پیشگفتار

این کتاب اصولاً برای کمک به کسانی نوشته شده است که در اتحاد شوروی سابق دست‌اندرکار آموزشهای فوق برنامهٔ ریاضی بوده‌اند: معلمان مدارس، استادان دانشگاه که با برنامه‌های آموزش ریاضی سروکار دارند، علاقه‌مندان به برپایی محافل ریاضی، یا کسانی که دوستدار مطالعهٔ مطالبی هستند که هم ریاضی است هم سرگرم‌کننده. بی‌شک، دانش‌آموزان هم می‌توانند خودشان از این کتاب استفاده کنند.

دلیل دیگر نگاشتن این کتاب اعتقاد ما بر لزوم ثبت و ضبط کردن نقشی است که سنت آموزش ریاضی لنینگراد (سنت پطرزبورگ فعلی) طی شصت سال گذشته ایفا کرده است. با اینکه شهر ما خاستگاه المپیادهای ریاضی در اتحاد جماهیر شوروی بوده است (نخستین سمینارهای دانش‌آموزان در ۳۲ — ۱۹۳۱ و اولین المپیاد شهری در سال ۱۹۳۴ در این شهر برگزار شده است) و هنوز هم از پیشگامان این عرصه است، اما تجربیات آموزشی گرانبار آن به‌قدر کافی برای استفادهٔ علاقه‌مندان ثبت نشده است.

هر چند که تنوع مطالب مطرح شده در این کتاب زیاد است، اما روش آموزشی آن همگون است. معتقدیم که این کتاب همهٔ مطالب اصلی برای جلسات محافل ریاضی در دو سال نخست آموزشهای فوق‌برنامه (برای دانش‌آموزان ۱۴ — ۱۲ ساله) را دربر دارد. هدف اصلی ما فراهم کردن مطالب قابل مطرح شدن در جلسات و جمع‌آوری مسائل ساده برای معلمان (یا کسانی که علاقه‌مندند زمانی را صرف یاددادن ریاضیات غیرمعمول به دانش‌آموزان کنند) بوده است. می‌خواستیم دربارهٔ ایده‌هایی از ریاضیات صبحت به میان آوریم که دانستن آنها برای دانش‌آموزان مهم است، و نیز اینکه چگونه می‌توان توجه دانش‌آموزان را به آنها جلب کرد.

باید تأکید کنیم که آماده کردن و رهبری چنین جلساتی خودش کاری خلاقانه است. بنابراین، پیروی کورکورانه از توصیه‌های ما نامعقول است. با این همه، امیدواریم این کتاب مطالب بیشتر جلسات شما را فراهم آورد. استفاده از این کتاب به روش زیر مناسب‌تر است. هنگام بررسی موضوعی خاص، معلم فصل مربوط در این کتاب را بخواند و آن را تحلیل کند، سپس برنامه‌ای را برای جلسهٔ موردنظر طراحی کند. گاهی لازم است متناسب با سطح دانش‌آموزان مطالبی تکمیلی را اضافه کرد.

مایلیم که دو ویژگی بارز فعالیتهای فوق‌برنامهٔ آموزش ریاضی لنینگراد را خاطرنشان کنیم:

(۱) در جلسات به گفتگوی پرشور میان دانش‌آموزان و معلمان اهمیت زیادی داده می‌شود، حتی اگر ممکن باشد به وضعیت هر دانش آموزان جداگانه رسیدگی می‌شود.

(۲) فعالیتها از سنین نسبتاً پایین شروع می‌شوند: معمولاً در سال ششم (۱۲ — ۱۱ سالگی) و گاهی حتی زودتر.

این کتاب به عنوان راهنمایی ویژهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی و معلمان آنها نگاشته شده است. بی‌شک، سن دانش‌آموزان در نحوهٔ برگزاری جلسات مؤثر است. بنابراین، چند پیشنهاد داریم:

الف) برای دانش‌آموزان کم سن‌وسال برگزاری جلسه‌ای طولانی راکه فقط به یک موضوع اختصاص دارد مناسب نمی‌دانیم. معتقدیم که عوض کردن بحث حتی در یک جلسه هم مفید است.

ب) لازم است که گهگاه مطالبی که قبلاً خوانده شده یادآوری شود. می‌توان این‌کار را با استفاده از مسأله‌هایی که در المپیادها یا مسابقات ریاضی دیگر مطرح شده انجام داد (پیوست (الف) را ببینید).

ج) سعی کنید در بررسی هر موضوع به اصلی‌ترین نتایج بپردازید و مطمئن شوید که این نتایج و ایده‌ها کاملاً درک شده‌اند (نه اینکه فقط به خاطر سپرده شده‌اند!).

د) توصیه می‌کنیم که در هر جلسه همواره از فعالیتهای غیرمعمول و «بازی‌گونه» درکنار بررسی کامل راه‌حلها و اثباتها استفاده کنید. همچنین استفاده از مسأله‌های تفریحی و مطالب بامزهٔ ریاضی مهم است.

* * *

این کتاب از این پیشگفتار، دو بخش اصلی، پیوست (الف) با عنوان «سابقه‌های ریاضی» و پیوست (ب) با عنوان «پاسخ، راهنمایی، راه‌حل» تشکیل شده است.

بخش اول («سال اول آموزش») با فصل صفر آغاز می‌شود که از سؤالهایی که بیشتر مربوط به دانش‌آموزان ۱۱ — ۱۰ ساله تشکیل شده است. مسأله‌های این فصل ظاهراً محتوای ریاضی ندارند، و هدف اصلی از مطرح کردن آنها نشان دادن توانایی دانش‌آموزان در ریاضی و منطق است. باقی‌ماندهٔ این بخش به هشت فصل بخش بخش تقسیم شده است. هفت فصل اول اینها مربوط به موضوعهایی خاص‌اند و هشتمین فصل (با عنوان «مسأله‌هایی بر سال اول») صرفاً گردایه‌ای از مسأله‌هایی با موضوعات مختلف است.

بخش دوم («سال دوم آموزش») از نه فصل تشکیل شده است که برخی از آنها دنبالهٔ مطالبی هستند که در بخش اول آمده‌اند (مثلاً، فصلهای «گراف ـ ۲» و «ترکیبات ـ ۲»). بقیهٔ فصلها هم شامل مطالبی هستند که برای سال اول دشوارند: «ناورداها»، «استقرا» و «نابرابریها».

پیوست (الف) دربارهٔ پنج نوع از مسابقات ریاضی است که در اتحاد شوروی سابق رونق داشته‌اند. این مسابقات را می‌توان در جلسات محافل ریاضی برگزارکرد یا بین محافل ریاضی مختلف یا حتی مدارس ترتیب داد.

* * *

(۱) مسأله‌های دشوارتر را با علامت ستاره (*) مشخص کرده‌ایم.

(۲) در پیوست (ب) تقریباً برای همهٔ مسأله‌ها یا راه‌حل کاملشان را آورده‌ایم یا دست‌کم راهنمایی برای راه‌حل یا پاسخ آنها رجا. اگر مسأله‌ای محاسباتی باشد، معمولاً فقط پاسخ را ذکر کرده‌ایم. راه‌حل مسأله‌هایی راکه خواسته‌ایم خواننده خودش راه‌حل را پیدا کند نیاورده‌ایم (این موضوع، به ویژه، در مورد فصلهای ۸ و ۱۷ درست است).

فصل ۰

فصل صفر

در این فصل ۲۵ مسألهٔ ساده آورده‌ایم. برای حل کردن این مسأله‌ها بجز عقل سلیم و ساده‌ترین مهارتهای محاسباتی چیز دیگری لازم نیست. از این مسأله‌ها می‌توان در جلسات محافل ریاضی برای سنجش میزان توانایی دانش‌آموزان در ارائهٔ استدلالهای منطقی و به‌طور کلی استعداد ریاضیشان یا به‌عنوان مسأله‌های سرگرم‌کننده استفاده کرد.

* * *

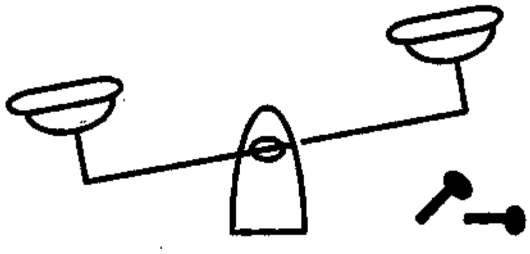
مسألهٔ ۱. تعدادی باکتری در ظرفی شیشه‌ای گذاشته شده‌اند. یک ثانیه بعد هر باکتری به دو تا تقسیم می‌شود، یک ثانیه بعد از آن هر یک از باکتریهای حاصل هم به دو باکتری تقسیم می‌شود و همین‌طور تا آخر. بعد از یک دقیقه ظرف پر می‌شود. چه وقت نصف ظرف پر شده است؟

مسألهٔ ۲. آنا، جان و آلکس سوار اتوبوس دیسنی‌لند می‌شوند. هرکدام از آنها باید ۵ بلیت به‌عنوان کرایه بدهد، اما آنها فقط بلیتهایی به‌ارزش ۱۰، ۱۵ و ۲۰ دارند (هر یک تعدادی نامحدود از هر نوع بلیت دارد). چطور می‌توانند کرایه‌شان را بپردازند؟

مسألهٔ ۳. جک چند برگِ متوالی از کتابی را کند. شمارهٔ نخستین صفحهٔ کنده شده ۱۸۳ است و می‌دانیم شمارهٔ آخرین صفحهٔ کنده شده هم با همین رقمها منتها به‌ترتیبی دیگر نوشته شده است. جک چند صفحه از کتاب را کنده است؟

مسألهٔ ۴. در یک گونی ۲۴ کیلوگرم میخ وجود دارد. آیا می‌توان فقط با استفاده از یک ترازوی دوکفه‌ای ۹ کیلوگرم میخ از گونی برداشت؟ (شکل ۱ را ببینید.)

مسألهٔ ۵. هزارپایی از زمین به‌راه می‌افتد و از تیرکی چوبی به بلندی ۷۵ سانتیمتر به‌طرف بالا می‌خزد.



شکل ۱

هر روز ۵ سانتیمتر به‌طرف بالای تیرک می‌خزد و هر شب ۴ سانتیمتر به‌طرف پایین آن سُر می‌خورد. چه وقت برای اولین بار به بالای تیرک می‌رسد؟

مسألهٔ ۶. یک سال، ماه ژانویه درست چهار تا جمعه و چهار تا دوشنبه داشت. بیستم ژانویهٔ آن سال چه روزی از هفته بوده است[۱]؟

مسألهٔ ۷. در جدولی مستطیلی شکل که از ۹۹۱ × ۱۹۹ مربع کوچک برابر تشکیل شده است هر قطر از چند خانه (مربع) می‌گذرد؟

مسألهٔ ۸. از عدد

۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵

۱۰ رقم را طوری خط بزنید که عدد باقی‌مانده بزرگترین عدد ممکن باشد.

* * *

مسألهٔ ۹. پیتر می‌گوید: «پریروز ۱۰ ساله بودم اما سال بعد ۱۳ ساله می‌شوم.» آیا چنین چیزی ممکن است؟

مسألهٔ ۱۰. گربهٔ پیت همیشه قبل از بارندگی عطسه می‌کند. گربه امروز عطسه کرد؛ پیت خیال می‌کند «عطسهٔ گربه نشانهٔ آن است که امروز باران می‌بارد.» آیا حق با اوست؟

مسألهٔ ۱۱. معلمی روی یک برگ کاغذ چند دایره می‌کشد. سپس از دانش‌آموزی می‌پرسد: «چند دایره در این صفحه وجود دارد؟» دانش‌آموز پاسخ می‌دهد: «هفت‌تا.» معلم می‌گوید: «درست است.» و بعد از دانش‌آموز دیگری می‌پرسد: «بگو ببینم چند دایره در این صفحه وجود دارد؟» دانش‌آموز پاسخ می‌دهد: «پنج‌تا.» معلم باز هم می‌گوید: «کاملاً درست است.» واقعاً چند دایره روی این برگ کاغذ کشیده شده است؟

مسألهٔ ۱۲. پسر پدر استاد دانشگاهی با پدر پسر آن استاد صحبت می‌کند و خود استاد در این گفتگو شرکت ندارد. آیا چنین چیزی ممکن است؟

۱. ماه ژانویه ۳۱ روزه است.

مسألهٔ ۱۳. سه لاک‌پشت در امتداد راهی مستقیم می‌خزند و در یک جهت پیش می‌روند. لاک‌پشت اول می‌گوید: «دو لاک‌پشت دیگر پشت سرم هستند.» دومی می‌گوید: «یک لاک‌پشت پشت سرم و یکی دیگر جلوی من است.» لاک‌پشت سوم می‌گوید: «دو لاک‌پشت جلوتر از من‌اند و یکی دیگر پشت سرم است.» چطور چنین چیزی ممکن است؟

مسألهٔ ۱۴. سه دانشمند در واگن قطاری نشسته‌اند. قطار به‌مدت چند دقیقه از تونلی می‌گذرد و واگن در تاریکی فرو می‌رود. وقتی از تاریکی بیرون می‌آیند هر یک از آنها می‌بیند که صورت همکارانش با دوده‌ای که به‌سرعت از پنجرهٔ باز تو آمده، سیاه شده است. آنها شروع می‌کنند به یکدیگر خندیدن که ناگهان آن که از دو نفر دیگر باهوشتر است می‌فهمد که صورت خودش هم باید کثیف شده باشد. چطور به این نتیجه رسیده است؟

مسألهٔ ۱۵. سه قاشق شیر از یک لیوان شیر برمی‌داریم و توی یک لیوان چای می‌ریزیم و مایع حاصل را حسابی به‌هم می‌زنیم. بعد از این مخلوط سه قاشق برمی‌داریم و در لیوان شیر می‌ریزیم. اکنون کدام عدد بزرگتر است: درصد شیر در چای یا درصد چای در شیر؟

* * *

مسألهٔ ۱۶. با رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ مربعی جادویی بسازید؛ یعنی این عددها را در خانه‌های جدولی 3×3 طوری قرار دهید که مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر همگی با هم برابر باشند.

مسألهٔ ۱۷. در یک مسألهٔ جمع حساب حروف را جایگزین رقمها می‌کنیم (به‌جای رقمهای برابر، حروف یکسان و به‌جای رقمهای متمایز حروف مختلف می‌گذاریم). نتیجه این می‌شود که

$$\mathrm{LOVES} + \mathrm{LIVE} = \mathrm{THERE}$$

بیشترین مقدار ممکن THERE کدام است؟

مسألهٔ ۱۸. سازمان اطلاعات و امنیت روسیه پیغامی رمزی را که از یکی از جمهوریها ارسال شده بود رهگیری کرده است. این پیغام چنین خوانده می‌شود

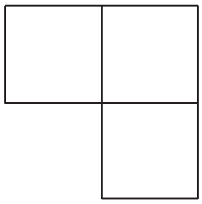
$$\mathrm{BLASE} + \mathrm{LBSA} = \mathrm{BASES}$$

می‌دانیم که در به رمز نوشتن پیغامها رقمهای برابر به حروف یکسان تبدیل می‌شوند و رقمهای متمایز به حروف مختلف. برای این معما از دو کامپیوتر بزرگ دو جواب مختلف به‌دست آمده است. آیا چنین چیزی ممکن است یا یکی از آنها را باید تعمیر کرد؟

مسألهٔ ۱۹. ۱۲۷ اسکناس یک‌دلاری را بین ۷ کیف پول طوری تقسیم کنید که بتوان هر مبلغی از ۱ دلار تا ۱۲۷ دلار را که برحسب دلار عددی صحیح است، بدون بازکردن کیف پولها پرداخت.

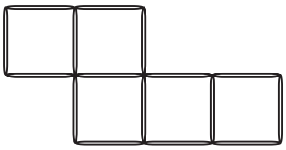
* * *

مسألهٔ ۲۰. شکل زیر را به چهار تا شکل طوری تقسیم کنید که هر یک از آنها مشابه شکل اصلی و ابعادش نصف آن باشد.



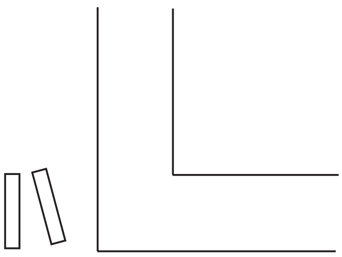
شکل ۲

مسألهٔ ۲۱. تعدادی چوب‌کبریت به شکل زیر چیده شده‌اند. دو تا از این چوب‌کبریتها را طوری جابه‌جا کنید که این شکل به چهار تا مربع تبدیل شود که هر ضلع هر یک از آنها یک چوب کبریت باشد.



شکل ۳

مسألهٔ ۲۲. رودخانه‌ای به‌عرض ۴ متر در جایی 90° تغییر مسیر داده است (شکل ۴ را ببینید). آیا می‌توان فقط با دو تکه الوار که طول هر یک از آنها ۳٫۹ متر است، روی رودخانه پل زد و از آن گذشت؟



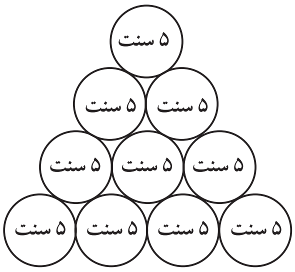
شکل ۴

نمونه۳،حلاج

مسألهٔ ۲۳. آیا می‌توان شش مداد بلند و گرد را طوری چید که هر یک از آنها با همهٔ مدادهای دیگر تماس داشته باشد؟

مسألهٔ ۲۴. با استفاده از قیچی در یک برگ کاغذ معمولی (مثلاً به‌اندازهٔ همین صفحه) سوراخی ایجاد کنید که فیلی بتواند از آن رد شود.

مسألهٔ ۲۵. ده سکه مانند شکل ۵ چیده شده‌اند. کمترین تعداد سکه‌هایی که باید برداریم تا مطمئن شویم که از سکه‌های باقی‌مانده هیچ سه‌تایشان در رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع قرار ندارند چقدر است؟



شکل ۵

فصل ۱

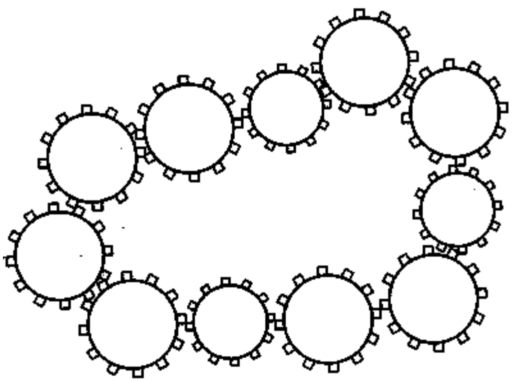
زوجیت

می‌گوییم زوجیت عددی زوج، زوج است و زوجیت عددی فرد، فرد. با مفهومی به این سادگی می‌توان مسأله‌های گوناگونی را حل کرد. کارایی این روش در حل بسیاری از مسأله‌ها، از جمله برخی مسأله‌های به‌غایت دشوار، ثابت شده است.

به‌دلیل سادگی زیاد این مبحث است که می‌توان مسأله‌هایی جالب برای دانش‌آموزانی طرح کرد که تقریباً هیچ پیش‌زمینه‌ای در ریاضیات ندارند. همین سادگی باعث می‌شود که نشان دادن ایدهٔ مشترک در همهٔ مسأله‌هایی از این دست حتی از بقیهٔ مواقع ضروری‌تر به‌نظر برسد.

۱. یکی در میانها

مسألهٔ ۱. در صفحه‌ای یازده چرخ‌دنده به‌شکل زیر (شکل ۶ را ببینید) در یک زنجیره چیده شده‌اند. آیا ممکن است که همهٔ این چرخ‌دنده‌ها با هم بچرخند؟



شکل ۶

راه‌حل. پاسخ منفی است. فرض کنید که چرخ‌دندهٔ اول ساعتگرد بچرخد. در این صورت چرخ‌دندهٔ دوم باید پادساعتگرد بچرخد، سومی باز ساعتگرد، چهارمی پادساعتگرد و همین‌طور تا آخر. روشن است که چرخ‌دنده‌های «فرد» باید ساعتگرد بچرخند و چرخ‌دنده‌های «زوج» پادساعتگرد. اما در این صورت چرخ‌دنده‌های اول و یازدهم باید در یک جهت بچرخند که این تناقض است.

ایدهٔ اصلی در راه‌حل این مسأله این است که چرخ‌دنده‌هایی که ساعتگرد می‌چرخند و چرخ‌دنده‌هایی که پادساعتگرد می‌چرخند یکی در میان قرار دارند. یافتن چیزهایی که یکی در میان قرار دارند ایدهٔ اصلی راه‌حل مسأله‌های زیر هم هست.

مسألهٔ ۲. در صفحهٔ شطرنج، اسبی از خانهٔ $a1$ به راه می‌افتد و بعد از انجام چند حرکت به آنجا باز می‌گردد. ثابت کنید تعداد حرکتهای این اسب عددی زوج است.

مسألهٔ ۳. آیا ممکن است که اسبی از خانهٔ $a1$ صفحهٔ شطرنج به راه بیفتد و به خانهٔ $h8$ برود و در مسیرش در هر یک از خانه‌های دیگر درست یک بار بنشیند؟

راه‌حل. خیر، ممکن نیست. اسب در هر حرکت از خانه‌ای سفید به خانه‌ای سیاه می‌رود و یا برعکس. چون این اسب باید ۶۳ حرکت انجام دهد با حرکت آخر (حرکت فرد) باید به خانه‌ای برود که رنگش با رنگ خانه‌ای که از آنجا به‌راه افتاده بود یکی نباشد؛ ولی خانه‌های $a1$ و $h8$ همرنگ‌اند.

مانند مسألهٔ ۳ در بسیاری از مسأله‌های این بخش باید ثابت کنیم که وجود برخی وضعیتها غیرممکن است. در واقع وقتی در سؤالی پرسیده می‌شود که آیا وجود وضعیتی ممکن است یا نه، پاسخمان در این بخش بدون استثناء «خیر» است. البته این امر برای دانش‌آموزانی که تجربهٔ ریاضیشان کم است قدری مشکل ایجاد می‌کند. نخستین عکس‌العملشان یا سرخوردگی از این است که نمی‌توانند وضعیت «درست» را (که در شرطهای غیرممکن موردنظر صدق می‌کند) پیدا کنند یا اعلام این مطلب است که وضعیت موردنظر غیرممکن است، بی‌آنکه درک روشنی از آنچه که برای اثبات این ادعا باید انجام داد داشته باشند. در اینجا مسأله‌ای ساده، مربوط به مسأله‌های «زوج و فرد» که بعداً در این بخش خواهید دید، می‌آوریم که این موضوع را روشن می‌کند:

آیا می‌توانید پنج عدد فرد پیدا کنید که مجموعشان ۱۰۰ شود؟

به‌دنبال حل این مسأله می‌توان بحثی را پیش کشید که از طریق آن دانش‌آموزان متوجه شوند که فقط ضعف شخصی خودشان نیست که نمی‌گذارد این مجموعه از عددها را پیدا کنند، بلکه تناقضی در طبیعت خود مجموعهٔ موردنظر وجود دارد که در این امر دخیل است. در این سطح، هم اثبات از طریق رسیدن به تناقض باعث سردرگمی دانش‌آموزان می‌شود و هم مفهوم اثبات غیرممکن بودن وجود

برخی وضعیتها. پرداختن به مسأله‌هایی دربارهٔ زوجیت راهی ساده و در عین حال مؤثر برای معرفی هردو این مفهومهاست.

مسألهٔ ۴. مسیری بسته از ۱۱ پاره‌خط تشکیل شده است. آیا ممکن است یک خط که از هیچ‌یک از رأسهای این مسیر نمی‌گذرد همهٔ پاره‌خطهایش را قطع کند؟

مسألهٔ ۵. سه دیسک هاکی روی یخ به‌نامهای A، B و C روی زمین بازی افتاده‌اند. بازیکنی به یکی از آنها طوری ضربه می‌زند که از میان دوتای دیگر بگذرد. او این کار را ۲۵ بار انجام می‌دهد. آیا با این کار می‌تواند این سه دیسک را به جاهای اولیه‌شان بازگرداند؟

مسألهٔ ۶. کاتیا و دوستانش دور دایره‌ای ایستاده‌اند. می‌دانیم هر دو بغل‌دستی هر یک از این بچه‌ها همجنس‌اند. اگر روی این دایره پنج پسر وجود داشته باشد، تعداد دخترها چندتاست؟

در اینجا اصلی دیگر را که در راه‌حل مسألهٔ قبلی آمده است خاطرنشان می‌کنیم: در زنجیرهٔ بسته‌ای که اشیا در آن یکی در میان قرارگرفته‌اند، تعداد اشیای یک نوع (پسرها) با تعداد اشیای نوع دیگر (دخترها) برابر است.

۲. افرازکردن به جفتها

مسألهٔ ۷. آیا می‌توان مسیری بسته از ۹ پاره‌خط طوری رسم کرد که هر یک از آنها درست یکی از پاره‌خطهای دیگر را قطع کند؟

راه‌حل. اگر رسم چنین مسیر بسته‌ای ممکن باشد، آن وقت همهٔ این پاره‌خطها را می‌شود به چند جفت پاره‌خط متقاطع افرازکرد. اما در این صورت تعداد پاره‌خطها باید عددی زوج باشد.

روی ایدهٔ اصلی این راه‌حل انگشت می‌گذاریم: اگر بتوان مجموعه‌ای از اشیا را به جفتهایی افراز کرد، آن‌وقت تعداد اشیای این مجموعه عددی زوج است. در اینجا چند مسألهٔ مشابه می‌آوریم:

مسألهٔ ۸. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنجی ۵ × ۵ را با دومینوهای ۲ × ۱ پوشاند؟

مسألهٔ ۹. ۱۰۱ ضلعی محدبی که یک محور تقارن دارد داده شده است. ثابت کنید این محور تقارن از یکی از رأسهایش می‌گذرد. در مورد ۱۰ ضلعی‌ای که همین ویژگیها را دارد چه می‌توان گفت؟

مسأله‌های ۱۰ و ۱۱ دربارهٔ یک دست دومینو هستند که از مهره‌های مستطیلی‌شکل ۱ × ۲ (شامل دو خانهٔ مربع‌شکل برابر) تشکیل شده است و در هر یک از خانه‌های هر یک از آنها از ۰ تا ۶ خال وجود دارد. همهٔ ۲۸ جفت تعداد خالهای ممکن (شامل جفتها، مانند جفت یک، جفت دو و. . .) در

آنها وجود دارد. بازی دومینو این‌طور انجام می‌شود که بازیکنان نوبتی مهره‌ها را پشت سرهم می‌چینند تا زنجیره‌ای درست شود که در آن تعداد خالهای خانه‌های پهلوی هم دومینوهای مجاور با هم برابر است.

مسألهٔ ۱۰. همهٔ مهره‌های یک دست دومینو به شکل یک زنجیره چیده شده‌اند (به‌طوری که تعداد خالهای دو سر پهلوی هم دومینوهای مجاور یکی است). اگر یک سر این زنجیره عدد ۵ باشد عدد سر دیگرش چیست؟

مسألهٔ ۱۱. از یک دست دومینو همهٔ مهره‌هایی را که دست‌کم یک خانه‌شان هیچ خالی ندارد کنار می‌گذاریم. آیا بقیهٔ دومینوها را می‌توان طبق قواعد بازی به شکل یک زنجیره چید؟

مسألهٔ ۱۲. آیا می‌توان ۱۳ضلعی محدبی را به چند متوازی‌الاضلاع تقسیم کرد؟

مسألهٔ ۱۳. روی صفحهٔ شطرنجی ۲۵ × ۲۵ بیست و پنج سرباز را طوری قرار داده‌ایم که خانه‌هایی که اشغال کرده‌اند نسبت به قطری از صفحه متقارن‌اند. ثابت کنید دست‌کم یکی از این مهره‌ها روی این قطر قرار دارد.

راه‌حل. اگر هیچ مهره‌ای روی قطر موردنظر نباشد، آن‌وقت می‌توان مهره‌ها را به جفتهایی که نسبت به این قطر قرینه‌اند افراز کرد. بنابراین باید یکی (و در حقیقت تعدادی فرد) از مهره‌ها روی قطر موردنظر باشد.

در حل این مسأله، دانش‌آموزان اغلب در فهم این مطلب مشکل دارند که به‌جای فقط یک مهره ممکن است تعدادی فرد از مهره‌ها روی قطر موردنظر باشند. در مورد این مسأله، می‌توانیم حکممان را دربارهٔ افرازکردن به جفتها این‌طور صورتبندی کنیم: اگر از اشیای مجموعه‌ای که تعداد عضوهایش فرد است، تعدادی جفت تشکیل دهیم، دست‌کم یک شیء جفت نشده باقی می‌ماند.

مسألهٔ ۱۴. اکنون فرض کنید که در مسألهٔ ۱۳ خانه‌هایی که مهره‌ها اشغال کرده‌اند نسبت به هر دو قطر متقارن باشند. ثابت کنید که یکی از مهره‌ها در خانهٔ مرکزی صفحه قرار دارد.

مسألهٔ ۱۵. در هر خانهٔ جدولی ۱۵ × ۱۵ یکی از عددهای ۱، ۲، ۳،. . .، ۱۵ نوشته شده است. خانه‌هایی که نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند، عددهایشان با هم برابرند و هیچ سطر یا ستونی شامل دو عدد برابر نیست. ثابت کنید روی قطر اصلی هیچ دو عددی با هم برابر نیستند.

۳. زوج و فرد

مسألهٔ ۱۶. آیا می‌توان اسکناسی ۲۵ روبلی را به ده اسکناس ۱، ۳ یا ۵ روبلی خرد کرد؟

راه‌حل. خیر، این کار ممکن نیست. این نتیجه‌گیری براساس مطلبی ساده است: مجموع تعدادی زوج عدد فرد، عددی زوج است. این مطلب را می‌توان این‌طور تعمیم داد: زوجیت مجموع چند عدد فقط

به زوجیت تعداد جمعوندهای فردش بستگی دارد. اگر تعداد جمعوندهای فرد، عددی فرد (زوج) باشد، آن‌وقت مجموع موردنظر هم عددی فرد (زوج) است.

مسألهٔ ۱۷. پیت دفتری ۹۶ برگی خرید و صفحاتش را از ۱ تا ۱۹۲ شماره‌گذاری کرد. ویکتور ۲۵ برگ از دفتر پیت را کند و ۵۰ شماره‌ای را که روی این برگها بود با هم جمع کرد. آیا ممکن است که این مجموع برابر با ۱۹۹۰ باشد؟

مسألهٔ ۱۸. حاصل‌ضرب ۲۲ عدد صحیح برابر با ۱ است. ثابت کنید مجموع این عددها صفر نیست.

مسألهٔ ۱۹. آیا می‌توان با نخستین ۳۶ عدد اول «مربعی جادویی» تشکیل داد؟

در اینجا منظور از «مربعی جادویی» آرایه‌ای 6×6 از خانه‌هاست که در هر خانه یک عدد وجود دارد و مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر قطر مقداری ثابت است.

مسألهٔ ۲۰. عددهای ۱ تا ۱۰ در یک سطر نوشته شده‌اند. آیا می‌توان میان آنها طوری علامتهای «$+$» و «$-$» گذاشت که مقدار عبارت حاصل ۰ شود؟

توجه داشته باشید که عددهای منفی هم می‌توانند فرد یا زوج باشند.

مسألهٔ ۲۱. ملخی در امتداد خطی راست می‌جهد. با نخستین پرشش ۱ سانتیمتر حرکت می‌کند، با دومین پرش ۲ سانتیمتر و همین‌طور تا آخر. در هر جهش می‌تواند به جلو یا به عقب برود. ثابت کنید بعد از ۱۹۸۵ جهش این ملخ ممکن نیست به نقطه‌ای که از آنجا به‌راه افتاده بود بازگردد.

مسألهٔ ۲۲. عددهای ۱، ۲، ۳، . . .، ۱۹۸۴ و ۱۹۸۵ روی تخته‌سیاه نوشته شده‌اند. همین‌طوری تصمیم می‌گیریم که دو عدد دلخواه را پاک کنیم و به‌جای آنها تفاضل مثبتشان را بنویسیم. بعد از اینکه این کار را چند بار انجام دادیم فقط یک عدد روی تخته باقی می‌ماند. آیا ممکن است این عدد ۰ باشد؟

۴. مسأله‌های گوناگون

در این بخش تعدادی مسألهٔ دشوارتر آورده‌ایم. در راه‌حل آنها علاوه بر ایدهٔ زوجیت از مطالب دیگر هم استفاده می‌شود.

مسألهٔ ۲۳. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنج 8×8 معمولی را با دومینوهای 2×1 طوری پوشاند که فقط خانه‌های $a1$ و $h8$ پوشانده نشده باقی بمانند؟

مسألهٔ ۲۴. عدد ۱۷ رقمی دلخواهی را انتخاب می‌کنیم و رقمهایش را به‌ترتیب عکس می‌نویسیم تا عددی جدید به‌دست آید. این دو عدد را با هم جمع می‌کنیم. ثابت کنید مجموعشان شامل دست‌کم یک رقم زوج است.

مسألهٔ ۲۵. در گروهی نظامی ۱۰۰ سرباز وجود دارند که هر شب سه‌تایشان مأموریت‌اند. آیا ممکن است که بعد از مدتی هر یک از سربازها با هر سرباز دیگر درست یک بار، با هم مأموریت بوده باشند؟

مسألهٔ ۲۶. چهل و پنج نقطه روی امتداد پاره‌خط AB، و بیرون آن انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها از نقطهٔ A با مجموع فاصله‌هایشان از نقطهٔ B برابر نیست.

مسألهٔ ۲۷. نُه عدد روی دایره‌ای می‌گذاریم: چهار تا ۱ و پنج تا ۰. روی این عددها این عمل را انجام می‌دهیم: میان هر جفت عدد مجاور چنانچه برابر نباشند یک ۰ و اگر یکی باشند یک ۱ می‌گذاریم و بعد عددهای «قبلی» را پاک می‌کنیم. آیا ممکن است بعد از چندبار انجام این عمل همهٔ عددهای باقی‌مانده برابر شوند؟

مسألهٔ ۲۸. بیست‌وپنج دانش‌آموز و بیست‌وپنج معلم دور میزی گرد نشسته‌اند. ثابت کنید هر دو بغل‌دستی دست‌کم یکی از این افراد، دانش‌آموزند.

مسألهٔ ۲۹. حلزونی روی سطحی صاف با سرعت ثابت می‌خزد و هر ۱۵ دقیقه به‌اندازهٔ یک زاویهٔ قائمه می‌چرخد. ثابت کنید که این حلزون فقط بعد از گذشت چند ساعت کامل می‌تواند به نقطهٔ آغاز حرکتش بازگردد.

مسألهٔ ۳۰. سه ملخ در امتداد خطی راست جفتک‌چارکش بازی می‌کنند. در هر نوبت یکی از ملخها فقط از روی یک ملخ دیگر می‌پرد. آیا ممکن است که این ملخها بعد از ۱۹۹۱ پرش به وضعیت اولیه‌شان بازگردند؟ (شکل ۷ را ببینید.)

شکل ۷

مسألهٔ ۳۱. از ۱۰۱ سکه ۵۰تایشان تقلبی‌اند و اختلاف وزن هر سکهٔ تقلبی با سکهٔ اصل ۱ گرم است. پیتر وسیلهٔ اندازه‌گیریی به‌شکل ترازو دارد که اختلاف وزن میان اشیایی را که در کفه‌هایش گذاشته می‌شوند نشان می‌دهد. او یک سکه انتخاب می‌کند و می‌خواهد با یک بار وزن کردن بفهمد که تقلبی است یا نه. آیا می‌تواند این کار را انجام دهد؟

مسألهٔ ۳۲. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۹ را پشت سرهم طوری چید که تعداد عددهای میان ۱ و ۲، میان ۲ و ۳، ...، و میان ۸ و ۹ عددی فرد باشد؟

فصل ۲

ترکیبیات ـ ۱

به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟ زبان کیمیاگری چند کلمه دارد؟ چند عدد شش رقمی «خوش یُمن» وجود دارد؟ چند ...؟ اینها و بسیاری پرسشهای مشابه دیگر را در این فصل بررسی می‌کنیم. ابتدا چند مسألهٔ ساده می‌آوریم.

مسألهٔ ۱. پنج فنجان مختلف و سه نعلبکی متفاوت در فروشگاه «مهمانی عصرانه» وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک فنجان و یک نعلبکی خرید؟

راه‌حل. ابتدا یک فنجان انتخاب می‌کنیم. بعد برای کامل کردن این سرویس می‌توانیم هر یک از سه نعلبکی را انتخاب کنیم. بنابراین ۳ سرویس فنجان و نعلبکی متمایز، شامل فنجان انتخاب شده، وجود دارد. چون پنج فنجان داریم، ۱۵ سرویس متمایز وجود دارد ($۳ \times ۵ = ۱۵$).

مسألهٔ ۲. در فروشگاه «مهمانی عصرانه» چهار قاشق چایخوری مختلف هم وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک سرویس چایخوری شامل یک فنجان، یک نعلبکی و یک قاشق خرید؟

راه‌حل. یکی از ۱۵ سرویس فنجان و نعلبکی مسألهٔ قبل را در نظر بگیرید. به چهار طریق مختلف می‌توان یک قاشق انتخاب کرد و این سرویس را کامل کرد. بنابراین تعداد همهٔ سرویسهای ممکن برابر با ۶۰ است (چون $۴ \times ۳ \times ۵ = ۴ \times ۱۵ = ۶۰$).

درست به‌همین طریق می‌توانیم مسألهٔ زیر را حل کنیم.

مسألهٔ ۳. A، B و C سه شهر سرزمین عجایب‌اند. از A به B شش راه وجود دارد و از B به C چهار راه (شکل ۸ را ببینید). به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟

پاسخ : ۴×۶ یا ۲۴ طریق.

در راه‌حل مسألهٔ ۴ از ایده‌ای جدید استفاده می‌کنیم.