که r و t عددهای صحیح و مثبت‌اند، بنابر قضیه فیثاغورث $t^۲ = ۲r^۲$. این مثلث را ΔABC می‌نامیم. بنابراین عدد صحیح t کوچک‌ترین اندازه وتر این مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است که اندازه همه ضلع‌های آن صحیح و مثبت هستند.



(۳)

$\overline{AH}$ ارتفاع وارد بر وتر این مثلث را رسم می‌کنیم، با توجه به قضیه چهارم تالس که بیان کردیم، $\overline{BC}$ قطر دایره و در نتیجه $AH = \frac{t}{۲}$. در نتیجه مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ΔABH و ΔAHC با ضلع‌های به اندازه‌های $\frac{t}{۲}$، $\frac{t}{۲}$ و r وجود دارند که اندازه وتر هر کدام r عددی صحیح است و از اندازه وتر ΔABC که برابر t است کوچک‌تر است، زیرا $t^۲ = ۲r^۲$ یا $t^۲ = r^۲ + r^۲$ در نتیجه، $r < t$، و این متناقض با فرض مسأله است که ΔABC، مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی است که اندازه وتر آن کوچک‌ترین است.

در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به ضلع‌های با اندازه‌های گویا وجود ندارد، اگر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی با ضلع‌های زاویه قائمه با اندازه واحد را در نظر بگیریم، اندازه وتر آن $\sqrt{۲}$ است، در نتیجه، $\sqrt{۲}$ گویا نمی‌باشد.

اگر فرض را بر این بگذاریم که «هیپاسوس» چنین استدلالی را ممکن است به کار برده باشد، باید به این نکته توجه داشته باشیم که به‌طور غیرمستقیم از این ویژگی اعداد طبیعی استفاده کرده است که هر زیرمجموعه غیرتهی از اعداد طبیعی دارای کوچک‌ترین عضو است.

کشف این مفاهیم منطقی، احتمالاً باعث شده است که هندسه را به صورت منطقی پایه‌گذاری کنند. به نظر می‌رسد یکی از اعضای جامعه فیثاغورثیان، هیپوکراتس «Hippocrates ۴۱۰ ـ ۴۷۰ قبل از میلاد» اولین کسی بوده است که هندسه را با چند تعریف ساده همانند دانه‌های زنجیری از استدلال‌های منطقی توسعه و بسط داده است.

افلاطون «۳۷۴ ـ ۴۲۸ قبل از میلاد» قبل از این‌که آکادمی خود را در آتن بنا کند، به مصر و سپس به جنوب ایتالیا به دیدار فیثاغورثیان می‌رود. او خود یک ریاضی‌دان نبود، اما هندسه را به عنوان عرصه جالبی برای تفکر منطقی می‌ستود. از جانب او نقل شده است، که بر سر در آکادمی خود نوشته بود، «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود» او نوشته که هندسه ناب‌ترین تمرین برای مغز است، به‌خصوص برای فلاسفه و کشورداران.

در توصیف آموزش مناسب و مفید وی چنین نوشته است؛

هندسه روان را به سمت حقیقت هدایت می‌کند و روح فلسفه را بیدار می‌کند.... هیچ چیز دیگری چنین تأثیری را بر آدمی ندارد... در تمام علوم، تجربه ثابت کرده است که هرکس که هندسه آموخته، به‌طور قابل ملاحظه‌ای در یادگیری و درک مطالب سریع‌تر از کسی بوده است که هندسه نمی‌دانسته است.

مانند فیثاغورث، افلاطون هم معتقد بود که معمای جهان در عدد و در شکل است، همچنین گالیله اعتقاد داشت که کتاب طبیعت به زبان ریاضی نوشته شده است و شکل‌های به کار برده شده در آن هندسی هستند، مانند مثلث، مربع، دایره و . . . و هر کس این زبان و شکل‌ها را نفهمد، نمی‌تواند طبیعت را بشناسد. به نظر افلاطون پروردگار همواره قواعد هندسی را به کار می‌برد، و از این‌رو مطالعه هندسه مقدمه‌ای ضروری برای مطالعه فلسفه است.

بعدها افلاطون هندسه را علمی که از ازل تا به ابد وجود داشته توصیف کرده است. او بیان کرده است که خط کاملاً راست و دایره کاملاً بی‌عیب و نقص، وجود خارجی ندارد. بر این اساس او نتیجه می‌گیرد که باید عالم دیگری وجود داشته باشد که در آن همه چیز کامل و بی‌نقص

باشدکه روح ما قبل از تولد در آن عالم می‌زیسته است. واقعیت زندگی روزمره پژواک حقیقی از این عالم بی‌نقص است و هندسه مطالعه این عالم ایده‌آل است که ساکن ذهن می‌باشد.

مطالعه هندسه جریانی است که باعث بیداری این مهارت و دانش فطری می‌شود، و ذهن را برای فراگیری عدالت و نیکی آماده می‌کند، که این دو هدف غایی فلسفه افلاطون می‌باشد. بیش از ۲۰۰۰ سال بعد نقش هندسه به عنوان یک محصول فطری ذهن انسان، سنگ بنای فلسفه **اما نوئل کانت** بر آن قرار گرفت.

باتوجه به مشکلاتی که تعریف، نقطه، خط و غیره برای فیثاغورث پیش آورده بود، افلاطون برای واضح شدن مفاهیم اساسی اقدام کرد. تعدادی از تعریف‌های افلاطون و احتمالاً یکی دوتا از اصل‌های وی بعداً توسط اقلیدس در کتاب اصول آورده شده است. قدیمی‌ترین روش منظم برای تعیین دنباله‌ای از طول‌ها که یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند به وی نسبت داده می‌شود. وی نشان داد طول‌های $n^۲-۱$، $۲n$، $n^۲+۱$ چنین مثلثی را تشکیل می‌دهند. $(n>۱)$

اقلیدس Euclid

دوران فیثاغورث و اقلیدس را دوران طلایی هندسه می‌نامند. در مورد زندگی خود اقلیدس چیز زیادی نمی‌دانیم، اقلیدس شاگرد مکتب افلاطون بوده است.

اقلیدس یکی از مشهورترین ریاضی‌دان‌های یونان و شاید موفق‌ترین نویسنده علمی است که تاکنون زندگی می‌کرده است. کتاب اصول سیزده جلدی او در باب هندسه و نظریه اعداد است. برای بیش‌تر از ۲۰۰۰ سال هر دانش آموخته ریاضی، هندسه را از کتاب اقلیدس یاد گرفته است. و در تمام این زمان‌ها، «**مبانی**» به عنوان الگویی برای برهان منطقی عمل می‌کرده است.

هیچ‌کس تا به امروز نمی‌داند که چه‌قدر از هندسه موجود در کتاب مبانی (اصول) از زمان اقلیدس ریشه می‌گیرد.

با نگارش این شاهکار، اقلیدس تجربه و کارهای پیشینیان خود در قرن‌های جلوتر را، گردآوری کرده است.

بخشی از آن ممکن است بر پایه کتاب‌های قبل از آن باشد و بخشی از مهم‌ترین نظریات آن را به گمان، مربوط به «اودکسوس» «Eudoxus» که حدوداً در همان زمان زندگی می‌کرده، می‌دانند.

در هر صورت، از تمام کتاب‌هایی که از ابتدا تا حال برای ما موجود بوده است، مبانی اولین کتابی است که هندسه را به صورت مرتب و منظم و روند منطقی با شروع فرض‌های ساده و بنا کردن هندسه روی آن‌ها با برهان منطقی ارایه می‌دهد.

این همواره یک روش اساسی در ریاضی بوده است. منطق همان نقشی را در ریاضی دارد که آزمایش در فیزیک. در ریاضی و فیزیک شما ممکن است به نظریه‌ای برسید که فکر می‌کنید درست است، در فیزیک بهتر است به آزمایشگاه بروید و آن را آزمایش کنید و در ریاضی بهتر است شما بیش‌تر فکر کنید و سعی کنید به برهانی برای آن برسید. روش اصل موضوعی که اقلیدس به کار برد، الگویی است برای آن‌چه ما امروزه ریاضی محض می‌نامیم. محض به معنی «اندیشه محض» است. هیچ تجربه عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست، تنها باید مراقب استدلال در اثبات قضیه‌ها باشیم.

اقلیدس نهایت سعی خود را به کار برد تا اصطلاح‌های هندسه را تعریف کند. مثلاً «نقطه» را «چیزی که هیچ جزء ندارد» تعریف کرد. یا خط مستقیم را چنین تعریف کرد، خطی که به نحوی هموار بر نقاطی که بر خود هستند قرار داشته باشد. به همین ترتیب صفحه را تعریف کرد.

اما چنانچه امروزه می‌دانیم این تعریف‌ها نمی‌توانند کارساز باشند. زیرا برای فهمیدن آن‌ها باید قبلاً تصوری از هریک از آن‌ها داشته باشیم.

هم‌چنین اقلیدس اصطلاح یا عبارت‌هایی را بدون آن‌که اصولی در مورد آن‌ها بیان کرده باشد پذیرفته است؛ مانند، بین بودن (بینیّت در اصطلاح امروزی) یا طرفین یک خط که از آن‌ها زیاد استفاده کرده است. هم‌چنین بدون آن‌که مفهوم حرکت را در هندسه تعریف کند، انطباق‌های هندسی را به کمک حرکت اثبات کرده است. هم‌چنین او در بعضی از اثبات‌ها، تعدادی از قضیه‌ها را بدون اثبات به کار برده است. اما با همه این نقص‌ها به جرأت می‌توان گفت که این اثر درمدت دو هزار سال بزرگ‌ترین اثر علمی بوده است و در بیش از دو هزار سال قبل، این نقص‌ها کاملاً طبیعی بوده‌اند. اقلیدس،هندسه‌ی خود را بر اساس پنج اصل موضوع و چند اصل متعارف بنا نهاد. چون از نظر تاریخی این اصل‌های موضوعه دارای اهمیت می‌باشند، آن‌ها را مرور می‌کنیم.

❶ از هر دو نقطه‌ی متمایز، یک خط می‌گذرد.

❷ هر پاره‌خط را می‌توان از هریک از دو طرف، به اندازه‌ی پاره‌خط معلومی امتداد داد.

❸ به هر مرکز و هر شعاعی می‌توان یک دایره رسم کرد. امروزه که زبان مجموعه‌ها در ریاضی به کار برده می‌شود این اصل نتیجه‌ای از نگره مجموعه‌ها است که بیان می‌کند؛

دایره مجموعه نقطه‌هایی مانند M از صفحه است که از یک نقطه ثابت O به فاصله معلومی باشند.

❹ همه زاویه‌های قائمه با یک‌دیگر برابرند.

این جمله، هم‌نهشتی یا انطباق همه زاویه‌های قائمه را با یک‌دیگر بیان می‌کند، که در اساس، مساوی بودن اندازه زاویه‌های قائمه است. (امروزه در شکل‌های هندسی چیزی به معنی تساوی نداریم. تساوی در هندسه به معنی «همانی» است. دو پاره‌خط متمایز، هم‌اندازه‌اند، یا دو زاویه متمایز هم‌اندازه، هم‌نهشت‌اند، هیچ‌گاه مساوی نیستند.)

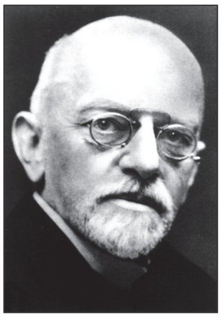
❺ اگر خطی راست دو خط راست دیگر را قطع کند و دو زاویه داخلی که در یک طرف این خط پدید می‌آیند، کم‌تر از زاویه قائمه باشند آن‌گاه اگر این دو خط تا بی‌نهایت امتداد یابند، در طرفی که این دو زاویه، کم‌تر از قائمه هستند یک‌دیگر را قطع می‌کنند. این اصل که به اصل توازی معروف است، یکی از جاذب‌ترین مسایلی بوده است که در حدود دو هزار سال عده زیادی از ریاضی‌دان‌ها در صدد اثبات آن از روی اصل‌های دیگر برآمدند. در این میان از خیام و خواجه نصیر طوسی نیز می‌توان نام برد. اما همه این تلاش‌ها با شکست روبه‌رو شد.

«اقلیدس»

در هر دوره از تاریخ که ریاضی‌دان‌ها به بررسی هندسه اقلیدسی پرداخته‌اند همواره چهار اصل اول اقلیدس به سادگی مورد پذیرش آن‌ها قرار گرفته است، اما اصل پنجم تا قرن نوزدهم همواره مورد شک بوده است، و همین شک و تردیدها بود که منجر به کشف هندسه‌های نااقلیدسی گردید.

دوران هندسه‌های جدید

در فصل پنجم در مورد پیدایش این هندسه‌ها مطالبی را بیان خواهیم کرد. فقط این را بیان می‌کنیم که تا حدود ۲۰۰ سال قبل تغییر چندانی در هندسه رخ نداد، اما بعد از آن انقلابی دیگر در هندسه به وجود آمد. نه تنها کشف این **هندسه‌های نااقلیدسی**، هندسه اقلیدسی را تضعیف نکرد، بلکه باعث شد تا هندسه اقلیدسی به طور دقیق‌تر منظم شود و تمام ایرادهایی را که از زمان اقلیدس به بعد به آن وارد بود برطرف شود. اولین کاری که در این زمینه صورت گرفت کارهایی است که **دیوید هیلبرت** «David Hilbert» یکی از ریاضی‌دان‌های بزرگ ربع اول قرن بیستم در کتاب «**مبانی هندسه‌اش**» در سال ۱۸۹۹ منتشر کرد. داوید هیلبرت، استاد دانشگاه گوتینگن، در سال ۱۹۰۰ بیست و سه طرح تحقیقاتی به کنگره ریاضی‌دانان در پاریس ارایه داد. درآن زمان هیلبرت به خاطر کارهایش بر روی فرم‌های جبری شهرت یافته بود و کتاب مشهور خود را درباره مبانی هندسه یا بنیادهای هندسه نوشته بود.



«هیلبرت»
۱۸۶۲_۱۹۴۳

هیلبرت در کتاب خود اصل‌هایی را که هندسه اقلیدسی بر آن استوار است تحلیل کرد و توضیح داد که چگونه تحقیقات جدید مبتنی بر بدیهیات، توانسته است از دستاوردهای یونانیان فراتر رود. هیلبرت در خطابه خود در سال ۱۹۰۰ کوشید روند پژوهش ریاضی دهه‌های گذشته را دریابد و خطوط اصلی کار خلاق آتی را ترسیم کند. با ارایه خلاصه‌ای از طرح‌های او، درک بهتری از معنای ریاضیات قرن نوزدهم حاصل می‌شود. او بدعت دو هزار و چند ساله را در مورد هندسه می‌شکند.

از او نقل شده است که می‌گفته؛ آدمی باید همیشه به جای نقطه، خط و صفحه بتواند میز، صندلی، لیوان و غیره بگوید، به بیان دیگر چون هیچ‌یک از ویژگی‌های نقطه، خط و صفحه غیر از ویژگی‌هایی نیستند که توسط اصل‌ها در اثبات‌ها و استدلال‌ها به کار می‌روند، بنابراین می‌توانید این اشیای هندسی را به هر نامی که دلتان می‌خواهد بنامید.

اصل‌های هندسه هیلبرت به پنج گروه تقسیم می‌شوند:

۱ اصل‌های وقوع **۲ اصل میان بود یا بینیت** **۳ اصل هم‌نهشتی**
۴ اصل پیوستگی **۵ اصل توازی**

هیلبرت، **نقطه**، **خط**، **صفحه**، **بینیّت** و **انطباق** را «**تعریف نشده**» در نظر می‌گیرد و برای آنها اصل‌هایی را بیان می‌کند. این روش بیان هندسه، مشکل است و برای سطح مقدماتی توصیه نمی‌شود. به مدت کوتاهی بعد از آن، روش‌های دیگری در ارایه هندسه مطرح گردید.

در سال ۱۹۳۲ **جرج دیوید بیرکهف** (George D.Birkhoff)، (1844-1944)، ریاضی‌دان آمریکایی اصل‌هایی را برای هندسه مطرح کرد که تعدادی از آن‌ها با اصل‌های هیلبرت و اقلیدس متفاوت است. این عمل او یک روش جدید برای هندسه مقدماتی و خبری مهم در هندسه دبیرستانی بود.

بیرکهف با استفاده از اعداد حقیقی، روش بسیار ساده‌ای را در تعریف مفاهیم بینیّت و قابلیت انطباق ارایه می‌دهد. به همین دلیل این روش ارایه هندسه را **روش متریک** می‌نامند.

بعد از بیرکهف، در سال ۱۹۵۹، **ساندرزمکلین** در مجله ماهنامه انجمن ریاضی آمریکا مجموعه اصل‌هایی را در مورد هندسه اقلیدسی ارایه داد. این مجموعه اصل‌ها بیش‌تر الهام گرفته از اصل‌های بیرکهف است با تغییراتی در اصل جداپذیری صفحه و اصل‌هایی مربوط به زاویه و هم‌چنین به کاربردن اصلی به نام اصل تشابه است.

«بیرکهف»

برای آشنایی با تمام اصل‌های ارایه شده در مورد هندسه اقلیدسی، در انتهای فصل سوم، این اصل‌ها را به‌طور کامل بیان کرده‌ایم.
روش ارایه شده توسط بیرکهف مبنایی برای نوشتن هندسه در مقطع‌های مختلف شد. اصل‌های بیرکهف تا سال ۱۹۵۰ چندان موردتوجه قرار نگرفتند، تا این‌که در سال ۱۹۵۸ گروهی در آمریکا به وجود آمد که متشکل از ریاضی‌دانان و دانشمندانی از اتحاد جماهیر شوروی سابق نیز بودند.
این گروه، بنیادی را به نام، NSF «National Science Faundation» پایه‌گذاری کردند.

اولین اقدام NSF، برقراری یک برنامه‌ی آموزشی همگانی ریاضی در سطح مدارس بوده است.
«SMSG»(School Mathematics Study Group)

انجام چنین عملی فرصتی را فراهم ساخت تا SMSG مجموعه اصل‌های جدیدی را برای هندسه اقلیدسی تدوین و ارایه کند. با وجودی که خیلی از مواد ارایه شده توسط SMSG مورد انتقاد و سرانجام کنار گذاشته شد، اما بیش‌تر اصل‌های ارایه شده قویاً پذیرفته شد و به طور وسیع در مدارس و کالج‌ها ادامه یافت و کتاب‌های درسی فراوانی بر اساس آن نوشته شد. SMSG امیدوار بود که اصل‌های ارایه شده برای دانش‌آموزان قابل درک و استفاده باشد.

کلمات تعریف نشده در SMSG عبارت‌اند از: **نقطه**، **خط** و **صفحه**.

واژه‌ی «**شامل**» همواره با چند واژه دیگر به صورت تعریف نشده نمی‌باشند، اگرچه آن‌ها همان نقشی را بازی می‌کنند که واژه‌های تعریف نشده به وسیله هیلبرت به کار برده شده‌اند.

اجزاء اصل‌ها به همان صورتی که در اصل‌های هیلبرت و بیرکهف هستند، در اصل‌های SMSG نیز حفظ شده‌اند. بیست و دو اصل در مجموعه اصل‌های SMSG می‌توانند به دسته‌های زیر تقسیم شوند؛

اصل‌های وقوع ـ اصل‌های درباره اندازه طولی ـ اصل مربوط به رابطه‌های فضا ـ اصل جداپذیری ـ اصل‌های اندازه زاویه‌ای ـ اصل هم‌نهشتی یا انطباق ـ اصل توازی و اصل درباره اندازه سطح و حجم.

به دلیل اهمیت این اصل‌ها در پایه‌گذاری هندسه و این‌که هرگز این اصل‌ها به طور منسجم در کشور ما به طور رسمی مطرح نشده‌اند، آن‌ها را همراه با توضیحی در مورد هریک، در فصل سوم مرور خواهیم کرد.

«ادوین موئیز»

یکی از افرادی که در SMSG فعالیت زیادی داشت **ادوین موئیز** بود «Edwin E , Moise» ۱۹۹۸ ـ ۱۹۱۸.

او از سال ۱۹۴۷ تا ۱۹۶۰ استاد ممتاز دانشگاه میشیگان بود و سپس به هاروارد رفت و در سال‌های ۱۹۶۷ و ۱۹۶۸ رئیس انجمن ریاضی آمریکا بود. اولین پیش‌نویس اصل‌های SMSG توسط موئیز نوشته شد. او اولین کتاب هندسه دبیرستانی به سبک جدید و براساس اصل‌های ارایه شده در SMSG را به کمک دانز «Downs» که معلم کالج بود در سال ۱۹۶۴ نوشت (ترجمه فارسی این کتاب نیز وجود دارد). همچنین او کتاب مبانی هندسه‌ای به نام هندسه مقدماتی به روش پیشرفته نیز نوشت، که قسمتی از ترجمه فارسی این کتاب نیز وجود دارد. موئیز کار خود را در توپولوژی ادامه داد و چندین کتاب در مورد توپولوژی پیشرفته نوشته است. درواقع می‌توان موئیز را یکی از پیشگامان هندسه به سبک نوین دانست.

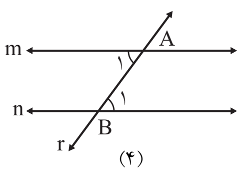
پس از اصل‌های SMSG شاخص‌ترین اصل‌هایی که در مورد هندسه اقلیدسی مطرح شده است، اصل‌های مربوط به پروژه ریاضیات مدرسه‌ای دانشگاه شیکاگو (UCSMP) است. که در سال ۱۹۹۰ ارایه شده است. این اصل‌ها با تأکید بر روی هندسه تبدیلاتی است.

اصل‌های UCSMP شباهت زیادی به اصل‌های SMSG دارد. دو اصل چشمگیر در این دسته اصل‌ها جلب نظر می‌کند، یکی از آن‌ها اصل زاویه‌های متبادل است که در هندسه‌های مقدماتی و مدرسه‌ای اکثر کتاب‌های امروزی به کار می‌رود.

این اصل که به جای اصل توازی به کار می‌رود، برای دانش‌آموزان به ویژه در مقطع‌های ابتدایی‌تر قابل فهم‌تر و کاربردی‌تر از اصل توازی است. هر چند که برای یک آموزشگر واقعی هندسه ممکن است چندان خوشایند نباشد، اما از نظر توصیه‌های آموزشی به نظر مفید است.

این اصل به‌نام اصل زاویه‌های متناظر (متبادل) شناخته می‌شود.

فرض کنیم دو خط m و n در یک صفحه، خط r را در دو نقطه A و B قطع کرده باشند، مطابق شکل (۴)؛



(۴)

❶ اگر $m \parallel n$ آن‌گاه $m\angle A_1 = m\angle B_1$.	❷ اگر $m\angle A_1 = m\angle B_1$ آن‌گاه $m \parallel n$.

توجه داشته باشیم که این اصل چنان‌چه از نام آن مشخص است در دسته اصل‌های توصیه شده در ریاضیات مدرسه‌ای است، بنابراین در کتاب‌های مبانی هندسه معمولاً به کار نمی‌رود. از تفاوت‌های اساسی‌تر اصل‌های مطرح شده در UCSMP اصل بازتاب است که به جای اصل ض ـ ز ـ ض در دسته اصل‌های SMSG و اصل هیلبرت بیان شده است. در فصل تبدیل‌های هندسی اصل بازتاب را به طور دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد و معادل بودن آن را با اصل ض ـ ز ـ ض ثابت می‌کنیم.

امروزه تبدیلات هندسی یکی از مهم‌ترین بخش‌های هندسه، چه در سطح مقدماتی و چه در سطح پیشرفته است، و توسط برنامه‌ریزان درسی در اکثر نقاط دنیا به عنوان مواد درسی مدرسه‌ها توصیه می‌شود. مفاهیمی مانند تقارن و فرش کردن صفحه از کاربردهای تبدیل‌ها می‌باشند، که مورد توجه همگانی است. یکی از برتری‌های هندسه تبدیلاتی بر هندسه‌های دیگر تعریف انطباق‌ها یا همان همنهشتی شکل‌ها است، که در این روش در حالت کلی برای تمام شکل‌های هندسی تعریف می‌شود. در این مقدمه تاریخی، روندی از ساختن هندسه از ابتدا تا به امروز را به‌طور مختصر مرور کردیم. برای آشنایی بیش‌تر در مورد اصل‌های ارایه شده در مورد ساختار هندسه به فصل سوم مراجعه کنید..

هندسه جایگاهی طبیعی برای رشد استدلال و توجیه مهارت‌های دانش‌آموزان است. **NCTM. اصل‌ها و استانداردها**

مدل ون‌هیلی در توسعه تفکر هندسی

پیر ون‌هیلی و دینا ون‌هیلی دو زوج هلندی مربیان و پژوهشگرانی در زمینه تفکر دانش‌آموزان می‌باشند. آن‌ها تجربه‌های شخصی در مورد دشواری‌ها و بدفهمی‌های یادگیری هندسه با دانش‌آموزان داشتند.

تحقیقات بر پایه نظریه ون‌هیلی در دهه ۱۹۶۰ انجام شد و برنامه درسی برای هندسه براساس آن طراحی گردید.

همچنین چندین مطالعه بزرگ در مورد تئوری ون‌هیلی در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۲ در آمریکا صورت گرفت که در تهیه استانداردهای NCTM و CCSS مورد استفاده قرار گرفت.

این نظریه، پنج سطح را در توسعه استدلال‌های هندسی پیشنهاد می‌کند. قبل از توصیف این سطح‌ها لازم است اطلاعات کلی در مورد آن‌ها داشته باشیم.

اول: این‌که این سطح‌ها به‌طور متوالی به‌نظر می‌رسند، به این معنی که دانش‌آموزان باید آن‌ها را به ترتیب بگذرانند. (رعایت سلسله مراتب)

دوم: این‌که آن‌ها بیش‌تر از آن که وابسته به رشد بیولوژیکی باشند، به تجربه و شیوه آموزش وابسته‌اند.

این فعالیت هندسی، در یک سطح فعلی است، که دانش‌آموزان را براساس استدلال در سطح‌های پیچیده‌تر آماده می‌کند.

سرانجام، به نظر می‌رسد که آموزش و زبان در سطح‌های بالاتر از سطح دانش‌آموزان، در واقع بازدارنده یادگیری است.

این مسأله برای معلمان کمی نگران‌کننده است، زیرا این بدان معنی است که اگر با سطح‌های دانش محصلین، متناسب نباشد می‌تواند به آن‌ها صدمه بزند.

اکنون این سطح‌ها را به ترتیب توصیف می‌کنیم.

سطح صفر یا سطح پایه؛ تجسم. دانش‌آموزان اشیاء هندسی را براساس ظاهر کلی از روی چند نمونه اولیه تشخیص می‌دهند.

به عنوان مثال، یک دانش‌آموز در این سطح ممکن است یک مثلث را که وارونه رسم شده یا دو ضلع آن بسیار بزرگ و یک ضلع آن خیلی کوچک رسم شده است را مثلث نداند. اگر از یک دانش‌آموز اول ابتدایی بپرسم چرا به این شکل مثلث می‌گویند، او پاسخ می‌دهد چون شبیه آن است که قبلاً به او گفته شده مثلث است.

در این سطح دانش‌آموزان شکل‌ها را به عنوان اشیاء کلی تشخیص می‌دهند مانند، مثلث، مربع، اما نمی‌توانند ویژگی این شکل‌ها، مانند قائمه بودن زاویه‌ها را در مربع یا مثلث قائم‌الزاویه تشخیص دهند.

سطح ۱. تجزیه و تحلیل یا توصیف.

در این سطح دانش‌آموزان اجزاء تشکیل دهنده شکل‌ها را توصیف می‌کنند اما رابطه‌های متقابل بین شکل‌ها و ویژگی‌های آن‌ها را نمی‌توانند توضیح دهند.

مثلاً می‌توانند تشخیص دهند در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل هم یک اندازه‌اند. یعنی دانش‌آموزان در این سطح ویژگی‌های شکل‌های هندسی را تعریف می‌کنند و برای توصیف این ویژگی‌ها اصطلاح‌های مناسب را به کار می‌برند.

به‌طور مثال یک دانش‌آموز در این سطح می‌تواند مثلث‌ها را بر مبنای ویژگی که دقیقاً سه ضلع دارند، دسته‌بندی کنند.

سطح ۲. استنتاج غیررسمی. نتیجه‌گیری غیررسمی

در این سطح دانش‌آموزان می‌توانند رابطه‌های موجود بین شکل‌های هندسی را تشخیص دهند، و آن‌ها را براساس ویژگی‌ها دسته‌بندی کنند.

مثلاً در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابل دوبه‌دو موازی‌اند در نتیجه، زاویه‌های مقابل هم‌اندازه‌اند. در بین شکل‌ها مربع یک مستطیل است زیرا همه ویژگی‌های مستطیل را دارد.

در این سطح، اثبات‌های غیررسمی می‌توانند دنبال شوند، اما دانش‌آموزان نمی‌توانند چگونگی ترتیب منطقی را که می‌توانند تغییر یابند ببینند، یا نمی‌توانند چگونگی شروع ساختن یک اثبات را از فرض‌های مختلف یا ناآشنا ببینند. حتی درک او از اثبات‌هایی که انجام شده است، چندان گسترده نمی‌باشد و محدود به اثبات‌هایی با گام‌های محدود است. اما با وجود همه این‌ها این سطح از استدلال‌های غیررسمی، می‌تواند شروع درک استنتاج بین قضیه‌ها و منطق بین این رابطه‌ها باشد.

سطح ۳. استنتاج رسمی

در این سطح، اهمیت استنتاج به عنوان روشی برای پایه‌گذاری مفهوم‌های هندسی در غالب یک دستگاه اصل موضوعی درک می‌شود. رابطه‌ها و قانون‌های بین تعریف نشده‌ها، اصل‌ها، تعریف شده‌ها، قضیه‌ها و اثبات‌های رسمی دیده می‌شوند.

در این سطح، دانش‌آموز نه تنها اثبات‌های داده شده را به خوبی درک می‌کند بلکه می‌تواند اثبات‌های مشابه ارایه دهد و برای مسأله‌های جدید اثبات‌هایی را بیان کند.

سطح ۴. دقت

دانش‌آموزان در این سطح می‌توانند دستگاه‌های اصل موضوعی را مقایسه کنند، مثلاً روش‌های ترکیبی یا متریک در ساختن هندسه و مطالعه انواع هندسه‌ها، مانند هندسه‌های نااقلیدسی و غیره هر کدام با اصل‌های موضوعی ویژه خودشان می‌توانند صورت گیرند. در این سطح هندسه با نگاهی کاملاً محض و با دقت بالا دیده می‌شود، حتی بدون مثال‌های عینی و شهودی.

این کتاب در سطح‌های ۳ و ۴ ون‌هیلی تدوین شده است.

فصل ۱

دستگاه اصل موضوعی و هندسه وقوع

مفهوم‌های اصلی که در این فصل بررسی می‌کنیم:

ساختمان دستگاه اصل موضوعی شامل تعریف نشده‌ها و تعریف‌شده‌ها

و اصل‌ها و تعبیرها و مدل‌ها، سازگاری و مستقل بودن اصل‌ها، هندسه وقوع و مدل‌هایی از هندسه‌های متناهی و نامتناهی و بالاخره بیان قضیه‌هایی در هندسه وقوع.

۱. دستگاه اصل موضوعی و هندسه وقوع

در قرن حاضر به لطف تـأثیر هیلبـرت، مشـاهده مـی‌کنـیم کـه فرض‌های اثبات نشده (اصل‌ها) که با آن‌ها شروع مـی‌کنـیم، کاملاً اختیاری هستند. اما آن‌ها باید سازگار باشند. امیـدواریم آن‌ها ما را به چیزهای جالبی برسانند.

Julian Coolidge

هندسه یک دستگاه اصل موضوعی در مورد اشیایی است که نقطه‌ها نامیده می‌شوند و مجموعه‌ای از نقطه‌ها که خط نامیده می‌شـوند و رابطـه‌هـای بین نقطه‌ها و خط‌ها است.

دستگاه اصل موضوعی قوانین حاکم بر هر هندسه‌ای را تعریف می‌کند.

ساختار اساسی دستگاه اصل موضوعی مدرن هندسه، در اساس الهام گرفته از همان روشی است که اقلیدس بیان کرده است، امـا چنـدین روش بـا اهمیت و چشمگیر وجود دارند که تفاوت‌های زیادی از روش اقلیدس دارند. در انتهای فصل سوم، مهم‌ترین این دستگاه‌های اصل موضوعی را مطرح خواهیم کرد. اکنون می‌خواهیم مبنای هندسه را براساس اصل‌هایی که الهام گرفته از این اصل‌ها می‌باشند بنا کنیم. روش و ساختاری را که انتخاب می‌کنیم از دو نظر اهمیت دارند، هم شامل ساختمانی دقیق از هندسه خواهد بود و هم به‌کار بردن آن‌ها در سـطح‌هـای مقـدماتی‌تـر و دبیرسـتانی است. هر چند که هندسه اصل موضوعی در دبیرستان به این دقت نباید مطرح شود، اما از نظر کلی هم باید به گونه‌ای باشـد کـه سـاختار منطقـی هندسه تا اندازه‌ای حفظ شده و گزاره‌ها و تعریف‌های بیان شده هر چند ساده باشند، اما با بیان‌های دقیق آن‌ها در تضاد نباشند.

در این بخش قسمت‌های مختلفی از این دستگاه اصل موضوعی و ارتباط‌های بین آن‌ها را توضیح می‌دهیم. این ارتباط‌ها را به وسیله مثـال‌هـای اساسی و شناخته شده‌ای از هندسه نشان خواهیم داد.

۱. ۱. ساختمان دستگاه اصل موضوعی

یک دستگاه اصل موضوعی، تصویر روشنی از اشیاء ریاضی را برای ما فراهم می‌کند. اساسی‌ترین قسمت‌های دستگاه اصل موضوعی عبارت‌اند از؛

❶ **تعریف نشده‌ها** ❷ **اصل‌ها**

❸ **تعریف شده‌ها** ❹ **قضیه‌ها و اثبات‌ها**

البته به این ساختار باید زبان منطق و قوانین اثبات را نیز اضافه کنیم.

۱. ۱. ۱. تعریف نشده‌ها Undefined terms

اولین بخش از دستگاه اصل موضوعی، تعریف نشده‌ها هستند، واژه‌های اساسی و فنی که در هر موضوعی به کار می‌روند، ماننـد واژه‌هـای، **نقطه**، **خط**، **صفحه** و چند واژه دیگر در هندسه.

اقلیدس سعی کرد که تمام این نوع واژه‌ها و کلمات را تعریف کند، مثلاً نقطه را به‌صورت «چیزی که هیچ جزیی نداشته باشد» تعریـف کـرد. یـا خط مستقیم را چنین تعریف کرد،

«خطی که تماماً بر نقاطی که روی خودش هستند واقع باشد» واضح است که چنین تعریف‌هایی، نه واضح‌اند و نه مفیداند. زیرا باید قبلاً تصوری از آن‌ها داشته باشیم.

این تعریف‌ها بیش‌تر فلسفی هستند تا این که بتوانیم از آن‌ها در اثبات‌ها استفاده کنیم.

امروزه می‌دانیم که غیر ممکن است که تمام واژه‌ها را بتوانیم تعریف کنیم، زیرا در این صورت با مشکل دوری بودن در تعریف‌ها روبه‌رو خواهیم شد. بنابراین به جای آن‌که سعی کنیم هر واژه‌ای را تعریف کنیم، تعدادی از آن‌ها را که مبنایی برای تعریف واژه‌های دیگر هستند تعریف نشـده در نظـر می‌گیریم و بقیه را به کمک آن‌ها تعریف می‌کنیم.

معمولاً در تمام دستگاه‌های اصل موضوعی برای هندسه، چهار واژه نقطه، خط و صفحه و وقوع (واقع شدن بر) را تعریف نشده در نظر می‌گیرند.

در تمام شاخه‌های ریاضی واژه‌های مجموعه و عضویت را تعریف نشده در نظر می‌گیرند. حتی وقتی اعداد حقیقی را اصولی بررسی می‌کنیم، خود کلمه عدد حقیقی را بعضی مواقع تعریف نشده در نظر می‌گیریم.

بنابراین، به جای این‌که واژه‌های، نقطه، خط و صفحه را تعریف کنیم، اصل‌هایی را بیان می‌کنیم که ارتباط بین آن‌ها را مشخص می‌کند و هر جا لازم باشد منظورمان را از این کلمه‌ها مشخص می‌کنیم. مثلاً وقتی نقشه یک شهر را در نظر می‌گیریم، خانه شما در این شهر به عنوان یک نقطه در نظر گرفته می‌شود، حال اگر نقشه ایران را در یک صفحه کاغذ در نظر بگیریم، شهر شما به عنوان یک نقطه در نظر گرفته می‌شود.

وقتی در هندسه اقلیدسی هستیم خط را مستقیم در نظر گرفته ابتدا و انتهایی برای آن قائل نمی‌شویم. اما وقتی در هندسه‌ای هستیم که روی یک کره یا همان کره زمین بحث می‌شود، منظور از خط، دایره‌هایی روی این کره هستند که مرکز آن‌ها مرکز زمین است. در این حالت خط، طولی متناهی دارد. تمام این‌ها، دلایلی بر این هستند که این واژه‌ها را تعریف نشده می‌پذیریم. یک هدف در تعریف نشده‌ها این است که تعداد واژه‌های تعریف نشده کم‌ترین باشند، تا جایی که واژه‌های فنی دیگر را بتوانیم بر حسب آن‌ها تعریف کنیم. بنابراین واژه‌های تعریف نشده در این کتاب عبارت‌اند از؛ **نقطه**، **خط**، **صفحه**، **وقوع و مجموعه**

۲. ۱. ۱. اصل‌ها Axioms

دومین بخش از دستگاه اصل موضوعی اصل‌ها می‌باشند. چگونه ما مطمئن باشیم که منظور افراد مختلف در مورد جمله‌های تعریف نشده و تعریف شده یک چیز است؟

اصل‌ها کلید این پاسخ را ارایه می‌دهند، آن‌ها به ما می‌گویند که جمله‌های تعریف نشده چگونه رفتار می‌کنند، اصل‌ها توضیح می‌دهند که چگونه آن‌هار ا به کار ببریم و ارتباط بین واژه‌های تعریف نشده چگونه باشند. در واقع اصل‌ها تعریف‌های کاربردی هستند، زیرا خود تعریف‌نشده‌ها بدون اصل‌ها کارایی ندارند. به عبارتی این اصل‌ها هستند که به واژه‌های تعریف نشده معنی واقعی می‌دهند.

در ریاضی به مجموعه‌ای از کلمه‌ها و نمادها که یا درست هستند یا نادرست هستند، گزاره می‌گوییم.

بنابراین، ساده‌ترین و اساسی‌ترین گزاره‌ای را که بدون اثبات می‌پذیریم، اصل می‌نامیم.

ساده‌ترین و اساسی‌ترین گزاره‌ای را که بدون اثبات بیان کرده و درستی آن را می‌پذیریم، اصل می‌نامیم.

اگر بخواهیم در هندسه یا هر شاخه دیگر ریاضی، درستی گزاره‌ای را ثابت کنیم، باید این گزاره را از روی گزاره‌هایی که قبلاً ثابت شده‌اند، ثابت کنیم. بنابراین، در مورد اولین گزاره دیگر این کار عملی نیست، زیرا قبل از آن گزاره‌ای وجود ندارد که به آن استناد کنیم، پس باید بعضی گزاره‌ها را بدون اثبات بپذیریم، که آن‌ها را به نام اصل‌ها بیان می‌کنیم. در واقع اصل‌ها، فرض‌هایی هستند که به هیچ توجیهی نیاز نداشته باشند.

از دیدگاه منطق، انتخاب اصل‌ها دلخواه است؛ با این وجود، واقعیت این است که ریاضی‌دان‌ها اصل‌ها را با توجه به ویژگی‌های خاص انتخاب می‌کنند. به‌طور مثال وقتی در هندسه اقلیدسی هستیم، اصلی به نام اصلِ توازی مطرح می‌شود که:

«از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.»

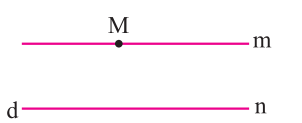
اما وقتی هندسه‌ای مد نظر باشد که هندسه روی کره الگویی از آن است و بعداً بیش‌تر توضیح خواهیم داد، به جای آن، این اصل مطرح می‌شود که،

«از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، هیچ خطی موازی آن خط وجود ندارد.»

انتخاب این دو نوع اصل بنابر ویژگی‌های متفاوت این دو نوع هندسه است.

حتی در خود یک نوع هندسه، ممکن است دو گزاره، که از هر کدام دیگری نتیجه می‌شود، یکی به عنوان اصل انتخاب شود، در واقع معادل بودن اصل‌ها در هندسه بسیار اهمیت دارد نه این‌که اصل قابل اثبات نمی‌باشد.

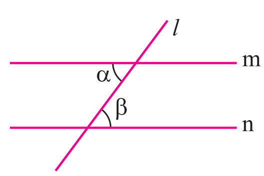
به‌طور مثال، در مبانی هندسه اقلیدسی، اصل توازی به همان صورتی که در بالا مطرح شد بیان می‌شود. اما وقتی در هندسه مقدماتی و دبیرستانی هستیم، بیش‌تر کتاب‌های هندسه، به جای اصل توازی، اصل زاویه‌های متناظر (متبادل) را به کار می‌برند که برای دانش‌آموزان قابل فهم‌تر و کاربردی‌تر است.



از هر نقطه M غیر واقع بر خط n یک و فقط یک خط m موازی خط n رسم می‌شود.

(۱)

$\Longleftrightarrow$



اگر $m \parallel n$ آن‌گاه، $\alpha = \beta$

(۲)

هر یک از دو گزاره بالا را اگر اصل انتخاب کنیم، دیگری را می‌توانیم به کمک آن ثابت کنیم، پس این دو گزاره معادل یکدیگراند. معیارهای زیر در انتخاب اصل‌ها باید در نظر گرفته شوند،

۱ **اصل‌ها نباید شامل فرض‌های اضافه‌تر از آن‌چه که لازم است باشند.**

۲ **اصل‌ها باید به اندازه کافی کامل باشند، تا اجازه داشته باشیم از مفهوم‌های قبلی به سرعت به قضیه‌های جذاب‌تر هندسه برسیم.**

۳ **هر گزاره هندسی که به کار می‌بریم، یا باید به‌صورت یك اصل باشد، یا باید به عنوان یك قضیه ثابت شود.**

۴ **معادل بودن اصل‌ها را در هندسه باید مد نظر داشته باشیم.**

این ویژگی‌ها، بیش‌تر در ویژگی‌هایی از اصل‌ها مطرح می‌شوند، که به سازگاری و مستقل بودن اصل‌ها مربوط می‌شوند و در قسمت‌های بعدی آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

از مهم‌ترین کارهای اقلیدس این بود که چند اصل ساده یا چند حکم را که نیاز به توجیهی نداشتند پذیرفت و توانست از آن‌ها حدود ۴۶۵ گزاره را نتیجه بگیرید، و این از زیبایی‌های هندسه اقلیدسی است.

۳. ۱. ۱. تعریف‌ها

در ریاضی، تعریف یک توافق حاصل شده بین تمام افرادی است که مفهومی را مطالعه کرده و به دنبال یافتن یک واژه یا نام لغوی برای آن مفهوم می‌باشند.

تعریف‌های ریاضی متفاوت از تعریف‌های روزمره هستند. ما سعی نمی‌کنیم در تعریف‌های روزانه به جمله‌ها معنی خاصی بدهیم اما در عوض، یک تعریف ریاضی باید مناسب برای به‌کار بردن در اثبات‌ها باشد، این تعریف، بعضی مشخصه‌های لازم یا ویژگی‌های چیزی را که تعریف می‌شود برمی‌گزینند، به‌طوری که ویژگی، **اگر و فقط اگر**، داشته باشد.

به‌طور مثال متوازی‌الاضلاع را چنین تعریف می‌کنیم؛

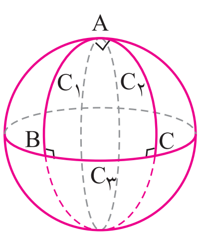
یک چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است، اگر و فقط اگر، ضلع‌های غیرمجاور آن موازی باشند.

سایر ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع از این تعریف ثابت می‌شوند. برعکس، ما می‌توانیم ویژگی‌هایی به اندازه کافی برای یک چهارضلعی که در ابتدا نمی‌دانیم هر دو ضلع غیرمجاور آن موازی‌اند بیان کنیم، تا بتوانیم ثابت کنیم آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

در تعریف ریاضی یک شی، نباید فرض وجود آن شی مطرح شود. وجود آن شی احتیاج به اثبات دارد، یا باید در اصل‌ها فرض گرفته شود. بنابراین شما هر تعریفی را می‌توانید برای یک شی بیان کنید، اما باید یا وجود شی را که در این تعریف صدق می‌کند ثابت کنید، یا قبلاً در اصل‌ها آن را به عنوان فرض پذیرفته باشید.

به‌طور مثال، تعریف زیر را در نظر می‌گیریم؛

«یك مثلث را همه قائمه می‌نامیم، هرگاه اندازه هر زاویه آن برابر 90° باشد.»



(۳)

اما در هندسه اقلیدسی هرگز چنین مثلثی وجود ندارد. پس در هندسه اقلیدسی چنین تعریفی بی‌معنی است. نه در اصل‌ها چنین فرضی مطرح شده و نه وجود آن را می‌توانیم ثابت کنیم. اما همین تعریف در هندسه روی کره که خط‌ها را دایره‌هایی روی کره در نظر می‌گیریم که مرکز آن‌ها مرکز کره باشد، معنی پیدا می‌کند، و می‌توانیم حتی وجود آن را نشان دهیم. کافی است دو دایره C_1 و C_2 را که از قطب A می‌گذرند و در A زاویه قائمه با هم می‌سازند در نظر بگیریم و سپس ضلع سوم مثلث را روی خط استوا در نظر بگیریم. پس چنین مثلثی وجود دارد. ΔABC در شکل (۳) چنین مثلثی است. در بخش‌های بعدی آن را بیش‌تر توضیح می‌دهیم.

تعریف‌های ریاضی، توسط واژه‌های تعریف نشده و تعریف‌شده‌های قبلی ساخته می‌شوند. فرض کنیم بینیت را تعریف کرده باشیم، نقطه و خط و مجموعه را نیز تعریف نشده در نظر گرفته‌ایم، می‌خواهیم تعریفی برای پاره‌خط به کمک آن‌ها بیان کنیم.

(۴)

به‌طور شهودی یک پاره‌خط قسمتی از یک خط است که به دو نقطه محدود باشد. شاید این تعریف برای شروع هندسه مفید باشد، اما می‌توانیم به‌طور دقیق پاره‌خط را به‌صورت زیر تعریف کنیم؛ اگر A و B دو نقطه متمایز باشند، پاره‌خط AB که آن را با نماد $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم، عبارت است از مجموعه نقطه‌های A و B و نقاطی از خط $\overleftrightarrow{AB}$ که بین A و B می‌باشند.

مشاهده می‌کنیم که در این تعریف، از سه واژه تعریف نشده: **نقطه**، **خط** و **مجموعه** و **واژه** تعریف شده **بینیت** استفاده شده است.

۴. ۱. ۱. قضیه‌ها و اثبات‌ها Theorems and Proofs

قضیه‌ها و اثبات‌های آن‌ها، بزرگ‌ترین بخش شاخص دستگاه اصل موضوعی می‌باشند، چه در دستگاه اصل موضوعی و حتی چه در دستگاه غیررسمی به کار می‌روند.

گزاره‌هایی را که درستی آن‌ها را ثابت می‌کنیم قضیه می‌نامند.

اولین قضیه فقط با به کار بردن تعریف‌شده‌ها و اصل‌ها ثابت می‌شود. دومین قضیه با به کار بردن اولین قضیه و اصل‌ها و تعریف شده‌ها ثابت می‌شود و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. بنابراین؛

در دستگاه اصل موضوعی، یک قضیه، یک گزاره‌ای است که با به کار بردن، قوانین منطق، اصل‌ها، تعریف‌ها یا قضیه‌های قبلی ثابت می‌شود.

تحت این شرایط اطمینان داریم که کل ساختار قضیه روی دستگاه اصل موضوعی محکم و استوار است، همان ایده‌ای که اقلیدس دنبال می‌کرد.

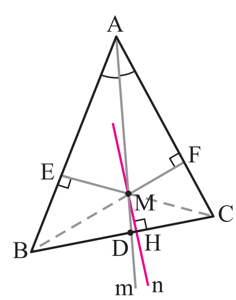
در هندسه هر مجموعه از نقطه‌ها را شکل می‌نامند.

هر چند که می‌دانیم شکل‌ها، در هندسه مدرسه‌ای نقشی اساسی در اثبات‌ها دارند، اما در دستگاه اصولی، اثبات قضیه‌ها در هندسه مستقل از شکل‌ها هستند. یونانیان قدیم شکل‌ها را روی شن‌ها رسم می‌کردند. ما نیاز به یک بینش و درک قوی از آن‌چه شکل‌ها ارایه می‌دهند داریم. در هر صورت تکیه محض بر شکل دارای خطر است و ممکن است به نتیجه‌ای برسیم که در اساس نادرست است، زیرا ما داریم به‌طور شهودی گامی از اثبات را می‌پذیریم، که ممکن است از شرایط داده شده در مسأله پیروی نکند. یکی از انتقادهای به اصول اقلیدس که در اوایل قرن بیستم مطرح شد همین وابستگی اثبات‌ها به شکل‌ها است. در مثال زیر خطای ایجاد شده توسط شکل را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۱. ثابت کنید هر مثلث، متساوی‌الساقین است.

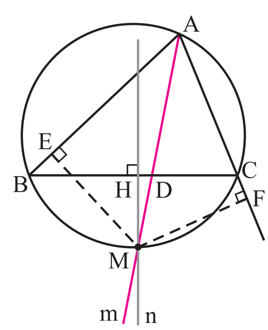
پاسخ. ΔABC مفروض است. $\overline{AD}$ نیمساز زاویه A را رسم کرده خط شامل آن را m می‌نامیم، هم‌چنین خط n، عمودمنصف $\overline{BC}$ را نیز رسم می‌کنیم.

اگر m و n موازی باشند پس خط m با ارتفاع رأس A نیز موازی است چرا؟



(۵)

در نتیجه باید نیمساز و ارتفاع رأس A روی یک خط باشند بنابراین $AB = AC$ چرا؟ پس ΔABC متساوی‌الساقین است. حال اگر m و n موازی نباشند متقاطع‌اند، نقطه تقاطع آن‌ها را M می‌نامیم. از M بر ضلع‌های AB و AC عمود می‌کنیم تا نقطه‌های E و F مشخص شوند. $MF = ME$ و $MB = MC$ چرا؟



(۶)

در نتیجه $\Delta AME \cong \Delta AMF$ و $\Delta MBH \cong \Delta MCH$ چرا؟ بنابراین؛ $AF = AE$ و $FC = EB$. در نتیجه، $AB = AE + EB = AF + FC = AC$ یعنی $AB = AC$، پس، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

در استدلال بالا چه اشتباهی رخ داده است که چنین نتیجه‌ای گرفته‌ایم؟

با کمی دقت خواهیم دید که اشتباه منطقی در این بحث، ناشی از رسم نادرست شکل است. در بخش‌های بعدی ثابت خواهیم کرد که خط شامل نیمساز یک رأس مثلث و عمودمنصف ضلع مقابل آن رأس، همواره در نقطه‌ای روی دایره محیطی یکدیگر را می‌برند، که این نقطه برون مثلث می‌باشد. خط شامل نیمساز از وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ می‌گذرد چرا؟ عمودمنصف ضلع BC نیز از وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ می‌گذرد چرا؟ شکل (۶)

بنابراین نقطه‌های E و F یکی درون و دیگری برون مثلث است. پس نادرستی استدلال از یکی از رابطه‌های $AB = AE + EB$ یا $AC = AF + FC$ به‌وجود می‌آید که یکی نادرست است.

۱.۲ تعبیرها و مدل‌ها interprations and models

«ریاضیات هنری است که به اشیاء مختلف نام‌های یکسان می‌دهد» (هنری پوانکاره)

واژه‌های تعریف نشده، خود به تنهایی نمی‌توانند معنی پیدا کنند، مگر آن‌که توسط اصل‌ها به کار برده شوند. بنابراین عبارت‌ها ممکن است به هر روشی تعبیر شوند، که سازگار با اصل‌ها باشند. مدل‌های ریاضی ارتباط بین واژه‌های تعریف نشده و شهود را روشن‌تر می‌کنند. معمولاً مدل تحلیلی از صفحه اقلیدسی مجموعه، $R^2=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$ است، که در آن نقطه به‌صورت زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی تعبیر می‌شود و خط به‌صورت نقطه‌هایی که در معادله $ax+by+c=0$ صدق می‌کنند، تعبیر می‌شود. a، b و c اعدادی حقیقی‌اند که a و b با هم صفر نیستند. یک نقطه (x,y) روی خط واقع است، هرگاه مختصات آن در معادله خط صدق کند.

برای ساختن یک مدل، ما آزاد هستیم که واژه‌های تعریف نشده را به هر روشی که می‌خواهیم تعبیر کنیم، به‌شرطی که همه اصل‌ها تحت این تعبیر برقرار باشند.

ما نمی‌گوییم که اصل‌ها برای خودشان درست هستند، بلکه نیاز به زمینه یا شرایطی داریم، که به آن‌ها معنی و مفهومی دهد، به‌طوری که تحت آن شرایط در آن مدل درست یا نادرست باشند. یک مدل برای دستگاه اصل موضوعی، یک تعبیر برای آن است به شرطی که اصل‌های به کار رفته در این تعبیر جدید، گزاره‌هایی درست باشند. بنابراین تعریف زیر را داریم؛

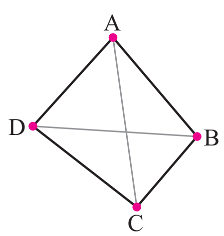
تعریف . یک مدل برای دستگاه اصل موضوعی، مجموعه‌ای از اشیاء همراه با تعبیرهایی از همه واژه‌های تعریف نشده از آن دستگاه هستند به‌طوری که، در مجموعه تعبیرهای به کار رفته در آن، تمام اصل‌ها گزاره‌هایی درست هستند.

چون قضیه‌ها به طور منطقی از اصل‌ها نتیجه می‌شوند، بنابراین قضیه‌ها به‌خودی خود گزاره‌هایی درست در هر مدلی می‌باشند. به عبارت دیگر در هر مدلی از یک دستگاه اصل موضوعی، همه قضیه‌ها در این دستگاه درست‌اند، به شرطی که به‌صورت گزاره‌هایی درباره این مدل تعبیر شوند.

مثال۲. هندسه چهار نقطه‌ای

فرض کنیم واژه‌های تعریف نشده، **نقطه، خط، صفحه و وقوع (بر روی)** باشند. فرض کنیم، تعبیر نقطه، به معنی یکی از نمادهای A، B، C و D باشد و تعبیر خط، به معنی مجموعه‌ای دقیقاً از دو نقطه متمایز و تعبیر صفحه، به معنی مجموعه‌ای دقیقاً با سه نقطه غیرهم‌خط از این نقطه‌ها باشند، و تعبیر وقوع به معنی، واقع بودن در مجموعه یا عضو بودن در مجموعه باشد.

فرض کنیم اصل‌ها به‌صورت زیر باشند.



(۷)

1. برای هر دو نقطه متمایز دقیقاً یک خط شامل آن دو وجود دارد.
2. به ازای هر سه نقطه متمایز غیرواقع بر یک خط دقیقاً یک صفحه شامل آن‌ها وجود دارد.
3. اگر دو نقطه در یک صفحه واقع باشند، آن‌گاه خط شامل آن‌ها در آن صفحه واقع است.
4. اگر دو صفحه اشتراکی داشته باشند، اشتراک آن‌ها یک خط است.

در این تعبیر ۶ خط وجود دارند که عبارت‌اند از؛ $\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}$ هم‌چنین در این تعبیر چهار صفحه وجود دارند که عبارتند از؛

$$\{A,B,C\},\{A,B,D\},\{A,C,D\},\{B,C,D\}$$

اکنون به سادگی می‌توانید تمام چهار اصل بالا را در این دستگاه تحقیق کنید.

اصل‌های (۱) و (۲) به وضوح برقراراند. اصل (۳) نیز به سادگی تحقیق می‌شود. مثلاً دو نقطه A و B در صفحه $\{A,B,C\}$ واقع‌اند. پس خط $\{A,B\}$ در صفحه $\{A,B,C\}$ است.

اصل (۴) نیز برقرار است.

$$\{A,B,C\}\cap\{A,B,D\}=\{A,B\}$$

برای سایر صفحه‌ها نیز می‌توان تحقیق کرد که اشتراک هر دو صفحه یک خط است.

این یک مدل برای دستگاه اصل موضوعی با واژه‌های تعریف نشده، **نقطه**، **خط**، **صفحه** و **وقوع** است که در چهار اصل بالا صدق می‌کند. این هندسه دقیقاً شامل چهار نقطه است، بنابراین مثالی از یک **هندسه متناهی** است.

شکل رسم شده در این مثال نباید ما را گمراه کند، توجه داشته باشیم که در این هندسه هر خط دقیقاً شامل دو نقطه است، بنابراین در شکل رسم شده، نقطه‌های روی ضلع‌های مثلث‌ها، به‌جز نقطه‌های دو انتها، نقطه محسوب نمی‌شوند. در واقع این یک شکل شماتیک (صوری) است، به این معنی که فقط رابطه‌های بین نقطه‌ها را نشان می‌دهند و یک شکل واقعی هندسه آن‌طور که انتظار داریم نمی‌باشد.

دو خط متمایز را متقاطع گوییم، هرگاه فقط یک نقطه مشترک داشته باشند. در این بخش دو خط متمایز را موازی گوییم هرگاه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند. اگر اصل توازی را به‌صورت زیر بیان کنیم؛

از هر نقطه غیرواقع بر یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.

در این‌صورت با توجه به تعریف‌های فوق، مدل هندسه چهار نقطه‌ای در اصل توازی صدق می‌کند. مثلاً از نقطه A فقط یک خط $\{A, D\}$ رسم شده است که با خط $\{B, C\}$ موازی است و برای هر نقطه دیگر نیز درست است. دو خط $\{A, B\}$ و $\{B, C\}$ متقاطع‌اند و نقطه اشتراک آن دو، نقطه B است.

مدل‌ها در دستگاه اصل موضوعی، بیش‌تر از مثال‌های سخت کارآیی دارند؛ آن‌ها، راهنمایی‌های خوبی برای فهمیدن دستگاه اصل موضوعی هستند. فراقضیه زیر ثابت می‌شود؛

اگر همه اصل‌های یک دستگاه اصل موضوعی در یک مدل درست باشند، آن‌گاه همه قضیه‌های این دستگاه نیز در این مدل درست هستند.

۱.۳ سازگاری Consistency

یکی از ویژگی‌های مهم دستگاه اصل موضوعی، سازگاری است، که بیان می‌کند دو گزاره‌ای را که متناقض یکدیگر باشند نمی‌توان ثابت کرد، یا دو اصل متناقض هم در آن وجود ندارد. دستگاه اصل موضوعی زیر را در نظر بگیرید؛

تعریف نشده‌ها، **نقطه** و **خط** هستند.

اصل ۱. از دو نقطه دقیقاً یک خط می‌گذرد.

اصل ۲. از دو نقطه همواره دو خط متمایز می‌گذرد.

این اساساً بی‌فایده است چنانچه اصل (۱) متناقض اصل (۲) است. بنابراین، وقتی با یک تناقض اساسی برای یک نتیجه‌گیری شروع می‌کنیم، غیرممکن است که بتوانیم با یک استدلال منطقی قضیه‌هایی را نتیجه بگیریم، در این‌صورت گوییم این دستگاه ناسازگار است.

بنابراین برای جلوگیری از ناسازگاری یک دستگاه، باید اصل‌ها را چنان بیان کنیم که خودشان متناقض یکدیگر نباشند، این در مورد اصل‌ها و قضیه‌ها و حتی دو قضیه نیز باید رعایت شود.

بنابراین تعریف زیر را داریم؛

◀ تعریف . **یک دستگاه اصل موضوعی سازگار است، اگر و فقط اگر هیچ دو گزاره‌ای (دو اصل، یک اصل و یک قضیه یا دو قضیه) در آن متناقض یکدیگر نباشند.**

بنابراین، در یک دستگاه اصل موضوعی، گوییم اصل‌ها سازگاراند، هرگاه نتوانیم تناقضی منطقی از آن‌ها نتیجه‌گیری کنیم. هرگاه در یک دستگاه اصل موضوعی مدلی وجود داشته باشد، آن‌گاه باید این دستگاه سازگار باشد. در مثال هندسه چهار نقطه‌ای، مدلی که ارایه داده شد نشان می‌دهد که این دستگاه سازگار است.

وجود یک مدل برای هندسه اقلیدسی و سازگاری اصل‌هایی که اقلیدس ارایه داده بود، تا قرن نوزدهم این هندسه را تضمین کرده بود.

اثبات سازگاری، مشکل و گاهی نشان دادن مستقیم آن غیرممکن است، اما خوشبختانه فرا قضیه زیر روشی ساده‌تر به وسیله مدل‌ها برای اثبات آن‌ها ارایه می‌دهد.

فرا قضیه. ۱.۳.۲. گودل ۱۹۳۰. **یک دستگاه اصل موضوعی سازگار است اگر و فقط اگر یک مدل داشته باشد.**

◀ تعریف . **یک دستگاه اصل موضوعی سازگار نسبی (relatively consistent) است، اگر و فقط اگر سازگاری آن بتواند از فرض سازگاری دستگاه اصل موضوع دیگری ثابت شود.**

مدل تحلیلی هندسه، سازگاری نسبی از هندسه اقلیدسی را نشان می‌دهد، زیرا هندسه تحلیلی وابسته به دستگاه اعداد حقیقی است. آیا دستگاه اعداد حقیقی سازگار است؟ برای مدل دستگاه اعداد حقیقی احتمالاً یک هندسه‌ای را انتخاب می‌کنیم؛ یک خط در هندسه اقلیدسی است. احتمال این‌که دچار یک دور باطل شویم وجود دارد. مشخصه حیاتی یک دستگاه ریاضی، سازگاری، فراتر از رسیدن به دو دستگاه ریاضی اصلی است.

این مسأله و مسأله‌های مشابه الهام‌بخش هیلبرت و سایرین برای تحقیق در منطق ریاضی شد. به ویژه، یکی از قضیه‌های ناتمامی گودل، که در سال ۱۹۳۱ چاپ شده است، اشاره بر این دارد که ما نمی‌توانیم سازگاری مطلق را در ریاضی مقدماتی، به وسیله گسترش هندسه اقلیدسی و دستگاه اعداد حقیقی ثابت کنیم.

بنابراین برای چنین دستگاه‌های پیچیده‌ای انجام سازگاری نسبی بهتر است. مزیت آن در این است که، هیچ‌کسی در سازگاری آن‌ها به‌طور جدی شک نمی‌کند.

۴.۱. مستقل بودن (استقلال) independence

ویژگی که مستقل بودن انجام می‌دهد نگهداشتن تعداد اصل‌ها به حداقل است. وقتی یک مجموعه اصل‌ها مستقل است، در این‌صورت هیچ اصلی از آن‌ها نمی‌تواند از روی اصل‌های دیگر این مجموعه ثابت شود.

> **تعریف . یک اصل یا گزاره مستقل از یک مجموعه اصل‌ها است اگر و فقط اگر نه اثبات آن و نه اثبات نقیض آن به کمک این مجموعه اصل‌ها امکان‌پذیر نباشد.**
>
> **هرگاه در یک دستگاه اصل موضوعی، هر اصل از سایر اصل‌های این دستگاه مستقل باشد، این مجموعه اصل‌ها مستقل نامیده می‌شوند.**

به عبارت دیگر وقتی یک گزاره یا اصل، مستقل از اصل‌های دیگر است، اثبات یا رد آن توسط این اصل‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشد. فرا قضیه‌ای را بیان کردیم که هرگاه همه اصل‌های یک دستگاه در یک مدل درست باشند، آن‌گاه همه قضیه‌های این دستگاه نیز در این مدل درست‌اند، با استفاده از این قضیه می‌توان مستقل بودن یک دستگاه را با مدل‌ها ثابت کرد.

بنابراین، بهترین روش برای اثبات مستقل بودن یک دستگاه این است که، دو مدل در مجموعه اصل‌های این دستگاه اصل موضوعی ارایه دهیم به‌طوری که یک گزاره در اولین مدل درست، اما در دومین مدل نادرست باشد. در این‌صورت با به‌کار بردن فرا قضیه‌ای که مطرح کردیم، در مدل دوم نشان می‌دهیم که این گزاره نمی‌تواند یک قضیه باشد. مشابه آن، اولین مدل نشان می‌هد که نقیض آن گزاره نمی‌تواند یک قضیه باشد. بنابراین این گزاره مستقل از اصل‌ها است.

مثلاً در هندسه اقلیدسی اصل پنجم (اصل توازی) از سایر اصل‌های این هندسه مستقل است.

زیرا چنان‌چه روند تاریخی این اصل نشان می‌دهد، تا حدود سال ۱۸۳۰ نه کسی توانست این اصل را رد کند و نه کسی توانست آن را ثابت کند. بعد از کشف هندسه‌های نااقلیدسی مستقل بودن این اصل ثابت شد. چنانچه بعداً نیز نشان خواهیم داد، اصل «ض ـ ز ـ ض» در روشی که هیلبرت در ساختن هندسه اقلیدسی بیان کرد، و هم‌چنین در روش متریک مستقل است.

در بخش هم‌نهشتی مثلث‌ها آن را بیش‌تر توضیح خواهیم داد. یک دستگاهی که مستقل نیست نامعقول و سفسطه‌آمیز نیست، فقط می‌تواند فرض‌هایی اضافی داشته باشد. در مثال زیر نمونه‌ای از یک دستگاه ساده که مستقل نمی‌باشد مشاهده می‌کنید.

مثال۳. فرض کنیم در یک دستگاه اصل موضوعی، واژه‌های تعریف نشده، **نقطه**، **خط** و **می‌گذرد**، باشند و اصل‌ها عبارت باشند از؛

۱ از هر دو نقطه حداقل یک خط می‌گذرد.

۲ از هر دو نقطه حداکثر یک خط می‌گذرد.

۳ از هر دو نقطه دقیقاً یک خط می‌گذرد.

واضح است که اصل (۳) مستقل از اصل‌های (۱) و (۲) نمی‌باشد. اگر ما بخواهیم، مجموعه اصل‌های مستقل را از آن‌ها انتخاب کنیم که همین اطلاعات را به ما بدهند، دو انتخاب داریم؛ $A_1 =$ {اصل۲ و اصل ۱} یا $A_2 =$ {اصل ۳}.

هر کدام از مجموعه اصل‌ها را که انتخاب کنیم، به‌طور حتم هر گزاره‌ای که از مجموعه دیگر نتیجه شود می‌تواند به‌طور مستقیم به‌صورت یک قضیه ثابت شود. بنابراین در مستقل بودن نیاز به فرض اضافی نداریم.

۱.۵. هندسه وقوع و مدل‌های مختلف Incidence geometry

به واژه‌های تعریف نشده، **نقطه**، **خط** و **وقوع** برمی‌گردیم. واژه وقوع به معنی واقع شدن، مانند واقع شدن نقطه روی خط می‌باشد. به همین دلیل اصل‌هایی را که رابطه بین این واژه‌ها را بیان می‌کنند، اصل‌های وقوع می‌نامیم. یکی از مزیت‌های واژه وقوع این است که می‌تواند به‌صورت تقارنی به کار برده شود، به این معنی که می‌توانیم بگوئیم نقطه P واقع بر خط m است یا این که بگوییم خط m واقع بر P است. هر دو بیان به یک معنی در نظر گرفته می‌شوند.

در این اصل‌ها وقتی می‌گوییم، A و B دو نقطه متمایزاند، یعنی دو نقطه یکی نیستند.

اصل وقوع ۱. **برای هر دو نقطه متمایز A و B، دقیقاً یک خط شامل آن دو وجود دارد.**

خطی را که از دو نقطه A و B می‌گذرد، با $\overleftrightarrow{AB}$ نشان می‌دهند. گاهی یک خط را با یک حرف مانند l یا m نیز نشان می‌دهند.

تعریف. **نقطه‌هایی را که روی یک خط واقع باشند، هم‌خط می‌نامند.**

اصل وقوع ۲. **برای هر خط m حداقل دو نقطه متمایز A و B وجود دارند که هر دو روی خط واقع‌اند.**

اصل وقوع ۳. **سه نقطه وجود دارند که همه آن‌ها روی یک خط واقع نیستند.**

دستگاه اصل موضوعی با سه واژه تعریف نشده، نقطه، خط و وقوع، همراه با سه اصل بالا، هندسه وقوع نامیده می‌شود.

تا اینجا، صفحه را، مجموعه نقطه‌ها و خط‌هایی که همه آن‌ها بر آن واقع‌اند می‌توان تعریف کرد، که آن را هندسه مسطحه می‌نامیم.

اما برای هندسه فضایی ناچاریم یک واژه هندسی تعریف نشده، «**صفحه**» را نیز به واژه‌های تعریف نشده اضافه کنیم.

بنابراین واژه وقوع را تعمیم می‌دهیم تا واقع شدن نقطه‌ها و خط‌ها بر صفحه امکان‌پذیر شوند.

پس در هندسه فضایی چهار واژه تعریف نشده را داریم. **نقطه**، **خط**، **صفحه**، **وقوع**.

بنابراین برای ارتباط بین این واژه‌ها چند اصل دیگر نیاز داریم که عبارت‌اند از؛

اصل وقوع ٤. **به ازای هر سه نقطه متمایز غیرهم‌خط دقیقاً یک صفحه شامل آن‌ها وجود دارد؛ و هر صفحه حداقل شامل سه نقطه غیرواقع بر یک خط است.**

اصل وقوع ٥. **اگر دو نقطه در یک صفحه واقع باشند، آن‌گاه خط شامل آن‌ها در آن صفحه واقع است.**

اصل وقوع ٦. **اگر دو صفحه متمایز نقطه مشترکی داشته باشند، آن‌گاه اشتراک آن‌ها یک خط است.**

در این‌صورت می‌توانیم فضا را مجموعه نقطه‌ها، خط‌ها و صفحه‌هایی که همه آن‌ها در آن واقع‌اند تعریف کنیم. از این به بعد بحث ما در هندسه مسطحه است مگر غیر آن ذکر شود.

۱.۵.۱. مدل‌هایی در هندسه وقوع

در این بخش سعی می‌کنیم با تعبیرهایی از نقطه و خط، مدل‌هایی را در هندسه وقوع بیان کنیم.

معمولاً یک مدل برای دستگاه اصل موضوعی از هندسه وقوع و یک تعبیر از واژه‌های تعریف نشده، یک هندسه نامیده می‌شود.

در قسمت‌های قبلی دو نوع مدل را برای یک مجموعه از اصل‌ها مطرح کردیم، یکی مدلی تحلیلی از صفحه اقلیدسی و دیگری مدل هندسه چهار نقطه‌ای، برای یک دسته از مفهوم‌های تعریف نشده و اصل‌هایی که مطرح کردیم، به سادگی می‌توانید تحقیق کنید که این دو مدل برای هندسه وقوع نیز مدل‌هایی به حساب می‌آیند. قبل از بیان مدل‌های مختلف، مفهوم تقاطع و موازی بودن را در هندسه وقوع تعریف می‌کنیم.

توازی و اصل توازی در هندسه وقوع

تعریف. **دو خط متمایز را که یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشند متقاطع می‌نامیم.**

اکنون به تعریف دو خط موازی و اصل توازی می‌پردازیم. دنیای موازی‌ها در هندسه‌های مختلف، به‌صورت‌های مشخصی با توجه به ماهیت آن هندسه تعریف می‌شود.

در هندسه‌های مقدماتی یا دبیرستانی، اصل توازی به‌صورت‌های مختلفی بیان می‌شود که از نظر منطقی همه معادل یکدیگراند و می‌توانند هر یک به جای دیگری به‌کار روند.

به سادگی در صفحه می‌توان گفت؛ دو خط که نقطه مشترکی نداشته باشند، موازی‌اند. این تعریف چون براساس تعریف نشده‌های هندسه وقوع است، مناسب‌ترین تعریف می‌تواند باشد. اما این تعریف در فضای سه‌بعدی نمی‌تواند درست باشد. بنابراین در هندسه وقوع در صفحه تعریف زیر را داریم؛

تعریف . دو خط m و n در صفحه موازی‌اند، هرگاه هیچ نقطه p روی هر دو وجود نداشته باشد. در این‌صورت می‌نویسیم $m \parallel n$، و می‌خوانیم m با n موازی است، اگر m با n موازی نباشد می‌نویسیم $m \nparallel n$، و می‌خوانیم m با n موازی نیست.

طبق این تعریف یک خط با خودش موازی نمی‌باشد.

اما اصل توازی در هندسه‌های مختلف به‌صورت‌های متفاوتی بیان می‌شود.

سه نوع اصل توازی متفاوت وجود دارد که هر یک منجربه هندسه‌ای متفاوت با دیگری می‌شود.

اولین اصل توازی، مربوط به هندسه‌ای می‌شود که آن را هندسه اقلیدسی می‌نامیم. ساده‌ترین صورت آن که به اصل پلی‌فر معروف است چنین است؛

۳. ۵. ۱. اصل توازی اقلیدسی. **برای هر خط m و برای هر نقطه P که روی m واقع نباشد، دقیقاً یک خط n وجود دارد که P روی n است و $m \parallel n$.**

در بخش‌های بعدی صورت اولیه اصل توازی را که توسط اقلیدس بیان شد بررسی می‌کنیم، هم‌چنین خواهیم دید که به کمک قضیه هایی در هندسه اقلیدسی، وجود خط‌های موازی را می‌توانیم ثابت کنیم، فقط کافی است یکتایی آن را به عنوان اصل بیان کنیم. در این صورت اصل توازی را می‌توان به‌صورت زیر مطرح کرد.

۴. ۵. ۱. **از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، یک و فقط یک خط می‌توان به موازات آن رسم کرد.**

حال اگر از هر نقطه غیرواقع بر یک خط، یک خط به موازات آن وجود نداشته باشد، می‌توان گفت یا اصلاً خطی موازی آن خط وجود ندارد، یا بیش از یک خط موازی آن وجود دارد. هر یک ازا ین دو منجربه هندسه‌هایی می‌شوند که هندسه‌های نااقلیدسی می‌نامند. هندسه بیضوی و هندسه هذلولوی این دو هندسه هستند. اصل توازی را در این هندسه‌ها بیان می‌کنیم و در مدل‌های بعدی که بررسی می‌کنیم آن را توضیح بیش‌تری خواهیم داد.

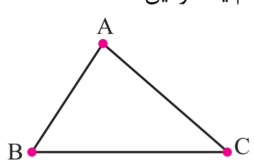
۵. ۵. ۱. اصل توازی بیضوی. **برای هر خط m و هر نقطه P که روی m واقع نباشد، هیچ خط n وجود ندارد که P روی n و $m \parallel n$. یا، از هر نقطه غیرواقع بر یک خط، هیچ خطی موازی آن وجود ندارد.**

۶. ۵. ۱. اصل توازی هذلولوی. **برای هر خط m و هر نقطه P که روی m واقع نباشد، حداقل دو خط n و r وجود دارند که P روی هر دوی n و r است و هر دو خط n و r موازی خط m هستند. یا، از هر نقطه غیرواقع بر یک خط بیش از یک خط موازی آن وجود دارد.**

حال به بررسی چند مدل در هندسه وقوع می‌پردازیم، و مشخص خواهیم کرد که هر یک از این مدل‌ها، مربوط به کدام یک از این سه هندسه هستند.

مثال ۴. هندسه سه نقطه‌ای

تعبیر **نقطه** به معنی سه نماد A، B و C، تعبیر **خط**، به معنی مجموعه‌ای از دو نقطه است و تعبیر **خط واقع** بر آن، به معنی عضو آن است می‌باشد. در این تعبیرها سه خط وجود دارند، $\{A, B\}$، $\{B, C\}$ و $\{A, C\}$.



هندسه سه نقطه‌ای
(۸)

این یک مدل از هندسه وقوع است، زیرا هر دو نقطه متمایز، دقیقاً یک خط را مشخص می‌کند، و هیچ خطی شامل سه نقطه نمی‌باشد. این نیز یک مثال از هندسه‌های متناهی است.

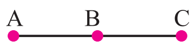
زیرا تعداد نقطه‌ها و خط‌ها متناهی هستند، هر کدام فقط سه تا هستند.

یک هندسه متناهی، شامل تعداد متناهی از اشیاء و رابطه‌های بین آن‌ها است.

چنانچه در هندسه چهار نقطه‌ای نیز توضیح داده شد، این یک شکل شماتیک (صوری) است و ضلع‌های مثلث به معنی خط نیستند، این پاره‌خط‌ها فقط ارتباط بین نقطه‌ها را نشان می‌دهند.

در این هندسه، هر دو خط متقاطع‌اند. بنابراین هیچ دو خط موازی در آن وجود ندارد، این یک مدلی است که در اصل توازی بیضوی صدق می‌کند.

هرگاه در همین مثال، نقطه به معنی همان سه نماد A، B و C تعبیر شود، اما تعبیر خط به معنی همه نقطه‌ها باشد، این هندسه فقط شامل یک خط $\{A, B, C\}$ است که در دو اصل اول هندسه وقوع صدق می‌کند. اما در اصل سوم صدق نمی‌کند، بنابراین در این حالت مدلی برای هندسه وقوع نخواهد بود.



خط سه نقطه‌ای

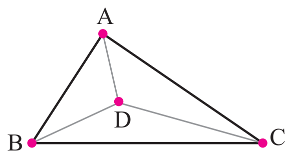
(۹)

مثال ۵. هندسه چهارنقطه‌ای

هندسه چهار نقطه‌ای را قبلاً با تعبیری تعریف کردیم، تحقیق کنید که این هندسه مدلی از هندسه وقوع می‌باشد ودر اصل توازی اقلیدسی صدق می‌کند. $\{A, B\} \| \{C, D\}$

بقیه خط‌های دوبه‌دو موازی را بنویسید.

کلاً $\binom{۴}{۲} = ۶$ خط در این هندسه وجود دارد. شکل (۱۰).

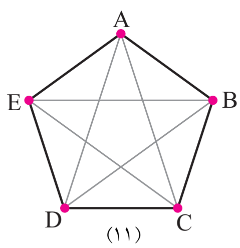


(۱۰)

مثال ۶. هندسه پنج نقطه‌ای

نقطه‌ها را پنج نماد A, B, C, D, E تعبیر می‌کنیم و تعبیر ما از خط مجموعه‌ای از دو نقطه است و وقوع یا روی آن را به همان معنی عضویت در مجموعه، تعبیر می‌کنیم.

در این هندسه، $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ خط وجود دارد.



(۱۱)

به سادگی تحقیق می‌شود که این هندسه در سه اصل هندسه وقوع در صفحه صدق می‌کند. پس مدلی از هندسه وقوع در صفحه است. آیا خط‌های $\{A, B\}$ و $\{A, E\}$ موازی خط $\{C, D\}$ هستند؟ چرا؟ شکل (۱۱) را مشاهده کنید.

مشاهده می‌کنیم که از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، توانسته‌ایم دو خط به موازات آن رسم کنیم. بنابراین، این هندسه، مدلی از هندسه وقوع است که در اصل توازی هذلولوی صدق می‌کند. نقطه A را روی خط $\{A, B\}$ در نظر می‌گیریم، و C غیرواقع بر $\{A, B\}$ است، مشاهده می‌کنیم که هر دو خط، $\{C, D\}$ و $\{C, E\}$ موازی خط $\{A, B\}$ هستند. به همین ترتیب می‌توانیم این روند را برای n نقطه ادامه دهیم و هندسه‌های متناهی زیادی را بسازیم. قبل از ورود به مدل‌هایی از هندسه‌های نامتناهی یک هندسه دیگر متناهی را که دارای هفت نقطه است و به **هندسه فانو** معروف است و اهمیت بیش‌تری دارد، بررسی می‌کنیم.

مثال ۷. هندسه‌ای با هفت نقطه و شش خط

تعبیر نقطه به معنی هفت نماد A, B, C, D, E, F, G و تعبیر خط مجموعه‌ای سه نقطه‌ای از این نمادها است. اصل‌ها عبارت‌اند؛

۱. **هفت نقطه و شش خط وجود دارند.**

۲. **هر خط شامل دقیقاً سه نقطه است.**

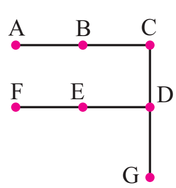
۳. **اگر دو خط اشتراک داشته باشند (متقاطع باشند) اشتراک آن‌ها فقط یك نقطه است.**

چگونه شکلی برای این هندسه مشخص کنیم؟

برای نمایش‌های شماتیک خط می‌توانیم از شکل‌های (۱۲) استفاده کنیم.

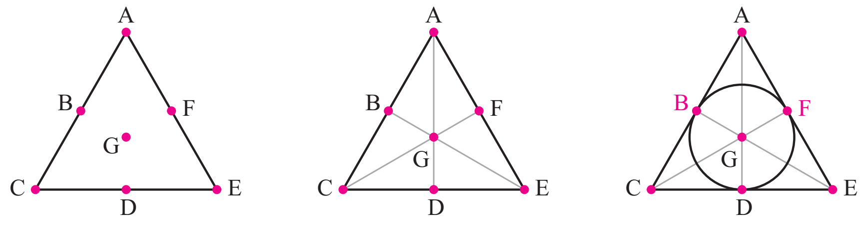
(۱۲)

چون هفت نقطه داریم و ۶ خط ابتدا هفت نقطه در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم روی هر سه نقطه یک خط در نظر بگیریم یکی از شکل‌هایی که به نظر می‌رسد شکل (۱۳) است. مشاهده می‌کنیم که این شکل در اصل‌های (۲) و (۳) صدق می‌کند اما فقط سه خط در آن وجود دارد. پس این شکل نمی‌تواند مفید واقع شود. چون هر خط شامل سه نقطه است، سعی می‌کنیم از مثلثی استفاده کنیم که روی هر ضلع آن سه نقطه باشد.



(۱۳)

در شکل (۱۴) شش نقطه و سه خط داریم، حال اگر نقطه هفتم را درون مثلث در نظر بگیریم، بسیار به رسم شکل نزدیک شده‌ایم. کافی است، خط‌هایی را که شامل G می‌شوند مشخص کنیم به شکل (۱۵) می‌رسیم مشاهده می‌کنیم که شکل (۱۵) در تمام اصل‌های داده شده صدق می‌کند. سعی کنید هر یک را تحقیق کنید. آیا این مدل در اصل‌های هندسه وقوع صدق می‌کند؟



(۱۴) (۱۵) (۱۶)

آیا در این مدل هر سه نقطه که انتخاب کنیم خطی شامل آن‌ها وجود دارد؟

آیا سه نقطه B، F و D با هم روی یک خط هستند؟ واضح است که چنین نیست. اکنون با تغییر کوچکی در این مدل، آن را به مدلی تبدیل می‌کنیم که هر سه نقطه آن روی یک خط واقع باشند. اگر این خط را با یک منحنی نشان دهیم آن‌گاه، به مدلی با ۷ نقطه و ۷ خط می‌رسیم. شکل (۱۶). این مدلی است که به هندسه فانو معروف است و در مثال بعدی بررسی می‌کنیم.

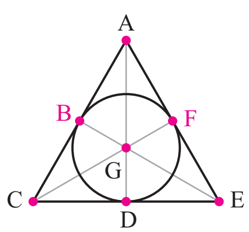
مثال ۸. هندسه فانو Fano's geometry

تعبیر نقطه به معنی هفت نماد، A, B, C, D, E, F, G و تعبیر خط، هر مجموعه‌ای سه نقطه‌ای از این نمادها است و تعبیر وقوع یا واقع بر آن، به معنی عضویت در آن است، با این تعبیرها این هندسه شامل هفت خط است.

$$\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{A, G, D\}, \{C, G, F\}, \{E, G, B\}, \{B, D, F\}$$

هر سه اصل هندسه وقوع در صفحه در این تعبیر برقرار هستند، بنابراین هندسه فانو نیز مدلی برای هندسه وقوع در صفحه است.

در شکل (۱۷) نموداری شماتیک از آن رسم شده است، شاید تصور کنیم که خط $\{B, D, F\}$ منحنی است و بقیه خطها مستقیم‌اند، نباید چنین تصوری از هر دو داشته باشیم، در این‌جا هر خط فقط شامل سه نقطه است، این پاره‌خط‌های راست یا منحنی فقط یک نقش دیداری دارند، که هر خط شامل چه نقطه‌هایی است، و به معنی خطی که در ذهن داریم نمی‌باشد.



(۱۷)

در این مدل هر دو خط نقطه مشترکی دارند، یعنی به عبارتی هر دو خط متقاطع‌اند. در نتیجه هیچ دو خط موازی در این مدل وجود ندارد، این می‌تواند مدلی از هندسه بیضوی نیز باشد.

مدل هندسه فانو، نه تنها در سه اصل هندسه وقوع صدق می‌کند، بلکه در اصل‌های قوی‌تری صدق می‌کند که به هندسه تصویری معروف است. بنابراین؛ هندسه فانو نه تنها مدلی برای هندسه وقوع است، بلکه کوچک‌ترین مدلی برای **هندسه تصویری** است، که **صفحه تصویری** نامیده می‌شود.

۷. ۵. ۱. صفحه تصویری Projective Plane

هندسه‌ای را که در اصل‌های زیر صدق می‌کند، **صفحه تصویری** می‌نامند.

اصل‌های صفحه تصویری

اصل ۱. حداقل سه نقطه غیر هم‌خط وجود دارند.	**اصل ۲.** هر خط حداقل شامل سه نقطه متمایز است.
اصل ۳. هر دو نقطه دقیقاً متعلق به یک خط است.	**اصل ٤.** هر دو خط دقیقاً در یک نقطه مشترک‌اند.

هر هندسه‌ای را که در این چهار اصل صدق کند، **صفحه تصویری** می‌نامند. کوچک‌ترین صفحه تصویری، هندسه فانو است که در بالا بررسی کردیم. هندسه تصویری متناهی با ایده‌های جالب و مسائل حل نشده فراوان است.

از چهار اصل بالا به‌طور مثال می‌توان نتیجه گرفت، که اگر **یک خط** تنها $n+1$ $(n \geq 2)$ نقطه داشته باشد، آن‌گاه **هرخط**، $n+1$ نقطه دارد، که هر نقطه دقیقاً روی $n+1$ خط اقع است، و در مجموع، n^2+n+1 نقطه و n^2+n+1 خط در این هندسه وجود دارند. عدد n مرتبه صفحه تصویری نامیده می‌شود.

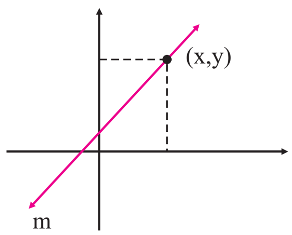
اویلر نشان داد که صفحه تصویری از مرتبه ۶ وجود ندارد. اما صفحه تصویری از مرتبه n که n عددی اول یا توانی از عدد اول باشد وجود دارد.

تا این قسمت مدل‌هایی از هندسه‌های متناهی را بیان کردیم در قسمت بعدی سه مدل مهم از هندسه‌های نامتناهی (نقطه‌های نامتناهی) را بررسی می‌کنیم.

مثال ۹. صفحه مختصاتی The Cartesian Plane

در این مدل نقطه هر زوج مرتب از اعداد حقیقی است، یک خط مجموعه‌ای از نقطه‌ها است که مختصات آن‌ها در معادله خطی $ax+by+c=0$ صدق می‌کنند، که a، b و c اعدادی حقیقی‌اند، به‌طوری که a و b هر دو با هم صفر نیستند.

یک نقطه (x,y) روی خط واقع است، هرگاه مختصات آن در معادله خط صدق کند. این مدلی تحلیلی برای هندسه وقوع و مهم‌تر مدلی برای هندسه اقلیدسی است، که اصل توازی اقلیدسی در آن برقرار است و با آن آشنایی بیش‌تری داریم. معمولاً نماد R^2 را برای نشان دادن مجموعه نقطه‌های این مدل به کار می‌بریم.



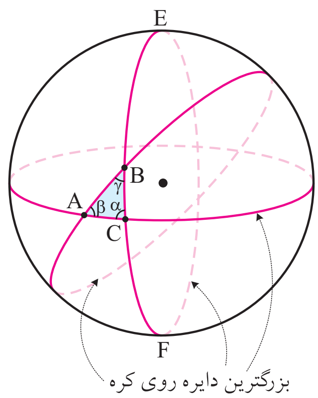
(۱۸)

مثال ۱۰. صفحه کروی The Sphere plane

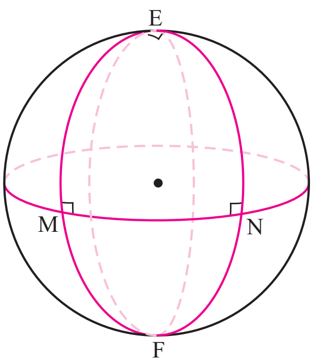
کره مجموعه همه نقطه‌هایی است که از یک نقطه ثابت به فاصله معلومی باشند. به روش تحلیلی اگر $M(x,y,z)$ هر نقطه از فضای سه بعدی باشد و فاصله این نقطه‌ها تا مبدأ R باشد، آن‌گاه $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. در نتیجه این نقطه‌ها در معادله $x^2+y^2+z^2=R^2$ صدق می‌کنند که معادله یک کره به شعاع R، طبق تعریف نامیده می‌شود، که مرکز آن مبدأ است.

در این مدل، **تعبیر نقطه** به معنی نقطه روی صفحه کروی در فضای سه بعدی است. به‌طور دقیق‌تر، یک نقطه یک سه تایی مرتب (x,y,z) از اعداد حقیقی است، به‌طوری که $x^2+y^2+z^2=1$. (یعنی کره واحد)

تعبیر خط به معنی، **بزرگ‌ترین دایره**، واقع بر کره است. مرکز این دایره روی مرکز کره و شعاع آن برابر شعاع کره است. می‌توان توجیه کرد که این بزرگ‌ترین دایره روی کره، اشتراک کره با صفحه‌ای است که از مرکز کره می‌گذرد.



(۱۹)



(۲۰)

دو نقطه را روی کره متقاطر (antipodal) یا متقابل می‌نامند، هرگاه دو سر یک قطر کره باشند. دو نقطه متقاطر روی کره، روی بی‌شمار دایره بزرگ کره می‌باشند، مانند نقطه‌های E و F، در شکل‌های (۱۹) و (۲۰). در نتیجه این مدل، در اولین اصل هندسه وقوع صدق نمی‌کند، اما در اصل‌های (۲) و (۳) صدق می‌کند. بنابراین ، این مدل نمی‌تواند مدلی برای هندسه وقوع باشد.

اگر A و B هر دو نقطه غیرمتقاطر روی کره باشند، و O مرکز کره را نیز در نظر بگیریم، این سه نقطه یک صفحه را در فضای سه بعدی مشخص می‌کنند که اشتراک آن با کره، یک دایره بزرگ یکتا روی کره است، یعنی یک خط یکتا است. بنابراین؛

از هر دو نقطه متمایز روی کره که متقاطر نباشد یک و فقط یک خط (دایره بزرگ کره) می‌گذرد.

هم‌چنین از ویژگی‌های این هندسه، آن است که هیچ دو خط موازی در آن وجود ندارد چرا؟ هر دو خط در دو نقطه متقاطع‌اند. بنابراین؛

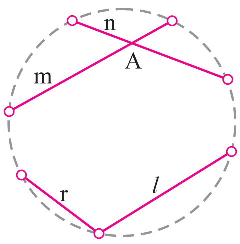
این مدل در اصل توازی بیضوی صدق می‌کند، یعنی مدلی از هندسه بیضوی است.

از ویژگی‌های مهم دیگر این هندسه آن است که، خطی و نقطه‌ای غیرواقع بر آن یافت می‌شوند که از آن نقطه می‌توان بی‌شمار خط عمود بر آن خط رسم کرد. مثلاً از نقطه E در شکل (۲۰) بی‌شمار خط می‌گذرد که بر خط $\overleftrightarrow{MN}$ عمود هستند. حتی دو خط $\overleftrightarrow{ME}$ و $\overleftrightarrow{EN}$ وجود دارند که بر هم عموداند و در این‌صورت ΔMNE یک مثلث در این هندسه است که اندازه هر یک از زاویه‌های آن $90°$ است و مجموع اندازه‌های زاویه‌های این مثلث $270°$است. به‌طور کلی در هندسه روی کره مجموع اندازه‌های زاویه‌های هر مثلث از $180°$ بیش‌تر است. در شکل (۱۹) یک مثلث ΔABC را مشاهده می‌کنید. ضلع‌های این مثلث روی خط‌های $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ می‌باشند.

در فصل‌های بعدی بیش‌تر در مورد آن توضیح خواهیم داد.

مثال ۱۱. دیسک کلاین (۱۸۶۸) The Klein disk

تعبیر نقطه در این مدل به معنی یک نقطه درون دایره به شعاع واحد در صفحه دکارتی یا همان کارتزین است. به عبارت دیگر، نقطه، زوج مرتب (x,y) است که $x^2+y^2<1$. تعبیر خط به معنی وترهایی از این دایره‌اند که شامل دو سر وتر یعنی نقطه‌های روی دایره نمی‌باشند، آن‌ها را وترهای باز دایره می‌نامیم. یا به عبارتی، خط قسمتی از یک خط اقلیدسی است که درون دایره واقع است و وقوع نیز به همان معنی معمولی اقلیدسی آن تعبیر می‌شود. این مدل به **دیسک کلاین** و هم‌چنین دیسک **بلترامی کلاین** معروف است.



(۲۱)

مشاهده می‌کنیم که این مدل در هر سه اصل، هندسه وقوع در صفحه صدق می‌کند، بنابراین مدلی برای **هندسه وقوع نامتناهی** است. (تعداد نقطه‌ها نامتناهی هستند اما فاصله محدود است.)

m، n، l و r چهار خط در این مدل هستند که m و n در نقطه A درون دایره مشترک‌اند، اما با l هیچ نقطه مشترکی ندارند.

بنابراین، طبق تعریف خط‌های m و n با هم متقاطع‌اند و هر دو با خط‌های l و r موازی‌اند. دو خط r و l نیز موازی‌اند.

مدل دیسک کلاین، مدلی از هندسه است که در اصل توازی هذلولوی صدق می‌کند، زیرا از نقطه A دو خط m و n به موازات خط‌های l یا r رسم شده‌اند.

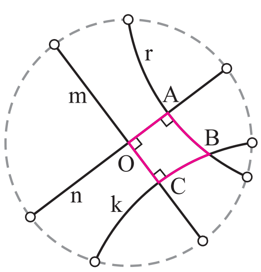
علاوه بر این مدل، مدل دیگری با استفاده از کمان‌هایی از دایره‌های عمود بر هم به عنوان خط، مدلی از هندسه وقوع است، که در اصل توازی هذلولوی صدق می‌کند. در این مدل که آن را در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید شباهت زیادی به مدل کلاین دارد. اما تعبیر خط‌ها در آن با مدل کلاین متفاوت است. این مدل را به‌طور خلاصه در زیر توضیح می‌دهیم اما در فصل پنجم به‌طور کامل‌تر آن را بررسی خواهیم کرد. این مدل به مدل پوانکاره معروف است. نقطه را به معنی نقطه درون یک دایره C از هندسه اقلیدسی تعبیر می‌کنیم. اما خط‌ها به‌صورت‌های زیر تعبیر می‌شوند،

۱. تمام قطرهای باز دایره C یا

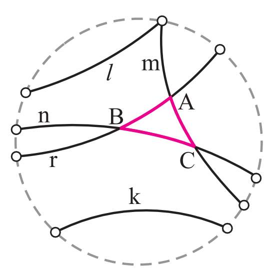
۲. کمان‌های بازی درون دایره C که روی دایره‌هایی عمود بر دایره C واقع‌اند.

برای مفهوم دایره‌های عمود بر هم به فصل دایره مراجعه کنید.

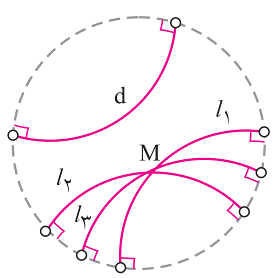
یک نقطه درون دایره L وقتی واقع بر خط پوانکاره است که به همان معنی اقلیدسی بر آن واقع باشد.



(۲۲)



(۲۳)



(۲۴)

در شکل (۲۴) مشاهده می‌کنید که چگونه از نقطه M سه خط به موازات خط d رسم شده است.