بسم الله الرحمن الرحیم

برگی از درخت المپیاد ریاضی

معادلات تابعی

مؤلف:

محمد جعفری

انتشارات خوش‌خوان

تقدیم به:

مادربزرگ عزیزم

که مهرشان نامتناهیست

پیشگفتار ناشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در باور کردن و شکفتن استعداد دانش‌آموزدن ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند.

کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود خصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق‌تعالی و به کمک آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نمایند. امید است مورد پسند و استفاده‌ی دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

پیشگفتار مؤلف

به نام یزادن پاک

دل هر ذره را که بشکافی — آفتابیش در میان بینی

چرا این کتاب را نوشتم؟

از سال ۸۴ که به تدریس جبر در المپیاد ریاضی پرداختم، خلاء کتابی در زمینه‌ی معادلات تابعی را احساس کردم. از همان زمان شروع به گردآوری و همچنین طرح سؤالاتی در زمینه‌ی معادلات تابعی کردم (می‌توانید این سؤالات تالیفی را در سایت *www.mathlinks.ro* و یا در کانال تلگرامی *@jabr360* ملاحظه نمایید). در نهایت با نوشتن این کتاب سعی کردم این خلا را در حد امکان پر کنم.

نحوه‌ی مطالعه‌ی سه بخش اصلی کتاب

آشنایی با توابع (ساده):

در این بخش سعی شده مفاهیمی از تابع که در حل معادلات تابعی با آنها روبه‌رو می‌شوید مطرح شود. پیشنهاد می‌کنم قبل از شروع این فصل یک آشنایی مقدماتی با تابع داشته باشید (مثلاً می‌توانید فصل تابع کتاب ریاضی دهم را مطالعه نمایید).

روش‌های کلاسیک در حل معادلات تابعی (متوسط):

در این قسمت ایده‌های اصلی و پر تکرار در حل معادلات تابعی مطرح شده است. در هر فصل ابتدا با مثال‌های درسنامه روبه‌رو می‌شوید و سپس با قسمت تمرینات آن فصل مواجه خواهید شد. تمرینات علامت‌دار (دایره سیاه) را حتماً حل نمایید و بعد به سراغ فصل بعدی بروید (سایر تمرینات مستحبی هستند). در این بخش قبل از دیدن راه‌حل مثال های درسنامه لازم است حداقل نیم‌ساعت روی هر کدام از آنها فکر کنید. در انتهای این بخش با مسایلی برای حل (۱) روبه‌رو می‌شوید که جهت تمرین بیشتر و ورزیده شدن شما در حل مسئله آورده شده است.

روش‌های غیرکلاسیک در حل معادلات تابعی (پیشرفته):

در این قسمت با ایده‌ها و تکنیک‌هایی آشنا می‌شوید که طی سال‌های گذشته در ویدیوهای دوره (مرحله‌ی سوم) و یا کلاس‌های دوره‌ی طلا و تیم مطرح نموده‌ام، پیشنهاد می‌کنم در حل مسایل این بخش کمی با حوصله‌تر باشید و اگر خواستید سراغ راه‌حل سؤالی بروید حداقل یک ساعت روی آن مسئله فکر کرده باشید.

پیشنهاد می‌کنم قسمت آشنایی با توابع و روش‌های کلاسیک را در سال دهم و روش‌های غیرکلاسیک را در سال یازدهم مطالعه بفرمایید. اما اگر زمان کافی ندارید، مباحث آشنایی با توابع از روش‌های کلاسیک معادلات تک متغیره، مقدارگذاری‌های اولیه در معادلات چند متغیره، مقدارگذاری تقارنی، مقدارگذاری حذفی، مقدارگذاری دوگانه، توابع یک به یک، پوشا بودن توابع، استفاده از استقرا، توابع کوشی و از روش‌های غیرکلاسیک به‌دست آوردن $f(0)$ و $f(1)$، یک به یک بودن توابع، پوشا بودن عبارت‌های جبری، متناوب بودن توابع، توابع شبه متناوب، استفاده از ساختار تابع و استفاده از تقارن عبارت‌های جبری را در اولویت بگذارید.

تشکر و قدردانی

در نهایت از استاد حاجی‌زاده و آقای وزیرزاده که در زمینه‌ی چاپ کتاب و از آقای صادقی و آقای کاظمی که در زمینه‌ی علمی بنده را یاری نمودند تشکر می‌نمایم. همچنین از تمام دانش‌آموزان عزیزم که من را در ویرایش این کتاب یاری نمودند سپاسگزارم.

از شما مخاطبان محترم تقاضا دارم پیشنهادات و نظرات اصلاحی خود را از طریق پست الکترونیکی *mohamad.jafari66@yahoo.com* به اینجانب منتقل سازید.

محمد جعفری - زمستان ۹۶

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

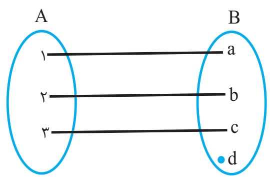
آشنایی با توابع (*)

مفهوم تابع

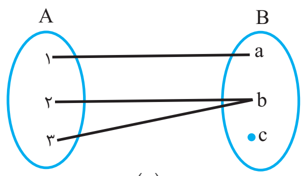
تابع $f: A \to B$ (تابع f از مجموعه A به مجموعه B تعریف شده)، رابطه‌ای است که هر عضو مجموعه A را به تنها یک عضو مجموعه‌ی B نسبت می‌دهد.

مجموعه‌ی A را دامنه‌ی f گویند.

(یعنی f فقط برای مقادیر متعلق به مجموعه‌ی A تعریف شده است.)



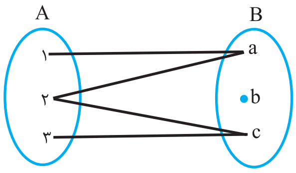
(الف)



(ب)

(*) لطفاً قبل از پرداختن به محتوی کتاب به نحوه‌ی مطالعه‌ی کتاب در مقدمه بپردازید.

۲ آموزش معادلات تابعی



مثال ۱ **آیا $f:A\to B$ مطابق شکل زیر می‌تواند تابع باشد؟**

حل: خیر. زیرا $f(۲)=a$ و $f(۲)=c$ می‌باشد که با تعریف تابع مغایرت دارد.

تمرین ۱. در کدام یک از حالت‌های زیر، رابطه‌ی $f:R\to R$ تابع می‌باشد.

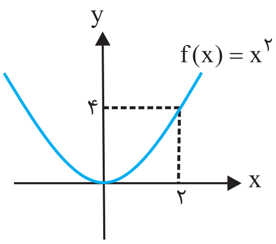
الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ب) $f(x)^{۲}=x$ ج) $f(x)^{۳}=x$

د) $f(x)^{۳}=x^{۲}$ هـ) $f(x^{۲})=x$

نمودار تابع

تابع $f(x)$ را می‌توان روی صفحه‌ی $x-y$ نمایش داد، به‌طوری‌که محور y ها بیانگر مقادیر $f(x)$ باشد.

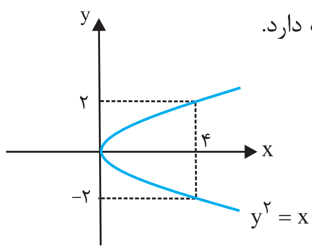
به عنوان مثال داریم:



بنابر تعریف تابع می‌توان نتیجه گرفت هر خط موازی محور y ها می‌تواند حداکثر یکبار نمودار تابع را قطع کند.

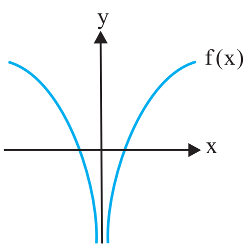
مثلاً نمودار $y^{۲}=x$ که در شکل مقابل نمایش داده شده است نمی‌تواند بیانگر یک تابع باشد.

زیرا $y^{۲}=۴$ ما را به دو جواب $y=۲$ و $y=-۲$ می‌رساند. که با تعریف تابع مغایرت دارد.



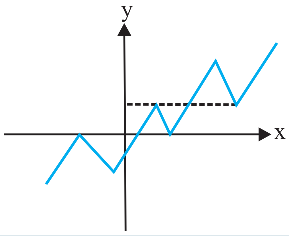
مثال ۲ **آیا تابع $f:R-\{۰\}\to R$ وجود دارد که به ازای هر عدد حقیقی y، معادله‌ی $f(x)=y$ دقیقاً دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد؟ (یعنی اگر تابع را در صفحه‌ی $x-y$ رسم کنیم، هر خط موازی محور x ها دقیقاً دو بار نمودار تابع را قطع کند.)**

حل: چنین تابعی وجود دارد. به عنوان مثال داریم:



تمرین ۲. آیا تابع $f:R\to R$ وجود دارد که به ازای هر عدد حقیقی y، معادله‌ی $f(x)=y$ دقیقاً سه ریشه‌ی حقیقی داشته باشد؟ (یعنی اگر تابع را در صفحه‌ی $x-y$ رسم کنیم، هر خط موازی محور xها دقیقاً سه بار نمودار تابع را قطع کند.)

راهنمایی: با کمی دقت می‌توانید به تابع مقابل برسید:



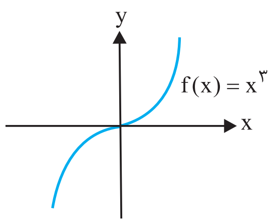
تابع یک به یک

در تابع $f:A\to B$ اگر به ازای هر x و y عضو A که $f(x)=f(y)$ باشد، بتوان نتیجه گرفت $y=x$، تابع f یک به یک خواهد بود.

$f(x)$ یک به یک است $\Rightarrow f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

به عبارت دیگر نمودار تابع f باید هر خط موازی محور xها را حداکثر یکبار قطع کند.

به عنوان مثال تابع $f(x)=x^۳$ یک به یک است.



مثال ۳ آیا تابع $f:R\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲$ یک به یک است؟

حل: این تابع یک به یک نیست. از آنجا که $f(۲)=۴$ و $f(-۲)=۴$، پس $f(۲)=f(-۲)$ در صورتی که $۲\neq -۲$. پس f یک به یک نیست.

مثال ٤ آیا تابع $f:R\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=۲x^۳+x$ یک به یک است؟

حل: اگر $f(x)=f(y)$ باشد، داریم:

$$۲x^۳+x=۲y^۳+y \Leftrightarrow ۲(x^۳-y^۳)=y-x \qquad : \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow ۲(x-y)(x^۲+xy+y^۲)=y-x$$

$$\Leftrightarrow x^۲+xy+y^۲=-\frac{۱}{۲}$$

اما از آن‌جا که $x^۲+xy+y^۲=\frac{۱}{۲}\left[(x+y)^۲+x^۲+y^۲\right]\geq ۰$ پس معادله‌ی $x^۲+xy+y^۲=-\frac{۱}{۲}$ جواب حقیقی ندارد. و برای درست بودن * باید $x=y$ باشد. یعنی تابع مورد نظر یک به یک است.

تمرین ۳. تابع $f:R\to R$ یک به یک است. یک به یک بودن توابع $۲f(x)$، $f(۲x)$، $f(x)+۱$، $f(x)+x$، $f(x)^۳$، $f(x)+f(x)^۳$ را بررسی نمایید.

راهنمایی: با آوردن مثال نقض نشان دهید $f(x)+x$ لزوماً یک به یک نیست. برای سایر توابع اثبات کنید آن‌ها یک به یک هستند.

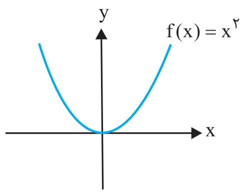
تمرین ٤. **توابع** $f,g:R\to R$ **یک به یک هستند. آیا توابع** $f(g)+g(x)$ ، $f(x).g(x)$ **و** $f(g(x))$ **لزوماً یک به یک هستند؟**

تابع پوشا

تابع $f:A\to B$ را پوشا گوییم، هرگاه f بتواند هر مقدار متعلق به B را تولید کند:

$$\forall\ y\in B, \exists\ x\in A;\ f(x)=y \quad (*)$$

به عنوان مثال تابع $f:R\to R^{+}\cup\{0\}$ که $f(x)=x^{2}$ است پوشا است. زیرا $f(x)$ تمام مقادیر مثبت و صفر را تولید می‌کند. ($f(x)$ تمام مقادیر $R^{+}\cup\{0\}$ را تولید کرده)



اما تابع $f:R\to R$ که $f(x)=x^{2}$ است پوشا نیست! زیرا $f(x)$ نمی‌تواند کل R را تولید کند (چون $f(x)$ مقادیر منفی را تولید نمی‌کند.)

مثال ٥ **اگر** $f:R\to R$ **تابعی پوشا باشد، ثابت کنید** $f(f(x))$ **نیز تابعی پوشا است.**

حل: از آنجا که $f(x)$ پوشا است. بنابراین متغیر $f(x)=A$ نیز تمام مقادیر حقیقی را تولید می‌کند. حال برای اثبات حکم مسئله باید بگوییم $f(A)$ پوشا است. از آنجا که A تمام مقادیر حقیقی را تولید می‌کند و f پوشا است، پس $f(A)$ پوشا است.

تمرین ٥. **تابع** $f:R\to R$ **پوشا است. در مورد پوشا بودن توابع** $kf(x)$ ، $f(kx)$ **و** $f(x)+k$ **چه می‌توان گفت؟**

تمرین ٦. **توابع** $g:R\to R$ **و** f **پوشا هستند. آیا تابع** $f(x)+g(x)$ **نیز پوشا خواهد بود؟**

راهنمایی: خیر. اگر $f(x)=x$ و $g(x)=-x$ باشد، آنگاه $f(x)+g(x)=0$ پوشا نخواهد بود.

تمرین ٧. **توابع** $f,g:R\to R$ **پوشا هستند. آیا** $f(x).g(x)$ **نیز پوشا است؟**

تمرین ٨. **ثابت کنید تابع** $f:R\to R$ **که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند پوشا است؟**

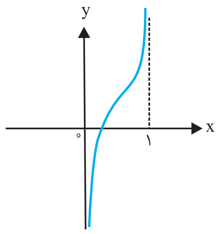
$$f(x+f(f(y)))=x+f(y) \qquad (\forall x,y\in R)$$

راهنمایی: می‌دانیم $f(\underbrace{x+f(f(y))}_{A})=\underbrace{x+f(y)}_{B}$. حال برای آنکه ثابت کنیم $f(A)$ پوشا است باید بگوییم عبارت $B=x+f(y)$ پوشا است. حال y را مقدار ثابتی قرار دهید و x را از بینهایت مثبت تا بینهایت منفی تغییر دهید و نتیجه بگیرید عبارت $B=x+c$ پوشا است.

(*) در این کتاب با دو نماد ریاضی $\forall$ و $\exists$ زیاد روبه‌رو خواهید شد. نماد « $\forall$ » به معنی « به ازای هر» می‌باشد. مثلاً « $\forall x\in R$ » یعنی « به ازای هر x عضو R». همچنین « $\exists$ » به معنی «وجود دارد» است. مثلاً « $\exists x\in R$ » به معنی «وجود دارد x عضو R» می‌باشد. و « $\nexists x\in R$ » به معنی «وجود ندارد x عضو R» می‌باشد.

مثال ۶ **آیا تابع $f:(0,1)\to R$ می‌تواند پوشا باشد؟**

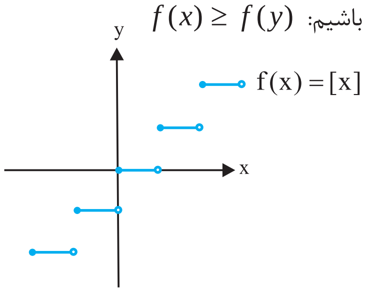
حل: بله. تابع $f(x)$ در شکل مقابل پوشا است.



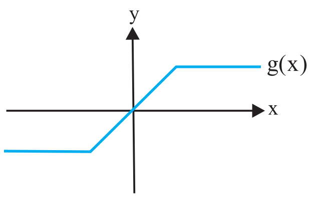
تابع صعودی

تابع $f:A\to B$ را صعودی گوییم اگر به ازای هر $x\geq y$ $(x,y\in A)$ داشته باشیم: $f(x)\geq f(y)$

مطابق شکل مقابل تابع $f(x)=[x]$ تابعی صعودی است.



همچنین تابع $g:R\to R$ نیز صعودی می‌باشد.



مثال ۷ **ثابت کنید تابع $f:R\to R$ که $f(x)=x^3+x$ تابعی صعودی است.**

حل: اگر $x\geq y$ باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq y \\ x^3\geq y^3 \end{array}\right\}\Rightarrow x+x^3\geq y+y^3\Rightarrow f(x)\geq f(y)$$

بنابراین f تابعی صعودی است.

مثال ۸ **اگر تابع $f:R\to R$ صعودی باشد، ثابت کنید $f(f(x))$ نیز صعودی است.**

حل: اگر $x\geq y$ باشد، آن‌گاه $f(x)\geq f(y)$ است و نتیجه می‌گیریم $f(f(x))\geq f(f(y))$ پس با فرض $x\geq y$ نتیجه گرفتیم $f(f(x))\geq f(f(y))$، یعنی $f(f(x))$ صعودی است.

تمرین ۹. اگر توابع $g:R\to R$ و f صعودی باشند، ثابت کنید $f(g(x))$ نیز صعودی است.

راهنمایی: اگر $x\geq y$ باشد، بنابر صعودی بودن $g(x)$ داریم $g(x)\geq g(y)$ از طرف دیگر f نیز صعودی است، پس از این‌که $g(x)\geq g(y)$ می‌توان نتیجه گرفت $f(g(x))\geq f(g(y))$

چون با فرض $x\geq y$ نتیجه گرفتیم $f(g(x))\geq f(g(y))$ پس تابع $f(g(x))$ صعودی است.

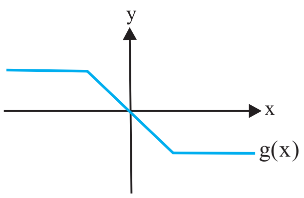
تمرین ۱۰. تمام توابع صعودی $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم:

$$f(f(x))=1-x$$

راهنمایی: از این‌که $f(f(x))$ تابعی صعودی است ولی $1-x$ نمی‌تواند صعودی باشد، استفاده نمایید و بگویید چنین تابعی نداریم.

تابع نزولی

تابع $f:A\to B$ را نزولی گوییم، اگر به ازای هر $(x,y\in A)$ $x\geq y$ داشته باشیم: $f(x)\leq f(y)$ به عنوان مثال تابع $g:R\to R$ نزولی است.



مثال ۹ ثابت کنید تابع $f:R\to R$ که $f(x)=-x^3-2x$ تابعی نزولی است.

حل: اگر $x\geq y$ باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l}-2x\leq -2y\\ -x^3\leq -y^3\end{array}\right\}\Rightarrow -2x-x^3\leq -2y-y^3\Rightarrow f(x)\leq f(y)$$

بنابراین f تابعی نزولی است.

مثال ۱۰ اگر $f:R\to R$ تابعی نزولی باشد ثابت کنید $f(f(x))$ تابعی صعودی است.

حل: اگر $x\geq y$ باشد با توجه به نزولی بودن f داریم: $f(x)\leq f(y)$

چون f تابعی نزولی است از $f(x)\leq f(y)$ نتیجه می‌گیریم $f(f(x))\geq f(f(y))$

از آن‌جا که با فرض $x\geq y$ نتیجه گرفتیم $f(f(x))\geq f(f(y))$، پس تابع $f(f(x))$ صعودی است.

تمرین ۱۱. اگر $f:R\to R$ تابعی نزولی باشد، ثابت کنید $f(f(f(x)))$ تابعی نزولی است.

مثال ۱۱ توابع $f\,,\,g:R\to R$ مفروض‌اند. به گونه‌ای که f صعودی و g نزولی است. ثابت کنید $f(g(x))$ تابعی نزولی است.

حل: اگر $x\geq y$ باشد با توجه به نزولی بودن g داریم: $g(x)\leq g(y)$ از طرف دیگر با توجه به صعودی بودن f و اینکه $g(x)\leq g(y)$ داریم: $f(g(x))\leq f(g(y))$ بنابراین $f(g(x))$ تابعی نزولی است.

تمرین ۱۲. تمام توابع نزولی $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم:

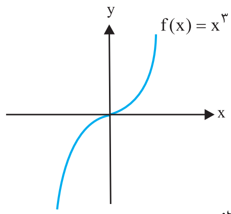
$$f(f(x))=1-x$$

راهنمایی: از این‌که $f(f(x))$ تابعی صعودی و تابع $1-x$ نزولی است استفاده نمایید و بگویید چنین تابعی نداریم.

تابع اکیداً صعودی

تابع $f:A\to B$ را اکیداً صعودی گوییم، اگر به ازای هر $(x,y\in A)$ $x>y$ داشته باشیم: $f(x)>f(y)$

مطابق شکل تابع $f(x)=x^{۳}$ تابعی اکیداً صعودی است.



همچنین توابع $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$ به ازای $x\in(۰,\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی می‌باشند.

مثال ۱۲ **ثابت کنید توابع صعودی و یک به یک، اکیداً صعودی نیز هستند.**

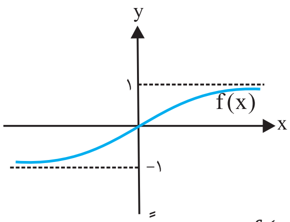
حل: با فرض $x>y$ و بنابر صعودی بودن تابع $f(x)$ داریم:

$$x>y\Rightarrow f(x)\geq f(y)$$

از طرفی بنابر یک به یک بودن f با فرض $x>y$ می‌توان گفت $f(x)\neq f(y)$. پس داریم:

$$x>y\Rightarrow f(x)>f(y)$$

مثال ۱۳ **آیا تابع اکیداً صعودی $f:R\to R$ قطعاً پوشا است؟**



حل: خیر. به عنوان مثال تابع اکیداً صعودی زیر پوشا نیست. تابع اکیداً صعودی $f(x)$ در مثبت و منفی بینهایت به ترتیب به ۱+ و ۱- میل می‌کند، پس پوشا نیست!

مثال ۱۴ **توابع اکیداً صعودی $f\,,\,g:R^{+}\to R^{+}$ مفروض‌اند. آیا تابع $f(x).g(x)$ نیز اکیداً صعودی است.**

حل: بله. اگر $x>y$ باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)>f(y) \\ g(x)>g(y)\end{array}\right\}\Rightarrow f(x).g(x)>f(y).g(y)$$

به این نکته دقت کنید که با توجه به مثبت بودن مقادیر $g(x), f(x)$ توانستیم طرفین نا برابرها را درهم ضرب کنیم.

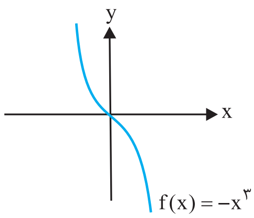
تمرین ۱۳. **توابع اکیداً صعودی $f\,,\,g:R\to R$ مفروض‌اند. آیا تابع $f(x).g(x)$ نیز اکیداً صعودی است؟**

راهنمایی: خیر. به عنوان مثال اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x$ باشد، آنگاه $f(x).g(x)=۲x^{۲}$ اکیداً صعودی نیست!

تمرین ۱۴. **توابع اکیداً صعودی $f\,,\,g:R^{+}\to R^{+}$ مفروض هستند. آیا تابع $f(x).g(x)$ نیز اکیداً صعودی است؟**

تابع اکیداً نزولی

تابع $f:A\to B$ را اکیداً نزولی گوییم، اگر به ازای هر $(x,y\in A)$ $x>y$ داشته باشیم: $f(x)<f(y)$

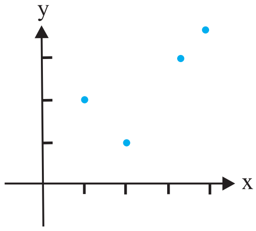


مطابق شکل تابع $f(x)=-x^{۳}$ تابعی اکیداً نزولی است.

همچنین توابع $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\cot x$ به ازای $x\in(۰,\frac{\pi}{۲})$ اکیداً نزولی می‌باشند.

مثال ۱۵ **آیا هر تابع یک به یک اجباراً اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است؟**

حل: خیر. به عنوان مثال تابع زیر یک به یک است اما اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نمی‌باشد.

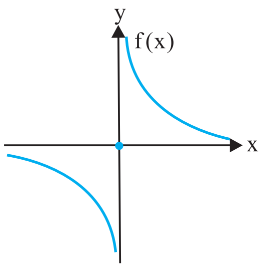


$$f(n)=\begin{cases} ۲ & n=۱ \\ ۱ & n=۲ \\ n & n\in\{۳,۴,...\} \end{cases}$$

حال می‌توانید به این فکر کنید که آیا تابع یک به یک $f:R\to R$ ، اجباراً اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است؟ پاسخ منفی است. سعی کنید مثالی بیابید!

مثال ۱۶ **اگر تابع $f:R\to R$ در بازه‌ی $(۰,\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ نیز اکیداً نزولی باشد، آیا f تابعی لزوماً اکیداً نزولی است؟**

حل: خیر. به عنوان مثال تابع زیر به ازای مقادیر $(۰,\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ نیز اکیداً نزولی است، اما f در $(-\infty,\infty)$ اکیداً نزولی نیست.



تابع متناوب

تابع $f:A\to B$ را متناوب گوییم، هرگاه دوره تناوب حقیقی $T\neq ۰$ وجود داشته باشد که:

$$f(x)=f(x+T) \qquad \forall x\in A \quad (\text{به طوری که } x+T\in A \text{ باشد})$$

به عنوان مثال توابع $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ همگی دارای دوره تناوب $T=۲\pi$ هستند.

تمرین ۱۵. **اگر Tدوره‌ی تناوب تابع $f:R\to R$ باشد، نشان دهید به ازای هر n طبیعی مقدار nT نیز دوره‌ی تناوب آن است؟**

مثال ۱۷ **کوچک‌ترین دوره تناوب تابع $f(x)=\sin ۲x$ را بیابید.**

حل: می‌دانیم اگر T کوچک‌ترین دوره تناوب برای $f(x)$ باشد $۲T$ نیز دوره تناوبی از $f(x)$ است(چرا؟)

حدس می‌زنیم $T=\pi$ دوره تناوب $f(x)$ است(به سادگی این مسئله را بررسی نمایید.)

حال با توجه به این‌که $T=\frac{\pi}{۲}$ دوره تناوب نیست، پس همان $T=\pi$ کم‌ترین دوره تناوب است.

تمرین ۱۶. **کوچک‌ترین دوره تناوب تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ را بیابید.**

راهنمایی: $T=\pi$ کم‌ترین دوره تناوب می‌باشد.

مثال ۱۸ **آیا تابع متناوب می‌تواند پوشا باشد؟**

حل: بله. مثلاً $f(x)=tan x$ پوشا و متناوب است.

تمرین ۱۷. **تابع $f:R\to R$ متناوب است. متناوب بودن توابع $f(۲x)$ ، $f(x)+۲$ ، $۲f(x)$ و $f(x)^۲$ را بررسی نمایید.**

مثال ۱۹ **آیا هر تابع متناوب دارای کوچک‌ترین دوره تناوب است؟**

حل: خیر. به عنوان مثال تابع ثابت $f(x)=۰$ دارای کوچک‌ترین دوره تناوب نمی‌باشد.

مثال ۲۰ **آیا تابع غیر ثابت وجود دارد که هر عدد گویا و ناصفر دوره تناوب آن باشد؟**

حل: بله. تابع زیر دارای خاصیت موردنظر می‌باشد(چرا؟)

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x\in Q\\ ۰ & x\notin Q\end{cases}$$

تمرین ۱۸. **آیا تابع غیر ثابت $f:R\to R$ داریم که هم صعودی و هم متناوب باشد؟**

تمرین ۱۹. **آیا تابع متناوب $f:R\to R$ وجود دارد که داشته باشیم:** $f(x)\geq x \qquad (\forall x\in R)$

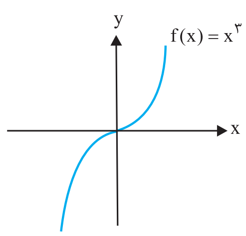
راهنمایی: خیر. از این‌که $f(x)=f(x+nT)$ استفاده نمایید(که در آن T دوره تناوب و n هر مقدار طبیعی می‌تواند باشد)

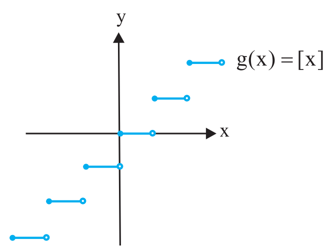
پیوستگی توابع

تابع $f:A\to B$ را در نقطه‌ی $x_۰\in A$ پیوسته گوییم هرگاه داشته باشیم: $\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=f(x_۰)$

یعنی حد راست و حد چپ تابع f (در صورت وجود!) با مقدار $f(x_۰)$ برابر باشد. حال اگر تابع $f:A\to B$ در هر نقطه‌ی $x\in A$ پیوسته باشد، آنگاه پیوسته است.

به عنوان مثال تابع $f:R\to R$ پیوسته و $g:R\to R$ در نقاط صحیح پیوستگی چپ ندارد.

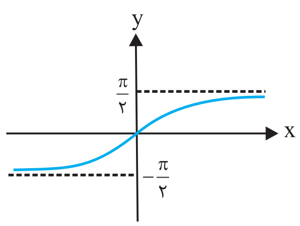




اما هدف از مطرح کردن بحث پیوستگی، آشنایی با ویژگی‌های یک تابع پیوسته و بررسی رفتار ظاهری نمودار آن است. جهت آشنایی با این مهم به چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲۱ **آیا تابع پیوسته و اکیداً صعودی $f:R\to R$ لزوماً پوشا است؟**

حل: خیر. به عنوان مثال تابع پیوسته و اکیداً صعودی مقابل پوشا نیست.



بنابراین تابع پیوسته و اکیداً یکنوا لزوماً پوشا نیست.

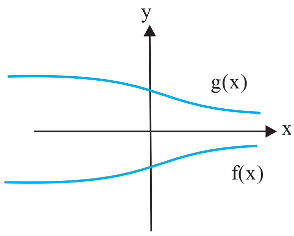
مثال ۲۲ **اگر $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی و پوشا باشد و $g(x)$ پوشا و اکیداً صعودی باشد، ثابت کنید تابع $f(x)+g(x)$ هم پوشا و هم اکیداً صعودی است. (توابع $f\ ,\ g:R\to R$ پیوسته‌اند.)**

حل: می‌دانیم مجموع دو تابع پیوسته، تابعی پیوسته است (چرا؟) و مجموع دو تابع اکیداً صعودی نیز تابعی اکیداً صعودی است. اما چون g , f پوشا هستند داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+g(x)]=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$ $f(x)+g(x)$ تابعی پوشا است

پس $f(x)+g(x)$ تابعی اکیداً صعودی و پوشا است.

مثال ۲۳ اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی و تابع $g(x)$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد، آیا معادله‌ی $f(x)=g(x)$ لزوماً جواب دارد.



حل: خیر. مطابق شکل زیر دو تابع $f(x)$ (پیوسته و اکیداً صعودی) و $g(x)$ (پیوسته و اکیداً نزولی) هیچگاه با یکدیگر برابر نمی‌شوند.

اما اگر یکی از توابع f یا g شرط پوشا بودن را داشت معادله‌ی موردنظر $(f(x)=g(x))$ دقیقاً یک ریشه داشت. زیرا $f(x)-g(x)$ تابعی پیوسته، اکیداً صعودی و پوشا خواهد بود که دقیقاً یک ریشه خواهد داشت.

نتیجه: اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی و $g(x)$ تابعی اکیداً نزولی، پیوسته و پوشا باشد، آنگاه معادله‌ی $f(x)=g(x)$ دقیقاً یک ریشه خواهد داشت.

یکی دیگر از تأثیرات مهم پیوستگی را می‌توان در رفتار نمودار توابع یک به یک دید. زیرا تابع پیوسته‌ای که یک به یک باشد، قطعاً اکیداً یکنوا خواهد بود(چرا؟ آیا توابع غیر پیوسته و یک به یک لزوماً اکیداً یکنوا هستند؟)

مثال ۲۴ تمام توابع پیوسته‌ی $f:R^+\to R^+$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی و مثبت داشته باشیم:

$$f(f(x))=\frac{1}{x}$$

حل: تابع $f(x)$ یک به یک است. زیرا اگر $f(x_1)=f(x_2)$ باشد داریم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

پس f تابعی یک به یک و پیوسته است پس اکیداً یکنوا است. اما تابع f چه اکیداً صعودی و چه اکیداً نزولی باشد، $f(f(x))$ قطعاً اکیداً صعودی خواهد بود. از طرفی $\frac{1}{x}$ به ازای مقادیر $x\in R^+$ اکیداً نزولی است. بنابراین معادله‌ی $f(f(x))=\frac{1}{x}$ جواب ندارد.

مثال ۲۵ آیا تابع پیوسته‌ی $f:R\to R$ وجود دارد که:

$$f(x)=\begin{cases}\text{عدد گنگ} & x\in Q\\ \text{عدد گویا} & x\notin Q\end{cases}$$

حل: اگر تابع $f(x)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $g(x)=f(x)+x$ نیز پیوسته خواهد بود (زیرا مجموع دو تابع پیوسته، همواره پیوسته خواهد بود.)از طرفی چون مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است، داریم:

$$g(x)=\begin{cases}\text{عدد گنگ} & x\in Q\\ \text{عدد گنگ} & x\notin Q\end{cases}$$

اما تابع غیرثابت $g(x)$ نمی‌تواند پیوسته باشد(چرا؟)، پس تابع پیوسته $f(x)$ با شرایط مسئله وجود ندارد.

به عنوان تمرین حالتی که $g(x)=c$ و $f(x)=-x+c$ را رد نمایید.

روش‌های
کلاسیک

حل معادلات تابعی

معادلات تک متغیره (*)

اکنون می‌خواهیم به حل معادلات تابعی بپردازیم. در این معادلات هدف ما یافتن $f(x)$ بر حسب x است. یعنی $f(x)$ مجهول ما است که قرار است بر حسب x به‌دست آید.

مثال ۱ تمام توابع $f: R-\{1,-1\} \to R$ را بیابید که:

$$x^2 f(x) - f(-x) = x \qquad (\forall x \in R-\{1,-1\})$$

حل: فرض کنید $P(x)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(x) \quad : \quad x^2 f(x) - f(-x) = x$$

$$P(-x) \; : \; x^2 f(-x) - f(x) = -x$$

اکنون دو معادله داریم و دو مجهول ($f(x)$ و $f(-x)$ مجهول هستند)، که از حل آن داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 f(x) - f(-x) = x \\ x^2 f(-x) - f(x) = -x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 - 1} \qquad (\forall x \in R-\{1,-1\})$$

مثال ۲ تمام توابع $f: R \to R$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم:

$$x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0$$

حل: فرض کنید $P(x)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. از مقایسه‌ی $P(x)$ و $P(-x)$ نتیجه می‌گیریم $f(x) + f(-x) = 0$ است. از جایگذاری این نتیجه در $P(x)$ داریم:

$$f(x) = x \qquad (\forall x \in R)$$

(*) لطفاً قبل از شروع به مطالعه‌ی روش‌های کلاسیک به نحوه‌ی مطالعه‌ی آن در مقدمه بپردازید.

مثال ۳ **تمام توابع $f:R^+\to R^+$ را بیابید که به ازای مقدار مفروض $\alpha\in R$ داشته باشیم:**

$$\alpha x^۲ f(\frac{۱}{x})+f(x)=\frac{x}{x+۱}\quad(\forall x\in R^+)$$

حل: اگر $P(x)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، داریم:

$$P(x)\ :\ \alpha x^۲ f(\frac{۱}{x})+f(x)=\frac{x}{x+۱}$$

$$P(\frac{۱}{x})\ :\frac{\alpha}{x^۲}f(x)+f(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x+۱}$$

از حل دو معادله دو مجهول اخیر (که $f(x)$ و $f(\frac{۱}{x})$ مجهول‌های آن هستند) داریم:

$$f(x)=\frac{۱}{\alpha^۲-۱}(\frac{\alpha x^۲}{x+۱}-\frac{x}{x+۱})\qquad(\forall x\in R^+)$$

مثال ٤ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر عدد حقیقی ۱- و $x\neq ۱$ داشته باشیم:**

$$f(\frac{x-۳}{x+۱})+f(\frac{۳+x}{۱-x})=x$$

حل: اگر به جای x مقدار $\frac{x-۳}{x+۱}$ را قرار دهیم، داریم:

$$f(\frac{۳+x}{۱-x})+f(x)=\frac{x-۳}{x+۱}\qquad :(۱)$$

و اگر به جای x مقدار $\frac{x+۳}{۱-x}$ را قرار دهیم، داریم:

$$f(\frac{x-۳}{x+۱})+f(x)=\frac{x+۳}{۱-x}\qquad :(۲)$$

از معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$f(x)=\frac{x^۳+۷x}{۲(۱-x^۲)}\qquad(\forall x\neq ۱\ ,-۱)$$

مثال ۵ **تمام توابع $f:R-\{۰,۱\}\to R$ را بیابید که:**

$$f(x)+f(\frac{x-۱}{x})=۱+x\qquad(\forall x\ \in R-\{۱,۰\}\ )$$

حل: فرض کنید $P(x)$ بیانگر معادله ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(x): f(x)+f(\frac{x-۱}{x})=۱+x$$

$$P(\frac{x-۱}{x}): f(\frac{x-۱}{x})+f(\frac{۱}{۱-x})=۱+\frac{x-۱}{x}$$

$$P(\frac{۱}{۱-x}): f(\frac{۱}{۱-x})+f(x)=۱+\frac{۱}{۱-x}$$

از حل سه معادله، سه مجهول (که مجهول‌های آن $f(x)$ ، $f(\frac{۱}{۱-x})$ و $f(\frac{x-۱}{x})$ هستند) داریم:

$$f(x)=\frac{(۱+x+\frac{۱}{۱-x}-\frac{x-۱}{x})}{۲}\qquad(\forall x\in R-\{۰,۱\})$$

مثال ۶ **تمام توابع** $f:R-\{۱,۰,-۱\}\to R$ **را بیابید که:**

$$f(\frac{۱+x}{۱-x})+f(x)+f(\frac{x-۱}{x+۱})=\frac{-۱}{x}\qquad (\forall x\in R-\{۰,۱,-۱\})$$

حل: فرض کنید $P(x)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(x):\ f(\frac{۱+x}{۱-x})+f(x)+f(\frac{x-۱}{x+۱})=\frac{-۱}{x}$$

$$P(\frac{x+۱}{۱-x}):f(\frac{-۱}{x})+f(\frac{x+۱}{۱-x})+f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$$

$$P(\frac{x-۱}{x+۱}):f(x)+f(\frac{x-۱}{x+۱})+f(\frac{-۱}{x})=\frac{x+۱}{۱-x}$$

$$P(\frac{-۱}{x}):f(\frac{x-۱}{x+۱})+f(\frac{-۱}{x})+f(\frac{۱+x}{۱-x})=x$$

از حل دستگاه چهار معادله و چهار مجهول اخیر داریم:

$$f(x)=\frac{۱}{۳}(\frac{-۱}{x}+\frac{x-۱}{x+۱}+\frac{x+۱}{۱-x}-۲x)$$

مثال ۷ **تمـام توابـع** $f:R-\{۰,۱\}\to R-\{۰,۱\}$ **را بیابید که به ازای هر** x **حقیقی و مخالف ۰ و ۱ داشـته باشیم:**

$$f(x)+f(\frac{۱}{۱-x})=\frac{۲(۱-۲x)}{x(۱-x)}$$

حل: فرض کنید $P(x)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(-۱)\ \Rightarrow\ f(-۱)+f(\frac{۱}{۲})=-۳$$

$$P(\frac{۱}{۲})\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})+f(۲)=۰$$

$$P(۲)\Rightarrow f(۲)+f(-۱)=۳$$

از حل دستگاه ۳ معادله، ۳ مجهول بالا می‌توان نتیجه گرفت $f(-۱)=۰$ است. از آن‌جا که $f:R-\{۰,۱\}\to R-\{۰,۱\}$ است، بنابراین $f(-۱)=۰$ ما را به تناقض می رساند. پس چنین تابعی نداریم.

مثال ۸ **تمام توابع** $f:R\to R$ **را بیابید که به ازای هر** x **حقیقی و ناصفر داشته باشیم:**

$$f(x-\frac{۱}{x})=x^{۳}-\frac{۱}{x^{۳}}$$

حل: از آن‌جا که $x-\frac{۱}{x}$ یک عبارت پوشا است. یعنی تمام مقادیر حقیقی را تولید می‌کند (زیرا $x-\frac{۱}{x}=A$ همان $x^{۲}-Ax-۱=۰$ است که ریشه‌ی حقیقی دارد.) و می‌دانیم $x^{۳}-\frac{۱}{x^{۳}}=(x-\frac{۱}{x})^{۳}+۳(x-\frac{۱}{x})$، پس داریم:

$$f(x)=x^{۳}+۳x\qquad(\forall x\in R)$$

تمرینات

۱. فرض کنید $f:R^{+}\to R^{+}$ تابعی باشد که به ازای هر x حقیقی و مثبت در رابطه‌ی زیر صادق باشد:

$$۴f(x)+xf(\frac{۱}{x})=x+۱$$

مقدار $f(۲۰۱۴)$ را بیابید.

۲. تمام توابع $f:\mathbb{R}-\{۰,۱\}\to\mathbb{R}$ را بیابید به نحوی که داشته باشیم:

$$f(x)+f(\frac{۱}{۱-x})=۱+\frac{۱}{x(۱-x)} \qquad (\forall x\in R-\{۰,۱\})$$

۳. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی و ناصفر داشته باشیم:

$$f(\frac{۱}{x})+f(۱-x)=x$$

٤. با فرض $|a|\neq ۱$ تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم:

$$f(۱-x)+af(۱+x)=(a+۱)x^{۲}+۲(a-۱)x+۲(a+۱)$$

۵. تمام توابع $f:R-\{۰,۱\}\to R$ را بیابید که به ازای هر x حقیقی و مخالف ۰ و ۱ داشته باشیم:

$$f(x)+۲f(\frac{۱}{x})+۳f(\frac{x}{x-۱})=x$$

پاسخ تمرینات

۱. اگر معادله‌ی اصلی مسئله را در ۴ ضرب کنیم داریم:

$$۱۶f(x)+۴xf(\frac{۱}{x})=۴x+۴ \quad :(۱)$$

از طرف دیگر اگر به جای x مقدار $\frac{۱}{x}$ را در معادله‌ی اصلی مسئله جایگذاری کنیم، داریم:

$$۴xf(\frac{۱}{x})+f(x)=۱+x \quad :(۲)$$

اگر طرفین معادلات (۱) و (۲) را از هم کم کنیم، داریم:

$$۱۵f(x)=۳x+۳ \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۵}x+\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow f(۲۰۱۴)=۴۰۳$$

۲.

$$(E۱): f(x)+f(\frac{۱}{۱-x})=۱+\frac{۱}{x(۱-x)} \quad \forall x\notin\{۰,۱\}$$

$$x\to\frac{۱}{۱-x} \quad x\notin\{۰,۱\} \Rightarrow \frac{۱}{۱-x}\notin\{۰,۱\}\Rightarrow$$

$$(E۲): f(\frac{۱}{۱-x})+f(۱-\frac{۱}{x})=۳-x-\frac{۱}{x}$$

$(E۱)$ در : $x\to ۱-\frac{۱}{x}, x\notin\{۰,۱\}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{x}\notin\{۰,۱\}\Rightarrow$

$$(E۳): f(۱-\frac{۱}{x})+f(x)=۱+\frac{x^۲}{x-۱}$$

$$(E۱)+(E۳)-(E۲)\Rightarrow f(x)=x+\frac{۱}{x} \quad \forall x\notin\{۰,۱\}$$

۳. اگر $P(x)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، داریم:

$$P(\frac{۱}{x}) \quad \Rightarrow \quad f(x)+f(\frac{x-۱}{x})=\frac{۱}{x}$$

$$P(۱-x) \quad \Rightarrow \quad f(\frac{۱}{۱-x})+f(x)=۱-x$$

$$P(\frac{x}{-۱+x}) \quad \Rightarrow \quad f(\frac{x-۱}{x})+f(\frac{۱}{۱-x})=\frac{x}{x-۱}$$

اگر طرفین دو معادله‌ی اول را با قرینه‌ی معادله‌ی سوم جمع کنیم، داریم:

$$f(x)=\frac{۱}{۲x}-\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲(x-۱)}$$

مقادیر $f(۰)$ و $f(۱)$ هر مقداری می‌توانند داشته باشند:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲x}-\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲(x-۱)} & \\ a & x=۰\\ b & x=۱\end{cases}$$

۴. فرض کنید $P(x)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. از ممنونمعادلات $P(۱-x)$ و $P(x-۱)$ یک دستگاه دو معادله و دو مجهول بدست می‌آید که مجهول‌های آن $f(x)$ و $f(۲-x)$ هستند.

از حل این دستگاه $(\forall x\in R)$ $f(x)=x^۲+۱$ بدست می‌آید.

۵. فرض کنید $P(x)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد به کمک معادلات $P(x)$، $P(\frac{۱}{x})$، $P(\frac{x}{x-۱})$ و $P(\frac{۱}{۱-x})$ سعی کنید $f(x)$ را بدست آورید.

مقدارگذاری‌های اولیه در معادلات چند متغیره

یکی از ایده‌های بسیار پرکاربرد در حل معادلات تابعی این است که به جای متغیرها مقادیری بگذاریم که معادله‌ی مورد نظر را ساده‌تر نماید.

مثلاً اگر معادله‌ی تابعی دارای دو متغیر x و y باشد، بسته به شرایط مسئله می‌توان به جای y مقادیر صفر، x، $-x$، $\frac{1}{x}$، $f(x)$، x^2 و...... را قرار داد تا نتایج مطلوبی بدست آید.

اما این که چه مقدارگذاری‌هایی در حل مسئله مورد نظرتان کاربرد دارد نکته‌ای است که شما را به فکر کردن در مورد مسایل زیر وا می‌دارد.

مثال ۱ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:**

$$f(x+y)+f(x-y)=2x$$

حل: اگر مقدار $y=0$ را بگذاریم نتیجه می‌گیریم $2f(x)=2x$ است. بنابراین پاسخ مسئله $f(x)=x\ \ (\forall x\in R)$ است.

مثال ۲ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:**

$$f(xy)+f(x)=xy+x$$

حل: اگر در معادله‌ی اصلی مقدار $y=1$ را بگذاریم، داریم:

$$2f(x)=2x\Rightarrow f(x)=x \qquad (\forall x\in R)$$

مثال ۳ تمام توابع $f,g:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(xy)+g(x)=xy+x$$

حل: ابتدا $y=0$ را قرار می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم:

$$f(0)+g(x)=x\Rightarrow g(x)=x-c \quad (\text{است } c=f(0))$$

از جایگذاری نتیجه‌ی به‌دست آمده در معادله‌ی اصلی مسئله داریم:

$$f(xy)+x-c=xy+x\Rightarrow f(xy)=xy+c\Rightarrow f(x)=x+c \quad (\forall x\in R)$$

که در آن، c یک مقدار ثابت است.

مثال ۴ تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(x+y)+f(x)=2x+y$$

حل: با قرار دادن $y=-x$ داریم:

$$f(0)+f(x)=x \ : \ (1)$$

با قرار دادن $x=y=0$ در معادله‌ی اصلی مسئله داریم:

$$2f(0)=0\Rightarrow f(0)=0 \ : \ (2)$$

از قرار دادن نتیجه‌ی (۲) در نتیجه‌ی (۱) داریم:

$$f(x)=x \quad (\forall x\in R)$$

مثال ۵ تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(f(x)-y)+2f(x)=3x-y$$

حل: با قرار دادن $y=f(x)$ داریم:

$$f(0)+2f(x)=3x-f(x)$$

$$\Rightarrow 3f(x)=3x-f(0)\Rightarrow f(x)=x-\frac{f(0)}{3} \ : \ (1)$$

از جایگذاری $x=0$ در معادله‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم $f(0)=0$ است. بنابراین طبق (۱) داریم:

$$f(x)=x \quad (\forall x\in R)$$

مثال ۶ تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که برای اعداد حقیقی a، b و c داشته باشیم:

$$f(a^3)+f(b^3)+f(c^3)=f(3abc)$$

حل: با قرار دادن $b=c=0$ داریم $f(a^3)=-f(0)$. پس f تابعی ثابت است. با قرار دادن جواب بدست آمده در معادله‌ی اصلی جواب $f(x)=0$ بدست می‌آید.

مثال ۷ تمام توابع $f:R^+\to R^+$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:

$$f(x)^{f(y)}\ .\ f(y)^{f(x)}=x^y y^x$$

حل: از جایگذاری $x=y=1$ در معادله‌ی اصلی مسئله داریم:

$$f(1)^{2f(1)}=1\Rightarrow \quad f(1)=1$$

از جایگذاری $y=1$ در معادله‌ی اصلی مسئله، نتیجه می‌گیریم:

$$f(x)=x \quad (\forall x\in R^+)$$

مثال ۸ **تمام توابع $f:Z\to R$ را بیابید که:**

$$f(m+n)+f(n-m)=f(3n) \qquad (\forall m\,,n\in Z-\{0\})$$

حل: اگر به جای m قرار دهیم $2n$، داریم:

$$f(3n)+f(-n)=f(3n) \Rightarrow f(-n)=0 \quad (\forall n\in Z-\{0\})$$

حال اگر در معادله‌ی اصلی مسئله قرار دهیم $m=n\neq 0$، داریم:

$$f(2n)+f(0)=f(2n) \Rightarrow f(0)=0$$

بنابراین داریم:

$$f(n)=0 \qquad (\forall n\in Z)$$

مثال ۹ **توابع $f:R\to R$ را بیابید که:**

$$x\,f(y)+yf(x)=(x+y)f(x).f(y) \quad (\forall x\,,y\in R)$$

حل: از قرار دادن $x=y$ در معادله اصلی مسئله داریم:

$2x\,f(x)=2xf(x)^2 \Rightarrow f(x)=0$ یا 1 (با فرض $x\neq 0$)

می‌دانیم $f(x)=0\ (\forall x\in R)$ و $f(x)=1\ (\forall x\in R)$ جواب‌های ثابت مسئله هستند.

حال باید جواب‌هایی به فرم تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}0 & x\in A\\ 1 & x\in R-A\end{cases}$ را بررسی کنیم.

اگر عدد $a\in A$ و $b\in R-A$ را به ترتیب به جای x و y در معادله‌ی اصلی مسئله قرار دهیم، داریم:

$$a\,f(b)+bf(a)=(a+b)f(a).f(b)$$
$$\Rightarrow a\,f(b)+0=0 \Rightarrow a=0$$

بنابراین تنها تابع دو ضابطه‌ای صادق در معادله تابعی مورد نظر به صورت زیر است.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases}$$

پس جواب‌های مسئله عبارتند از:

$$f(x)=0 \quad (\forall x\in R)\ ,\ f(x)=1 \quad (\forall x\in R)\ ,\ f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases}$$

مثال ۱۰ **تمام توابع غیر ثابت صفر $f:R\to R$ را بیابید که:**

$$f(x).f(y)=f(x-y) \quad (\forall x,\,y\in R)$$

حل: فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(0\,,0) \Rightarrow f(0)^2=f(0) \Rightarrow f(0)=0 \quad \text{یا} \quad f(0)=1$$

اگر $f(0)=0$ باشد داریم:

$$P(x\,,0) \Rightarrow f(x).f(0)=f(x) \Rightarrow 0=f(x) \qquad (\forall x\in R)$$

با توجه به این که نتیجه‌ی حاصل با فرض غیر ثابت صفر بودن $f(x)$ در تناقض است، بنابراین $f(۰)=۱$ می‌باشد. از طرفی داریم:

$$P(x,x) \Rightarrow f(x)^۲ = f(۰) \Rightarrow f(x)^۲ = ۱ \Rightarrow f(x)=۱ \text{ یا } f(x)=-۱$$

$$P(۲x,x) \Rightarrow f(x).f(۲x) = f(x)$$

$$f(x)\neq ۰ \;\; \forall x\in R \Rightarrow f(۲x)=۱ \quad (\forall x\in R)$$

بنابراین تنها جواب مسئله $f(x)=۱ \quad (\forall x\in R)$ می‌باشد.

مثال ۱۱ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که:**

$$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y} \qquad (\forall x\,,\; y\in R)$$

حل: فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، داریم:

$$P(۰\,,۱) \Rightarrow f(۱)=۰$$

با توجه به اینکه $f(۱)=۰$ است داریم:

$$P(x,۱) \Rightarrow xf(x)=۰ \Rightarrow f(x)=۰ \quad \forall x\in R-\{۰\}$$

از طرف دیگر داریم:

$$P(x\,,۰) \Rightarrow f(۰)=۰$$

بنابراین تنها جواب مسئله $f(x)=۰ \quad (\forall x\in R)$ می‌باشد.

مثال ۱۲ **تمام توابع $f:R^+\to R^+$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:**

$$f(x+y)=f(x)+y$$

حل: فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله ی اصلی مسئله باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)\Rightarrow f(x+y)=f(x)+y \\ P(y,x)\Rightarrow f(y+x)=f(y)+x \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقایسه‌ی دو تساوی}} f(x)+y=f(y)+x \qquad (*)$$

اگر در معادله‌ی (*)، مقدار $y=۱$ را قرار دهیم، داریم:

$$f(x)+۱=f(۱)+x \Rightarrow f(x)=x+\underbrace{f(۱)-۱}_{a}$$

$$\Rightarrow f(x)=x+a \qquad (\forall x\in R^+)$$

از آنجا که $f:R^+\to R^+$ است، بنابراین a نمی‌تواند مقداری منفی باشد (چرا؟)

همچنین از جایگذاری $f(x)=x+a$ در معادله‌ی اصلی مسئله داریم:

$$f(x+y)=f(x)+y \qquad \Rightarrow x+y+a=x+a+y$$

پس توابع زیر در معادله‌ی اصلی صدق می‌کنند:

$$f(x)=x+a \quad (\forall x\in R^+ \;,\; a\in R^+\cup\{۰\})$$

مثال ۱۳ تمام توابع $f:R^+\to R^+$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:

$$f(f(x)+f(y))=f(x)+y$$

حل: فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، داریم:

$$\left.\begin{matrix} P(x,y)\Rightarrow\ f(f(x)+f(y))=f(x)+y \\ P(y,x)\Rightarrow\ f(f(y)+f(x))=f(y)+x \end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{مقایسه‌ی دو تساوی}} f(x)+y=f(y)+x \qquad (*)$$

اگر در معادله‌ی (*)، مقدار $y=۱$ را قرار دهیم، داریم: $f(x)+۱=f(۱)+x \quad\Rightarrow\quad f(x)=x+\underbrace{f(۱)-۱}_{a}$

$$\Rightarrow\ f(x)=x+a \qquad (\forall x\in R^+)$$

از آن جا که $f:R^+\to R^+$ است، بنابراین a نمی‌تواند مقداری منفی باشد (چرا؟)

هم‌چنین از جایگذاری $f(x)=x+a$ در معادله‌ی اصلی مسئله داریم:

$$f(f(x)+f(y))=f(x)+y\Rightarrow x+y+۳a=x+a+y\Rightarrow a=۰$$

پس تابع مقابل در معادله‌ی اصلی مسئله صدق می‌کند: $f(x)=x \quad (\forall x\in R^+)$

مثال ۱۴ تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$cos(f(x+y))=f(x)cos(y)+f(y)cos(x)$$

حل: فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$\left.\begin{matrix} P(۰,۰)\ \Rightarrow\ cos(f(۰))=۲f(۰) \\ P(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})\Rightarrow cos(f(۰))=۰ \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(۰)=۰$$

$P(۰,۰)\ \Rightarrow\ ۱=۰$ (که تناقض است.)

از تناقض حاصل می‌توان گفت چنین تابعی نداریم.

مثال ۱۵ تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(x+y)+f(x-y)=۲f(x).cosy$$

حل: فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد.داریم:

$$P(x+\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})\Rightarrow f(x+\pi)+f(x)=۰\Rightarrow f(x+\pi)=-f(x)\ :(*)$$

$$P(۰\ ,y)\Rightarrow f(y)+f(-y)=۲f(۰)cosy\ :(۱)$$

$$P(\frac{\pi}{۲},y-\frac{\pi}{۲})\Rightarrow f(y)+f(-y+\pi)=۲f(\frac{\pi}{۲})cos(y-\frac{\pi}{۲})=۲f(\frac{\pi}{۲})\ siny$$

$$\xrightarrow{\text{طبق }(*)} f(y)-f(-y)=۲f(\frac{\pi}{۲})siny \qquad (۲)$$

اکنون از جمع طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) می‌توان $f(y)$ را بدست آورد. $f(y)=f(۰)cosy+f(\frac{\pi}{۲})siny$

که در آن $f(۰)$ و $f(\frac{\pi}{۲})$ هر مقدار حقیقی را می‌تواند بپذیرد.

تمرینات

۱. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(x+y)+f(x)-f(y)=2x$$

۲. تمام توابع $f,g:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم: $f(2x+y)+g(x-y)=3x$

۳. تمام توابع $f:R^+\to R^+\cup\{0\}$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:

$$f(x).f(y)=f(xy)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

۴. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که: $(x+y)^2-f(xy)=f(x)+f(y) \qquad (\forall x,\ y\in R)$

۵. تمام توابع $f:R^+\to R$ را بیابید که:

$$f(x).f(y)=f(xy)+2005(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2004) \quad (\forall x,y\in R^+)$$

۶. تمام توابع $f:(0,+\infty)\to R$ را بیابید که به ازای هر x،y مثبت داشته باشیم:

$$f(x).f(y)+f(\frac{2008}{x}).f(\frac{2008}{y})=2f(xy) \quad , \quad f(2008)=1$$

۷. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که: $f(x^2-y^2)=(x-y)(f(x)+f(y)) \qquad (\forall x,\ y\in R)$

۸. تمام توابع $f:R^+\to R$ را بیابید که: $f(x.f(y))=f(xy)+x \qquad (\forall x,\ y\in R^+)$

۹. اگر $f:R\to R$ و $(\forall x,y\in R) \quad f(xf(y))=f(x).y$ باشد، نشان دهید:

$$f(xy)=f(x).f(y) \qquad (\forall x,y\in R)$$

۱۰. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(x^2+2xy)=x^2-f(x^2)-f(2xy)$$

۱۱. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f(x).f(y)}{xy} \quad (x\neq y)$$

۱۲. فرض کنید که a یک عدد حقیقی باشد و برای تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(0)=\frac{1}{2}\ ,\ f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x) \qquad (\forall x,y\in\mathbb{R})$$

ثابت کنید که f یک تابع ثابت است.

۱۳. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر y,x حقیقی داشته باشیم:

$$f(x)f(y)=f(x+y)+xy$$

۱٤. تمام توابع $f,g:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(x+yg(x))=g(x)+xf(y)$$

۱۵. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم: $f(f(x)^{2}+y)=xf(x)+y$

۱۶. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f(f(y))+f(x-y)=f(xf(y)-x)$$

۱۷. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید به طوری که برای اعداد حقیقی x,y داشته باشیم:

$$f(x+f(y))+f(2+f(y)-x)=y(x-1)f(y)$$

۱۸. توابع $f,g:R\to R$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$f(x+g(y))=3x+y+12 \qquad (\forall x,y\in R)$$

توابع g,f را بیابید.

۱۹. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که:

$$f(x-f(y))=4f(x)-y-3x \qquad (\forall x,\ y\in R)$$

۲۰. در تابع $f:R\to R$ که:

$$f(x-f(y))-f(y-f(x))=2f(f(x)-f(y)) \qquad (\forall x,\ y\in R)$$

نشان دهید: $f(x-f(x))=0$

۲۱. n عددی صحیح و مثبت است. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر y,x حقیقی داشته باشیم:

$$x^{n}f(y)-y^{n}f(x)=f(\frac{y}{x})$$

۲۲. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر $(\forall n\in z)\quad f(n)=n$ حقیقی داشته باشیم:

$$f(x+f(xy))=xf(1+f(y))$$

۲۳. تمام توابع $f:z\to z$ را بیابید که:

$$f(n^{2})=f(m+n).f(-m+n)+m^{2} \qquad (\forall m,\ n\in z)$$

۲۴. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر y,x حقیقی داشته باشیم:

$$f(x-y)=f(x+y)f(y)$$

۲۵. تمام توابع $f:N\to N$ را بیابید که به ازای هر y,x طبیعی داشته باشیم:

$$\frac{f(x)+y}{x+f(y)}+\frac{f(x)y}{xf(y)}=\frac{2(x+y)}{f(x+y)}$$

۲۶. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که برای آن داشته باشیم:

$$f(2x)=f(\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi y}{2}))+f(\sin(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi y}{2})) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

و

$$f(x^{2}-y^{2})=(x+y)f(x-y)+(x-y)f(x+y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

نشان دهید که شرایط بالا عبارت زیر را به طور یکتایی تعریف می‌کند و مقدار آن را به دست می‌دهد:

$$f(1990+\sqrt[2]{1990}+\sqrt[3]{1990})$$

پاسخ تمرینات

۱. با قرار دادن $x=y$ داریم:

$$f(2x)=2x \Rightarrow f(x)=x \quad \forall x\in R$$

۲. اگر مقدار $x=y$ را در معادله‌ی اصلی مسئله بگذاریم، نتیجه می‌گیریم:

$$f(3x)+g(0)=3x \Rightarrow f(3x)=3x+c \ \ (c=-g(0))$$
$$\Rightarrow f(x)=x+c \qquad (\forall x\in R)$$

از جایگذاری این نتیجه در معادله‌ی اصلی داریم:

$$2x+y+c+g(x-y)=3x$$
$$\Rightarrow g(x-y)=x-y-c$$
$$\Rightarrow g(x)=x-c \quad \forall x\in R$$

که در آن c یک مقدار حقیقی است.

۳. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، داریم:

$$P(x,1) \Rightarrow f(x)(f(1)-1)=1+\frac{1}{x}$$

بنابراین $f(1)\neq 1$ است و $f(x)=a(1+\frac{1}{x})$. از جایگذاری این نتیجه در معادله‌ی اصلی مسئله $a=1$ بدست می‌آید و داریم:

$$f(x)=1+\frac{1}{x} \qquad \forall x\in R^{+}$$

٤. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(0,0) \Rightarrow f(0)=0\ ,\ P(x,0)\Rightarrow f(x)=x^2$$

(که تناقض است.)

۵. داریم:

$$x=y=1\Rightarrow f(1)\neq 1$$
$$y=1\Rightarrow f(x)(f(1)-1)=2005(2005+\frac{1}{x})$$
$$\Rightarrow f(x)=a(2005+\frac{1}{x}) \xrightarrow{\text{جایگذاری در حکم}}$$
$$f(x)=2005+\frac{1}{x} \qquad (\forall x\in R^{+})$$

۶. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(1,1)\Rightarrow f(1)^2+1=2f(1)\Rightarrow f(1)=1$$
$$y=1\Rightarrow f(\frac{2008}{x})=f(x)$$
$$\left.\begin{array}{ll} y=\frac{2008}{x} & \Rightarrow f(x)^2=1 \\ x=y & \Rightarrow f(x)^2=f(x^2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=1\ \forall x>0$$

۷. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(x,x)\Rightarrow f(0)=0$$
$$\left.\begin{array}{l} p(x,0)\Rightarrow f(x^2)=xf(x) \\ p(-x,0)\Rightarrow f(x^2)=-xf(-x) \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow f(x^2)=xf(x)=-xf(-x)$$
$$\Rightarrow f(x)=-f(-x)$$
$$P(x,-y)\Rightarrow f(x^2-y^2)=(x+y)(f(x)-f(y))$$
$$\Rightarrow (x-y)(f(x)+f(y))$$
$$=(x+y)(f(x)-f(y))\Rightarrow 2xf(y)=2yf(x)$$
$$\Rightarrow f(x)=ax \quad (\forall x\in R)$$

۸. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P(f(x),y)\Rightarrow f(f(x).f(y)) \\ =f(f(x)y)+f(x)=f(xy)+y+f(x) \\ P(f(y),x)\Rightarrow f(f(x).f(y)) \\ =f(xf(y))+f(y)=f(xy)+x+f(y) \end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)+y=f(y)+x$$
$$\Rightarrow f(x)=x+\underbrace{f(1)-1}_{k} \xrightarrow{\text{جایگذاری در حکم}}$$
$$k=1\Rightarrow f(x)=x+1 \quad (\forall x\in R^{+})$$

۹. اگر به ازای $x_0\neq 0$ داشته باشیم $f(x_0)=0$ در این صورت نتیجه بگیرید:

$$f(x)=0 \qquad (\forall x\in R)$$

که به وضوح حکم بدست می‌آید حال با فرض این که به ازای هر $x\neq 0$ حقیقی $f(x)\neq 0$ است، مسئله را ادامه می‌دهیم.

اکنون اگر $x=1$ را در فرض مسئله قرار دهیم داریم:

$$f(f(y))=f(1).y$$

اگر از دو طرف معادله‌ی فرض مسئله f بگیریم، داریم:

$$f(f(xf(y)))=x\,f(y).f(1)\ ,\ f(f(x\,f(y)))=$$
$$=f(f(x).y)=f(y).x\Rightarrow f(1)=1$$
$$\Rightarrow f(f(x))=x\Rightarrow f(x.f(f(y)))=f(x.y)$$
$$=f(x).f(y)$$

۱۰. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(0\,,0)\Rightarrow f(0)=0$$
$$P(x,0)\Rightarrow f(x^2)=\frac{x^2}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2}\quad \forall x\in R^+$$

حال با فرض این که $a,b>0$ است، داریم:

$$P(a,b)\Rightarrow a^2+2ab=2a^2-a^2-2ab$$

$\Rightarrow 4ab=0$ (که تناقض است.)

بنابراین تناقض، نتیجه می‌گیریم چنین تابعی نداریم.

۱۱. معادله‌ی اصلی مسئله را به صورت $P(x,y)$ در نظر بگیرید.

اگر $f(u)=0$ باشد (به طوری که $u\neq 0$)، آن‌گاه از $P(x,u)$ نتیجه می‌گیریم $(\forall x\neq 0)\quad f(x)=0$.

حالا اگر $f(x)\neq 0$ $(\forall x\neq 0)$ باشد، داریم:

$$P(x,y)\quad\Rightarrow \frac{1}{f(x)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{f(y)}-\frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{ax+1}\qquad \forall x\neq 0$$

بنابراین جواب‌های مسئله عبارتند از:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \forall x\neq 0\\ c & x=0\end{cases}$$
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{ax+1} & \forall x\neq 0\\ c & x=0\end{cases}$$

۱۲. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد.

$$P(0\,,0)\Rightarrow f(a)=\frac{1}{2}$$
$$P(x,0)\Rightarrow f(x)=f(a-x)$$

بنابراین معادله‌ی اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x+y)=2f(x)f(y)\quad : Q(x,y)$$
$$Q(a,-x)\Rightarrow f(a-x)=f(-x)\,,\,f(x)=f(-x)$$

حال با مقایسه‌ی $Q(x,-y)$ و $Q(x,y)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}f(x+y)=f(x-y)\\ x=\dfrac{u+v}{2}\ ,\ y=\dfrac{u-v}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow f(u)=f(v)$$
$$\Rightarrow f(x)=c\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\quad \forall x\in R$$

۱۳. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(x,0)\Rightarrow f(x).f(0)=f(x)\ :(1)$$

اگر $f(0)=0$ باشد، جواب $(\forall x\in R)\quad f(x)=0$ است. (که در معادله اصلی صدق نمی‌کند)

اما اگر $f(0)\neq 0$ باشد، بنابر (۱) باید $f(0)=1$ باشد. پس داریم:

$$P(1,-1)\Rightarrow f(1).f(-1)=0\Rightarrow f(1)=0$$

یا $f(-1)=0$

اگر $f(1)=0$ باشد، از $P(x-1\,,1)$ داریم:

$$f(x)=1-x\quad (\forall x\in R)$$

اگر $f(-1)=0$ باشد، از $P(x+1,-1)$ داریم:

$$f(x)=x+1\ (\forall x\in R)$$

۱٤. داریم:

$$y=0\Rightarrow f(x)=g(x)+x\,f(0)$$
$$x=y=0\Rightarrow f(0)=g(0)$$
$$x=0\Rightarrow f(yg(0))=g(0)\ (!)$$

اگر $g(0)\neq 0$، آن‌گاه از (!) نتیجه می‌شود $f(x)=g(0)$ و داریم:

$$\Rightarrow f(x)=a\ ,\ g(x)=-ax+a$$

اگر $f(\circ)=g(\circ)=\circ$ باشد، توابع f و g را به عنوان تمرین بیابید.

۱۵. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. حال با فرض $a=-f(\circ)^{۲}$ داریم:

$$P(\circ\,,\,x+a)\ \Rightarrow\ f(x)=x+a \qquad \forall x\in R$$

حال با جایگذاری این نتیجه در معادله‌ی اصلی مسئله می‌توان گفت $a=\circ$ است و داریم:

$$f(x)=x \qquad \forall x\in R$$

۱۶. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(\circ\,,\,\circ)\ \Rightarrow\ f(f(\circ))=\circ$$
$$\Rightarrow\ f(\circ)=\circ$$

مقایسه‌ی $P(\circ\,,\,f(\circ))\ ,\ P(f(\circ)\,,\,f(\circ))$

$$\left.\begin{array}{l} P(x,\circ)\ \Rightarrow\ f(x)=f(-x) \\ P(x,-x)\,,\,P(x,x)\ \text{مقایسه‌ی} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow\ f(x)=\circ\ (\forall x\in R)$$

۱۷. با مقایسه‌ی معادله‌ی تابعی به ازای $x=۲\,,\,x=\circ$ داریم:

$$yf(y)=\circ\ \ \forall y\ \ ,\ \ f(x)=\circ\ \ \forall x\neq\circ$$

با قرار دادن $x=\circ$ و $y=۱$ در معادله‌ی تابعی، خواهیم داشت:

$$f(\circ)=\circ$$

۱۸. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی مورد نظر باشد، داریم:

$$P(x-g(\circ)\,,\circ)\ \Rightarrow\ f(x)=۳x-۳g(\circ)+۱۲$$
$$\Rightarrow\ f(x)=۳x+a$$
$$P(-g(x),x)\ \Rightarrow\ f(\circ)=-۳g(x)+x+۱۲$$
$$\Rightarrow\ g(x)=\frac{x}{۳}+b$$

از جایگذاری نتایج بدست آمده در معادله‌ی اصلی نتیجه می‌گیریم $a+۳b=۱۲$ باید باشد.

۱۹. $P(x,y)$ همان رابطه اصلی مسئله است.

فرض کنید $a=۴f(\circ)$، داریم:

$$P(\circ\,,\,a)\ \Rightarrow\ f(-f(a))=\circ$$
$$P(x,-f(a))\ \Rightarrow\ f(x)=۴f(x)+f(a)-۳x$$
$$\Rightarrow\ f(x)=x+u\ \ (*)$$

$(*)\Rightarrow f(x)=x\ \ (\forall x\in R)$ را در حکم جایگذاری کنیم.

۲۰. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله اصلی مسئله باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P(x,x)\ \Rightarrow\ f(\circ)=\circ \\ P(\circ\,,\,x)\ \Rightarrow\ f(-f(x))=-f(x) \\ P(x\,,\circ)\ \Rightarrow\ f(f(x))=f(x) \end{array}\right\}$$
$$\xrightarrow{P(x,f(x))}\ f(x-f(x))=\circ$$

۲۱. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، در این صورت داریم: $P(a,a)\ \Rightarrow\ f(۱)=\circ$

$$P(a,۱)\ \Rightarrow\ f(\frac{۱}{a})=-f(a)$$
$$P(\frac{۱}{b},\frac{۱}{a})\Rightarrow -\frac{۱}{b^n}f(a)+\frac{۱}{a^n}f(b)$$
$$=a^n f(b)-b^n f(a)$$

بنابراین داریم:

$$f(a)(b^n-\frac{۱}{b^n})=f(b)(a^n-\frac{۱}{a^n})$$
$$\Rightarrow\ f(x)=c(x^n-\frac{۱}{x^n}) \qquad \forall x\in R$$

که در آن c هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد.

۲۲. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(x-f(\circ),\circ)$$
$$\Rightarrow\ f(x)=(x-f(\circ))\ f(۱+f(\circ))$$
$$\Rightarrow\ f(x)=ax+b$$

که از جایگذاری نتیجه‌ی بدست آمده در معادله‌ی اصلی مسئله نتایج زیر بدست خواهد آمد:

$$f(x)=ax \qquad (\forall x\in R \quad , \ a\in R)$$

$$f(x)=-x+b \qquad (\forall x\in R\ , \ b\in R)$$

۲۳. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} m=n=0 \ \Rightarrow f(0)=0 \text{ یا } 1 \\ m=n-n^2 \Rightarrow f(n^2)(1-f(2n-n^2)) \\ =(-n^2+n)^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{n=2}$$

$$\Rightarrow \ f(0)\neq 1 \Rightarrow \ f(0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \ \Rightarrow f(m).f(-m)=-m^2 \\ m=0 \Rightarrow f(n^2)=f(n)^2 \\ m=n \Rightarrow f(n^2)=n^2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow f(n)=n \text{ یا } f(n)=-n$$

از بررسی نتیجه‌ی حاصل در حکم مسئله، می‌توان فهمید تنها $(\forall n\in z) \quad f(n)=n$ جواب است.

۲٤. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(0\ ,0)\Rightarrow f(0)^2=f(0)\Rightarrow f(0)=0 \text{ یا } f(0)=1$$

حال اگر $f(0)=0$ باشد داریم:

$$P(x,0) \ \Rightarrow \ f(x)=0 \qquad \forall x\in R$$

و اگر $f(0)=1$ باشد داریم:

$$P(x,x)\Rightarrow f(x)f(2x)=1\Rightarrow f(x)\neq 0 \quad \forall x\in R$$

$$P(\frac{2x}{3}\ ,\frac{x}{3})\Rightarrow f(\frac{x}{3})=f(x).f(\frac{x}{3})\Rightarrow f(x)=1$$

بنابراین دو دسته جواب داریم:

$$f(x)=0 \quad (\forall x\in R) \quad , \ f(x)=1 \qquad (\forall x\in R)$$

۲۵. فرض کنید $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. داریم:

$$P(x,x) \ \Rightarrow \ f(2x)=2x \ : (1)$$

$$P(1,2)\Rightarrow f(3)=\frac{9}{2f(1)+1}\in N\Rightarrow f(1)=1 \text{ یا } 4$$

اگر $f(1)=4$ باشد، داریم:

$$P(1,4)\Rightarrow \ f(5)=\frac{25}{14}\not\in N$$

پس $f(1)=1$ است و داریم:

$$P(1,2x) \ \Rightarrow \ f(2x+1)=2x+1 \ : (2)$$

$$(1),(2) \ \Rightarrow \ f(x)=x \quad \forall x\in N$$

۲۶. توجه کنید که می‌توان معادله‌ی دوم را به صورت زیر نوشت:

$$f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

$x=y=0$ در معادله اول $\Rightarrow f(0)=0$

$x=y=1$ در معادله اول $\Rightarrow f(2)=0$

$$f(xy)=x f(y)+y f(x)\Rightarrow f(2x)=2f(x)$$

$y=x:$ در معادله اول $\Rightarrow \ f(2x)=f(\sin\pi x)$

$$\Rightarrow\begin{cases} a) \ f(x+2)=f(x) \\ b) \ f(1-x)=f(x)\end{cases}$$

$$y\to y+2: f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

$$\Rightarrow \ f(xy+2x)=f(xy)+f(2x)$$

$$\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$f(2)=0\ , \ f(2x)=2f(x) \ \Rightarrow \ f(1)=0$$

$$(b)\ , \ f(x+y)=f(x)+f(y)\ , \ f(1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f(x)=f(-x)\Rightarrow 0=f(0)=$$

$$=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)=2f(x)$$

پاسخ عبارتست از:

$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$