



برگی از درخت المپیاد نجوم

مکانیک سماوی

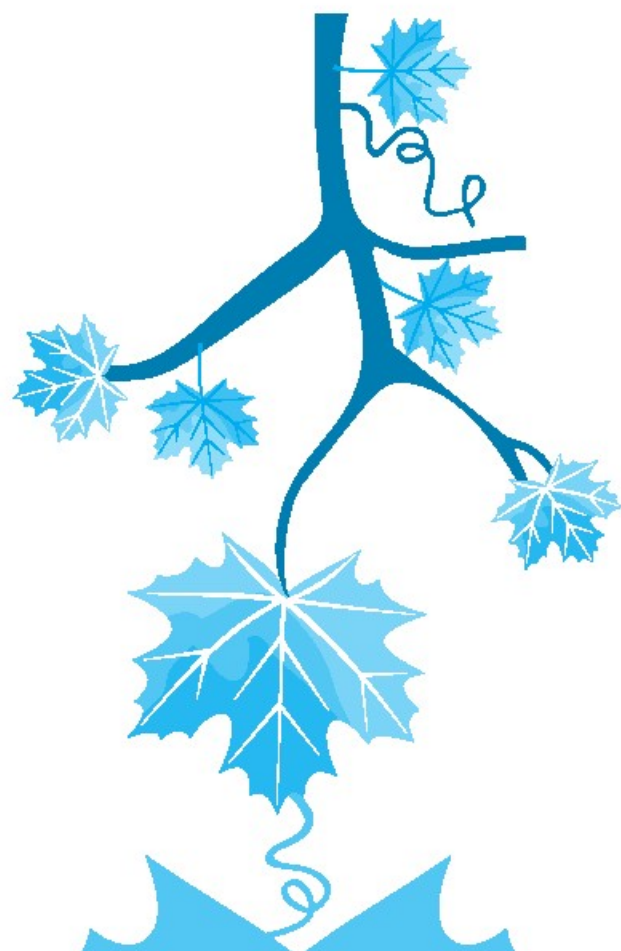
مؤلفین

محمدمهدی شریعت‌زاده

دکتر مهدی فاکیان قمی



انتشارات خورشید



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده و هر یک
از کتاب های این پروژه برگه از آن است.
وظیفه ما نگهداری و آبیاری این درخت است. امیدواریم
با عنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
و به بار واقعی بنشیند. فراموش نکنید که بار و میوه ی

این درخت شما

عزیزان می باشید.

التماس دعا



پروژهی درخت المپیاد

اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.

انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژهی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تکی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد. منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم و بیش در سراسر دنیای پهناور به صورت داخلی و بین المللی برگزار می شود و سال به سال به تنوع، جذبه و عظمت آن ها افزوده می شود. یکی از این همایش های باشکوه که هر سال در چندین رشته در سطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزار می شود المپیادهای علمی می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و از سال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفراا ممناز این المپیادها به راحتی جذاب دانشگاه ها و آکادمی های ممتاز جهان شده و پس از گذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و با کسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نقل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چرا که در آن سال ایران در گیر جنگ تحمیلی بوده و جهائیان به غیر از جنگ و درگیری چینی از ایران سراغ نگذاشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده و چشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطور که از رسانه های گروهی مطلع شده اید در تمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشور عزیزمان در سنوات گذشته جز کشورهای برتر بوده و ضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی از جمله رتبه اول را حاز شده اند.

نحوه گزینش نفراا اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که در ابتدا در مسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چند گزینه ای مطرح می شود حدوداً هزار نفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. در این مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و در دوره ی تابستانی در باشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس از گذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عاده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عاده ای مدال نقره و عاده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند (در این مرحله معمولاً همگی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه خود در رقابت می کنند یا این تفاوت که این افراد سهمیه ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه در سال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز و یا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

نکته به هر حال ادعا این است که فعالیت دانش آموز در یک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خلاوتک به بشرتن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب از این نعمت خلدادادی محافظت شود به هر دانش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه های کشورهای اعم از خصوصی و دولتی دلوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سؤال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی‌کنند که وقتی از این افراد راجع به موفقیت‌هایشان سؤال می‌شود هرگز خود را ناموفق معرفی نمی‌کنند و همین‌که توانسته‌اند از بلدان سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابراین فعالیت‌های ورزشی از زمینه‌های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین‌که استعداد خدادادی پرورش می‌یابد موفقیتی است پس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناسان و اساتید سال به سال ساده‌تر شده و برای عموم دانش‌آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش‌آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ‌عنوان اغناکننده نمی‌باشند لذا لازم است این سری از دانش‌آموزان فعالیت ویژه‌ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت‌ها برای آن‌ها اغناکننده است.

۳. فعالیت‌های المپیادی که در نهایت به حل سوالات پیچیده و عمیق در رشته‌ی مربوطه می‌شود باعث می‌شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش‌آمده در زندگی به دید یک مسأله‌ی المپیاد نگاه کرده و در حل آن نسبت به سایر رقبا موفق‌تر باشند. تحقیقات نشان می‌دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی از شاخه‌های المپیاد را دنبال می‌کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق‌ترند.

۴. زیربنای اکثر دروس پیش‌دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می‌شود بنابراین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می‌کنند در دوره پیش‌دانشگاهی با پایه‌ی بسیار قوی‌تری با دروس مواجه می‌شوند و نسبت به رقبای خود راحت‌تر از عهده آن‌ها بر می‌آیند.

۵. با توجه به مصوبه‌های موجود، کسب مدال در یکی از المپیادهای علمی (حتی مدال برنز) باعث اعطای امتیازهای ویژه‌ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه‌های سراسری می‌شود که جزئیات آن در سایت‌های معتبر مخصوصاً سایت باشگاه دانش‌پژوهان جوان موجود است.

۶. همچنین با توجه به مصوبه‌های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف از جمله بنیاد ملی نخبگان در می‌آیند که با رجوع به سایت‌های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق‌یافته به اعضا را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مقتضاست از بنده تاسیسم به فکر تدوین و تکلیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره گیری از اساتید مجربی که خود در سنواتی نه چندان دور مدال آوریکی از المپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تکلیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارند برگگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدر دانی می نمایم و در نهایت نیز از عوامل زحمات گش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.



باتشکر

رَسُول حَاجِي زَادَه مَدِيرِ اِنْتِشَارَاتِ خُوشْخَوَان



يَا مَنْ فِي السَّمَاءِ عَظَمَتُهُ

ای که در آسمان آثار عظمتش هویدا است

دانشمند، طبیعت را به خاطر فایده‌اش مطالعه نمی‌کند؛ آن را برای این مطالعه می‌کند که از آن لذت می‌برد و از آن لذت می‌برد چون که زیباست. اگر طبیعت زیبا نبود، ارزش شناختن نداشت و اگر طبیعت ارزش شناختن نداشت، زندگی هم ارزش زیستن نداشت.¹

هانری پوانکاره

پیش‌گفتار

هدف این کتاب ترسیم فضای مکانیک سماوی برای داوطلبان شرکت در المپیاد نجوم و علاقه‌مندان به این شاخه از علم نجوم و مکانیک است. نبود یک منبع جامع مکانیک سماوی به زبان فارسی، یکی از مشکلات دانش‌پژوهانی است که به نجوم علاقه‌مند هستند و می‌خواهند مکانیک سماوی را بیش از آن چه که در کتب نجوم مقدماتی نوشته شده است، فراگیرند. البته این مشکل را تا حدی می‌توان به جوان بودن المپیاد نجوم مرتبط ساخت.

مکانیک نیوتونی سنگ بنای علوم تجربی و مهندسی است و اصول آن در قسمت‌های مختلفی از سیستم‌های فیزیکی اعمال می‌شود. مطالب بیان‌شده در این کتاب کاربرد مکانیک را در فضایی فراتر از فضایی که به صورت روزمره با آن سروکار داریم نشان می‌دهد. از این رو پیشنهاد می‌کنیم قبل از مطالعه این کتاب، مطالعه‌ای بر مکانیک پایه داشته باشید. در فصل اول مروری بر مفاهیم پایه مکانیک تحلیلی آورده شده است. البته این مطالب خلاصه ممکن است برای کسانی که شناخت کافی از مفاهیم مکانیک نیوتونی ندارند مشکل‌آفرین باشد. در فصل اول هدف از بیان مفاهیم، آوردن مثال‌هایی است که نشان می‌دهد برخی از مسائل مکانیک سماوی نیاز به ریاضیات یا فیزیک پیشرفته‌ای ندارد.

توجه داشته باشید که حساب دیفرانسیل و انتگرال وسیله پی‌ریزی مکانیک است و بدون استفاده از آن نمی‌توان مکانیک را مطالعه کرد. اصول مکانیک سه قانون اصلی نیوتون است که قانون دوم آن یک معادله دیفرانسیل درجه دو است. شاید این نکته که تأثیرگذارترین افراد در پیشرفت مکانیک و به خصوص مکانیک سماوی ریاضی‌دان‌ها بودند گواهی بر این واقعیت باشد. در تکمیل این صحبت به جمله‌ای معروف از لئونهارت اویلر اشاره می‌کنیم: «مکانیک بهشت ریاضیات است». در نتیجه به خواننده پیشنهاد می‌کنیم قبل از مطالعه کتاب با مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال و همچنین با روش‌های مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری

1) The Scientist does not study nature because it is useful; he studies it because he delights in it, and he delights in it because it is beautiful. If nature were not beautiful, it would not be worth knowing, and if nature were not worth knowing, life would not be worth living.
Henri Poincare

که در این کتاب بارها و بارها از آن‌ها استفاده شده است، آشنایی پیدا کند.

در فصل دوم کتاب به بررسی نیرو و پتانسیل گرانش پرداخته‌ایم. مهم‌ترین نیرویی که در مکانیک سماوی با آن سروکار داریم گرانش یا نیروی جاذبه است و درک مفاهیم گرانش از اهمیت زیادی برخوردار است چرا که تا انتهای فصل پنج حرکت در میدان گرانش را بررسی می‌کنیم. در این فصل با معرفی مفاهیم نیرو و پتانسیل سعی می‌کنیم فهم صحیحی از میدان نیروی گرانش در خواننده ایجاد کنیم. روش محاسبه نیرو و پتانسیل اجسام با هندسه‌های مختلف را نشان می‌دهیم و به بررسی مثال‌هایی همچون حرکت ستارگان در قرص کهکشان، پدیده جزر و مد و مطالعه نقاط لاگرانژ می‌پردازیم.

فصل سوم به بررسی مسئله دو جسم اختصاص دارد. بررسی حرکت دو جسم در میدان گرانش نسبت به یکدیگر و محاسبه ویژگی‌های هندسی مدارها مهم‌ترین و مفصل‌ترین بحث در این کتاب و همچنین در المپیاد نجوم است.

در پیوست این فصل به بررسی حالت کلی مسئله سه جسم و ارائه دو حل خاص از این مسئله پرداخته شده است.

در فصل چهارم به بررسی پارامتر زمان در مدارها می‌پردازیم. در این فصل نحوه ارتباط زمان و پارامترهای زاویه‌ای مدارها را می‌یابیم و روش‌های عددی حل معادلات پیچیده‌تر از معادلاتی که تاکنون با آن‌ها سروکار داشتیم را معرفی می‌کنیم.

در فصل پنجم نحوه بررسی حرکت دو جسم در فضای سه‌بعدی بیان شده است. پارامترهای یک مدار در فضا را معرفی کرده و روش پیش‌بینی مکان ماهواره‌ها و سیارات را نشان خواهیم داد.

تفاوتی که بین این کتاب و کتاب‌های دانشگاهی در این زمینه وجود دارد این است که آوردن روشی پیچیده برای محاسبه در کتابی دانشگاهی معمولاً مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما برای دانش‌پژوهی که تنها ابزار محاسباتش یک ماشین حساب علمی است و خود را برای آزمون‌های آماده می‌کند که سرعت عمل نقش مؤثری در آن دارد استفاده از روش‌های ساده محاسباتی بسیار مهم است. در بیان تمام مباحث این کتاب سعی شده است ساده‌ترین روش محاسباتی به کار گرفته شود. این تفاوت به خصوص در فصل پنجم کتاب قابل مشاهده است. در این فصل با استفاده از روش‌های برداری و هندسه کروی محاسبات مداری بسیار کوتاه می‌شوند.

فصل ششم کتاب به بررسی کلی‌تر حرکت دو ذره نسبت به هم اختصاص داده شده است. در این فصل نیروی مرکزگرا را معرفی کرده‌ایم و روش‌های به دست آوردن معادله مسیر ذرات را بیان نموده‌ایم. همچنین پایداری مدارها و مدارهای دایروی مختل شده در این فصل بررسی شده است.

تجربه نشان داده است که مفاهیم مکانیک و مکانیک سماوی را می‌توان نسبتاً راحت یاد گرفت اما به دست آوردن مهارت کافی برای حل مسائل آن نیاز به تلاش زیادی دارد. به همین دلیل در این کتاب مثال‌های گوناگونی آورده شده است. اغلب مثال‌ها با این هدف ارائه شده‌اند که کاربرد مبحث بیان شده را

نمایش دهند یا روش روبه‌رو شدن با یک مسئله جدید را نشان دهند.

برای دانش‌پژوهانی که می‌خواهند در المپیاد شرکت کنند، مهم‌ترین نکته، یادگیری روش روبه‌رو شدن با مسئله‌ای جدید است. برای حل مسئله به روش حمله کارآمدی نیاز است. در این روش، در حل هر مسئله باید با ترتیبی منطقی مراحل مختلفی از فرضیه تا نتیجه‌گیری را طی کرد. پاکیزه و منظم نوشتن به فرآیند تفکر کمک می‌کند، فرض را نظم می‌دهد و به دیگران اجازه می‌دهد از کار شما سردر بیابند. مسئله‌هایی که ابتدا پیچیده به نظر می‌رسند، وقتی به شیوه منطقی و منظم با آن‌ها برخورد می‌شود غالباً ساده و واضح می‌شوند. یکی از نکات کلیدی در حل مسائل ترسیم شکل است. ترسیم درست شکل می‌تواند یک مسئله بسیار سخت را به یک مسئله بدیهی تبدیل کند. بنابراین پیشنهاد می‌شود قبل از هرکاری دریافت ذهنی خود را از مسئله ترسیم کنید. هدف ما در حل مثال‌ها آموزش روش حمله کارآمد و نشان دادن روند منطقی رسیدن از فرض به خواسته مسئله است.

در پایان هر فصل مسائل بیشتری با هدف تسلط دانش‌پژوهان بر مطالب عنوان شده در فصل آورده شده‌اند. در اینجاست که باید روش حمله کارآمد را پیاده کرد و از یادگیری مطالب فصل مطمئن شد. در ابتدای هر فصل یادداشتی تاریخی درباره یکی از چهره‌های تأثیرگذار در مکانیک سماوی آورده شده است. نجوم یکی از کهن‌ترین علوم است که بشر به آن پرداخته است و بیان اندکی از تلاش‌های انسان‌های شگفت‌انگیزی که باعث پیشرفت آن شدند، در کنار بیان یک سری روابط ریاضی، لازم است. در پایان از تمام کسانی که مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند سپاس‌گزاری می‌کنم. از دوست خوبم آرش گل‌محمدی‌نقشه که پیش‌نویس این کتاب را خواندند متشکرم. از تمام اساتیدم به‌خصوص آقای محسن ایرجی و آقای علیرضا وفا که دانش‌های اندک خود در نجوم و مکانیک سماوی را مدیون آن‌ها هستم تشکر می‌کنم. بالاخره از خانواده‌ام که در تمام مراحل پشتیبانم بودند سپاس‌گزاری می‌کنم.

فهرست مطالب

۱	مروری بر قوانین نیرو و حرکت	فصل ۱	
۳۵	نیرو و پتانسیل گرانشی	فصل ۲	
۶۵	مسأله دو جسم	فصل ۳	
۱۱۹	مسأله سه جسم	فصل ۴	
۱۳۱	موقعیت مداری تابعی از زمان	فصل ۵	
۱۸۷	مدار در فضا	فصل ۶	
۲۲۵	نیروی مرکزگرا	فصل ۷	
۲۶۱	سؤالات المپیاد	فصل ۸	



مروری بر قوانین نیرو و حرکت



دستگاه‌های مختصات

۱-۱

برای توصیف مکان و حرکت یک جسم در فضا به یک دستگاه مختصات نیاز داریم. ترکیبی از بردارهای مستقل از هم که بتوانیم هر بردار دلخواهی را به صورت جمع این بردارهای مستقل تعریف کنیم را یک دستگاه مختصات می‌نامیم. معمولاً دستگاه‌هایی که این بردارهای مستقل در آنها عمود برهم باشند بسیار ساده تر هستند و به دستگاه‌های مختصات متعامد معروفند. باز هم برای سادگی این بردارها، بدون بعد و با طول یک در نظر گرفته می‌شوند و آنها را بردار یکه می‌نامیم.

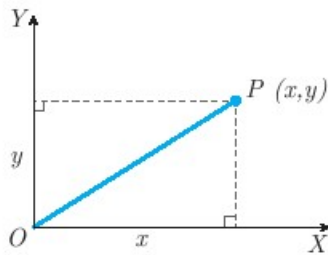
هر بردار دلخواهی در این دستگاه مختصات را به صورت ضرایبی از این بردارهای یکه‌ی مستقل تعریف می‌کنیم و ضرایب مربوطه را مؤلفه‌های بردار فوق در هر یک از راستاهای مستقل دستگاه تعریف می‌کنیم. طول بردارهای یکه همواره ثابت بوده و برابر یک است ولی در برخی از دستگاه‌ها جهت آنها تغییر می‌کند.

هر دستگاه مختصات بر اساس تقارن‌های موجود در مسأله تعریف می‌شود. البته انتخاب دستگاه مختصات کاملاً اختیاری و بر عهده‌ی استفاده‌کننده است؛ ولی انتخاب دستگاهی که تقارن‌های مسأله را حفظ کند می‌تواند حل مسأله را بسیار ساده کند؛ مثلاً حرکت دایره‌ای در دستگاه مختصات قطبی بسیار ساده‌تر توصیف می‌شود چرا که یکی از مؤلفه‌ها که شعاع حرکت است همواره ثابت است و حل مسأله به تحلیل و بررسی فقط یک بعد تقلیل پیدا می‌کند.



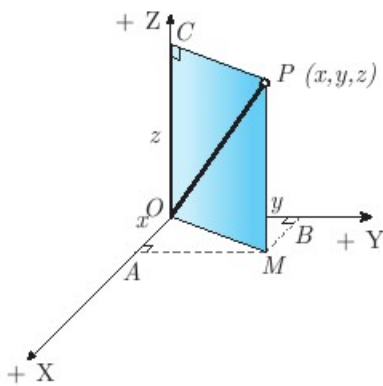
در این بخش برخی از معروف ترین دستگاه‌های مختصات متعامد را معرفی کرده و به چگونگی توصیف حرکت در آن‌ها می‌پردازیم.

۱. دستگاه مختصات دکارتی



شکل ۱-۱

شکل (۱-۱) یک دستگاه مختصات دو بعدی را نشان می‌دهد. دستگاه مختصات دکارتی بردارهای یکه عمود برهم و ساکن دارد و معمولاً بهترین دستگاه برای تحلیل سیستم‌های ساکن است. این دستگاه از دو محور عمود بر هم که یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند تشکیل شده است. مکان هر نقطه در این دستگاه به وسیله مختصات (x, y) توصیف می‌شود که با رسم خطوطی موازی محورهای مختصات از نقطه مورد نظر به محورهای X و Y به دست می‌آیند.



شکل ۲-۱

شکل (۲-۱) یک دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی را نشان می‌دهد. محورهای X و Y در یک صفحه و عمود بر هم هستند و محور Z عمود بر این صفحه است. مکان هر نقطه در این دستگاه به وسیله مختصات (x, y, z) توصیف می‌شود. برای نمایش مختصات نقطه دلخواه P ، به موازات محور Z خطی رسم می‌کنیم تا صفحه XY را در نقطه M قطع کند. سپس از نقطه M به موازات محورهای X و Y نیز خطوطی رسم می‌کنیم تا این دو محور را قطع کرده و مؤلفه‌های x و y نقطه P را مشخص کنند. با ترسیم خطی به موازات خط OM و مشخص کردن محل برخورد آن با محور Z مؤلفه z نقطه P به دست می‌آید.

در دستگاه مختصات دکارتی می‌توانیم اندازه OP را به دست آوریم:

$$OP^2 = OM^2 + OC^2 = (OA^2 + OB^2) + OC^2 \quad (۱-۱)$$

$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



در این دستگاه مؤلفه‌ها همگی بعد طول دارند.

شکل (۲-۱) یک دستگاه مختصات راستگرد را نشان می‌دهد، یعنی اگر دست راست خود را در امتداد محور X قرار دهید و انگشتان خود را به سمت محور Y جمع کنید، انگشت شست جهت محور Z را نشان می‌دهد.

مکان ذره P را می‌توان به وسیله بردار مکان r مشخص کرد. ابتدای این بردار مبدأ مختصات و انتهای آن روی ذره P قرار دارد. می‌توانیم بردار مکان r را بر حسب بردارهای یکه به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \quad (۲-۱)$$

مؤلفه‌های بردار مکان (r) می‌توانند هر کدام تابعی از یک کمیت مستقل باشند. در رابطه بالا t یک پارامتر مستقل است که مؤلفه‌های بردار بر حسب آن بیان می‌شوند.

برای مثال ممکن است x, y, z را بر حسب پارامتر زمان گزارش دهیم.

از آنجایی که سرعت و شتاب یک ذره به ترتیب مشتق اول و دوم مکان آن هستند، بنابراین:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{\mathbf{k}} = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}} \quad (۳-۱)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{\mathbf{k}} = a_x(t)\hat{\mathbf{i}} + a_y(t)\hat{\mathbf{j}} + a_z(t)\hat{\mathbf{k}} \quad (۴-۱)$$

معادلات بالا چگونگی حرکت یک ذره در سه بعد را در دستگاه مختصات دکارتی بیان می‌کند.

مثال ۱-۱ بررسی حرکت دایروی

فرض کنید بردار موقعیت یک ذره با رابطه زیر نشان داده شده باشد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}b \sin \omega t + \mathbf{j}b \cos \omega t$$

که ω مقداری ثابت است. حرکت ذره را تحلیل کنید.

پاسخ: بردار مکان مؤلفه z ندارد، پس حرکت محدود به صفحه $x - y$ و به صورت دویعدی است.

فاصله ذره از مبدأ در هر زمان دلخواه t عبارتست از:

$$|\mathbf{r}| = r = (b^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1/2} = b$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید فاصله ذره از مبدأ ثابت است، پس مسیر حرکت دایره‌ای است به شعاع

b که مرکز آن روی مرکز مختصات قرار دارد. اگر از بردار مکان بر حسب زمان مشتق بگیریم، بردار سرعت

به دست می‌آید.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}b\omega \cos \omega t - \mathbf{j}b\omega \sin \omega t$$

اندازه بردار سرعت عبارت است از:

$$v = |\mathbf{v}| = (b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + b^2 \omega^2 \sin^2 \omega t)^{1/2} = b\omega$$

همان طور که مشاهده می‌کنید، ذره مسیر خود را با سرعت ثابت می‌پیماید. شتاب برابر است با:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -i b \omega^2 \sin \omega t - j b \omega^2 \cos \omega t$$

اگر بردار سرعت و شتاب را در یکدیگر ضرب داخلی کنیم، حاصل صفر می‌شود، یعنی این دو بردار بر یکدیگر عمودند.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = (b\omega \cos \omega t)(-b\omega^2 \sin \omega t) + (-b\omega \sin \omega t)(-b\omega^2 \cos \omega t) = 0$$

با مقایسه دو بردار شتاب و مکان به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

علامت منفی نشان‌دهنده این موضوع است که a و r جهت‌های معکوس دارند، یعنی a همیشه به سمت مرکز دایره است و v بر دایره مماس است.

یکی از مزایای دستگاه‌های متعامد این است که تغییرات بردارهایی که طول یکسان دارند همواره عمود بر خود بردار است؛ مثلاً در مثال قبل دیدیم که آهنگ تغییرات بردار مکان (سرعت) که اندازه آن ثابت بود، بر بردار مکان عمود بود. این مطلب را می‌توانیم به این صورت نیز نشان دهیم که ضرب داخلی بردار مکان در خودش برابر است با

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = (r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}) \cdot (r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}) = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = r^2$$

که مقداری ثابت است و در نتیجه مشتق آن برابر صفر است.

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 0$$

از طرفی می‌توانیم مشتق کمیت بالا را به صورت زیر حساب کنیم

$$\frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

از آنجا که ضرب داخلی دو بردار فقط هنگامی برابر صفر است که دو بردار بر هم عمود باشند، بنابراین

$$\vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$$



۲. دستگاه مختصات قطبی

انتخاب دستگاه مختصات مناسب در حل مسأله بسیار مهم است. برای توصیف حرکت جسمی بر روی مسیرهای دایره‌ای یا شبه دایره ای کار با دستگاه مختصات دکارتی مشکل است.

به شکل (۳-۱) توجه کنید. مختصات دکارتی نقطه P عبارتست از x, y . نقطه P در فاصله r از مبدأ قرار دارد و خط OP با محور X زاویه θ می‌سازد. مکان نقطه P را می‌توان به صورت (r, θ) نمایش داد که مختصات قطبی نامیده می‌شود؛ که در آن r طول بردار و θ زاویه آن از محور x است.

رابطه بین (x, y) و (r, θ) عبارتست از:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

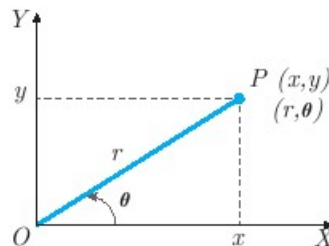
هم‌چنین برای تبدیل مختصات (r, θ) به (x, y) می‌توان مانند زیر نوشت:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

یا برعکس

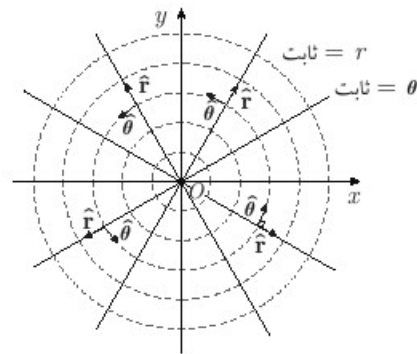
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

مقادیر r و θ می‌توانند هر مقداری بین صفر تا بی‌نهایت را اختیار کنند. ولی مقدار θ را می‌توان همواره به صورت مضرب صحیحی از 2π به علاوه مقداری بین صفر و 2π نوشت. در بسیاری از موارد که خود زاویه اهمیتی نداشته و ما از تصویر بردار r در جهات مختلف استفاده می‌کنیم، از جمله مضرب صحیحی از 2π صرف‌نظر می‌کنیم.



شکل ۳-۱

در شکل (۴-۱) نمودارهای r ثابت که دایره‌هایی با شعاع r و مرکز دستگاه مختصات هستند و هم‌چنین نمودارهای θ ثابت که خطوط مستقیمی هستند که از مرکز مختصات می‌گذرند، نمایش داده شده است.



شکل ۴-۱

اکنون دو بردار یکه \hat{r} و $\hat{\theta}$ را در مختصات قطبی تعریف می‌کنیم که بر یکدیگر عمودند و در جهت افزایش r و θ هستند. بنابراین \hat{r} از نقطه P به طرف افزایش فاصله شعاعی و $\hat{\theta}$ در جهتی است که اگر θ افزایش یابد P به آن سمت حرکت می‌کند. با توجه به شکل (۵-۱) و (۶-۱) می‌توان نوشت:

$$\hat{r} = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta \quad (۵-۱)$$

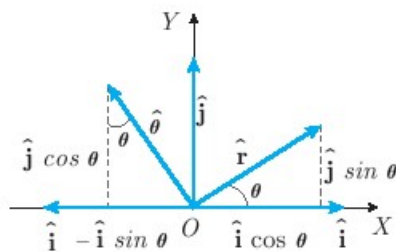
$$\hat{\theta} = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta \quad (۶-۱)$$

با مشتق‌گیری از معادلات بالا بر حسب θ داریم:

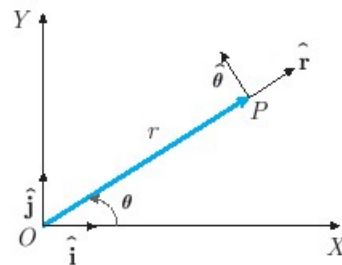
$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{i} \cos \theta - \hat{j} \sin \theta = -\hat{r}$$

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad , \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad (۷-۱)$$



شکل ۶-۱



شکل ۵-۱



بردار مکان r در مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{r} = r\hat{r} \quad (۸-۱)$$

بدین ترتیب سرعت عبارتست از

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

با استفاده از معادله (۷-۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta}\dot{\theta}$$

و در نتیجه

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (۹-۱)$$

سرعت در امتداد \hat{r} را سرعت شعاعی نامیده و با v_r نمایش می‌دهیم و همچنین سرعت در امتداد $\hat{\theta}$ را سرعت مماسی نامیده و با v_θ نمایش می‌دهیم:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (۱۰-۱)$$

شتاب ذره برابر است با

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta})\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\hat{r})\dot{\theta} \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \end{aligned} \quad (۱۱-۱)$$

دو مؤلفه شتاب عبارتند از شتاب شعاعی و شتاب مماسی که عبارتند از

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (۱۲-۱)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (۱۳-۱)$$

مثال ۲-۱ حرکت دایره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانش

ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی گرانش جرم مرکزی M در حال حرکت در مسیری به شعاع r است. سرعت و دوره تناوب این ذره چقدر است؟



پالسج: نیروی گرانش فقط در راستای شعاعی به ذره وارد می‌شود و در راستای مماسی نیرویی ندارد. هم‌چنین توجه داشته باشید که اگر r ثابت باشد، آنگاه $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ (طبق معادله (۱۲-۱)). در نتیجه شتاب شعاعی برابر با

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\left(\frac{v_\theta}{r}\right)^2 = -\frac{v_\theta^2}{r}$$

چون سرعت به مسیر مماس است (طبق مثال ۱-۱)، پس در راستای شعاعی مؤلفه‌ای ندارد در نتیجه $v = v_\theta$. حال با نوشتن معادله نیرو سرعت را به دست می‌آوریم

$$-\frac{GM}{r^2} = -\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

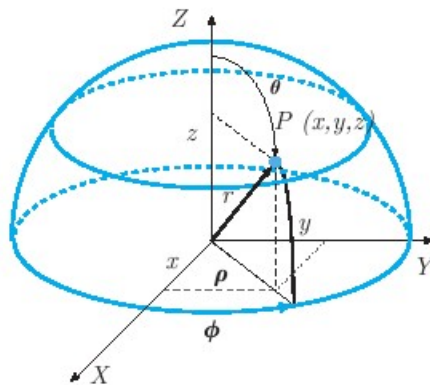
برای محاسبه دوره تناوب، با توجه به این‌که سرعت ذره ثابت است، پس طول مسیر برابر با حاصل ضرب دوره تناوب در سرعت ذره است

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

که این همان قانون سوم کپلر برای مسیرهای دایره‌ای است.

۳. دستگاه مختصات کروی

نقطه P را طبق شکل (۱-۷) در فاصله r از مبدأ مختصات در نظر بگیرید. مختصات دکارتی این نقطه (x, y, z) و مختصات کروی آن (r, θ, φ) است.



شکل ۱-۷

همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید θ زاویه‌ای است که بردار مکان ذره با محور Z می‌سازد و از صفر تا π تغییر می‌کند. زاویه φ زاویه‌ای است که تصویر بردار r در صفحه $X - Y$ یعنی بردار ρ با محور X می‌سازد. این زاویه از صفر تا 2π تغییر می‌کند و به صورت پادساعتگرد افزایش می‌یابد.



برای پیدا کردن رابطه بین دستگاه مختصات دکارتی و کروی، ابتدا بردار ρ را که تصویر بردار مکان در صفحه $X - Y$ است می‌یابیم و سپس مؤلفه x و y را بر حسب این بردار می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}\rho &= r \sin \theta \\ x &= \rho \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (۱۴-۱)$$

رابطه‌های تبدیل دستگاه مختصات دکارتی به قطبی نیز از روی شکل و یا روابط بالا قابل استخراج است.

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta &= \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x}\end{aligned}\quad (۱۵-۱)$$

برای محاسبه روابط مربوط به سرعت و شتاب در مختصات کروی مانند مختصات قطبی ابتدا بردارهای یکه دستگاه مختصات کروی را بر حسب بردارهای یکه دستگاه مختصات دکارتی می‌نویسیم و سپس مشتق‌های آن‌ها را محاسبه می‌کنیم و در روابط اصلی قرار می‌دهیم. (به تمرین ۳ مراجعه کنید).

مثال ۳-۱ فاصله نقاط روی کره زمین

مختصات جغرافیایی شهر بندرعباس $(۲۷^\circ \text{ N}, ۵۶^\circ \text{ E})$ و مختصات جغرافیایی شهر جاکارتا $(۶^\circ \text{ S}, ۱۰۷^\circ \text{ E})$ است. در صورتیکه که یک کشتی بتواند از بندرعباس به سمت جاکارتا یک مسیر مستقیم را طی کند، باید چه مسافتی را بپیماید؟ شعاع زمین را ۶۴۰۰ km در نظر بگیرید. پاسخ: ابتدا باید طول و عرض‌های جغرافیایی فوق را به زوایای θ و φ تبدیل کنیم. چون مبدأ عرض جغرافیایی استوا است پس θ بندرعباس و θ جاکارتا عبارتند از:

$$\theta_b = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$$

$$\theta_j = 90^\circ + 6^\circ = 96^\circ$$

و طول‌های جغرافیایی احتیاج به تبدیل ندارند. بردارهای مکان این دو شهر عبارتند از:

$$\vec{r}_b = R \cos \theta_b \cos \varphi_b \hat{i} + R \cos \theta_b \sin \varphi_b \hat{j} + R \sin \theta_b \hat{k}$$



$$\vec{r}_j = R \cos \theta_j \cos \varphi_j \hat{i} + R \cos \theta_j \sin \varphi_j \hat{j} + R \sin \theta_j \hat{k}$$

برای به دست آوردن زاویه بین این دو شهر از مرکز زمین می‌توانیم بردارهایشان را در هم ضرب داخلی کنیم.

$$\begin{aligned} \vec{r}_b \cdot \vec{r}_j &= |\vec{r}_b| |\vec{r}_j| \cos(\vec{r}_b, \vec{r}_j) \\ &= R^2 (\cos \theta_b \cos \varphi_b \cos \theta_j \cos \varphi_j + \cos \theta_b \sin \varphi_b \cos \theta_j \sin \varphi_j \\ &\quad + \sin \theta_b \sin \theta_j) = R^2 (\cos \theta_b \cos \theta_j \cos(\varphi_b - \varphi_j) + \sin \theta_b \sin \theta_j) \\ (\vec{r}_b, \vec{r}_j) &= \gamma = \cos^{-1} (\cos \theta_b \cos \theta_j \cos(\varphi_b - \varphi_j) + \sin \theta_b \sin \theta_j) \\ &= 31.1^\circ = 0.54 \text{ rad} \\ s &= R\gamma = 6400 \times 0.54 = 3474 \text{ km} \end{aligned}$$



۲-۱ کار، انرژی پتانسیل، قانون پایستگی انرژی

۲-۱

در بسیاری از موارد نیروی وارد به ذره تابعی از مکان ذره یا فاصله بین ذرات است. مانند نیروی گرانش، نیروی کولنی، نیروی فنر، نیروهای بین مولکولی و بسیاری دیگر از برهم‌کنش‌های موجود در طبیعت.

دینامیک دانشی است که می‌تواند بر اساس داشتن نیروهای وارد بر ذرات و شرایط اولیه آن وضعیت آینده ذرات را محاسبه کند. قانون دوم نیوتون شتاب را به ما می‌دهد و با انتگرال‌گیری از آن می‌توان سرعت و سپس مکان را به دست آورد. اما این امر وقتی ساده‌تر می‌شود که نیرو تابعی از زمان باشد. در اینجا صرفاً با حل یک معادله دیفرانسیل روبه‌رو هستیم که البته گاهی ممکن است بسیار پیچیده شود. از این رو به معرفی کمیت‌هایی می‌پردازیم تا حل مسأله را ساده‌تر کنند.

برای سادگی حرکت را یک بعدی و در راستای x در نظر می‌گیریم. برای حرکت در سه بعد کافی است معادلات حرکت را در هر یک از بعدها به صورت جداگانه بنویسیم و یا در مواردی که نیرو فقط به صورت شعاعی است (مانند نیروی گرانش) کافی است از مختصات قطبی استفاده کرده و معادلات را فقط در راستای شعاعی بنویسیم.

سرعت برابر است با مشتق مکان بر حسب زمان

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (16-1)$$

هم‌چنین شتاب عبارتست از مشتق سرعت بر حسب زمان و یا مشتق دوم مکان بر حسب زمان.

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (17-1)$$



با تقسیم دو معادله بالا بر هم و حذف dt معادله مستقل از زمان به دست می‌آید:

$$v dv = a dx \quad (۱۸-۱)$$

معادله دیفرانسیلی که حرکت مستقیم‌الخط یک جسم تحت اثر نیروی وابسته مکان را توصیف می‌کند عبارتست از

$$F(x) = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (۱۹-۱)$$

با جایگذاری a از معادله (۱۸-۱) داریم:

$$F(x) = mv \frac{dv}{dx} \quad (۲۰-۱)$$

سمت راست معادله بالا را می‌توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$F(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad (۲۱-۱)$$

اگر عبارت داخل پراتز را انرژی جنبشی بنامیم و آن را با K نمایش دهیم، داریم

$$F(x) = \frac{dK}{dx} \Rightarrow K(x_b) - K(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx \quad (۲۲-۱)$$

انتگرال سمت راست معادله بالا طبق تعریف کار انجام شده توسط نیروی F بر روی ذره است، وقتی که ذره از x_a تا x_b حرکت کند که آن را با W نشان می‌دهیم.

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx = K_b - K_a = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 \quad (۲۳-۱)$$

رابطه بالا را قضیه کار-انرژی می‌نامند. توجه داشته باشید که مسیر حرکت ذره از x_a تا x_b در مقدار W تأثیری ندارد و این کمیت فقط به فاصله نقاط اولیه و انتهایی مسیر وابسته است. انرژی پتانسیل را به عنوان کاری که توسط نیروی پایستار در جابه‌جایی ذره از نقطه x_b تا یک نقطه مرجع مانند x_c تعریف می‌کنیم.

$$U(x_b) - U(x_c) = \int_{x_b}^{x_c} F(x) dx = - \int_{x_c}^{x_b} F(x) dx \quad (۲۴-۱)$$

مقدار انرژی پتانسیل در نقطه مرجع C کاملاً دلخواه است. برای مثال در معادله بالا $U(x_c)$ را می‌توانیم هر عدد دلخواهی بگیریم. ولی برای سادگی می‌توانیم این نقطه را جایی بگیریم که مقدار $U(x_c)$ صفر باشد.

در حد $\Delta x \rightarrow 0$ می‌توانیم معادله (۲۴-۱) را به شکل زیر بنویسیم

$$dU = -F(x)dx \Rightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (25-1)$$

باید به این نکته توجه کرد که تعریف تابعی به عنوان تابع انرژی پتانسیل مانند آنچه در معادله (۲۵-۱) وجود دارد، فقط برای نیروهای پایستار امکان پذیر است. طبق تعریف نیروی پایستار نیرویی است که کار انجام شده توسط آن از نقطه A به نقطه B مستقل از مسیر حرکت ذره باشد. البته نیروهایی که تابعی از مسیر هستند و فقط به یک بعد محدود می‌شوند (مانند نیروی فنر که فقط در راستای x است) همگی پایستارند.

با توجه به معادله (۲۴-۱) کار انجام شده در رفتن از x_a تا x_b برابر است با

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx = \int_{x_a}^{x_c} F(x)dx - \int_{x_b}^{x_c} F(x)dx \\ &= \left(U(x_a) - U(x_c) \right) - \left(U(x_b) - U(x_c) \right) \\ &= -U(x_b) + U(x_a) \end{aligned} \quad (26-1)$$

با مساوی قرار دادن معادله (۲۶-۱) و (۲۳-۱) به قانون پایستگی انرژی دست می‌یابیم

$$K_a + U(x_a) = K_b + U(x_b) = E = \text{ثابت} \quad (27-1)$$

این معادله بیان می‌کند که اگر ذره‌ای تحت اثر یک نیروی پایستار حرکت کند، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل آن که طبق تعریف آن را انرژی مکانیکی می‌نامیم، ثابت می‌ماند.

با قرار دادن $K = \frac{1}{2}mv^2$ در معادله (۲۷-۱) می‌توانیم سرعت لحظه‌ای ذره را بر حسب انرژی مکانیکی و انرژی پتانسیل آن به دست آوریم

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad (28-1)$$

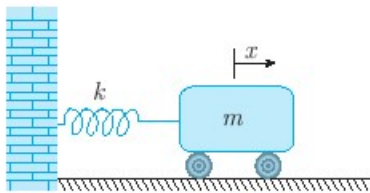
حال با انتگرال‌گیری از معادله اخیر می‌توانیم زمان را به صورت تابعی از مکان به دست آوریم

$$t - t_0 = \int \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} \quad (29-1)$$

با توجه به معادله بالا حرکت فقط به بازه‌ای از x محدود است که در آن $E - U(x)$ مثبت باشد. در فصل ۶ از این موضوع استفاده زیادی خواهد شد.

مثال ۴-۱

معادله حرکت هماهنگ ساده



وزنه‌ای به جرم m در حالت افقی به یک سر فنری متصل شده و سر دیگر فنر ثابت است. این وزنه روی سطح بدون اصطکاک قرار دارد. معادله مکان وزنه را به دست آورید.

پاسخ: نیروی وارد به ذره یک نیروی بازگرداننده خطی و تابعی از مکان است

$$F(x) = -kx \quad (۳۰-۱)$$

ابتدا انرژی پتانسیل ذره را به دست می‌آوریم، نقطه مرجع را در مبدأ یعنی $x = 0$ فرض می‌کنیم و مقدار انرژی پتانسیل در این نقطه را صفر می‌گیریم

$$U(x) - 0 = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (-kx) dx$$

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

در اینجا می‌توانیم از ثابت بودن انرژی مکانیکی ذره به روش زیر مطمئن شویم، از معادله (۳۰-۱) داریم

$$mvdv = -kx dx$$

که با انتگرال‌گیری از دو طرف داریم

$$\frac{1}{2} mv^2 = -\frac{1}{2} kx^2 + \text{ثابت}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E = \text{انرژی مکانیکی}$$

حال با استفاده از معادله (۲۹-۱) تابعیت مکان بر حسب زمان را به دست می‌آوریم

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{2}{m})(E - \frac{1}{2} kx^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} (1 - \frac{k}{2E} x^2)}} \quad (۳۱-۱)$$

برای حل انتگرال بالا از جایگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sin \theta \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{2E}} dx = \cos \theta d\theta \quad (۳۲-۱)$$

در نتیجه معادله (۳۱-۱) به شکل زیر درمی‌آید

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m} (1 - \sin^2 \theta)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}} (\theta - \theta_0)$$

از معادله بالا نتیجه می‌گیریم

$$\theta = \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0$$

حال عبارت بالا را در (۳۲-۱) قرار می‌دهیم

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0 \right)$$

می‌توانیم معادله بالا را به شکل ساده‌تر زیر خلاصه کنیم

$$x = A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (33-1)$$

که در آن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، عبارت بالا به شکل سینوسی است و نشان می‌دهد که ذره حول نقطه تعادل در نوسان است. بیشترین انحراف ذره از نقطه تعادل را دامنه نوسان می‌نامند و با A نشان می‌دهند. هم‌چنین دوره تناوب نوسان‌ها با توجه به این‌که دوره تناوب تابع سینوس برابر 2π است به صورت زیر به دست می‌آید

$$\omega t + \theta_0 = \omega(t + T) + \theta_0 = \omega t + \theta_0 + 2\pi \quad (34-1)$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

از این رو ω را سرعت زاویه‌ای می‌نامند.

برای به دست آوردن مقادیر θ_0 و A در معادله (۳۳-۱) باید شرایط اولیه مسأله را جایگذاری کنیم. برای مثال اگر بدانیم در $t = 0$ جسم در $x = 0$ قرار داشته است و در این لحظه با سرعت v_0 رها شده است، آنگاه

$$x = A \sin(\omega t + \theta_0) \xrightarrow{t=0} 0 = A \sin(0 + \theta_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \theta_0) \xrightarrow{t=0} v_0 = A\omega \cos(0 + \theta_0)$$

$$\tan \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \quad \text{در نتیجه}$$

$$A = \frac{v_0}{\omega}$$

مثال ۵-۱

سقوط آزاد در میدان نیروی گرانش

دنباله داری به جرم m در فاصله d از خورشید قرار دارد. اگر دنباله دار در یک لحظه به حالت سکون برسد و پس از آن به سمت خورشید سقوط کند، چه مدت طول می‌کشد تا به مرکز خورشید برسد؟ پاسخ: نیروی وارد بر جرم m نیروی گرانش است که فقط به فاصله از مرکز نیرو بستگی دارد. چون ذره بدون سرعت اولیه رها شده، پس مسیر آن یک خط مستقیم در امتداد مرکز نیرو است. چون نیروی گرانش یک نیروی پایستار است، می‌توانیم برای آن تابع انرژی پتانسیل به دست بیاوریم (در فصل بعد به صورت مفصل درباره انرژی پتانسیل گرانشی بحث خواهیم کرد)، نقطه مرجع را در بی‌نهایت فرض می‌کنیم و مقدار انرژی پتانسیل در این نقطه را صفر می‌گیریم

$$U(x) - 0 = - \int_{\infty}^x F(x) dx = - \int_{\infty}^x \left(- \frac{GMm}{r^2} \right) dx$$

$$U(x) = - \frac{GMx}{r} \quad (35-1)$$

قانون پایستگی انرژی را برای جرم m در لحظه رها شدن در فاصله d و بار دیگر در فاصله دلخواه x از مرکز نیرو می‌توان نوشت

$$- \frac{GMm}{d} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{x}$$

در نتیجه سرعت ذره در فاصله x از مرکز نیرو برابر است با

$$v = \pm \sqrt{2GM \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d} \right)} = \pm \sqrt{\frac{2GM}{d}} \cdot \sqrt{\frac{d-x}{x}} \quad (36-1)$$

توجه داشته باشید که ذره در اثر سقوط آزاد، در حال نزدیک شدن به مرکز نیرو است پس تغییرات شعاع نسبت به زمان منفی است و علامت سرعت باید منفی باشد. با جایگذاری صورت دیفرانسیلی سرعت داریم

$$\frac{dx}{dt} = - \sqrt{\frac{2GM}{d}} \cdot \sqrt{\frac{d-x}{x}}$$

با مرتب کردن معادله بالا به نحوی که سمت راست فقط متغیر مکان و سمت چپ فقط متغیر زمان وجود داشته باشد، داریم

$$\sqrt{\frac{2MG}{d}} dt = - \sqrt{\frac{x}{d-x}} dx$$

حال از طرفین معادله بالا انتگرال می‌گیریم، برای قرار دادن حدود انتگرال توجه داشته باشید که در $t = 0$ ذره در فاصله d و در $t = T$ که مجهول مسأله است، ذره در فاصله صفر از مبدأ قرار دارد.

$$\sqrt{\frac{2GM}{d}} \int_0^T dt = - \int_d^0 \sqrt{\frac{x}{d-x}} dx = \int_0^d \sqrt{\frac{x}{d-x}} dx \quad (37-1)$$

برای حل انتگرال سمت راست از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم

$$x = d \sin^2 \theta \Rightarrow dx = 2d \sin \theta \cos \theta d\theta$$

برای تغییر حدود انتگرال کافی است از رابطه بالا θ متناظر با $x = d$ و $x = 0$ را به دست آوریم و در انتگرال قرار دهیم. برای $x = 0$ ، $\theta = 0$ و برای $x = d$ ، $\theta = \pi/2$ است. در نتیجه معادله (37-1) به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2GM}{d}} T &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{d \sin^2 \theta}{d - d \sin^2 \theta}} \times 2d \sin \theta \cos \theta d\theta \\ \sqrt{\frac{GM}{2d^3}} T &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}} \cdot \sin \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \quad (38-1) \end{aligned}$$

در نهایت انتگرال سمت راست را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی دو برابر زاویه حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \theta d\theta &= \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \\ \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{4} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

زمان سقوط آزاد را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{GM}{2d^3}} T &= \frac{\pi}{4} \\ T &= \pi \sqrt{\frac{d^3}{8GM}} \end{aligned}$$

که این مقدار در حالتی که دنباله دار از فاصله ۱ واحد نجومی (شعاع مدار زمین) رها شود تقریباً برابر است با ۶۴٫۶ روز.

**مثال ۶-۱**

حرکت ماهواره در جو زمین در حضور مقاومت هوا

ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایروی در جو زمین حرکت می‌کند، به دلیل سرعتی که ماهواره دارد، نیروی ضعیف و ثابتی به ماهواره وارد می‌شود و باعث کاهش سرعت ماهواره می‌شود. ماهواره به آهستگی به صورت مارپیچ به طرف زمین حرکت می‌کند. از آنجا که نیروی اصطکاک ضعیف است، تغییر شعاع به آهستگی صورت می‌گیرد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در هر لحظه ماهواره عملاً در مداری دایروی به شعاع متوسط r قرار دارد. مقدار نیروی اصطکاک را برابر با f فرض کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(الف) انرژی مکانیکی کل ماهواره را به صورت تابعی از شعاع مدار ماهواره محاسبه کنید.

(ب) تغییر تقریبی شعاع را در هر دوره گردش ماهواره پیدا کنید.

(ج) تغییر تقریبی انرژی جنبشی ماهواره را در هر دوره پیدا کنید.

پاسخ:

محاسبه انرژی مکانیکی:

طبق تعریف انرژی مکانیکی برابر است با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل. تابع انرژی پتانسیل برای نیروی گرانش را در معادله (۳۵-۱) به دست آوردیم. حال باید تابع انرژی جنبشی را محاسبه کنیم. برای این کار از نتیجه مثال (۲-۱) استفاده می‌کنیم. در آن مثال سرعت یک جسم که در مداری دایروی به شعاع r در حال گردش به دور جرم مرکزی M است را به صورت زیر به دست آوردیم

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

در نتیجه انرژی جنبشی ماهواره برابر است با

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

برای محاسبه انرژی مکانیکی باید انرژی جنبشی و پتانسیل را با هم جمع کنیم

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

طبق رابطه (۲۲-۱) و (۲۳-۱) کار انجام شده روی جرم m در جابه جایی بین دو نقطه با تغییر انرژی جنبشی آن در حین این حرکت برابر است. هم‌چنین کار انجام شده روی ماهواره را در حین حرکتش به دو قسمت کار نیروی پایستار و کار نیروی ناپایستار تقسیم می‌کنیم.

$$W = \Delta K \Rightarrow W_{\text{ناپایستار}} + W_{\text{پایستار}} = \Delta K$$

کار نیروی پایستار کاری است که توسط نیروی گرانش در اثر کم شدن شعاع مدار ماهواره روی آن انجام می‌شود و طبق معادله (۱-۲۴) برابر با تغییرات انرژی پتانسیل ماهواره است.

$$W_{\text{پایستار}} = \Delta U$$

اما کار نیروی ناپایستار، کاری است که توسط نیروی اصطکاک روی ماهواره انجام می‌شود و برابر است با

$$W_{\text{ناپایستار}} = W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E = E_2 - E_1$$

پس اگر بتوانیم کار نیروی اصطکاک را به کمک انتگرال‌گیری به دست آوریم می‌توانیم آن را با تغییرات انرژی مکانیکی برابر قرار دهیم و به این ترتیب تغییرات شعاع مدار را به دست آوریم. کار نیروی اصطکاک در یک دوره تناوب برابر است با

$$W_f = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -f ds = -f(2\pi r)$$

توجه داشته باشید که نیروی اصطکاک در جهت خلاف سرعت به ماهواره وارد می‌شود و چون سرعت به مسیر مماس است، در نتیجه نیروی اصطکاک نیز مماس بر مسیر و در جهت خلاف حرکت است. علامت منفی در انتگرال بالا بیانگر خلاف جهت بودن نیرو و جهت حرکت است. اما ds بیانگر مسیر طی شده است و چون ما کار نیروی ناپایستار را در یک دوره تناوب ماهواره به دست آوردیم به همین دلیل مسیر طی شده برابر با محیط مدار دایره ای به شعاع r است.

تغییر شعاع در هر دور گردش:

حال کافی است مقدار کار نیروی ناپایستار را برابر با تغییرات انرژی مکانیکی قرار دهیم

$$\begin{aligned} W_f = E_2 - E_1 &\Rightarrow -2\pi r f = \frac{-GMm}{2r_2} - \frac{-GMm}{2r_1} \\ &= -\frac{GMm}{2} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_2 r_1} \right) = \frac{GMm \Delta r}{2r_2 r_1} \\ \Delta r &= -\frac{2\pi r r_1 r_2 f}{GMm} \end{aligned}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید علامت Δr منفی است و نشان دهنده کاهش فاصله ماهواره به مرور زمان است.

اگر r را فاصله میانگین ماهواره در یک دوره تناوب فرض کنیم، شعاع اولیه و ثانویه ماهواره را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$r_1 = \bar{r} - \frac{\Delta r}{2}, \quad r_2 = \bar{r} + \frac{\Delta r}{2}$$



حال اگر تغییرات شعاع را آنقدر کوچک فرض کنیم که بتوان از توان دوم آن صرف‌نظر کرد داریم

$$r_2 r_1 = r^2 - \frac{r}{2} \Delta r^2 \cong r^2$$

و در نهایت

$$\Delta r = -\frac{2\pi r^3 f}{GMm}$$

تغییر انرژی جنبشی ماهواره:

برای محاسبه تغییرات انرژی جنبشی می‌توانیم از رابطه‌ای که در بالا به دست آوردیم استفاده کنیم

$$\Delta K = W_f - \Delta U = -2\pi r f - \left(\frac{-GMm}{r_2} - \frac{-GMm}{r_1} \right)$$

$$\Delta K = 2\pi r f - GMm \frac{\Delta r}{r_2 r_1}$$

با قرار دادن Δr در رابطه بالا داریم

$$\Delta K = -2\pi r f - \frac{GMm}{r_2 r_1} \left(-\frac{2\pi r r_2 r_1 f}{GMm} \right) = 2\pi r f$$

جالب است که تغییرات انرژی جنبشی ماهواره مثبت است، یعنی ماهواره همچنان که در جو سقوط می‌کند دچار افزایش سرعت می‌شود. یعنی انرژی گرانشی آزاد شده ناشی از نیروی پایستارگرانش بیش از انرژی اتلافی توسط اصطکاک است.



گشتاور و تکانه زاویه‌ای

ذره‌ای به جرم m را در صفحه $x - y$ تصور کنید. فرض کنید یک تک نیروی F در این صفحه به این ذره وارد شود و مکان این ذره نسبت به مبدأ مختصات برابر r باشد (شکل (۳۹-۱)). گشتاور τ وارد به ذره نسبت به مبدأ مختصات، کمیتی برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (39-1)$$

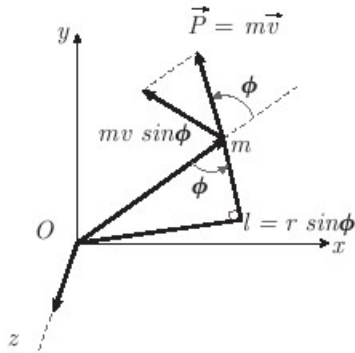
چون گشتاور حاصل ضرب خارجی بردار مکان ذره در نیروی F است، پس اندازه آن را می‌توانیم به صورت زیر به دست آوریم

$$\tau = rF_{\perp} = r_{\perp} F = rF \sin \varphi \quad (40-1)$$

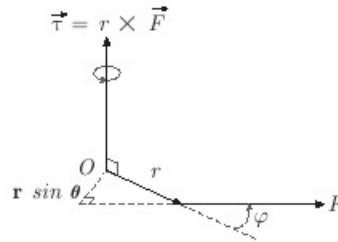


شکل (۹-۱) ذره‌ای با تکانه خطی $\vec{p} = m\vec{v}$ را نشان می‌دهد که در صفحه $x - y$ در حال حرکت است. اگر بردار مکان این ذره r باشد، تکانه زاویه‌ای این ذره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \quad (۴۱-۱)$$



شکل ۹-۱



شکل ۸-۱

هم‌چنین اندازه تکانه زاویه‌ای با توجه به تعریف آن عبارتست از

$$l = rp_{\perp} = r_{\perp}p = mrv_{\perp} = mr_{\perp}v = mrv \sin \varphi \quad (۴۲-۱)$$

برای رسیدن به یک نتیجه مهم از معادله (۴۱-۱) که تعریف تکانه زاویه‌ای است نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right) \quad (۴۳-۱)$$

در معادله بالا $\frac{d\vec{v}}{dt}$ برابر با شتاب ذره (a) و $\frac{d\vec{r}}{dt}$ برابر با سرعت ذره است. بنابراین می‌توان معادله (۴۳-۱) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v})$$

از آنجا که ضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است، داریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}$$

تکانه زاویه‌ای کل جسم حول محور Z برابر است با مجموع تکانه زاویه‌ای تک تک ذرات آن. یعنی

$$L = \sum_k r_k (m_k v_k) = \left(\sum_k m_k r_k^2 \right) \omega$$

یا

$$L = I\omega \quad (46-1)$$

که در آن

$$I = \sum_k m_k r_k^2 = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad (47-1)$$

کمیت I برای یک جسم صلب که حول محور معینی می‌چرخد ثابت است و فقط به ساختار هندسی شکل وابسته است و لختی دورانی (مانان اینرسی) حول آن محور نامیده می‌شود. این کمیت چگونگی توزیع جرم جسم چرخان حول محور چرخش را مشخص می‌کند. چون جسم پیوسته است می‌توانیم به جای جمع زدن‌های گسسته، انتگرال بگیریم و I را به صورت زیر بنویسیم

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \quad (48-1)$$

توجه داشته باشید که r در انتگرال بالا فاصله عمودی هر المان جرمی dm از محور چرخش است. هم‌چنین برای محاسبه انرژی جنبشی چرخشی جسم، انرژی‌های جنبشی تک تک ذره‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$K = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_k m_k r_k^2 \right] \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (49-1)$$

چون ممان اینرسی I به صورت خطی با جرم dm متناسب است، بنابراین برای محاسبه ممان اینرسی اجرام بزرگ می‌توانیم آنها را به جرم‌های بسیار کوچک dm تبدیل کنیم و مرحله به مرحله جمع زده یا انتگرال بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

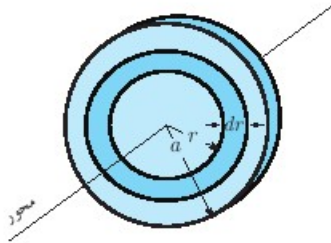
مثال ۷-۱ ممان اینرسی دیسک یکنواخت

ممان اینرسی یک دیسک یکنواخت به جرم M و شعاع a را حول محوری که از مرکز دیسک می‌گذرد، محاسبه کنید.



پاسخ: ابتدا چگالی سطحی دیسک را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma = M/\pi a^2$$



برای محاسبه ممان اینرسی یک دیسک دایره ای ابتدا مانند شکل (۱۱-۱) آن را به حلقه‌های هم مرکز تقسیم می‌کنیم. به این ترتیب گشتاور لختی هر یک از حلقه‌ها حول محور موردنظر عبارتست از

شکل ۱۱-۱

$$I_{\text{حلقه}} = \int r^2 dm = r^2 \int dm = r^2 (dm)_{\text{حلقه}}$$

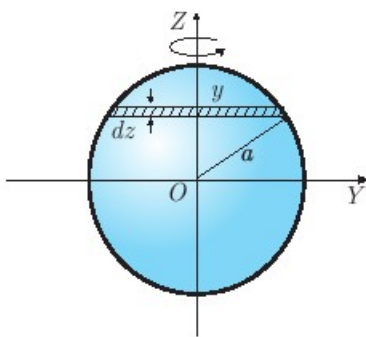
$$(dm)_{\text{حلقه}} = 2\pi r dr \times \sigma$$

حال ممان اینرسی دیسک را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$I = \int_0^M r^2 dm = \int_0^a r^2 2\pi r dr \sigma = 2\pi \sigma \int_0^a r^3 dr = 2\pi \sigma \frac{a^4}{4} = \pi \sigma \frac{a^4}{2} = \frac{1}{2} M a^2 \quad (50-1)$$

پس ممان اینرسی یک دیسک به شعاع a و جرم M برابر $\frac{1}{2} M a^2$ است.

مثال ۸-۱ ممان اینرسی کره توپیر



شکل ۱۲-۱

ممان اینرسی یک کره یکنواخت به جرم M و شعاع a را حول محوری که از مرکز کره می‌گذرد، محاسبه کنید.

پاسخ: کره را به صورت دیسک‌هایی به ضخامت dz برش می‌دهیم به طوری که از تغییر شعاع بالا و پایین آن بتوان صرف نظر کرد و آن را به صورت یک دیسک ساده در نظر بگیریم.

$$dI = \frac{1}{4} y^2 dm = \frac{1}{4} y^2 (\rho \pi y^2 dz)$$

$$I = \int dI = \int_{-a}^a \frac{1}{4} \pi \rho y^4 dz = \int_{-a}^a \frac{1}{4} \pi \rho (a^2 - z^2) dz = \frac{1}{15} \pi \rho a^5 = \frac{2}{5} Ma^2$$

(۵۱-۱)

تساوی آخر از جایگذاری چگالی از معادله زیر به دست آمده است

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi a^3}$$

در نتیجه ممان اینرسی یک کره یکنواخت با جرم M و شعاع a برابر $\frac{2}{5} Ma^2$ است.

مثال ۹-۱

بررسی سیستم زمین - ماه

پرتوهای لیزر توسط تلسکوپ به سمت ماه تابیده می‌شود و به وسیله آینه‌هایی که روی ماه نصب گردیده بازتاب می‌گردند. با اندازه‌گیری زمان رفت و برگشت پرتوهای لیزر، فاصله بین زمین و ماه با دقت بسیار بالایی اندازه‌گیری می‌شود. به وسیله این اندازه‌گیری‌ها دیده می‌شود که ماه به آرامی در حال دور شدن از زمین است. در این مثال این مسأله را گام به گام مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۱۳-۱

به شکل (۱۳-۱) توجه کنید. نیروی گرانش ماه باعث پدیده جزرومد می‌شود. در اثر این پدیده آب اقیانوس‌ها در راستایی که به سمت ماه است، کشیده می‌شوند. اما در اثر حرکت وضعی زمین، زمین یک نیروی اصطکاک به آب‌ها وارد می‌کند و باعث می‌شود راستای این کشیدگی از راستای ماه منحرف شود، این انحراف باعث اعمال یک گشتاور توسط ماه بر زمین می‌شود و تکانه زاویه‌ای زمین را دچار تغییر می‌کند. چون نیروی بین زمین و ماه کاملاً گرانشی و مرکزی است بنابراین اندازه حرکت سیستم ثابت می‌ماند.

کاهش تکانه زاویه‌ای زمین باعث افزایش تکانه زاویه‌ای ماه به همان اندازه خواهد شد و ماه از زمین دور می‌شود. تغییر در تکانه زاویه‌ای سیستم، باعث تغییر در فاصله زمین و ماه و همچنین تغییر در دوره تناوب حرکت وضعی زمین و حرکت انتقالی ماه می‌شود. این تغییرات تا زمانی که دوره تناوب همه اجزا با هم برابر شود ادامه خواهد داشت. در واقع این گشتاور باعث می‌شود رفته رفته ماه و زمین به یکدیگر قفل



گرانشی شوند. هنگامی که این دو جسم به هم قفل شدند، تمام نیروها از مرکز دو جرم عبور می‌کند و هیچ گشتاوری به دو جسم وارد نمی‌شود و سامانه به حالت پایدار می‌رسد.

برای سادگی از شعاع ماه صرف‌نظر می‌کنیم و آن را ذره‌ای با جرم M_M' فرض می‌کنیم. هم‌چنین از نیروی گرانش خورشید در تمام قسمت‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. در نتیجه چون برآیند نیروهای خارجی وارد به سیستم صفر است طبق معادله (۴۴-۱) تکانه زاویه‌ای سیستم ثابت می‌ماند. تکانه زاویه‌ای در لحظه کنونی را با L_1 نشان می‌دهیم که برابر است با

$$K_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}$$

که در آن ω_{E1} و ω_{M1} به ترتیب سرعت زاویه‌ای وضعی زمین و سرعت زاویه‌ای انتقالی ماه است. چون از شعاع ماه صرف‌نظر کردیم، بنابراین از ممان اینرسی وضعی ماه هم صرف‌نظر می‌کنیم. این تقریب خوبی است چرا که تکانه زاویه‌ای وضعی ماه نسبت به تکانه زاویه‌ای مداری آن تقریباً 25000 بار کوچکتر است. اندیس ۱ نشان دهنده زمان حال است. هم‌چنین I_E و I_M ممان اینرسی زمین و ماه حول محور وضعی زمین است. برای سادگی مدار ماه را دایروی و محور وضعی زمین را عمود بر صفحه مداری ماه در نظر می‌گیریم.

فاصله و دوره تناوب اجزا تا وقتی که دوره تناوب یا سرعت زاویه‌ای همگی برابر شود تغییر می‌کند. فرض می‌کنیم در حالتی که ماه و زمین به هم قفل شده باشند، سرعت زاویه‌ای آنها ω_2 و تکانه زاویه‌ای سیستم L_2 خواهد شد. در نتیجه

$$L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2$$

چون تکانه زاویه‌ای سیستم تغییر نمی‌کند $L_2 = L_1$. اگر از جمله مربوط به زمین در رابطه بالا صرف نظر کنیم (بعدا مقدار خطای ناشی از این کار را محاسبه خواهیم کرد) خواهیم داشت

$$I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = I_{M2} \omega_2$$

اگر فرض کنیم مدار ماه به دور زمین همواره دایروی بماند و سرعت زاویه‌ای را با استفاده از مثال ۲-۱ به دست آوریم خواهیم داشت

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM_E}{D^3}} \Rightarrow \omega^2 D^3 = GM_E = \text{ثابت} \quad (52-1)$$

که در آن D شعاع مدار ماه به دور زمین است.

L_2 را بازنویسی می‌کنیم

$$L_2 = I_{M2} \omega_2 = M_M D^{\frac{3}{2}} \omega_2$$

معادله بالا را به توان ۲ می‌رسانیم و با استفاده از معادله (۵۲-۱) و این‌که $L_2 = L_1$ ، فاصله نهایی ماه از زمین را محاسبه می‌کنیم

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله (۵۲-۱) سرعت زاویه‌ای نهایی سیستم به دست می‌آید

$$\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$$

در ادامه نتایج بالا را به صورت عددی بررسی می‌کنیم.

برای این کار باید ابتدا ممان اینرسی زمین را محاسبه کنیم. فرض می‌کنیم چگالی زمین از مرکز تا شعاع $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$ برابر با $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ و از r_i تا $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ برابر با $\rho_o = 4.7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ است. در نتیجه با استفاده از معادله (۵۱-۱) ممان اینرسی این کره توپر دو جزئی برابر است با

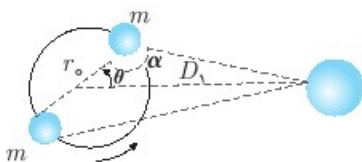
$$I_E = \frac{2}{5} \frac{4\pi}{3} [r_o^5 \rho_o + r_i^5 (\rho_i - \rho_o)] = 8.7 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

حال اگر جرم زمین و ماه را به ترتیب $M_E = 6.7 \times 10^{24} \text{ kg}$ و $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ و فاصله کنونی ماه تا زمین را $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ و سرعت زاویه‌ای انتقالی ماه به دور زمین را $\omega_E = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ و سرعت زاویه‌ای وضعی زمین را $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$ نظر بگیریم، آنگاه تکانه زاویه‌ای سیستم زمین ماه برابر است با

$$I_1 = I_E \omega_E + I_{M1} \omega_{M1} = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

و در نتیجه فاصله نهایی ماه از زمین برابر $D_2 = 5.4 \times 10^8 \text{ m}$ و سرعت زاویه‌ای نهایی آن $\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ می‌شود، یعنی دوره تناوب حرکت انتقالی آن تقریباً ۴۶ روز می‌شود.

اگر در محاسبه L_2 سهم زمین را نیز در نظر می‌گیریم، فرق چندانی به وجود نمی‌آید، چون $I_E \omega_2 = 1.3 \times 10^{32} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ در حالی که $I_{M2} \omega_2 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ است. این محاسبه نشان می‌دهد سهم ماه در تکانه زاویه‌ای سیستم تقریباً ۲۶۰ برابر سهم زمین است. در نتیجه تقریبی که استفاده کردیم باعث خطای زیادی نمی‌شود.



شکل ۱۴-۱

حال می‌خواهیم گشتاوری که ماه بر آب‌های زمین وارد می‌کند را تخمین بزنیم. برای این کار فرض می‌کنیم آب‌های زمین به شکل دو ذره با جرم m در دو طرف زمین و با زاویه θ نسبت به ماه (مانند شکل ۱۴-۱) قرار گرفته‌اند.



فاصله هر کدام از جرم‌ها را با استفاده از زاویه θ و قانون کسینوس‌ها می‌توان محاسبه کرد. نیروی گرانشی که ماه بر جرم m نزدیک‌تر وارد می‌کند برابر است با

$$F_c = \frac{GmM_M}{D_\lambda^2 + r_o^2 - 2D_\lambda r_o \cos(\theta)}$$

و نیرویی که به جرم m دورتر وارد می‌کند برابر است با

$$F_f = \frac{GmM_M}{D_\lambda^2 + r_o^2 + 2D_\lambda r_o \cos(\theta)}$$

برای محاسبه گشتاور نیاز به زاویه بین F و r_o داریم. این زاویه را با استفاده از رابطه سینوس‌ها به دست

می‌آوریم

$$\frac{\sin \alpha}{D_\lambda} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{D_\lambda^2 + r_o^2 - 2D_\lambda r_o \cos \theta}}$$

در نتیجه گشتاور وارد بر جرم m نزدیک‌تر برابر است با

$$\tau_c = F_c \frac{\sin(\theta) r_o D_\lambda}{[D_\lambda^2 + r_o^2 - 2D_\lambda r_o \cos(\theta)]^{3/2}} = \frac{GmM_M \sin(\theta) r_o D_\lambda}{[D_\lambda^2 + r_o^2 - 2D_\lambda r_o \cos(\theta)]^{3/2}}$$

به همین ترتیب گشتاور وارد بر جرم m دورتر برابر است با

$$\tau_f = F_f \frac{\sin(\theta) r_o D_\lambda}{[D_\lambda^2 + r_o^2 + 2D_\lambda r_o \cos(\theta)]^{3/2}} = \frac{GmM_M \sin(\theta) r_o D_\lambda}{[D_\lambda^2 + r_o^2 + 2D_\lambda r_o \cos(\theta)]^{3/2}}$$

گشتاور نیروی F_c عمود بر صفحه و در جهت داخل صفحه است و گشتاور نیروی F_f نیز عمود بر صفحه ولی به سمت بیرون صفحه است. که مجموع گشتاورها به سمت داخل صفحه خواهد بود. پس گشتاور کل عبارتست از

$$\begin{aligned} \tau_c - \tau_f &= GmM_M \sin(\theta) r_o D_\lambda^{-2} \left(1 - \frac{3r_o^2}{2D_\lambda^2} + \frac{3r_o \cos(\theta)}{D_\lambda} \right. \\ &\quad \left. - 1 + \frac{3r_o^2}{2D_\lambda^2} + \frac{3r_o \cos(\theta)}{D_\lambda} \right) \\ &= \frac{6GmM_M r_o^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{D_\lambda^3} \end{aligned}$$

در عبارت بالا چون $\frac{r_o}{D_\lambda} \ll 1$ از تقریب $(1+x)^a \simeq 1+ax$ استفاده کرده‌ایم. در معادله بالا θ

تقریباً 3° درجه و 10^{16} kg و $m = 376 \times 10^{16} \text{ N m}$ در نتیجه $\tau = 471 \times 10^{16} \text{ N m}$ است.

توجه داشته باشید که این گشتاوری است که از طرف ماه بر زمین وارد می‌شود و در اثر آن تکانه زاویه ای زمین تغییر می‌کند، از آنجا که تکانه زاویه‌ای زمین برابر است با

$$L_E = I_E \omega_E$$

در نتیجه با استفاده از معادله (۴۳-۱) می‌توانیم آهنگ تغییر سرعت زاویه ای حرکت وضعی زمین را

بیابیم

$$\tau = \frac{dL_E}{dt} = I_E \frac{d\omega_E}{dt}$$

از طرفی توجه داشته باشید که تکانه زاویه ای سیستم زمین ماه، به دلیل نبود نیروی خارجی پایسته است، یعنی

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I_E \omega_E + I_M \omega_M) = \tau_{sys} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(I_E \omega_E) = -\frac{d}{dt}(I_M \omega_M)$$

با استفاده از معادله (۵۲-۱) داریم

$$I_M \omega_M = M_M D \left[\frac{GM_E}{D} \right]^{1/2} = M_M [D GM_E]^{1/2}$$

با استفاده از نتیجه بالا می‌توانیم تغییرات فاصله ماه از زمین را محاسبه کنیم.

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(M_M \sqrt{D GM_E}) = M_M \sqrt{GM_E} \frac{d\sqrt{D}}{dt} = \frac{M_M \sqrt{GM_E}}{2\sqrt{D}} \frac{dD}{dt}$$

برای مثال اگر بخواهیم تغییرات فاصله ماه تا زمین را در یک سال محاسبه کنیم، کافی است dt را در معادله بالا برابر با یک سال قرار دهیم و dD را به دست آوریم. به این ترتیب فاصله ماه از زمین سالانه حدود ۳۴ میلی متر افزایش می‌یابد.



۱. ذره A ، تحت تأثیر نیرویی که مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد، روی دایره‌ای به شعاع R در صفحه xy حرکت می‌کند. مرکز این دایره در مبدأ مختصات است. ذره B روی یک سهمی در همان صفحه و تحت تأثیر همان نیرو حرکت می‌کند. کانون سهمی در مبدأ مختصات و راس آن در نقطه‌ای به مختصات دکارتی $(-a, 0)$ قرار دارد و a مقداری مثبت است.

(الف) با توجه به تعریف سهمی، معادله مسیر ذره B را در دستگاه قطبی بر حسب پارامتر a ، یعنی به شکل $r = r(\theta, a)$ به دست آورید.

(ب) اگر $a < R$ باشد، این دو خم در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. این نقاط را P و Q نامگذاری می‌کنیم. فرض کنید $a = kR$ باشد که $0 < k < R$. معادله حاکم بر مختصه θ ی نقاط P و Q را به دست آورید. به ازای $\theta = 0, 25^\circ$ ، k مختصات این دو نقطه را به دست آورید.

(ج) فرض کنید که برای مختصه θ ی ذره B داریم $\theta = ct + \frac{\pi}{3}$. که c مقداری ثابت و مثبت و t زمان است. مدت زمانی را پیدا کنید که در طول آن، ذره B نسبت به ذره A در فاصله کمتری از مرکز نیرو قرار دارد.

۲. نشان دهید که اگر بردار مکان ذره‌ای به صورت زیر باشد

$$\vec{r} = (a \sin \omega t)\hat{i} + (b \cos \omega t)\hat{j}$$

مسیر آن یک بیضی با قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ است. هم‌چنین بردار سرعت این ذره را محاسبه کنید.

۳. نشان دهید بردارهای یک مختصات کروی در مختصات دکارتی به شکل زیر در می‌آیند

$$\hat{r} = \hat{\rho} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta = \hat{i} \sin \theta \cos \phi + \hat{j} \sin \theta \sin \phi + \hat{k} \cos \theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{\rho} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta = \hat{i} \cos \theta \cos \phi + \hat{j} \cos \theta \sin \phi - \hat{k} \sin \theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi$$

با توجه به قسمت قبل نشان دهید مؤلفه‌های بردار سرعت و شتاب در مختصات کروی به صورت زیر می‌باشند

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + (r \dot{\phi} \sin \theta) \hat{\phi}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) \hat{\theta}$$

$$+ (r \sin \theta \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta) \hat{\phi}$$

۴. ذره‌ای با سرعت ثابت v در مسیری سهمی شکل به معادله $y^2 = 4fx$ حرکت می‌کند. در این رابطه f مقداری ثابت است. مؤلفه‌های سرعت و شتاب این ذره را در مختصات قطبی به دست آورید.
۵. ماهواره‌ی مثال (۱-۶) را در نظر بگیرید، این بار فرض کنید اندازه نیروی اصطکاک جو به صورت زیر است

$$f = \gamma mv$$

که v سرعت ماهواره در مدارش است و جهت نیرو در خلاف سرعت ماهواره است. ثابت کنید تابعیت فاصله ماهواره بر حسب زمان به صورت زیر است

$$r = r_0 e^{-2\gamma t}$$

که در آن r_0 شعاع مدار ماهواره در لحظه‌ی $t = 0$ است. فرض کنید مسیر ماهواره در هر لحظه یک دایره است.

۶. وقتی اجرام سنگین مانند خوشه‌های کروی و یا کهکشان‌های کوچک، درون کهکشان‌های بزرگ در حرکت هستند، به دلیل برهم کنش‌های گرانشی، نیرویی در خلاف جهت حرکت به آنها وارد می‌شود که باعث کندتر شدن آنها می‌شود. به این نیرو اصطکاک دینامیکی گفته می‌شود. (الف) فرض کنید رابطه کلی اصطکاک دینامیکی به صورت زیر باشد.

$$f_d = C(GM)^a v^b \rho^c$$

به طوری که C یک ثابت بی‌بعد و a ، b و c ثابت هستند. ρ چگالی جرمی کهکشان میزبان و M جرم شیء در حال حرکت درون کهکشان میزبان و v سرعت آن است. به کمک تحلیل ابعادی ضرایب a ، b و c و در نتیجه رابطه‌ای برای نیروی اصطکاک دینامیکی به دست آورید. فرض کنید تفاوت کاهش سرعت جسم ناشی از اصطکاک دینامیکی با افزایش سرعت ناشی از تغییرات شعاع مداری جسم نسبت به سرعت جسم، v ، قابل صرف نظر کردن است. (ب) یک شیء به جرم M در فاصله اولیه r_0 در حال حرکت دایره‌ای به دور مرکز کهکشان است که در اثر اصطکاک دینامیکی به آهستگی شعاع آن تغییر می‌کند. اگر رابطه چگالی با فاصله از مرکز کهکشان به صورت زیر باشد

$$\rho(r) = \frac{v^2}{4\pi G r^2}$$

رابطه‌ای برای زمان رسیدن جرم M به مرکز کهکشان به دست آورید. (ج) یکی از کهکشان‌های کوچک که قمر راه شیری است، LMC (ابر ماژلانی بزرگ^۱) نام دارد. جرم آن 2×10^{10} برابر جرم خورشید و فاصله‌اش تا مرکز کهکشان ۵۱ کیلوپارسک است. اگر

1) Large Magellanic Cloud



سرعت LMC برابر با 30° کیلومتر بر ثانیه و مقدار $C = 23$ باشد، چه مدت طول می‌کشد که LMC در اثر اصطکاک دینامیکی به مرکز راه شیری سقوط کند.

«آزمون انتخابی تیم المپیاد جهانی ۲۰۱۲»

۷. آلبرت انیشتین در مقاله‌های مربوط به نظریه نسبیت به این نتیجه رسید که اگر بخواهیم قانون پایستگی تکانه خطی را حفظ نماییم باید جرم ذره را به صورت زیر تعریف نماییم

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

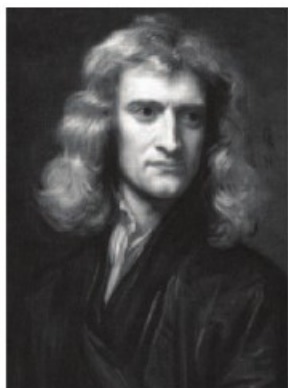
ذره‌ای را در نظر بگیرید که نیروهای وارد بر آن هم جهت با سرعت آن است. با استفاده از رابطه

$$F = \frac{dP}{dt}$$

اصل هم‌ارزی جرم و انرژی را به صورت زیر اثبات کنید

$$\Delta K = c^2 \Delta m$$

۸. با توجه به مثال ۹-۱، حساب کنید، در هر سال، شبانه روز زمین چند ثانیه بیشتر می‌شود؟
۹. با استفاده از معادله (۴۸-۱) عبارتی برای انرژی مکانیکی سیستم زمین ماه به دست آورید. آیا انرژی مکانیکی نیز مانند تکانه زاویه ای ثابت است؟
۱۰. فرض کنید تمام سطح زمین توسط اقیانوس‌ها پوشیده شده است و تغییر ارتفاع آب در اثر جزر و مد را $5/0$ متر فرض کنید (این مقدار را در فصل بعد محاسبه خواهیم کرد). هم‌چنین فرض کنید 10° درصد از تغییر انرژی پتانسیل آب صرف گرما می‌شود. چه مقدار انرژی در یک سال از این راه تلف می‌شود؟ این مقدار را با تغییر انرژی سیستم زمین-ماه در یک سال مقایسه کنید.



آیزاک نیوتون (۱۶۴۲-۱۷۲۷) در یک خانواده کشاورز در ده وولستورپ^۱ انگلستان متولد شد. در باره سال‌های اول زندگیش اطلاع زیادی در دست نیست و زندگی دانشگاهی او در دوره لیسانس در کمبریج به ظاهر چندان ممتاز نبوده است. در سال ۱۶۶۵ میلادی شیوع طاعون باعث تعطیلی دانشگاه‌ها شد و نیوتون به خانه‌اش در ده بازگشت و تا سال ۱۶۶۷ در آنجا ماند.

در این دو سال خلافتش به صورت دریایی از اکتشافات بی‌همتا در تاریخ فکر بشر پدیدار شد: سری دو جمله‌ای برای توان‌های منفی و کسری، حساب دیفرانسیل و انتگرال، قانون گرانش عمومی و تجزیه طیف خورشید به وسیله منشور. در سال‌های پیریش خاطرات دوران جوانی معجزه‌آسای خود را چنین بیان کرده است: «آن زمان بهترین دوران عمر من در کشفیات بود و بیش از هر زمان دیگر به ریاضیات و فلسفه توجه داشتم».

نیوتون همواره شخصی درونگرا و راز نگهدار بود و اغلب اکتشافات شگفت‌آورش را نزد خود حفظ می‌کرد. او تمایلی به انتشار کارهای خود نداشت و اغلب کارهای برجسته خود را به اصرار و پافشاری دوستانش جمع‌آوری می‌کرد. کشفیات ریاضی او هرگز به طور منظم و منسجم منتشر نشد و به طور محدود و تا حدی به تصادف، از طریق گفتگوها و نامه‌هایی که در پاسخ سؤالات دیگران می‌نوشت، معلوم گشت. نورشناسی و ساختن تلسکوپ جزو کارهای مورد علاقه‌اش بوده است. او برای تراشیدن عدسی، روش‌های زیادی را به کمک وسایل ساخت خودش، تجربه کرد و در حدود سال ۱۶۷۰ اولین تلسکوپ بازتابی را ساخت. تجزیه پرتوهای خورشید با استفاده از منشور (که از کارهای اولیه اوست)، همواره این کار را در ردیف یکی از کارهای کلاسیک ابدی در علوم تجربی، مشخص کرده است.

نیوتون در تلاش‌های علمی‌اش تقریباً شبیه به یک کوه آتشفشان با دوران خاموشی طولانی بود که گهگاه با فعالیت‌های فوق بشری فروزان می‌شد. وقتی کتاب اصول ریاضی فلسفه طبیعی (principia) که طی ۱۸ ماه تمرکز کامل و باورنکردنی فکری نوشته شده بود، در سال ۱۶۸۷ منتشر کرد بلافاصله به عنوان یکی از برجسته‌ترین دستاوردهای فکر بشر شناخته شد. نیوتون در این کتاب اصول اساسی مکانیک نظری و دینامیک سیالات را طرح کرد؛ اولین بیان ریاضی حرکت موج را ارائه کرد؛ قوانین کپلر را از قانون عکس مجذور فاصله گرانش به دست آورد؛ جرم زمین، خورشید و سیارات قمردار را محاسبه کرد؛ پخ

1) Woolsthorpe



شدگی شکل زمین را بیان کرد؛ و از آن برای توضیح تقویم اعتدالین استفاده کرد؛ و نظریه جزر و مد را پایه‌گذاری کرد. این‌ها تنها شمه‌ای از کار پرشکوه او بود. نیوتون در دینامیک و مکانیک سماوی به موفقیتی دست یافت که کپرنیک، کپلر و گالیله راه آن را هموار کرده بودند. این پیروزی چنان کامل بود که در طول دو قرن بعد از آن، کار بزرگ‌ترین دانشمندان این رشته‌ها از پانویس‌هایی بر این کار عظیم نیوتون تجاوز نکرد. انتشار کتاب او تحت عنوان نورشناسی (optics) در سال ۱۷۰۴ یکی از با ارزش‌ترین کارها در زمینه علوم بود. در این کتاب او کارهای قبلی خود را در مورد نور و رنگ جمع‌آوری کرد و توسعه داد. او نتایج مقدماتی اما بی‌نهایت دقیقی را، بر مبنای تجربه، برای تشریح ماهیت احتمالی ماده به دست آورد؛ و با آنکه بررسی اندیشه‌هایش راجع به اتم و حتی هسته مستلزم آزمایش‌های دقیق تر اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بود، معلوم شد که ایده‌های اصلیش کاملاً درست بوده است. او به عنوان پیوست، سوالات مشهور خود، یا اندیشه‌هایی در زمینه‌هایی از علوم را که بعدها مجال پرداختن به آنها را نیافت اضافه کرد. دو مطلب حیرت‌انگیز از سوالات ۱ و ۳۰ را نقل می‌کنیم: «آیا اجسام از راه دور بر نور اثر نمی‌کنند و با تأثیرشان پرتوهای نور را خم نمی‌کنند؟» و «آیا اجسام مادی و نور قابل تبدیل به یکدیگر نیستند؟» از جملات فوق چنین به نظر می‌رسد که نیوتون در اینجا خمش گرانشی نور و هم‌ارزی جرم و انرژی را بیان می‌کند که نتایج اصلی نظریه نسبیت هستند.

وقتی از او سؤال شد که اکتشافات خود را چگونه انجام داده‌اید، پاسخ داد که «مطلب را به طور دائم در نظر می‌گیرم و منتظر می‌شوم که نخستین پرتوها اندک اندک تبدیل به روشنایی کامل گردند». اغلب، نیوتون را یک خردگرای تمام عیار و تجسمی از عصر خردگرایی توصیف می‌کنند. شاید دقیق تر آن باشد که راجع به او از دید قرون وسطی بیندیشیم: شخصی مقدس، گوشه نشین و دارای قوه شهودی که علوم و ریاضیات را ابزار کشف معمای جهان می‌دانست.

