مرجع مثلثات

مؤلفان : رضا اسلامی ،کاظم اجلالی

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

ارائه‌ی خدمات به دانش آموزان این مرز و بوم توفیقی است که در سالیان گذشته وسنوات اخیر در قالب های مختلف نصیب اینجانب و دوستان حقیر گردیده است. بابت این موضوع خدای متعال را بسیار شاکرم. خدمتی که اساتید و بزرگان در دهه‌ی ۶۰ برما انجام دادند وصف ناشدنی است، اساتیدی همچون سید ابوالفضل رزم آرا، حاج مسلم اکبری نظری، رحمت الله هدایتی و ... خالصانه زندگی خود را در راه موفقیت دانش آموزان جنوب شهر تهران مصروف نمودند و ازخوش اقبالی بنده این بود که توفیق شاگردی این بزرگواران در دبیرستان استقلال (نمونه دولتی امام صادق (ع)) واقع در منطقه ۹ تهران نصیبم شد. یکی از آموخته هایم ازاین عزیزان ارائه ی خدمت به دانش آموزان ایران عزیزمان مخصوصاً دانش آموزان محروم می باشد.

با توجه به این آموخته هایمان به موازات تحصیل در دانشگاه به همراه تعدادی دیگر از همکلاسی هایمان دربعضی ازمدارس محروم و ممتازجنوب شهر تهران مشغول تدریس شدیم که در رأس آن مدارس، مدرسه‌ی خودمان که همان مدرسه‌ی نمونه دولتی امام صادق (ع) بود، قرار داشت. تدریس درآن مدرسه ویژگی خاص خود را داشت چراکه دانش آموزان عمدتاً ممتاز وتیز هوش بوده ومطالب موجود درکتب درسی آن ها را اغنا نمی کرد و لازم بود هر معلمی با جمع آوری مطالب گوناگون ازکتب داخلی و خارجی جزوه ای درخورآن دانش آموزان ارائه دهد. باگذشت زمان وتوفیقات روزافزون دانش آموزان آن دبیرستان در زمینه های علمی مخصوصاً المپیاد و کنکورباعث می شد جزوات نوشته شده تکمیل تر شده و متناسب با توانایی ها وخواسته های آنان باشد.

گسترش خدمت رسانی به دانش آموزان ازآن جا شروع شد که تصمیم گرفته شد با تأسیس انتشاراتی، زحمات چندین ساله ی دوستان درجمع آوری و تدوین جزوات برای دانش آموزان ممتاز، برای عموم داوطلبین کشورکه ازاستعداد و توانایی بالایی برخوردارندمنتشر شود. این انتشارات در سال ۱۳۸۰ و با نام انتشارات خوشخوان تأسیس و با فراخوانی از دبیرستان های موفق و ممتاز ومشابه ازجمله دبیرستان های نمونه دولتی رشد، الزهرا(س)، تیزهوشان فرزانگان، علامه حلی وغیرانتفاعی های انرژی اتمی، علامه طباطبایی، علامه امینی، ... کادر مؤلفان گسترده تر وقوی ترگردید.

بنابراین کتاب حاضرو تمام کتب مشابه که از این انتشارات منتشر می شود مختص دانش آموزان ممتاز و تیزهوشان می باشد و مطالعه آن را برای عموم دانش آموزان توصیه نمی کنیم. امید است که خدمت همکاران ما درسایر انتشارات ها برای عموم دانش آموزان (قوی، متوسط وضعیف) و خدمت همکاران ما را در انتشارات خوشخوان برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش ونیز المپیادی ها مورد قبول درگاه حق واقع بوده و مورد رضایت شما عزیزان را فراهم آورده باشد.

این مقوله بیش ازآن که به پیشگفتار شباهت داشته باشد به شرح ماجرا و سرگذشت تبدیل شد به همین بهانه لازم می بینم از زحمات تمام اساتیدی که از دوره ابتدایی و راهنمایی در روستاهای خاکی و دوزدوزان (از توابع شهرستان سراب) گرفته تا دبیرستان های شهید اصغری اسلام شهر وامام صادق (ع) تهران، تشکر و قدردانی نمایم.

ازشما خوانندگان گرامی نیز کمال تشکر را داشته و تقاضا دارم عیوب و نقص کارهای ما را به بزرگواری خود برما بخشیده و درصورت صلاحدید آن ها را ازطریق تلفن، نامه و یا ایمیل برما انتقال دهید تا در بهبود کیفیت کار تا حد ممکن نظرات شما عزیزان را دخالت دهیم و خواهشمند است درصورت نارضایتی چه از نظر کیفیت و چه از نظر قیمت کتاب و ... مارا حلال کنید تا خدای نکرده در روز آخرت شرمنده ی شما عزیزان نباشیم.

با تشکر

رسول حاجی زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفان

مدتهاست که منتظر تألیف یک کتاب آموزشی با ابزار و شیوه های نوین، توسط همکارانمان هستیم و به خود می گوییم چرا اکثر کتابهای موجود در بازار تقریباً مانند هم و با یک سبک و روش تألیف میشوند؟چرا تمرینات کتابهای موجود، سطح و دسته بندی دلچسبی ندارند و یا به لحاظ کمی و کیفی ایراد دارند؟چرا از نرم افزارهای آموزشی، بهره ی چندانی در انتقال مطالب برده نمیشود؟ چرا حتی ظاهر کتابها هم فرق چندانی با هم ندارد و چراهای فراوان دیگری که مجال بیان تمام آنها نیست. به هر حال انتظارمان فایدهای نداشت و مجبور شدیم خودمان دست به کار شویم تا شاید بتوانیم به چراهای کسانی که مانند ما فکر میکنند پاسخ دهیم.دانش و تجربه ی اندک خود را به کار بستیم و توکل کردیم که :

تکیه برتقوی ودانش درطریقت کافریست　　　راهرو گر صد هنر دارد توکل بایدش

اما چرا مثلثات را انتخاب کردیم؟ سالها پیش درریاضیات دبیرستان، دوکتاب مثلثات وجود داشت که درپی تغییر نظام آموزشی، این کتابها حذف و قسمتی ازمباحث آن ها درکتابهای ریاضیات سالهای مختلف آورده شد. شاید کارشناسان تألیف کتب درسی، مثلثات را شاخه ی مستقلی درریاضیات نمی دیدند و می خواستند با این کار مثلثات را ساده تر وکم حجم تر ارائه کنند.به هر دلیل که برای ما روشن نیست، یک فصل ازکتاب درسی ریاضیات هر سال مثلثات نام گرفت و دانش آموزان با آن، همان گونه برخورد کردند که با فصل هایی چون بردار، ماتریس ، مجموعه و . . . برخورد میکردند. نتیجه‌ی منطقی این روند هم آن بود که وقتی به مباحثی چون حد،پیوستگی،مشتق وکاربرد مشتق پرداخته میشد، بیشترین مشکل دانش آموزان مربوط به مسائلی مربوط به مثلثات بود. هرچند با تغییر کتابهای ریاضی در سالهای اخیر با نگرشی نو وکاربردی به مثلثات، اندکی وضع موجود بهبود یافت ولی قسمت عمده ی مشکل همچنان باقی است و به نظر میرسد باید اهمیت بیشتری برای مثلثات قائل شد. براین باوریم که با نگارش یک کتاب مستقل مثلثات و عمق بخشیدن به مطالب کتب درسی و استفاده از مثالهای متنوع وکاربردی و طرح مسائل کیفی وکمی میتوان تا حدی برای رفع این مشکل تلاش کرد.

این کتاب کوششی است در حد بضاعت مولفان که دارای ویژگی های زیر است:

۱- ارائه مفهومی مطالب درقالب یک طرح درس کامل با محوریت کتب درسی
۲- طرح مثال های متنوع تا در آموزش دانش آموزان با سطوح مختلف، کارآیی داشته باشد
۳- ارائه تمرینات تکمیلی در هر فصل به شکلی کاملاً ویژه در سطوح مختلف و با کیفیتی فوق العاده
٤- تشریح کامل سوالات پیچیده و سخت تمرینات تکمیلی به همراه راهنمایی گام به گام و پاسخ نهایی برای تمارین ساده و متوسط
٥- استفاده از شکلهای رنگی، زیبا وکاملاً دقیق هم در درس و هم در تشریح و راهنمایی تمرینات تکمیلی
٦- شبیه سازی نرم افزاری مطالب برای درک شهودی و بهتر مفاهیم

با وجود صرف وقت زیاد و دقت فراوان، یقیناً نقایصی در این اثر موجود است. اگر خوانندگان محترم نظرات اصلاحی خود را از طریق نشر و یا به طور مستقیم با مولفان در میان بگذارند، موجب خوشحالی و تشکر خواهد بود. درضمن در تلاشیم تا از طریق سایت مربوط به انتشارات، معلمان و همکاران گرامی را در ارائه‌ی نرم افزاری هر درس وانتخاب سوالات با سطوح مشخص از میان تمرینات هر فصل یاری کنیم.

درپایان از زحمات و همکاری آقایان ارشدی، هویدی ، امیری، حسینی، عظیمی، ابراهیمی، اسلامی فر، مددی پور، یگانه، شاکر، موسی فراش، محمدی فرد و معین که در پدید آوردن این اثر ما را یاری کردند، خانم افسانه نیک پور که ویرایش کتاب را به عهده داشتند و به خصوص از جناب آقای حاجی زاده مدیریت محترم انتشارات خوشخوان از صمیم قلب قدردانی می نماییم و امید داریم خداوند توفیق ادامه ی این راه را به ما عطا فرماید که اگر چنین شود به زودی آثار دیگری را با این ویژگی ها تقدیم دوستداران ریاضیات خواهیم کرد.

سخنی فقط با دانش آموزان

طی تألیف این کتاب که کار تقریباً سختی بود، بارها دچار تردید می‌شدیم و هر بار آنچه که انگیزه ی ما را زیاد می‌کرد، تصویر شما عزیزان بود که بعد از مطالعه ی بخشی از کتاب، از فهم آن لذت برده و عزم خود را برای تلاش بیشتر جزم کرده اید. اکنون کار تمام شده و حالا نوبت شماست که به بهترین صورت از آن استفاده کنید.

- خواهشمندیم قبل از مطالعه به مطالب زیر توجه کنید:

۱- دانش آموزان دبیرستانی به صورت زیر میتوانند از این کتاب استفاده کنند:

- سال اول ▪ فصل ۱ به همراه فصل ۸ که مربوط به راهنمایی و جواب آخر تمرینات است.
- سال دوم ▪ فصول ۱ تا ۳ به خصوص فصول ۲ و ۳ به همراه فصل ۸
- سال سوم رشته ی ریاضی - فیزیک ▪ فصول ۱ تا ۷ به خصوص فصول ٤ تا ۷ به همراه فصل ۸
- سال سوم رشته ی علوم تجربی ▪ فصول ۱ تا ٤ و ٦ به همراه فصل ۸
- سال چهارم رشته ی ریاضی - فیزیک ▪ تمام فصول و به خصوص فصلی که در CD تحت عنوان ((مثلثات در مباحث مختلف)) است.
- سال چهارم رشته ی تجربی ▪ تمامی فصول غیر از فصول ٥ و ۷

۲- در هر فصل بعد از درس، تمرینات و سوالات چهار گزینه ای قرار گرفته است که در فصل آخر کتاب، کلید تستها و پاسخ تمرینات تشریحی قرار گرفته است.

۳- تمرینات تکمیلی هرفصل درچهار سطح بگونه ی تنظیم شده است که ۱۵ درصد آن ساده، ۴۰ درصد آن متوسط، ۳۵ درصد آن سخت و ۱۰ درصد آن پیچیده است.لذا در هرسطحی که قرار دارید، حتماً از تمرینات استفاده کرده وسعی کنید به سطح بالاتر هم برسید.

٤- در فصل آخر کتاب، حل کامل تمامی سوالات پیچیده و اغلب سوالات سخت ، راهنمایی کامل وگام به گام به همراه جواب آخر برای سوالات متوسط و جواب آخر برای سوالات ساده وجود دارد که بسیار گره گشاست.

٥- هنگام مطالعه‌ی درس و راهنمایی حل حتماً به رنگ های مختلف توجه کنید،چراکه رنگ ها هدفمند است و شما را در یادگیری کمک میکند.

٦- هنگام مطالعه‌ی هر درس، قبل از مشاهده ی حل مثال ها، حداقل به اندازه ی زمان پیشنهاد شده روی آنها کار کنید.

۷- به همراه کتاب، یک CD وجود دارد که حاوی اطلاعات بسیار خوبی از جمله پاسخ تشریحی سوالات چهارگزینه ای و برنامه های مربوط به < شبیه سازی ها > می باشد.

۸- در بعضی از قسمت های درس به نماد «شبیه سازی» برمی خورید. حتماً به CD مراجعه کرده و از برنامه ی مورد نظر استفاده کنید. مطمئن باشید که بسیار مفید خواهند بود.

۹- بعد از کسب مهارت در هر فصل، بهتر است سوالات چهارگزینه ای را نیز پاسخ دهید و با کلید آن در فصل ۸ تصحیح کنید. اگر نیاز به تشریح سوالات چهارگزینه ای داشتید، به CD مراجعه کنید.

اگر به مشکلی برخوردید یا پیشنهادی داشتید از طریق ناشر محترم یا به طور مستقیم با ما در میان بگذارید:

- کاظم اجلالی : edjlali_Kazem@yahoo.com
- سید محمود رضا اسلامی : Re.eslami@gmail.com

تقدیم به تمام کسانی که سهمی در رشد و بالندگیمان دارند.

فهرست

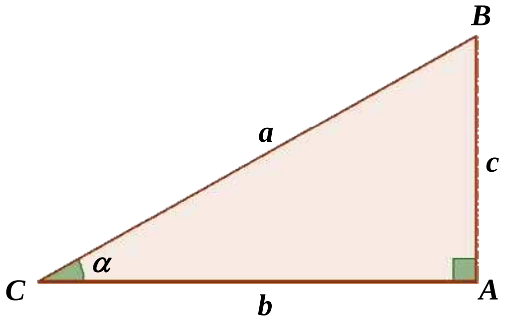
فصل ۱

نسبت های مثلثاتی
در مثلث قائم الزاویه

در این فصل نسبتهای مثلثاتی یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه را معرفی خواهیم کرد. شما خواهید آموخت که نسبت اندازه اضلاع یک مثلث قائم الزاویه با زوایای آن چه ارتباطی دارد و این ارتباط چه کاربردی می‌تواند داشته باشد. همچنین در مثالها و مسائل پایانی فصل مقدماتی را فراهم خواهیم کرد که در فصل‌های بعدی به شدت مورد استفاده قرار خواهند گرفت. مطالعه این فصل برای تمامی کسانی که می‌خواهند مثلثات را به عنوان یک ابزار محاسباتی بیاموزند، توصیه می‌شود. لازم به ذکر است که مطالب این فصل منطبق بر سرفصل‌های کتاب ریاضیات سال اول دبیرستان می‌باشد.

۱–۱– نسبت مثلثاتی سینوس

در مثلث قائم الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، زاویه‌ی حاده‌ی α را در نظر می‌گیریم. سینوس این زاویه‌ی حاده این‌گونه تعریف می‌شود:



$$\sin(\alpha)=\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}}=\frac{c}{a}$$

از آن‌جا که در مثلث قائم الزاویه، طول وتر از سایر اضلاع بزرگ‌تر است، همواره حاصل تقسیم اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی α بر اندازه‌ی وتر عددی کوچک‌تر از یک خواهد بود:

$$۰<\alpha<۹۰^\circ \Rightarrow ۰<\sin\alpha<۱$$

مثال

اگر $۰<\alpha<۹۰^\circ$ و $\sin\alpha=\frac{m-۳}{۵}$ باشد، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

حل)

α زاویه‌ای حاده است : $۰<\sin\alpha<۱$

$\Rightarrow ۰<\frac{m-۳}{۵}<۱$ (ضرب طرفین در ۵) $\Rightarrow ۰<m-۳<۵$ (جمع طرفین با ۳)

$\Rightarrow ۳<m<۸$ (مشخص کردن اعداد صحیح) $\Rightarrow m=۴,۵,۶,۷$

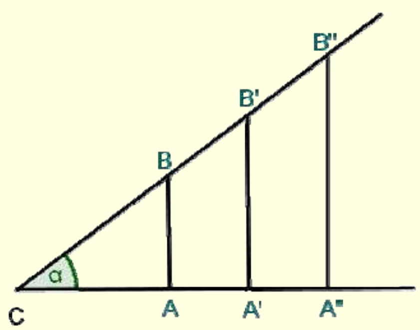
بنابراین ۴ مقدار صحیح وجود دارد.

در مورد زاویه‌ی مشخص و حاده‌ی α می‌توان گفت $\sin\alpha$ نیز عددی مشخص است. یعنی در مثلث‌های قائم الزاویه‌ی متفاوت که یک زاویه‌ی حاده‌ی α دارند، نسبت اندازه‌ی ضلع مقابلِ α به اندازه‌ی وتر، عددی ثابت است.

به شکل زیر توجه کنید:

طبق قضیه‌ی تالس می‌توان گفت که در مثلث‌های ABC و $A'B'C$ و $A''B''C$ اضلاع باهم متناسب می‌باشند و حاصل نسبت اندازه‌ی ضلع مقابلِ α بر اندازه‌ی وتر در هر سه مثلث باهم برابر است.

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C}=\frac{A''B''}{B''C}$$



کد: ۱۰۱

مثال هر یک از مثلث‌های قائم الزاویه‌ی زیر را رسم کرده و مقدار $\sin ۳۰^\circ$ را در آن‌ها حساب کنید.

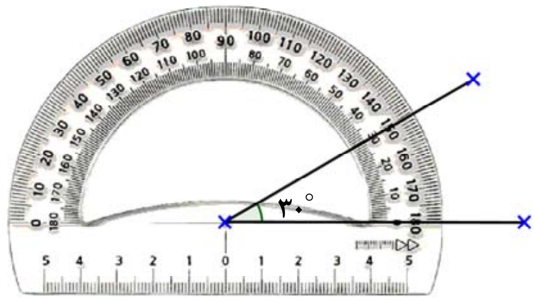
۴ دقیقه

الف) $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ و $BC = ۴cm$

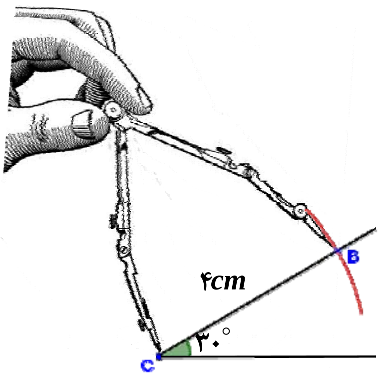
ب) $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ و $BC = ۳cm$

حل الف)

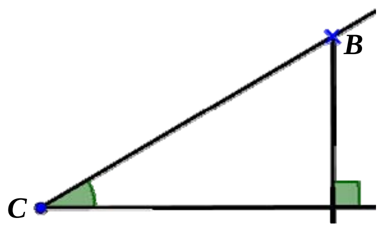
۱ رسم زاویه‌ی $\hat{C} = ۳۰^\circ$ به کمک نقاله



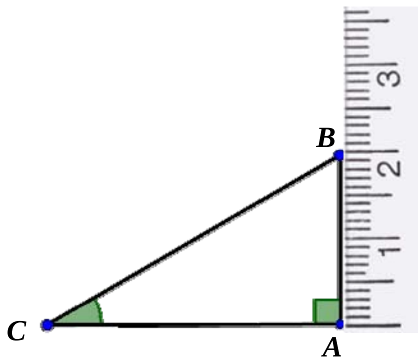
۲ مشخص کردن ضلع BC به کمک پرگار



۳ رسم عمود از B به کمک گونیا



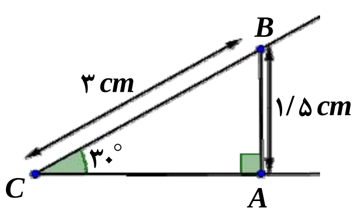
۴ اندازه‌گیری ضلع AB به کمک خط‌کش



۵ محاسبه‌ی $\sin ۳۰^\circ$: $\sin ۳۰^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{۲}{۴}$

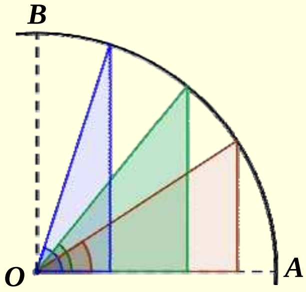
حل ب)

اگر قسمت الف را تکرار کنیم، مثلث ABC این گونه رسم می‌شود:



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{۱/۵}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

هرچه زاویه‌ی α از صفر تا ۹۰ درجه بزرگ‌تر گردد، مقدار $\sin\alpha$ نیز بزرگ‌تر می‌شود. همان‌طور که در دایره‌ی روبه‌رو مشخص شده، در تمامی مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول وتر یکسان است و با زیاد شدن زاویه‌ی α، اندازه‌ی ضلع مقابل بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه مقدار $\sin\alpha$ بیشتر می‌شود.



شبیه سازی
کد: ۱۰۲

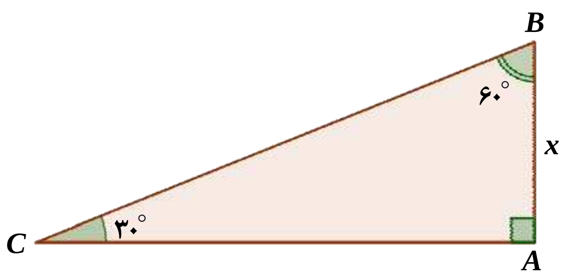
مثال
سینوس زوایای ۳۰° ، ۶۰° و ۴۵° را به روش هندسی به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

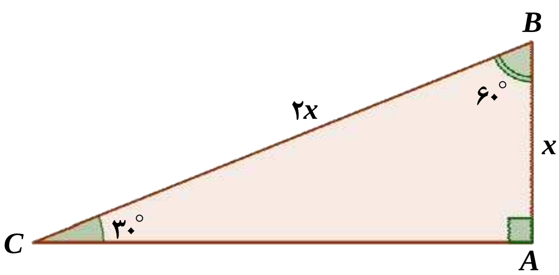
۴ دقیقه

حل)

۱ رسم مثلث قائم الزاویه‌ای با زاویه‌ی ۳۰°

۲ در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌روی زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.



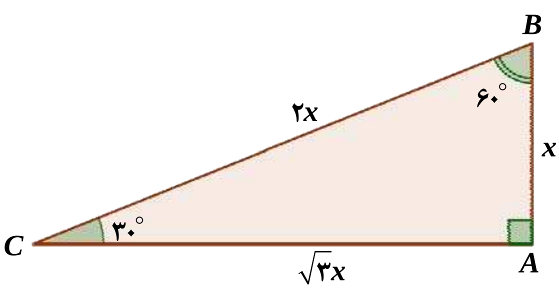


به کمک رابطه‌ی فیثاغورث طول ضلع AC را برحسب x به دست می‌آوریم:

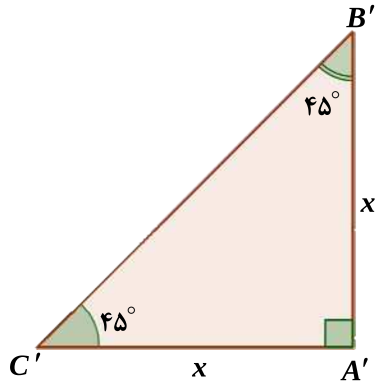
$$(۲x)^۲ = x^۲ + (AC)^۲ \Rightarrow ۴x^۲ = x^۲ + (AC)^۲ \Rightarrow (AC)^۲ = ۳x^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۳}x$$

۳ محاسبه‌ی $\sin ۳۰^\circ$ و $\sin ۶۰^\circ$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{x}{۲x} = \frac{۱}{۲} \quad و \quad \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}x}{۲x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

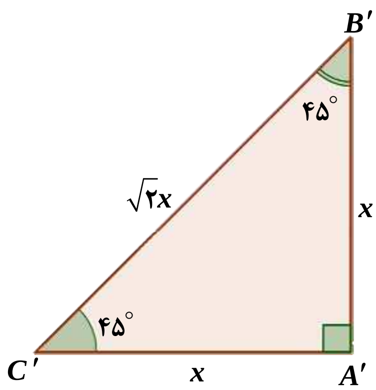


۱ رسم مثلث قائم الزاویه با زاویه‌ی 45°



۲ به کمک رابطه‌ی فیثاغورث طول وتر را برحسب x می‌یابیم:

$$(BC)^2 = x^2 + x^2$$
$$\Rightarrow (BC)^2 = 2x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}x$$



۳ محاسبه‌ی $\sin 45^\circ$

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

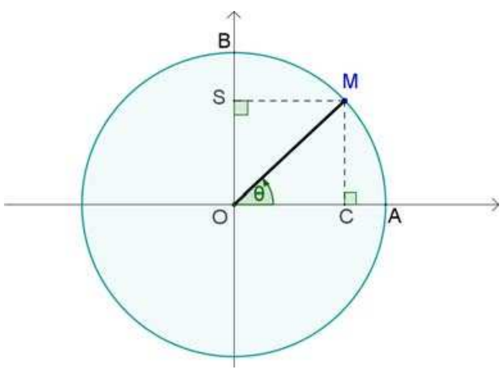
پس مقایسه‌ی $\sin 30^\circ$، $\sin 45^\circ$ و $\sin 60^\circ$ به این ترتیب خواهد بود:

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 30^\circ < \sin 45^\circ < \sin 60^\circ$$

مثال

دایره‌ی روبه‌رو که به شعاع ۱ رسم شده است، معروف به دایره‌ی مثلثاتی است.
مقدار $\sin\theta$ برابر با طول کدام پاره‌خط است؟
(θ زاویه‌ی دلخواه است.)

۲ دقیقه



حل)

از نقطه‌ی M به دو پاره‌خط OA و OB عمود رسم می‌کنیم. در مثلث قائم الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{OMC}$، مقدار $\sin\theta$ را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{MC}{OM} = \dfrac{MC}{1} = MC \\ \text{در مستطیل } OSMC\text{، طول } MC \text{ با طول } OS \text{ برابر است.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\theta = OS$$

تذکر

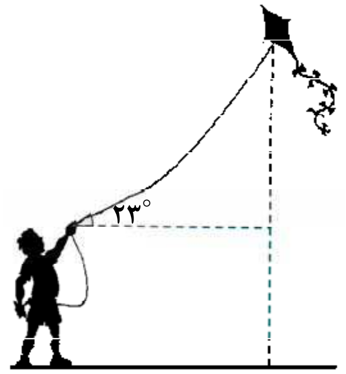
همان‌طور که در دایره‌ی مثلثاتی مشخص است با افزایش زاویه‌ی θ، طول OS یعنی $\sin\theta$ بیشتر می‌شود. همچنین اگر θ به صفر نزدیک شود، سینوس آن به صفر و اگر به 90° نزدیک شود، سینوس آن به عدد یک نزدیک می‌شود. پس داریم : $\sin 0^\circ = 0 \quad , \quad \sin 90^\circ = 1$.

شبیه سازی
کد: ۱۰۳

مثال ۳ دقیقه

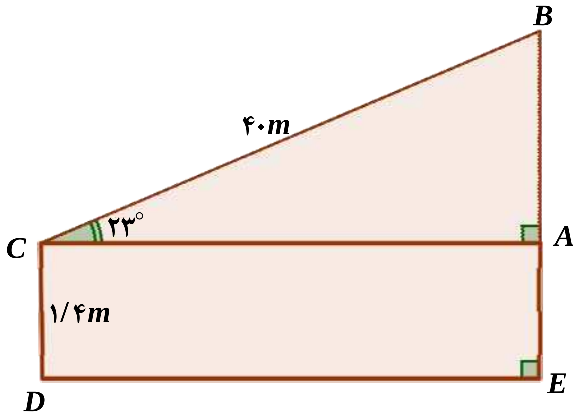
شخصی که دارای قد ۱ متر و ۴۰ سانتی‌متر است، بادبادکی به هوا فرستاده است. در لحظه‌ای که ۴۰ متر از نخ را رها کرده است، زاویه‌ی بین راستای نخ و سطح زمین ۲۳° می‌باشد. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

(فرض کنید نخ در امتداد مستقیم قرار دارد و $\sin ۲۳^\circ = ۰/۳۹$است.)



حل)

همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشخص است برای محاسبه‌ی ارتفاع بادبادک از زمین باید ابتدا اندازه‌ی ضلع AB را محاسبه و سپس آن را با اندازه‌ی AE جمع کنیم :



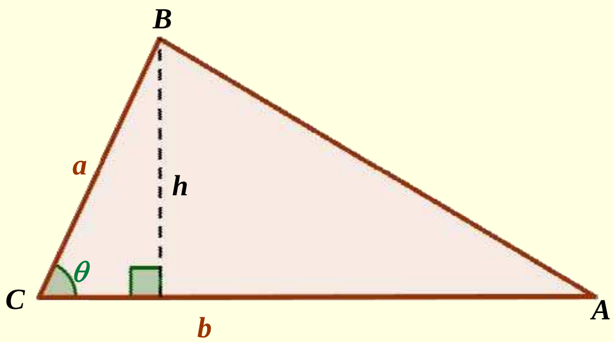
$$\sin ۲۳^\circ = \frac{AB}{BC} \text{(جاگذاری)}\Rightarrow ۰/۳۹ = \frac{AB}{۴۰} \Rightarrow AB = ۱۵/۶m$$

$$\Rightarrow BE = AB + AE \Rightarrow BE = ۱۵/۶ + ۱/۴ = ۱۷m$$

نکته

مساحت یک مثلث دلخواه با دو ضلع a و b که زاویه‌ی بین آن‌ها θ می‌باشد، از رابطه‌ی $S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ به دست می‌آید.

اثبات :



$$\sin\theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\sin\theta$$

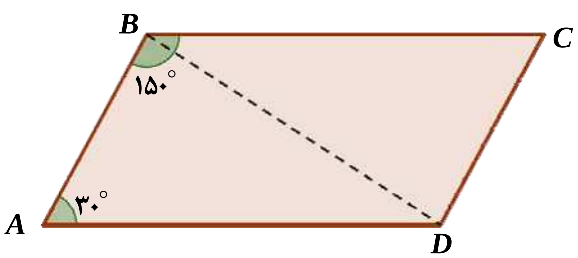
$$S = \frac{۱}{۲}b \times h \text{ (جاگذاری) } \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}b \times a\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta}$$

مثال ۳ دقیقه

مساحت متوازی الاضلاعی را که اندازه‌ی دو ضلع مجاور آن ۵ و ۸ و زاویه‌ی بین این دو ضلع ۱۵۰° می‌باشد، به‌دست آورید.

حل)



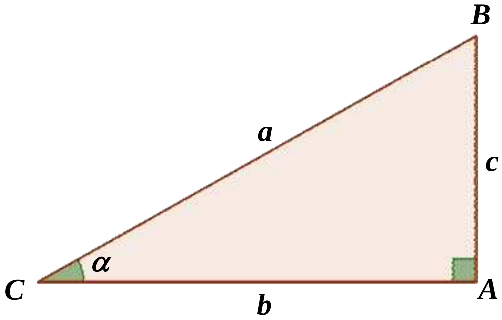
در شکل مقابل زاویه‌ی A مکمل زاویه‌ی B است. پس داریم:

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲}AB.AD\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۵ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰$$

پس مساحت متوازی الاضلاع دو برابر مساحت مثلث و برابر ۲۰ می‌باشد.

۱–۲– نسبت مثلثاتی کسینوس

در مثلث قائم الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{ABC}$ ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، کسینوس زاویه‌ی حاده‌ی α این گونه تعریف می‌شود:



$$\cos\alpha = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور به زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}} = \frac{b}{a}$$

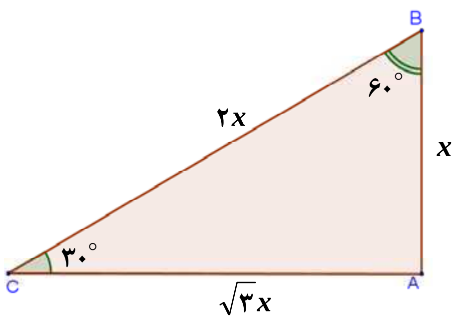
از آن‌جا که طول وتر از سایر اضلاع بزرگ‌تر است، حاصل تقسیم اندازه‌ی ضلع مجاور زوایه‌ی α بر اندازه‌ی وتر عددی کوچکتر از یک است:

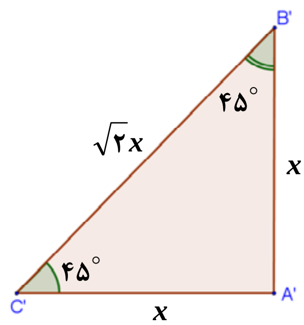
$$۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \Rightarrow ۰ < \cos\alpha < ۱$$

در مورد زاویه‌ی مشخص و حاده‌ی α می‌توان گفت $\cos\alpha$ عددی ثابت است که فقط به α بستگی دارد.

۵ دقیقه

به کمک دو شکل زیر، $\cos ۳۰^\circ$، $\cos ۴۵^\circ$ و $\cos ۶۰^\circ$ را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید:





حل)

$$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} \cos ۳۰^\circ = \dfrac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی وتر}} = \dfrac{\sqrt{۳}x}{۲x} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \cos ۶۰^\circ = \dfrac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی وتر}} = \dfrac{x}{۲x} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{A'B'C'}: \cos ۴۵^\circ = \frac{x}{\sqrt{۲}x} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس مقایسه‌ی $\cos ۳۰^\circ$ ، $\cos ۴۵^\circ$ و $\cos ۶۰^\circ$ به این ترتیب خواهد بود:

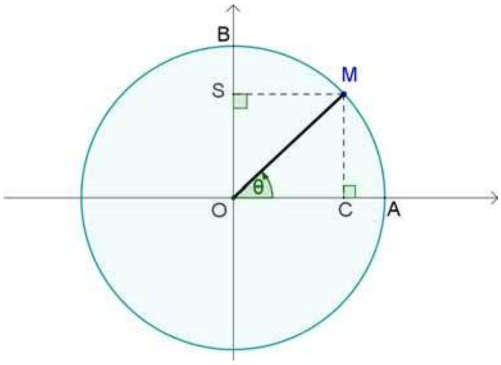
$$\cos ۳۰^\circ > \cos ۴۵^\circ > \cos ۶۰^\circ$$

مثال ۳ دقیقه

دایره‌ی روبرو به شعاع ۱ رسم شده است.

الف) مقدار $\cos\theta$ برابر با طول کدام پاره‌خط است؟

ب) با افزایش θ از صفر تا ۹۰°، مقدار $\cos\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟



حل)

$$\overset{\Delta}{OMC} : \cos\theta = \frac{OC}{OM} = \frac{OC}{۱} \Rightarrow \cos\theta = OC$$

در شکل مشخص است که با افزایش θ، طول پاره‌خط OC کاهش می‌یابد. وقتی θ در حدود صفر است، کسینوس آن تقریباً یک است و هنگامی که θ به ۹۰° می‌رسد، کسینوس آن کاهش یافته و تقریباً صفر است.

نکته با افزایش زاویه‌ی θ از صفر تا ۹۰°، سینوس و کسینوس آن به شکل مقابل تغییر می‌کنند:

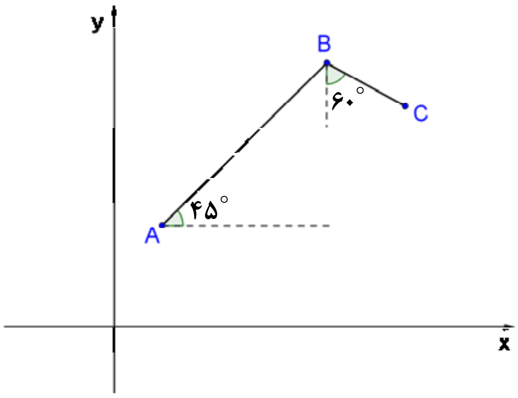
θ	۰°	۱° ... ۸۹°	۹۰°
$\sin\theta$	۰	↗	۱
$\cos\theta$	۱	↘	۰

شبیه سازی
کد: ۱۰۴

مثال ۵ دقیقه

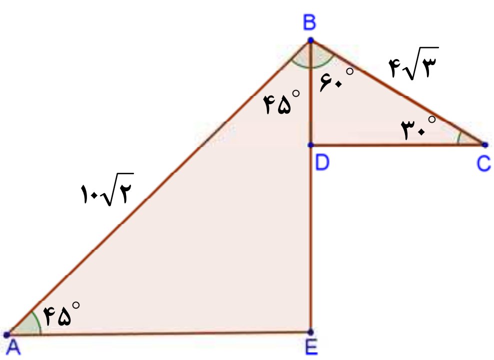
متحرکی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و سپس به نقطه‌ی C تغییر مکان داده است. این متحرک در راستای افقی چند کیلومتر جابجا شده است؟

$(AB = ۱۰\sqrt{۲}\,km$ و $BC = ۴\sqrt{۳}\,km)$



حل)

هدف در این مسأله به دست آوردن طول AE و DC است:



$$\cos A = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE = AB\cos A \quad \text{(جاگذاری)}$$

$$\Rightarrow AE = ۱۰\sqrt{۲} \times \cos ۴۵^\circ = ۱۰\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰\,km$$

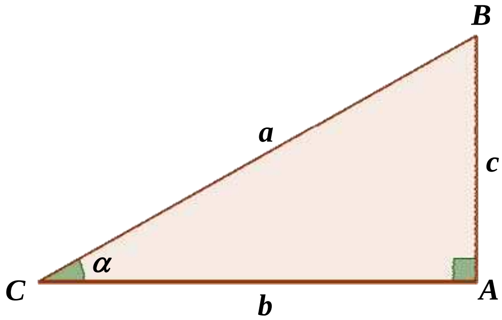
$$\cos C = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DC = BC\cos C \quad \text{(جاگذاری)}$$

$$\Rightarrow DC = ۴\sqrt{۳} \times \cos ۳۰^\circ = ۴\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\,km$$

جواب نهایی $۱۰ + ۶ = ۱۶\,km$ می‌باشد.

۱-۳- نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{ABC}$ ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، زاویه‌ی حاده‌ی α را در نظر می‌گیریم. تانژانت و کتانژانت این زاویه این گونه تعریف می‌شود:



$$\tan\alpha = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل}}{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}} = \frac{c}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل}} = \frac{b}{c}$$

چون تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی α، عکس یکدیگر می‌باشند، بیشتر از $\tan\alpha$ استفاده می‌شود و کتانژانت را بر حسب تانژانت بیان می‌کنند:

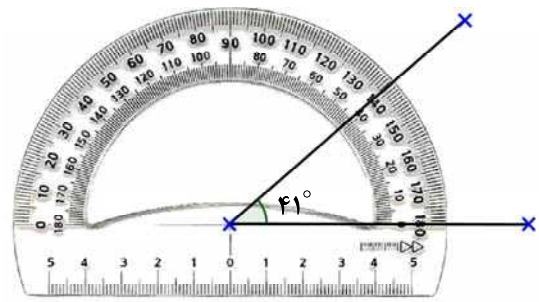
$$\boxed{\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha}}$$

الف- به طور تقریبی $\tan ۴۱^\circ$ را محاسبه کنید.

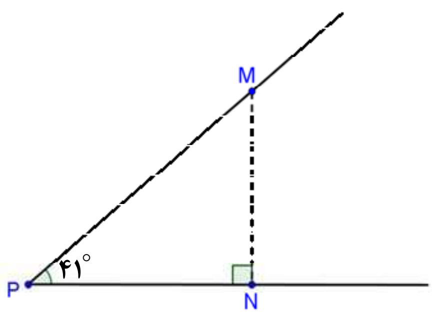
ب- زاویه‌ی حاده‌ای را مشخص کنید که تانژانت آن $\frac{۲}{۳}$ باشد.

حل الف)

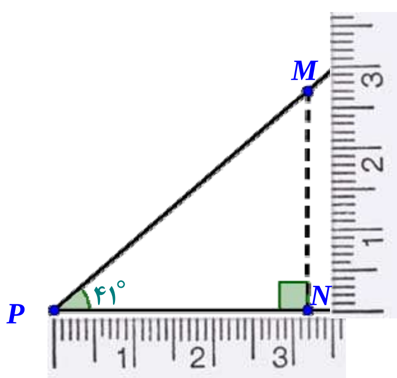
۱ رسم زاویه ۴۱° به کمک نقاله



۲ رسم عمود از نقطه‌ی دلخواه M



۳ اندازه‌گیری ضلع مقابل و مجاور



به طور تقریبی $MN = ۲/۸$ و $PN = ۳/۲$ اندازه‌گیری شده‌اند.

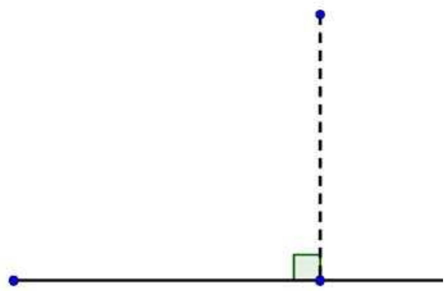
پس داریم:

$$\tan ۴۱^\circ = \frac{MN}{PN}$$

$$\Rightarrow \tan ۴۱^\circ \simeq \frac{۲/۸}{۳/۲} \simeq ۰/۹$$

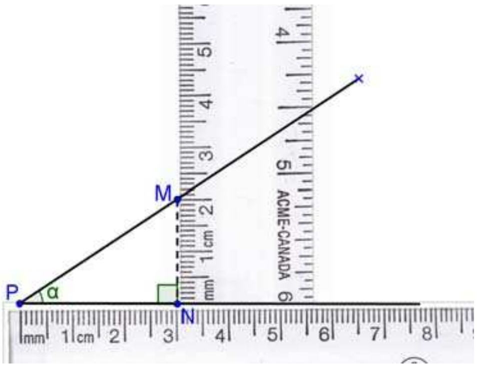
حل ب)

۱ رسم یک زاویه‌ی قائمه



۲ مشخص کردن اضلاع آن به طول‌های ۲ و ۳

$$\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$$

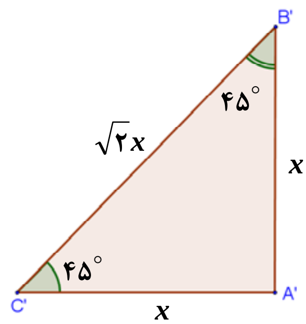


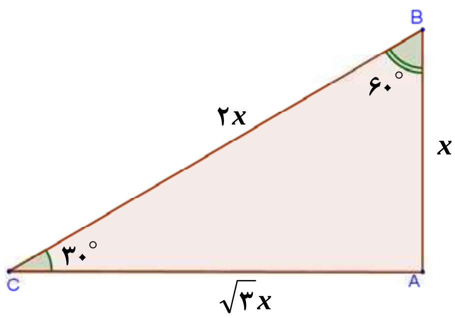
زاویه α را به کمک نقاله اندازه‌گیری می‌کنیم. جواب به طور تقریبی $۳۳/۶^\circ$ می‌باشد.

تانژانت و کتانژانت زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° را از طریق هندسی به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

حل)

از دو مثلث قائم الزاویه‌ی زیر کمک می‌گیریم:





$$\begin{cases}\tan ۴۵^\circ = \dfrac{x}{x} = ۱ \\ \cot ۴۵^\circ = \dfrac{۱}{۱} = ۱\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan ۶۰^\circ = \dfrac{\sqrt{۳}x}{x} = \sqrt{۳} \\ \cot ۶۰^\circ = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan ۳۰^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{۳}x} = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} \times \dfrac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \cot ۳۰^\circ = \dfrac{۱}{\tan ۳۰^\circ} = \dfrac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \sqrt{۳}\end{cases}$$

پس مقایسه‌ی بین این نسبت‌ها این‌گونه خواهد شد:

$$\tan ۳۰^\circ < \tan ۴۵^\circ < \tan ۶۰^\circ$$

$$\cot ۳۰^\circ > \cot ۴۵^\circ > \cot ۶۰^\circ$$

به کمک اغلب ماشین حساب‌ها، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت را محاسبه کرد. فقط باید دقت داشت که ابتدا ماشین حساب در وضعیت درجه قرار گیرد. زیرا واحدهای دیگری نیز برای تعیین زاویه استفاده می‌شود. برای نمونه داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = ۰/۵ \,,\, \sin ۴۳^\circ \simeq ۰/۶۸ \,,\, \sin ۸۸^\circ \simeq ۰/۹۹$$

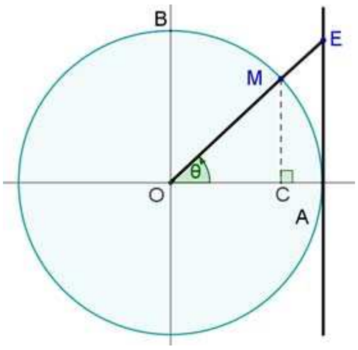
$$\cos ۳۰^\circ = ۰/۸۶ \,,\, \cos ۴۳^\circ \simeq ۰/۷۳ \,,\, \cos ۸۸^\circ \simeq ۰/۰۳$$

$$\tan ۳۰^\circ \simeq ۰/۵۷ \,,\, \tan ۴۳^\circ \simeq ۰/۹۳ \,,\, \tan ۸۸^\circ \simeq ۲۸/۶۳$$

شبیه سازی
کد: ۱۰۵

مثال

دایره‌ی روبرو به شعاع ۱ رسم شده است. (دایره مثلثاتی)



۳ دقیقه

الف) مقدار $\tan\theta$ برابر با طول کدام پاره‌خط است؟

ب) با افزایش θ از صفر تا ۹۰°، $\tan\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

ج) در مورد $\tan ۰^\circ$ و $\tan ۹۰^\circ$ چه نظری دارید؟

حل الف)

$$\overset{\Delta}{OAE} : \tan\theta = \frac{AE}{OA} = \frac{AE}{۱} \Rightarrow \tan\theta = AE$$

حل ب)

در شکل مشخص است که با افزایش θ از صفر تا ۹۰°، طول AE افزایش می‌یابد.

حل ج)

ابتدا که $\theta = ۰$ است، طول پاره‌خط AE صفر است، یعنی $\tan ۰^\circ = ۰$ و همین‌طور که زاویه بزرگتر می‌شود و به ۹۰ درجه نزدیک تر می‌شود، $\tan\theta$ افزایش پیدا می‌کند. اما دقیقاً در زاویه‌ی ۹۰°، امتداد OM، خط AE را قطع نمی‌کند و به همین دلیل $\tan ۹۰^\circ$ تعریف نشده می‌باشد.

شبیه سازی
کد: ۱۰۶

توجه:

از آن‌جا که مقدار $\tan\theta$ وقتی θ نزدیک ۹۰° است، عدد بزرگی است، $\tan ۹۰^\circ$ را بی‌نهایت نیز می‌خوانند و باعلامت ∞ نشان می‌دهند. توجه کنید:

$$\tan ۸۰^\circ \simeq ۵/۷ \;,\; \tan ۸۷^\circ \simeq ۱۹/۱ \;,\; \tan ۸۹/۸^\circ \simeq ۲۸۶/۵ \;,\; \tan ۹۰^\circ = \infty$$ (تعریف نشده)

یادگیری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی ۰°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰° الزامی است. پیشنهاد می‌کنیم جدول مثلثاتی روبرو را به طور دقیق یاد بگیرید.

دومطلب زیر به یادگیری این جدول کمک می‌کند:

۱- یادگیری دو ردیف سینوس و تانژانت کافی است. می‌توان کسینوس و کتانژانت را از روی این دو به دست آورد.

۲- مقادیر سینوس و تانژانت هر دو در حال افزایش می‌باشند.

α	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۳ دقیقه

$$۱)\ \sin ۶۰^\circ - ۲\sin ۳۰^\circ + \tan ۳۰^\circ \tan ۶۰^\circ \qquad ۲)\ \frac{۲\tan ۴۵^\circ}{۱+۲\cos ۶۰^\circ}$$

حل)

می‌توانیم بدون استفاده از جدول جاگذاری کنیم:

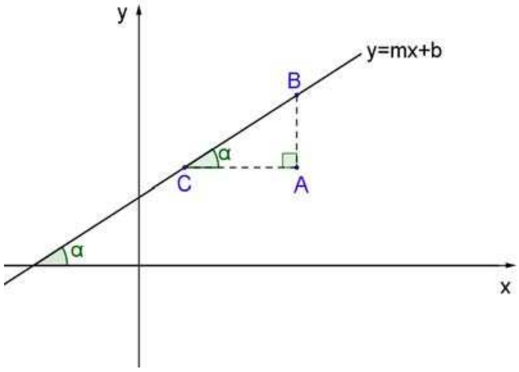
$$۱)\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}-(۲\times\frac{۱}{۲})+(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱+۱=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$۲)\ \frac{۲\times۱}{۱+(۲\times\frac{۱}{۲})}=\frac{۲}{۱+۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$

ابوجعفر محمد بن موسی خوارزمی

خوارزمی متولد ۷۸۰ میلادی در خوارزم و مؤلف کتاب‌های متعدد در ریاضیات و نجوم است. شهرت علمی خوارزمی مربوط به کارهایی است که در ریاضیات مخصوصاً در رشته‌ی جبر انجام داده است. به موجب تلاش‌های این دانشمند اصطلاح الگوریتم که لاتین شده‌ی نام وی است به زبان ریاضی افزوده شد. او در کتاب «حساب‌الهند» دستگاه شمارش هندی را توضیح داده است. این کتاب یکی از آثاری بود که آشنایی اروپای غربی را با دستگاه مکانی اعشاری موجب شد. کتاب دیگری از خوارزمی که مغرب زمین از طریق ترجمه‌ی لاتین با آن آشنا شد و متن عربی آن موجود است، کتاب «حساب الجبر و المقابله» می‌باشد. او موفق به اندازه‌گیری یک درجه از قوس نصف‌النهار شد. خدمت شایان دیگر خوارزمی به جهان علم این است که وی حساب هندی را در دنیای متمدن انتشار داد و اروپائیان را با استعمال صفر برای نشان دادن مرتبه‌ی خالی آشنا ساخت. برای نشان دادن مرتبه‌ی خالی آشنا ساخت. خوارزمی در سایر رشته‌های علوم و مخصوصاً نجوم هم کارهای جالب و سودمندی انجام داد و نقشه‌های جغرافیایی بطلمیوس را اصلاح کرد. خوارزمی در حدود سال ۸۴۸ میلادی درگذشت.

۱–۴– رابطه‌ی بین شیب خط و تانژانت



خط روبرو به معادله $y = mx + b$ را در نظر بگیرید. m شیب این خط است که نشان دهنده‌ی نسبت میزان افزایش ارتفاع به اندازه‌ی جابه‌جایی در راستای افقی است:

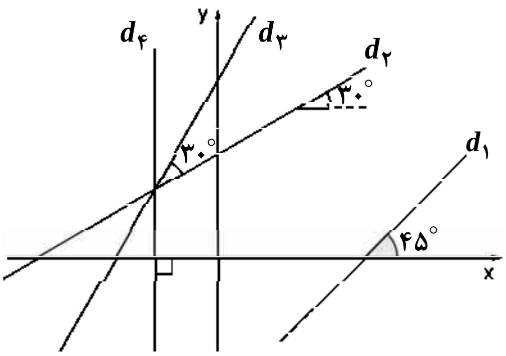
$$m = \frac{AB}{AC}$$

از طرفی در مثلث ABC، این نسبت همان $\tan\alpha$ می‌باشد. پس می‌توان گفت:

$$m = \tan\alpha = \frac{AB}{AC}$$ (α زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌باشد.)

مثال

در شکل مقابل شیب هر یک از خطوط $d_۱$ تا $d_۴$ را تعیین کنید.



حل)

$$\alpha = ۴۵^\circ \Rightarrow m_۱ = \tan ۴۵^\circ = ۱$$: زاویه‌ی $d_۱$ با جهت مثبت محور طول ها

$$\alpha = ۳۰^\circ \Rightarrow m_۲ = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$: زاویه‌ی $d_۲$ با جهت مثبت محور طول ها

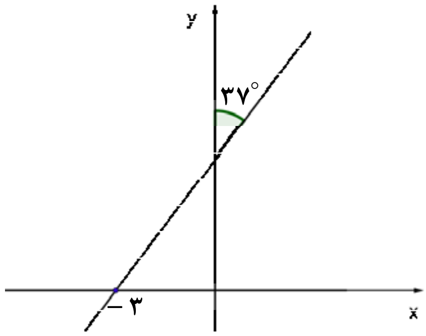
$$\alpha = ۳۰ + ۳۰ = ۶۰^\circ \Rightarrow m_۳ = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$: زاویه‌ی $d_۳$ با جهت مثبت محور طول ها

$$\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow m_۴ = \tan ۹۰^\circ = \infty$$ (تعریف نشده) : زاویه‌ی $d_۴$ با جهت مثبت محور طول ها

مثال

خط روبرو از نقطه $A(۶,a)$ می‌گذرد. مقدار a را به دست آورید.

$$(\tan ۳۷^\circ = \frac{۳}{۴} \text{ و } \tan ۵۳^\circ = \frac{۴}{۳})$$

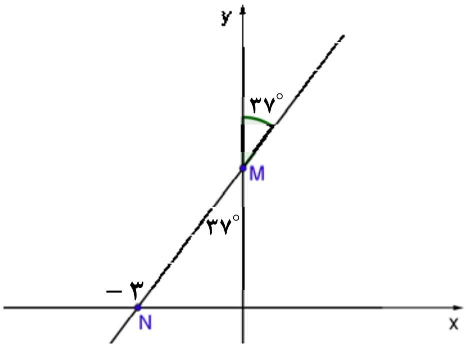


حل)

این خط از نقطه‌ی $(-۳,۰)$ می‌گذرد، کافی است شیب خط را به دست آوریم و معادله‌ی خط را مشخص کنیم:

$$\hat{M}+\hat{N}=۹۰^\circ \Rightarrow ۳۷^\circ+\hat{N}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{N}=۵۳^\circ$$

$$m=\tan N=\tan ۵۳^\circ=\frac{۴}{۳}$$



معادله‌ی خط:

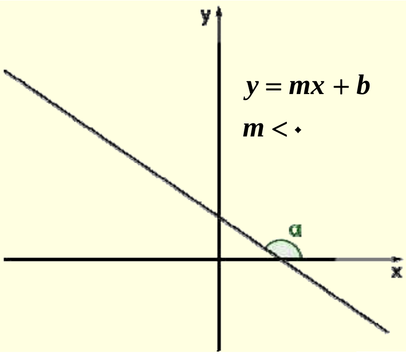
$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۰=\frac{۴}{۳}(x+۳) \Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+۴$$

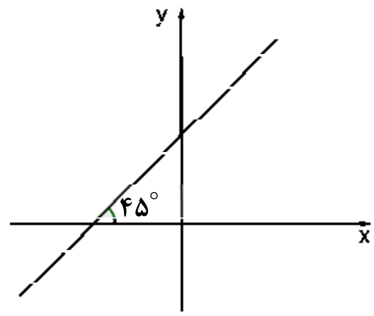
طول نقطه‌ی A را در معادله‌ی خط جاگذاری می‌کنیم تا عرض آن یعنی a به دست آید:

$$y=(\frac{۴}{۳}\times ۶)+۴\Rightarrow y=۸+۴=۱۲\Rightarrow a=۱۲$$

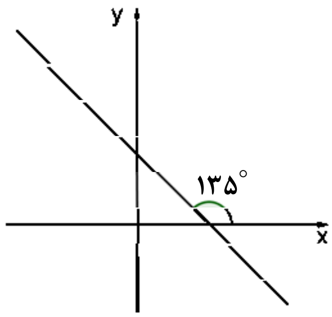
حتی در مواردی که شیب خط منفی باشد نیز رابطه‌ی $m=\tan(\alpha)$ صحیح است. در این صورت زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور طول‌ها (α) منفرجه می‌باشد. در فصل بعدی خواهیم دید که تانژانت زاویه منفرجه عددی منفی است.

به نمونه‌های زیر توجه کنید:

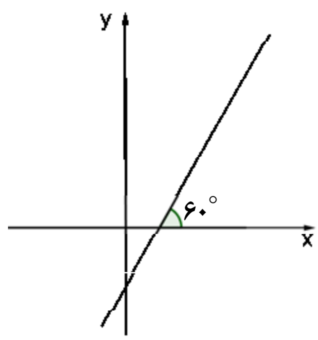




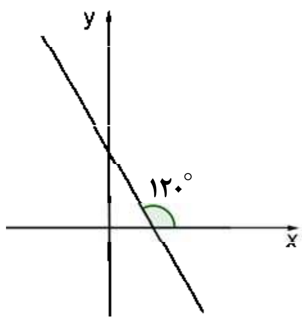
$$m=\tan ۴۵^\circ=۱$$



$$m=\tan ۱۳۵^\circ=-\tan ۴۵^\circ=-۱$$



$$m=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$



$$m=\tan ۱۲۰^\circ=-\tan ۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

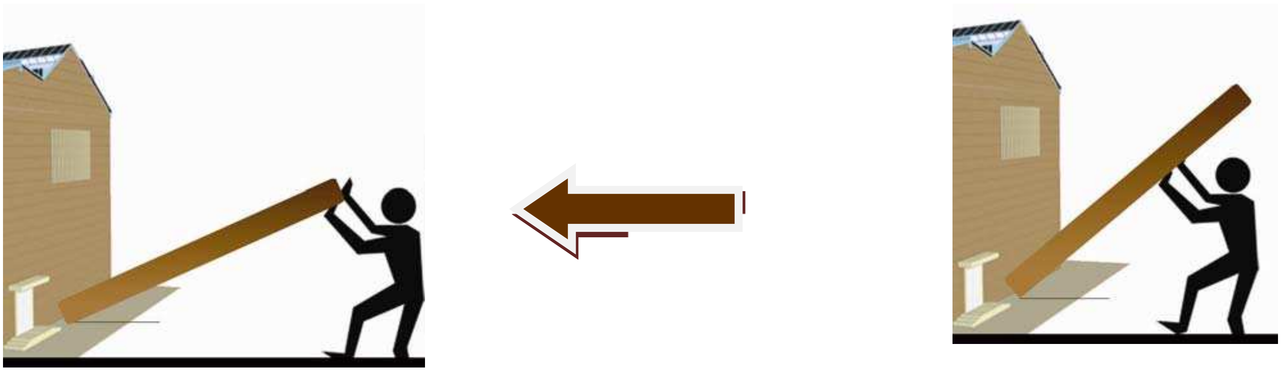
شبیه سازی

کد: ۱۰۷

۱–۵– چند مسأله‌ی کاربردی

مثال

فردی با قد یک متر و پنجاه سانتی‌متر الواری به طول **$۳۹۰cm$** را که یک سر آن به دیوار تکیه داده شده است ، با زاویه‌ی ۴۵ درجه بلند کرده است. فرد از دیوار دور می‌شود تا جایی که سر دیگر الوار تا قد او پایین بیاید. او چقدر از دیوار دور شده است؟

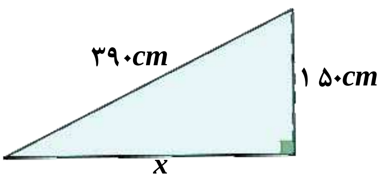


حل)

در حالت اول:

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{\text{طول قد فرد}}{\text{فاصله‌ی فرد از دیوار}} = \frac{۱۵۰cm}{\text{فاصله‌ی فرد از دیوار}} \quad \text{فاصله‌ی فرد از دیوار} = ۱۵۰cm$$

در حالت دوم:



x = فاصله فرد از دیوار

فیثاغورث : $x^۲ + ۱۵۰^۲ = ۳۹۰^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۲۹۶۰۰ \Rightarrow x = ۳۶۰cm$

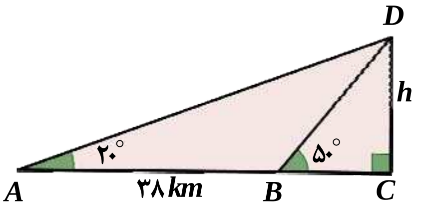
پس مقدار جابجایی فرد برابر با **$(۳۶۰ - ۱۵۰ = ۲۱۰cm)$** می‌باشد.

مثال

دو پدافند A و B که در فاصله‌ی ۳۸ کیلومتری از هم قرار دارند، یک هواپیمای جنگنده را با زاویه‌های ۲۰° و ۵۰° نسبت به افق مورد شلیک قرار می‌دهند. ارتفاع پرواز این جنگنده چند کیلومتر است؟

حل)

هدف در این مسأله به دست آوردن h است.



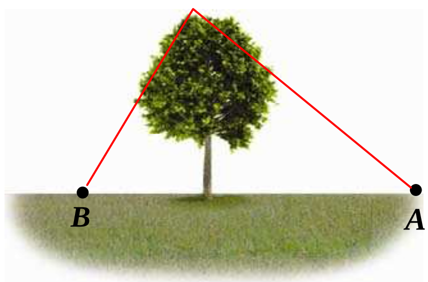
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC}: \tan ۲۰^\circ = \dfrac{h}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{h}{\tan ۲۰^\circ} \\ \overset{\Delta}{BDC}: \tan ۵۰^\circ = \dfrac{h}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{h}{\tan ۵۰^\circ} \end{cases}$$ (جاگذاری) $$\Rightarrow AB = AC - BC \Rightarrow ۳۸km = \frac{h}{\tan ۲۰^\circ} - \frac{h}{\tan ۵۰^\circ}$$

$$\Rightarrow ۳۸ = h\left(\frac{۱}{\tan ۲۰^\circ} - \frac{۱}{\tan ۵۰^\circ}\right)$$ (به کمک ماشین حساب) $$\Rightarrow ۳۸ = h \times ۱/۹ \Rightarrow h = \frac{۳۸}{۱/۹} = ۲۰cm$$

ارتفاع جنگنده از سطح زمین $۲۰km$ است.

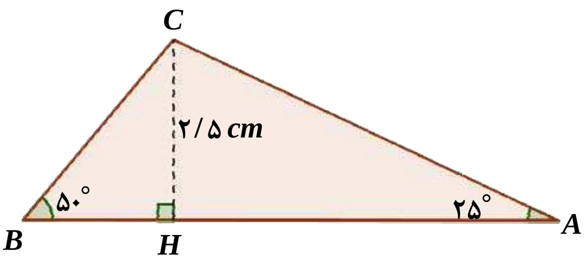
در شکل مقابل درختی به ارتفاع $۲/۵$ متر ازنقطه‌ی A با زاویه‌ی ۲۵° و از نقطه‌ی B با زاویه‌ی ۵۰° دیده می‌شود. فاصله‌ی دو نقطه از یکدیگر چقدر است؟

($\tan ۵۰^\circ = ۱/۱۹$ و $\tan ۲۵^\circ = ۰/۴۷$)



حل)

برای به دست آوردن AB ، کافی‌است در دو مثلث ACH و BCH اضلاع AH و BH را به دست آورده و با هم جمع کنیم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHC}: \tan ۲۵^\circ = \dfrac{CH}{AH} \Rightarrow ۰/۴۷ = \dfrac{۲/۵}{AH} \Rightarrow AH = ۵/۳۲m \\ \overset{\Delta}{BHC}: \tan ۵۰^\circ = \dfrac{CH}{BH} \Rightarrow ۱/۱۹ = \dfrac{۲/۵}{BH} \Rightarrow BH = ۲/۱۰m \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = AH + BH = ۵/۳۲ + ۲/۱۰ = ۷/۴۲m$$

پس فاصله‌ی دو نقطه از هم $۷/۴۲m$ است.

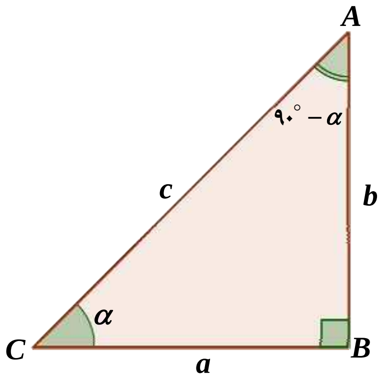
۱–۶– نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

دو زاویه را که مجموع آن‌ها ۹۰° باشد، متمم گویند. مانند ۳۰° و ۶۰° یا ۱۵° و ۷۵°.

در حالت کلی دو زاویه‌ی α و $۹۰^\circ - \alpha$ متمم هستند. در مورد این زوایا می‌توان گفت که سینوس یکی برابر با کسینوس دیگری و تانژانت یکی برابر با کتانژانت دیگری است. توجه کنید:

$$\tan(۹۰-\alpha)=\frac{a}{b}=\cot(\alpha)$$
$$\cot(۹۰-\alpha)=\frac{b}{a}=\tan(\alpha)$$

$$\sin(۹۰-\alpha)=\frac{a}{c}=\cos(\alpha)$$
$$\cos(۹۰-\alpha)=\frac{b}{c}=\sin(\alpha)$$



به عنوان نمونه داریم:

$$\sin ۷۵^\circ=\sin(۹۰^\circ-۱۵^\circ)=\cos(۱۵^\circ)$$
$$\cot ۶۰^\circ=\cot(۹۰^\circ-۳۰^\circ)=\tan(۳۰^\circ)$$
$$\cos ۱۰^\circ=\cos(۹۰^\circ-۸۰^\circ)=\sin(۸۰^\circ)$$

درستی این روابط را با ماشین حساب بررسی کنید.

مثال حاصل عبارت $A=\tan ۲۰^\circ\times\tan ۴۵^\circ\times\tan ۷۰^\circ$ را به دست آورید.

۲ دقیقه

حل)

$$\tan ۷۰^\circ=\tan(۹۰^\circ-۲۰^\circ)=\cot ۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow \tan ۲۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ=\tan ۲۰^\circ\times\cot ۲۰^\circ=\tan ۲۰^\circ\times\frac{۱}{\tan ۲۰^\circ}=۱$$
$$A=\tan ۲۰^\circ\times\tan ۴۵^\circ\times\tan ۷۰^\circ=(\tan ۲۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ)\times\tan ۴۵^\circ=۱\times۱=۱$$

مثال سه عدد $\sin ۲۰^\circ$، $\cos ۱۰^\circ$ و $\tan ۸۰^\circ$ را باهم مقایسه کنید.

۳ دقیقه

حل)

در زوایای حاده، زاویه‌ی بزرگ‌تر سینوس بزرگ‌تری دارد.

$$\begin{cases}\cos ۱۰^\circ=\cos(۹۰-۸۰^\circ)=\sin ۸۰^\circ\\ \sin ۸۰^\circ>\sin ۲۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \cos ۱۰^\circ>\sin ۲۰^\circ$$

حال $\tan ۸۰^\circ$ را با $\sin ۸۰^\circ$ مقایسه می‌کنیم:

$\tan ۸۰^\circ$ از $\tan ۴۵^\circ=۱$ بزرگ‌تر است، در صورتی که $\sin ۸۰^\circ$ از یک کوچک‌تر است، پس $\tan ۸۰^\circ>\sin ۸۰^\circ$ خواهد بود. پس داریم:

$$\tan ۸۰^\circ>\sin ۸۰^\circ>\sin ۲۰^\circ$$
$$\tan ۸۰^\circ>\cos ۱۰^\circ>\sin ۲۰^\circ$$

۱–۷– روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

به مثال زیر توجه کنید:

مثال

۳ دقیقه

در محاسبه‌ی $\text{۲}\sin\alpha$، $\sin(\text{۲}\alpha)$، $\sin(\alpha^{\text{۲}})$ و $\sin^{\text{۲}}\alpha$ چه تفاوتی وجود دارد؟ با یک مثال عددی تفاوت را نشان دهید.

حل)

در محاسبه‌ی $\text{۲}\sin\alpha$: ابتدا $\sin\alpha$ محاسبه شده و حاصل در ۲ ضرب می‌شود.

در محاسبه‌ی $\sin(\text{۲}\alpha)$: ابتدا $\text{۲}\alpha$ محاسبه شده و سپس سینوس آن به دست می‌آید.

در محاسبه‌ی $\sin(\alpha^{\text{۲}})$: ابتدا $\alpha^{\text{۲}}$ محاسبه شده و سپس سینوس آن به دست می‌آید.

در محاسبه‌ی $\sin^{\text{۲}}(\alpha)$: ابتدا $\sin\alpha$ محاسبه شده و سپس مربع آن به دست می‌آید.

به عنوان مثال عددی $\alpha=\text{۹}^\circ$ را بررسی می‌کنیم:

$$\text{۲}\sin\alpha=\text{۲}\sin\text{۹}^\circ\simeq\text{۰/۳۱۲} \quad \text{و} \quad \sin\text{۲}\alpha=\sin\text{۱۸}^\circ\simeq\text{۰/۳۰۹}$$

$$\sin\alpha^{\text{۲}}=\sin\text{۸۱}^\circ\simeq\text{۰/۹۸۸} \quad \text{و} \quad \sin^{\text{۲}}\alpha=(\sin\text{۹}^\circ)\simeq\text{۰/۰۲۴}$$

بین نسبتهای مثلثاتی روابطی وجود دارد که در این بخش با چند رابطه‌ی معروف و کاربرد آنها در حل مسائل آشنا می‌شویم:

۱) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۲) $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۳) $\tan\alpha.\cot\alpha=\text{۱}$

۴) $\sin^{\text{۲}}\alpha+\cos^{\text{۲}}\alpha=\text{۱}$

۵) $\text{۱}+\tan^{\text{۲}}\alpha=\dfrac{\text{۱}}{\cos^{\text{۲}}\alpha}$

۶) $\text{۱}+\cot^{\text{۲}}\alpha=\dfrac{\text{۱}}{\sin^{\text{۲}}\alpha}$

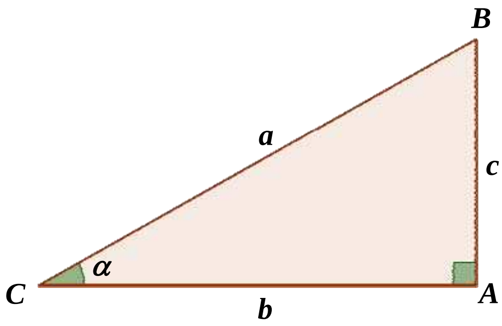
اثبات رابطه‌ی (۱) :

$$\tan\alpha=\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابلِ } \alpha}{\text{اندازه‌ی ضلع مجاورِ } \alpha} \xrightarrow{\text{(صورت و مخرج تقسیم بر اندازه‌ی وتر)}} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\dfrac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل}}{\text{اندازه‌ی وتر}}}{\dfrac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی وتر}}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

به راحتی می‌توان رابطه‌ی (۲) را نیز به همین ترتیب اثبات کرد.

اثبات رابطه‌ی (۳):

$$\tan\alpha.\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\text{۱}$$



اثبات رابطه‌ی (۴):

به مثلث قائم الزاویه‌ی روبرو توجه کنید:

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \sin\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = (\frac{c}{a})^۲ + (\frac{b}{a})^۲ = \frac{c^۲}{a^۲} + \frac{b^۲}{a^۲} = \frac{b^۲ + c^۲}{a^۲} \text{(فیثاغورث)} \Rightarrow \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = \frac{a^۲}{a^۲} = ۱$$

به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin^۲ ۴۵^\circ + \cos^۲ ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}, \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin^۲ ۳۰^\circ + \cos^۲ ۳۰^\circ = \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴} = ۱$$

اثبات رابطه‌ی (۵):

$$۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + (\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^۲ = ۱ + \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

رابطه‌ی (۶) نیز به همین ترتیب قابل اثبات است.

با فرض $\tan\theta = ۵$، حاصل عددی $A = \frac{۳\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta - ۴\cos\theta}$ را به دست آورید.

حل)

(روش اول)

$$\tan\theta = ۵ \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = ۵ \Rightarrow \sin\theta = ۵\cos\theta \text{ (جاگذاری در } A\text{)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{۳(۵\cos\theta) - \cos\theta}{۵\cos\theta - ۴\cos\theta} = \frac{۱۵\cos\theta - \cos\theta}{\cos\theta} = \frac{۱۴\cos\theta}{\cos\theta} = ۱۴$$

(روش دوم)

صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{۳\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta - ۴\cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{۳\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - ۴\frac{\cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{۳\tan\theta - ۱}{\tan\theta - ۴} = \frac{(۳\times۵) - ۱}{۵ - ۴} = ۱۴$$

عبارت‌های زیر را به صورت مربع یک عبارت مثلثاتی بنویسید.

۱) $\tan^۲\alpha + \cot^۲\alpha - ۲$

۲) $(۱ + \tan\alpha)^۲ + (۱ + \cot\alpha)^۲ + ۱$

حل ۱)

$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha-2=(\tan\alpha)^2+(\cot\alpha)^2-2\times\tan\alpha\times\cot\alpha \text{ (اتحاد مربع دو جمله‌ای) } =(\tan\alpha-\cot\alpha)^2$$

حل ۲)

$$(1+\tan\alpha)^2+(1+\cot\alpha)^2+1=1+2\tan\alpha+\tan^2\alpha+1+2\cot\alpha+\cot^2\alpha+1$$

$$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+1+2\tan\alpha+2\cot\alpha+2$$

$$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+1+2(\tan\alpha\times 1)+2(\cot\alpha\times 1)+2(\tan\alpha\times\cot\alpha) \text{ (اتحاد مربع سه جمله‌ای)}$$

$$=(\tan\alpha+\cot\alpha+1)^2$$

مثال (۵ دقیقه)

اگر سینوس زاویه‌ی حاده‌ی θ برابر با $\frac{2}{5}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را محاسبه کنید.

حل)

$$\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\ \sin\theta=\frac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow \frac{4}{25}+\cos^2\theta=1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta=\frac{21}{25}\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{21}}{5} \text{ یا } \cos\theta=\frac{-\sqrt{21}}{5} \text{ (غیرقابل قبول)}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}}=\frac{2}{\sqrt{21}}\times\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

مثال (۳ دقیقه)

اگر $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار عبارت $\sin\theta\cos\theta$ چقدر است؟

حل)

طرفین فرض را به توان ۲ می‌رسانیم تا عبارت $\sin\theta\cos\theta$ ظاهر شود:

$$\Rightarrow(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{\frac{8}{9}}{2}=\frac{4}{9}$$

مثال (۵ دقیقه)

حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت درآورید.

۱) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$

۲) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$

حل ۱)

از اتحاد فرعی $a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha=(\sin^{۲}\alpha)^{۲}+(\cos^{۲}\alpha)^{۲}=((\sin\alpha)^{۲}+(\cos\alpha)^{۲})^{۲}-۲(\sin^{۲}\alpha)(\cos^{۲}\alpha)=۱-۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$$

حل ۲)

از اتحاد فرعی $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)^{۳}-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^{۶}\alpha+\cos^{۶}\alpha=(\sin^{۲}\alpha)^{۳}+(\cos^{۲}\alpha)^{۳}=(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)^{۳}-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha(\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha)$$

$$=۱-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$$

مثال ۳ دقیقه

درستی رابطه‌ی $۱-\cot^{۴}\theta=\frac{۱}{\sin^{۴}\theta}-\frac{۲}{\sin^{۲}\theta}$ را اثبات کنید.

حل)

از سمت چپ شروع به ساده کردن می‌کنیم تا به سمت راست برسیم:

سمت چپ: $$\frac{۲}{\sin^{۲}\theta}-\frac{۱}{\sin^{۴}\theta}=\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}(۲-\frac{۱}{\sin^{۲}\theta})=(۱+\cot^{۲}\theta)(۲-(۱+\cot^{۲}\theta))$$

$$=(۱+\cot^{۲}\theta)(۱-\cot^{۲}\theta)=۱-\cot^{۴}\theta$$: سمت راست

مثال ۳ دقیقه

زاویه‌ی حاده‌ی θ در رابطه‌ی $۵\sin^{۲}\theta+۲\cos^{۲}\theta+۲\sin\theta\cos\theta=۵$ صدق می‌کند. $\tan\theta$ چقدر است؟

حل)

طرفین رابطه را بر $\cos^{۲}\theta$ تقسیم می‌کنیم:

$$۵\frac{\sin^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta}+\frac{۲\cos^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta}+۲\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^{۲}\theta}=\frac{۵}{\cos^{۲}\theta}$$

$$\Rightarrow ۵\tan^{۲}\theta+۲+۲\tan\theta=۵(۱+\tan^{۲}\theta)\Rightarrow ۲+۲\tan\theta=۵\Rightarrow \tan\theta=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۳ دقیقه

اگر $\tan\beta=۳$ باشد، حاصل $\frac{\sin\beta}{۲۰\cos^{۳}\beta-\sin\beta}$ را به دست آورید.

حل)

صورت و مخرج کسر را بر $\cos^{۳}\beta$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\sin\beta}{\cos^{۳}\beta}}{۲۰\frac{\cos^{۳}\beta}{\cos^{۳}\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos^{۳}\beta}}=\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{۱}{\cos^{۲}\beta}}{۲۰-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{۱}{\cos^{۲}\beta}}=\frac{\tan\beta(۱+\tan^{۲}\beta)}{۲۰-\tan\beta(۱+\tan^{۲}\beta)}$$ (جاگذاری)

$$=\frac{۳\times۱۰}{۲۰-(۳\times۱۰)}=\frac{۳۰}{۲۰-۳۰}=\frac{۳۰}{-۱۰}=-۳$$

مثال

درستی روابط زیر را اثبات کنید:

۶ دقیقه

$$1)\ \frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$$

$$2)\ \frac{1}{\cos^6 x}-\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^6 x$$

حل ۱)

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x} \quad \text{(طرفین – وسطین)}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1 \quad \text{(همواره درست)}$$

حل ۲)

$$\text{سمت چپ}=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\cos^4 x}-3\tan^2 x\right)$$

$$=(1+\tan^2 x)\left(\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2-3\tan^2 x\right)=(1+\tan^2 x)((1+\tan^2 x)^2-3\tan^2 x)$$

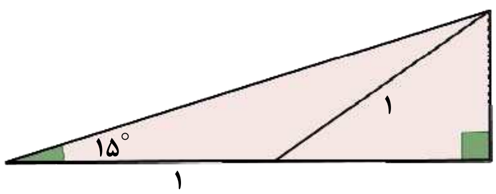
$$=(1+\tan^2 x)(1-\tan^2 x+\tan^4 x) \quad \text{(اتحاد چاق و لاغر)}=(1+(\tan^2 x))(1-(\tan^2 x)(1)+(\tan^2 x)^2)$$

$$=1+(\tan^2 x)^3=1+\tan^6 x=\text{(سمت راست)}$$

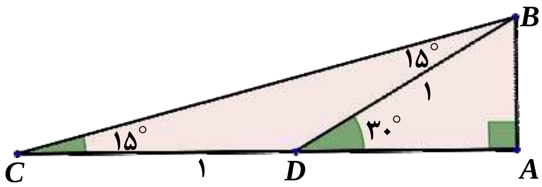
مثال

به کمک شکل مقابل مقدار دقیق $\tan 15^\circ$ را حساب کنید.

۵ دقیقه



حل)



از آن جا که مثلث $\overset{\Delta}{BDC}$ متساوی الساقین است، دو زاویه‌ی حاده‌ی این مثلث، 15° خواهد بود. زاویه‌ی خارجی D در مثلث $\overset{\Delta}{BDC}$ نیز برابر $15^\circ+15^\circ=30^\circ$ می‌باشد:

$$\Rightarrow \tan 15^\circ=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{1+AD} \quad (I)$$

پس مقادیر AB و AD را حساب کرده و در رابطه‌ی I جاگذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} AB=BD\times\sin 30^\circ=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ AD=BD\times\cos 30^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{(جاگذاری در رابطه‌ی } I\text{)} \quad \Rightarrow \tan 15^\circ=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{(ساده کردن)}$$

$$\Rightarrow \tan 15^\circ=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

۵ دقیقه

مثال

به روش هندسی ثابت کنید: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

حل)

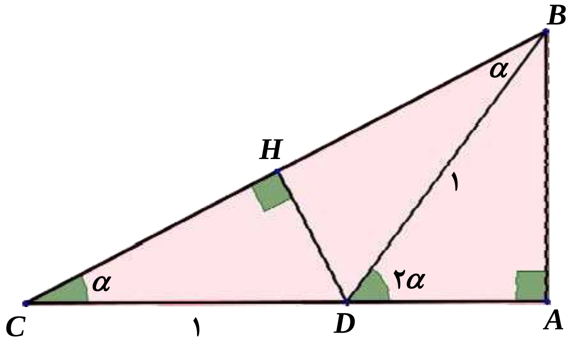
قبل از اثبات، درستی رابطه را به ازای $\alpha = 30^\circ$ بررسی می‌کنیم:

$$\sin 60^\circ = 2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اثبات:

در شکل روبرو هم زاویه‌ی α و هم زاویه‌ی 2α وجود دارد:

برای رسم این شکل کافی است مثلث متساوی‌الساقین BCD را به طول ساق ۱ واحد و زاویه‌ی α رسم می‌کنیم. سپس از نقطه‌ی B بر امتداد ضلع CD عمود کنیم. سپس از نقطه‌ی D بر ضلع BC عمود کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC}: \sin\hat{C} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} \\ \overset{\Delta}{ABD}: \sin 2\alpha = \dfrac{AB}{1} \Rightarrow AB = \sin 2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{BC} \quad (I)$$

حال کافی است BC را به دست آوریم:

$$\overset{\Delta}{CDH}: \cos\alpha = \frac{CH}{CD} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{CH}{1} \Rightarrow CH = \cos\alpha$$

پس BC، برابر با $2CH$ یعنی $2\cos\alpha$ می‌باشد و با جاگذاری در رابطه‌ی (I) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} \ (\text{طرفین – وسطین}) \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

ابوالوفای بوزجانی

محمدبن یحیی بن اسماعیل بن عباس، معروف به ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان و اخترشناس سده‌ی چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. مقدمات ریاضیات زمان را، همان جا نزد دایی و عمویش فراگرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد. او بر بسیاری از آثار پیشینیان مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. در یکی از رسایل خود از دو روش مبتنی بر مثلثات کروی برای تعیین فاصله‌ی بغداد تا مکه معظمه استفاده کرده است. برای تجلیل از بوزجانی،دهانه یکی از آتشفشان‌های ماه بنام او نام‌گذاری شده است.

«آن چه از علم حساب مورد نیاز کاتبان و حسابگران است» و «آن چه از اعمال هندسی مورد نیاز صنعتگران است» دو نمونه از کتاب های بوزجانی هستند. وی در سوم رجب ۳۸۸ در بغداد درگذشت.

۱ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۱) $2\sin 60^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \tan 30^\circ$

۲) $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ + 2\tan 20^\circ \cot 20^\circ$

۳) $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ - \tan 45^\circ + 2\cot 45^\circ$

۲ آیا رابطه‌ی $\sin 60^\circ = 2\sin 30^\circ$ درست است؟

۳ آیا رابطه‌ی $\cot 60^\circ = 2\cot 30^\circ$ درست است؟

۴ درستی رابطه‌های زیر را نشان دهید:

۱) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ = \sin 30^\circ$

۲) $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

۳) $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$

۴) $3\sin 30^\circ - 4\sin^3 30^\circ = 1$

۵) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 30^\circ$

۶) $\cos 60^\circ = \dfrac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

۷) $\dfrac{\sin^2 45^\circ}{2} = \dfrac{\sin^2 60^\circ}{3} = \sin^2 30^\circ$

۸) $\tan 60^\circ = \dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30}$

۹) $2\sin 60^\circ \cos 60^\circ = \sin 60^\circ$

۱۰) $3\cos 30^\circ - 4\cos^3 30 = 0$

۵ تحقیق کنید رابطه‌ی $(a+b)^2 \sin^2 30^\circ - (a-b)^2 \cos^2 60^\circ = ab$ همواره یک اتحاد است.

۶ به کمک ماشین حساب بررسی کنید کدام یک از رابطه‌های زیر صحیح است.

۱) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$

۲) $\sin 15^\circ = \cos 60^\circ - \cos 45^\circ$

۳) $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ + \sin 30^\circ$

۴) $\cot 15^\circ = \cot 45^\circ - \cot 30^\circ$

۷ با استفاده از رابطه‌های زیر نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه‌ی 15° و 75° را به دست آورید.

۱) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

۲) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

۳) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

۴) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

۸ مطلوب است محاسبه‌ی سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های حاده‌ی زیر که یکی از نسبت‌های مثلثاتی آنها داده شده است:

۱) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\cos y = \dfrac{1}{3}$ ۳) $\tan w = 2$ ۴) $\cot z = \sqrt{2}$

۹ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\angle C = 90^\circ)$ مقدار بعضی از اجزای مثلث معلوم شده است. به کمک ماشین حساب جزء مجهول خواسته شده را به دست آورید.

۱) $\sin A = \dfrac{21}{43}$ و $c = 12/45$ و $a = ?$

۲) $\cos B = \dfrac{3}{5}$ و $c = 21/4$ و $a = ?$

۳) $\angle A = 32^\circ$ و $a = 46$ و $c = ?$

۴) $b = 8$ و $c = 17$ و $\cos A = ?$ و $\sin A = ?$

۱۰ اگر $\tan x = ۳$ باشد، حاصل عبارت $A = \dfrac{\sin x - ۲\cos x}{۳\cos x - ۴\sin x}$ را به دست آورید.

۱۱ اگر $\tan x = ۲$ باشد، حاصل عبارت $A = \dfrac{\sin^۴ x}{۳ + \cos^۲ x}$ را به دست آورید.

۱۲ حاصل عبارت $\dfrac{\sin^۵ x + \cos^۵ x + \sin x}{\sin^۳ x + \cos^۳ x}$ را به ازای $\tan x = ۲$ به دست آورید.

۱۳ اگر $\sin x - \cos x = \dfrac{۱}{۵}$ باشد، حاصل عبارت $A = \sin x \cos x$ را به دست آورید.

۱۴ اگر $\sin x \cos x = \dfrac{۱}{۴}$ و $۰ < x < ۹۰^\circ$ باشد، حاصل عبارت $A = \sin x + \cos x$ را به دست آورید.

۱۵ اگر $\tan x + \cot x = ۲$ و $۰ < x < ۹۰^\circ$ باشد، حاصل عبارت $A = \sin x + \cos x$ را به دست آورید.

۱۶ اگر $\tan\alpha + \cot\alpha = ۳$ باشد، مقدار $\tan^۴\alpha + \cot^۴\alpha$ را حساب کنید.

۱۷ اگر $\dfrac{۱}{\cos\alpha} - \tan\alpha = ۲$ باشد، حاصل $\dfrac{۱}{\cos\alpha} + \tan\alpha$ را به دست آورید.

۱۸ اگر $۰ < x < ۹۰^\circ$ و $\sin^۲ x + ۲\sin x \cos x - ۳\cos^۲ x = ۱$ مقدار $\tan x$ را محاسبه کنید.

۱۹ اگر $۰ < \alpha < ۹۰^\circ$ و $\cos\alpha = \dfrac{m^۲ - ۱}{m^۲ + ۱}$ و $(m > ۱)$ باشد، مقدار $\sin\alpha$، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ را برحسب m محاسبه کنید.

۲۰ تحقیق کنید تساوی‌های $\sin\alpha = \dfrac{۲m}{۱ + m^۲}$ و $\cos\alpha = \dfrac{۱ - m^۲}{۱ + m^۲}$ به ازای هر عدد حقیقی m درست هستند.

۲۱ اگر $\tan x = \dfrac{m + ۱}{m}$ و $\cos x = \dfrac{m}{m + ۲}$ باشد، مقدار m را حساب کنید.

۲۲ اگر $۰ < x < ۹۰^\circ$، $\tan x = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳} m$ ، $\cot x = \dfrac{۳(m - \sqrt{۳})}{m}$ و $m > ۰$ باشد، مقدار عددی $\cos x$ را تعیین کنید.

۲۳ اگر $\cos x = ۲a + b$ و $۲b + \sin x = a$ باشد، چه رابطه‌ای بین a و b وجود دارد؟

۲۴ اگر $\sin\alpha = \dfrac{a - ۱}{a + ۱}$ و $\cos\theta = \dfrac{۲\sqrt{a}}{a + ۱}$ باشد، ساده‌ترین رابطه میان α و θ را به دست آورید. $(a > ۱)$

۲۵ اگر $\tan x = \dfrac{a - ۱}{b}$ و $\cot x = \dfrac{۳}{a - ۲}$ باشد، چه رابطه‌ای بین a و b بر قرار است؟

۲۶ اگر $\tan x = a - b$ و $۲\cot x - a = b$ باشد، چه رابطه‌ای بین a و b وجود دارد؟

۲۷ آیا تانژانت یک زاویه‌ی حاده همواره از سینوس آن بیشتر است؟ آیا کتانژانت یک زاویه‌ی حاده همواره از کسینوس آن بیشتر است؟

۲۸ اگر $۰ < \alpha < ۴۵^\circ$ باشد، آیا همواره $\sin\alpha$ از $\cos\alpha$ بزرگتر است؟

۲۹ اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ باشد، آیا همواره $\tan\alpha$ از $\cot\alpha$ بزرگتر است؟

۳۰ اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۶۰^\circ$ و $\cos\alpha = ۲m - ۳$ باشد، حدود m چیست؟

۳۱ اگر $۶۰^\circ < \theta \leq ۹۰^\circ$ و $\cos\theta = ۲m + ۱$ باشد، محدوده‌ی m را بیابید.

۳۲ اگر $۶۰^\circ \le \alpha \le ۳۰^\circ$ و $\sin\alpha = ۱ - ۳m$ باشد، تعیین کنید m در چه فاصله‌ای تغییر می‌کند؟

۳۳ اگر $۰ < \alpha < ۳۰^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{-m+۲}{۴}$ باشد، عدد صحیح m را مشخص کنید.

۳۴ اگر $۶۰^\circ < \theta \le ۳۰^\circ$ و $\tan\theta = \sqrt{۳}m$ باشد، محدوده‌ی m را بیابید.

۳۵ اگر $۹۰^\circ \le x \le ۰$ باشد، بیشترین و کمترین مقدار عبارتهای زیر را تعیین کنید:

۱) $۱ - ۲\cos x$

۲) $۲ + ۳\sin x$

۳) $۳ - ۴\sin^۲ x + ۲\cos^۲ x$

۴) $\sin^۲ x + ۲\sin x + ۳$

۵) $۲\cos x - \sin^۲ x + ۳$

۶) $۲\sin x - \cos^۲ x + ۵$

۳۶ عبارتهای زیر را ساده کنید:

۱) $\sin^۳ a.\cot^۳ a.\tan^۲ a.\cos^۲ a$

۲) $\sin x.\cos x.\tan x.\cot x$

۳) $\dfrac{(۱+\tan\alpha)(۱-\cot\alpha)}{(۱+\cot\alpha)(۱-\tan\alpha)}$

۴) $\cos b\left(\dfrac{۲}{\cos b} + \tan b\right)\left(\dfrac{۱}{\cos b} - ۲\tan b\right) + ۳\tan b$

۵) $\dfrac{(۱+\sin\alpha\cos\alpha)(۱-\sin\alpha\cos\alpha) - \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}{\cos^۴\alpha + \sin^۴\alpha}$

۶) $\sqrt{\sin^۴ x + ۴\cos^۲ x} + \sqrt{\cos^۴ x + ۴\sin^۲ x}$

۳۷ اگر x زاویه‌ای حاده و کمتر از ۴۵° باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را بیابید. ($|\,|$ علامت قدر مطلق است.)

$$A = \left|\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}\right| - |\tan x - \cot x|$$

۳۸ حاصل عبارت $A = \sin^۲ ۱۰^\circ + \sin^۲ ۴۰^\circ + \sin^۲ ۵۰^\circ + \sin^۲ ۸۰^\circ$ را به دست آورید.

۳۹ حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

$$A = \tan ۱^\circ \times \tan ۲^\circ \times \tan ۳^\circ \times \ldots \times \tan ۸۸^\circ \times \tan ۸۹^\circ$$

$$B = \tan ۱^\circ \times \cot ۲^\circ \times \tan ۳^\circ \times \cot ۴^\circ \times \ldots \times \cot ۸۸^\circ \times \tan ۸۹^\circ$$

۴۰ اگر A و B و C زوایای یک مثلث باشند، ثابت کنید :

$$\sin\left(A + \frac{B}{۲}\right) = \cos\left(\frac{C - A}{۲}\right)$$

۴۱ اگر $۲\sin\alpha + ۳\cos\beta = ۵$ باشد، حاصل عبارت $A = ۴\sin\alpha\cos\beta$ چقدر است؟

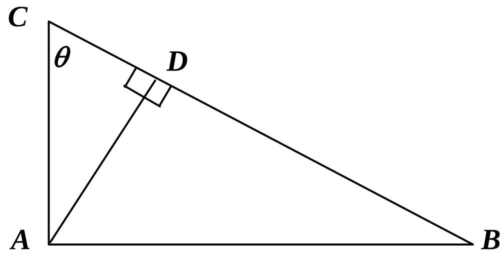
۴۲ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند، از تساوی زیر نتیجه بگیرید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

$$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) = ۱$$

تمرینات تکمیلی

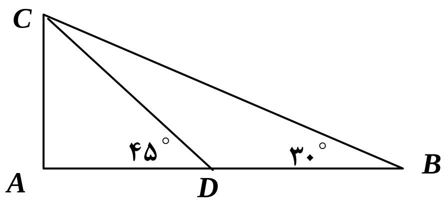
۴۳ در شکل روبه‌رو $BC = ۱۰$ و $\angle ACB = \theta$ می‌باشد.

اندازه تمام پاره خطها را بر حسب θ تعیین کنید.

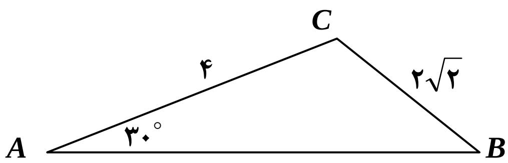


۴۴ در شکل روبه‌رو $BD = ۸(\sqrt{۳} - ۱)$ می‌باشد.

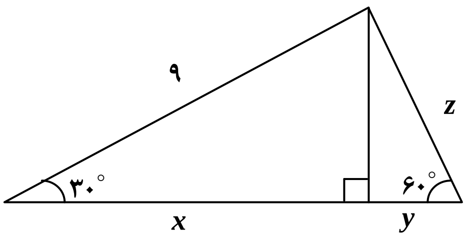
اندازه های BC و AC و CD و AB را تعیین کنید.



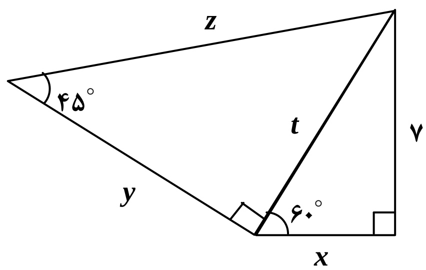
۴۵ در شکل روبه‌رو اندازه‌ی AB را تعیین کنید.



۴۶ مقادیر x و y و z را در شکل زیر به دست آورید.

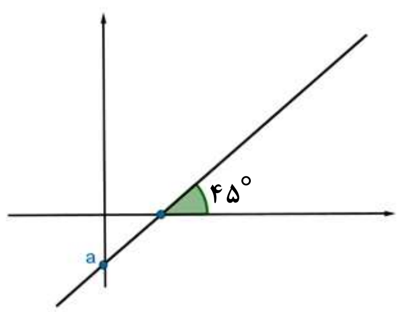


۴۷ مقادیر x و y و z و t را در شکل روبه‌رو به دست آورید.

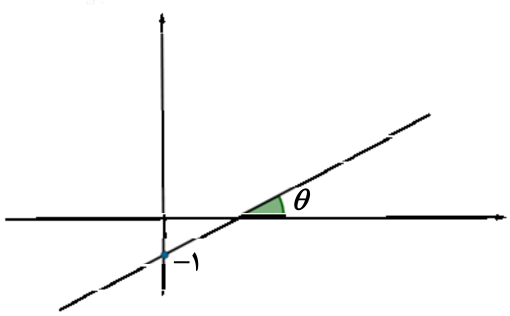


۴۸ در شکل مقابل معادله‌ی خط به صورت $۲y + bx + ۱ = ۰$ است.

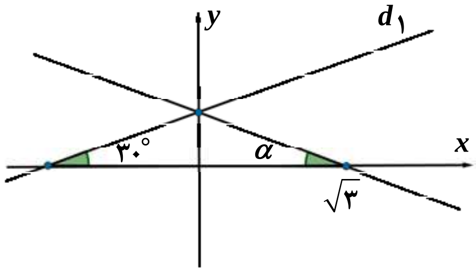
مقدار a را بیابید.



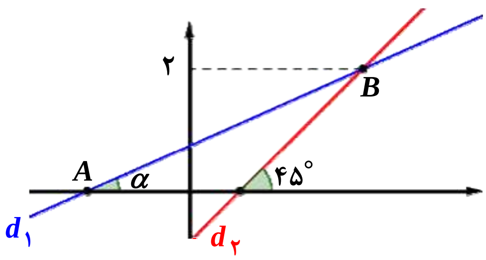
۴۹ در شکل مقابل معادله‌ی خط به صورت $x + by - \sqrt{۳} = ۰$ است. مقدار $\sin\theta$ را به دست آورید.



۵۰ در شکل مقابل معادله‌ی خط $d_۱$ به صورت $x-۳ay+۱=۰$ است. مقدار $\tan\alpha$ را به دست آورید.



۵۱ در شکل مقابل معادله‌ی خطوط به صورت $d_۱: ax-by+۲=۰$ و $d_۲: bx-۲ay+۱=۰$ می‌باشد. طول پاره‌خط AB را به دست آورید.



۵۲ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC\ (\angle C=۹۰^\circ)$ مقدار بعضی از اجزای مثلث معلوم شده است. اجزای مجهول خواسته شده را به دست آورید.

۱) $\cot A=\frac{۹}{۱۳}$ و $a=۲۶$ و $b=?$

۲) $\tan A=\frac{۳}{۴}$ و $b=۱/۶$ و $a=?$

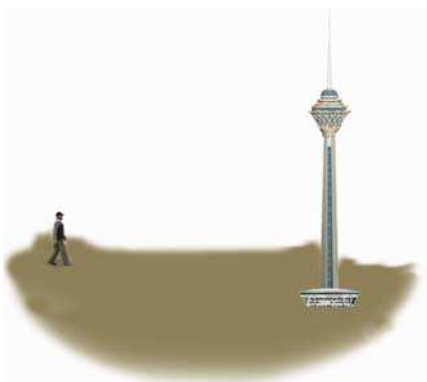
۳) $\cot B=\frac{۸}{۱۵}$ و $b=۷۵$ و $c=?$

۴) $b=۷$ و $\angle B=۴۵^\circ$ و $c=?$

۵) $\angle A=۶۰^\circ$ و $a=۱/۵$ و $c=?$, $\cot B=?$

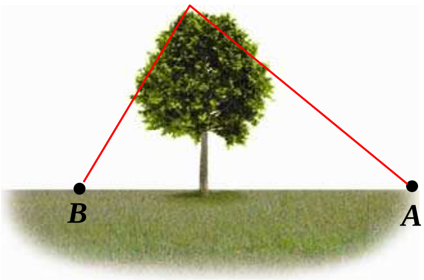
۶) $a=۸$ و $c=۱۰$ و $\tan B=?$

۵۳ از نقطه‌ای که به ارتفاع $۱/۳۶$ متر از سطح زمین قرار دارد برجی با زاویه‌ی ۲۱° قابل مشاهده است. در صورتی که فاصله‌ی این نقطه از پای برج ۴۲۰ متر باشد، ارتفاع برج را تعیین کنید. $(\tan ۲۱^\circ=۰/۳۸)$

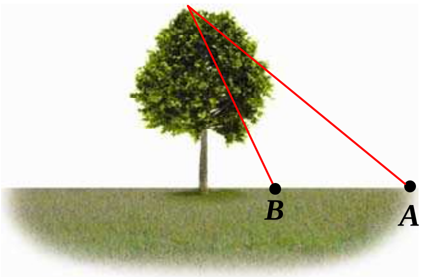


۵۴ دو شخص که در دو طرف یک ساختمان ایستاده‌اند، بالاترین نقطه‌ی ساختمانی به ارتفاع ۲۰ متر را با زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° می‌بینند. اگر این دو شخص هم قد باشند، فاصله‌ی آنها از یکدیگر چقدر است؟ $(\sqrt{۳}=۱/۷)$

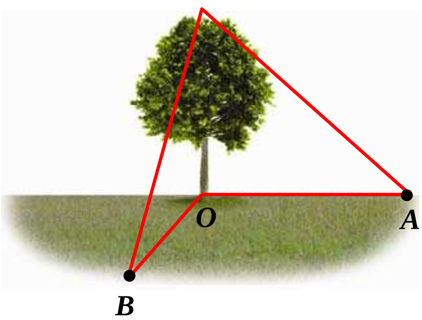
۵۵ فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B که در سطح زمین قرار دارند ۱۰۰ متر است. درختی که پای آن بین این دو نقطه قرار دارد از نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۳۰° و از نقطه‌ی B با زاویه‌ی ۶۰° دیده می‌شود. ارتفاع درخت را بیابید.



۵۶ فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B که در سطح زمین قرار دارند ۲۱ متر است. درختی که پای آن در یک طرف این دو نقطه قرار دارد از نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۳۰° و از نقطه‌ی B با زاویه‌ی ۴۵° دیده می‌شود. ارتفاع درخت را بیابید.($\sqrt{۳} = ۱/۷$)



۵۷ در شکل مقابل فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B برابر ۱۰ متر است. درخت از نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۶۰° و از نقطه‌ی B با زاویه‌ی ۴۵° دیده می‌شود. در صورتی که زاویه‌ی AOB قائمه باشد، ارتفاع درخت را بیابید.



۵۸ در بالای ساختمانی به ارتفاع ۲۰ متر یک آنتن مخابراتی نصب شده است. از نقطه‌ی A واقع بر سطح زمین ساختمان با زاویه ۳۰° و بالای آنتن با زاویه‌ی ۶۰° دیده می شود. طول آنتن چند متر است؟

۵۹ قد شخصی ۱۸۰ سانتی‌متر است. این شخص در فاصله‌ی ۱۶۵ سانتی‌متری از تیر چراغ برقی ایستاده است. اگر طول سایه این شخص ۱۳۵ سانتی‌متر باشد، ارتفاع تیر چراغ برق چقدر است؟

۶۰ شخصی مقابل یک تابلو به طول ۳ متر که روی دیوار نصب شده است ایستاده است. اگر این شخص بدون اینکه سر خود را تکان دهد به تابلو نگاه کند و بالاترین قسمت تابلو را با زاویه‌ی ۳۰° و پایین ترین قسمت تابلو را با زاویه‌ی ۶۰° ببیند، فاصله‌ی شخص تا تابلو چند سانتی‌متر است؟