



مکانیک (۱)

سینماتیک و دینامیک



برای داوطلبان المپیاد فیزیک



مؤلفان:

سیدعلی مدنی تنکابنی - سیدبابک مظهری



المپیاد فیزیک

بیست‌گفتار ناتشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند. کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود مخصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است موردپسند و استفاده دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمه مؤلف

مجموعه‌ی در نظر گرفته شده برای شما دانش‌آموزان عزیز، شامل کتاب‌هایی در زمینه‌های مکانیک، الکتریسیته، مغناطیس، نور، نجوم، و حرارت و سیالات می‌باشد. هر کتاب بنابر حجم مطالب، به بخش‌های کوچک‌تری که در جلدهای گوناگون آمده است، تقسیم شده است. با توجه به هدف اصلی این مجموعه که آمادگی دانش‌آموزان برای مراحل مختلف المپیاد فیزیک می‌باشد، مباحثش شامل مطالب علمی پایه‌ای و همچنین پیشرفته برای بالا بردن قابلیت شما در گذراندن مراحل مختلف المپیاد می‌باشد.

سعی ما در این مجموعه بر این بوده است که مباحث را از مفاهیم پایه‌ای تا پیشرفته با تشریح کافی و با ذکر مثال‌ها و مسائل مختلف، با کمترین پیچیدگی به شما آموزش داده شود، بنابراین با خواندن دقیق این مجموعه، می‌توانید به سطح بالایی از دانش فیزیک و قابلیت حل مسائل فیزیکی دست یابید. توجه داشته باشید که دو قسمت مسائل حل شده (المپیادی و غیرالمپیادی) موجود در هر بخش، خود شامل نکات علمی مهمی هم در فهم مسائل و هم برای حل مسائل می‌باشد، لذا این قسمت‌ها را نیز مانند متن عملی ارائه شده به دقت مطالعه کنید.

قسمت اول مبحث مکانیک که در این کتاب (مکانیک (۱)) به آن پرداخته می‌شود، شامل دو بخش سینماتیک و دینامیک که از مهم‌ترین و پایه‌ای‌ترین مباحث فیزیکی است، می‌باشد. سعی ما در این کتاب بر این بوده است که با روندی متفاوت در ارائه مطالب، یادگیری مباحث ارائه شده را برای شما آسان‌تر و لذت‌بخش کنیم. لازمه یادگیری بخش‌های دیگر مکانیک و حتی بخش‌هایی از دیگر مباحث فیزیکی این مجموعه، تسلط بر مباحث این کتاب است. بنابراین سعی کنید که با حوصله و دقت کافی این کتاب را مطالعه و مسائل آن را به دقت حل کنید.

آرزو مندیم که با ارائه این کتاب و سایر کتاب‌های این مجموعه، به هدف خود در مورد رضایت شما عزیزان و همچنین بالا بردن سطح علمی دانش‌آموزان کشور عزیزمان دست یابیم.

babak.mazhari@gmail.com

alimadani : @ut.ac.ir

با آرزوی موفقیت



فصل ۱	حرکت‌شناسی (سینماتیک)	فصل ۲	نیروشناسی (دینامیک)	۱۹۱
۲۶	مباحث المپیاد	۲۶	مباحث المپیاد	۲۱۹
۵۲	مسائل نمونه فصل ۱	۵۲	مسائل نمونه فصل ۱	۲۲۹
۵۷	پاسخ مسائل نمونه فصل ۱	۵۷	پاسخ مسائل نمونه فصل ۱	۲۳۵
۸۵	تمرینات فصل ۱	۸۵	تمرینات فصل ۱	۲۶۶
۹۰	سؤال‌های المپیاد فصل ۱	۹۰	سؤال‌های المپیاد فصل ۱	۲۷۲
۱۱۷	پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۱	۱۱۷	پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۱	۳۰۱

حرکت شناسی (سینماتیک)



ما همه روزه در دنیای پیرامون خود حرکت‌های متفاوتی را مشاهده می‌کنیم که هر کدام در اثر عواملی خاص ایجاد شده‌اند. این عوامل تعیین‌کننده‌ی چگونگی حرکت یک جسم می‌باشند، برای مثال حرکت یک سیاره در مسیر دایروی به دور خورشید در اثر نیروی جاذبه‌ی بین آنها به وجود می‌آید و حرکت یک توپ تنیس در اثر ضربه‌ی شدید راکت در یک فاصله‌ی زمانی بسیار کوتاه به وجود می‌آید و سپس نیروی وزن توپ و مقاومت هوا هدایت‌کننده‌ی مسیر حرکت توپ خواهد بود.

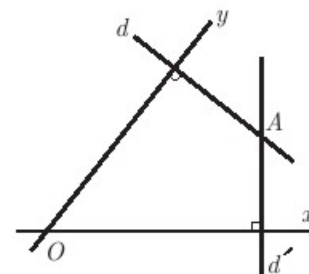
علم سینماتیک به تحلیل و بررسی حرکات مختلف می‌پردازد بدون آنکه به عوامل ایجادکننده‌ی این حرکات (نیروها) توجهی داشته باشد. به وسیله‌ی علم سینماتیک و روابطی که بر آن حاکم است می‌توان مشخصات حرکت یک جسم را تحلیل نمود. این مشخصات عبارتند از کمیت‌هایی که به وسیله‌ی دو کمیت بنیادی و اولیه‌ی مکان و زمان قابل تعریف می‌باشند و به آنها کمیت‌های ثانویه گفته می‌شود. در این فصل به بررسی این کمیت‌ها و چگونگی تحلیل حرکت یک جسم می‌پردازیم.

مکان و زمان



مکان و زمان دو کمیت پایه و بنیادی در علم فیزیک هستند و سطره‌ی قوانین علم فیزیک را احاطه کرده‌اند به طوری که اگر ماهیت این دو کمیت را تغییر دهیم نگرشی نوین در علم فیزیک ایجاد خواهد شد همان‌طور که آلبرت انیشتین به وسیله‌ی نبوغ بی‌نظیر خود این کار را انجام داد و تحولی در علم فیزیک ایجاد نمود.

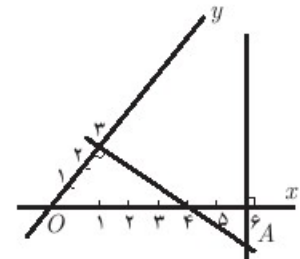
همان‌طور که می‌دانید ما در یک فضای سه‌بعدی زندگی می‌کنیم و برای اینکه بتوانیم به تحلیل حرکت‌های مختلف در این فضا بپردازیم باید یک ابزار ریاضی در اختیار داشته باشیم تا بتوانیم به وسیله‌ی آن به هر نقطه از فضا یک ترکیب ریاضی یکتا که مشخص‌کننده‌ی مکان آن نقطه در فضا باشد، نسبت بدهیم. از آنجایی که بسیاری از وقایع فیزیکی مانند حرکت یک جسم روی یک سطح صاف (مانند میز) را می‌توان در فضای دوبعدی یا صفحه فرض کرد ابتدا برای یک فضای دوبعدی این ابزار را به روش زیر ایجاد می‌نماییم:



شکل ۱-۱

در یک صفحه دو محور غیرموازی دلخواه به نام‌های x و y مانند شکل (۱-۱) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در یک نقطه مانند نقطه‌ی O قطع کنند. فرض کنید می‌خواهیم مکان نقطه‌ی A را به وسیله این دو محور در صفحه مشخص کنیم. یک خط از نقطه‌ی A می‌گذاریم که بر محور

دلخواه y عمود باشد و نام آن را d می‌گذاریم. به طریق مشابه خطی عمود بر محور x از نقطه‌ی A می‌گذرانیم و نام آن را d' می‌گذاریم. حال اگر نقطه‌ی O را به عنوان نقطه‌ی مبدأ در صفحه در نظر بگیریم و دو محور x و y را به وسیله‌ی اعداد ریاضی درجه‌بندی کنیم، هر خط عمود بر محور y یا x نماینده‌ی یک عدد ریاضی و هر نقطه‌ی دلخواه در فضا حاصل تقاطع یک خط عمود بر محور y مانند d و یک خط عمود بر محور x مانند d' خواهد بود. اکنون کافیست ثابت کنیم که به ازای یک نقطه‌ی دلخواه در فضای دوبعدی مانند A تنها یک خط عمود بر هر یک از محورهای x و y می‌توان رسم کرد که از نقطه‌ی A بگذرد تا نشان دهیم به هر نقطه از فضا می‌توان یک ترکیب ریاضی منحصر به فرد نسبت داد. برای اثبات این مطلب از یک امر بدیهی در هندسه کمک می‌گیریم که می‌گوید دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند یا یکدیگر را در بی‌نهایت قطع می‌کنند. بنابراین دو خط عمود بر یک محور نمی‌توانند یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کنند زیرا دو خط عمود بر یک محور با یکدیگر موازی خواهند بود. پس توانستیم ابزاری ایجاد کنیم که ما را قادر می‌سازد به هر نقطه از صفحه یک زوج مرتب منحصر به فرد یعنی ترکیبی از دو عدد ریاضی نسبت دهیم که این اعداد ارتباط مستقیم با چگونگی درجه‌بندی محورهای x و y دارد و مکان نقطه را نسبت به نقطه‌ی مبدأ O مشخص می‌کند. قابل ذکر است که این دو عدد مستقل از یکدیگر می‌باشند، این بدین معناست که اگر در یک زوج مرتب مقدار x را ۳ اختیار کنیم هیچ تأثیری در مقدار y نخواهد داشت و y هر عددی را می‌تواند بپذیرد و مستقل از مقدار x می‌باشد. برای مثال مکان نقطه‌ی A را در (شکل ۲-۱) اینگونه نمایش می‌دهیم:



شکل ۲-۱

$$A = (x, y) = (6, 3)$$

قابل ذکر است که در فضای سه‌بعدی نیز می‌توان این کار را به وسیله‌ی سه خط که دوه‌دو غیرموازی هستند انجام داد. در این حالت مکان هر نقطه از فضا را می‌توان به وسیله‌ی سه عدد مستقل از یکدیگر مشخص کرد.

دستگاه مختصات



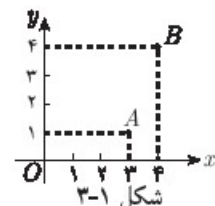
به ابزاری که به وسیله‌ی آن قادر باشیم مکان هر نقطه از فضا را به وسیله‌ی یک ترکیب ریاضی مشخص کنیم، دستگاه مختصات گفته می‌شود. نمونه‌ای که در قبل توضیح داده شد مثالی از یک دستگاه مختصات است. انواع مختلفی از دستگاه‌های مختصات وجود دارد که با توجه به مشخصات حرکت یک جسم دستگاه مختصات مناسب برای بررسی حرکت انتخاب می‌شود. ما در این کتاب از دستگاهی به نام دستگاه مختصات دکارتی برای حل مسائل استفاده خواهیم کرد و در قسمت المپیاد با گونه‌ی دیگری از دستگاه مختصات به نام دستگاه مختصات قطبی نیز به طور کامل آشنا خواهیم شد.

دستگاه مختصات دکارتی



دستگاه مختصات دکارتی در دوبعد متشکل از دو محور عمود بر هم می‌باشد که نقطه‌ی تقاطع این دو محور مبدأ دستگاه می‌باشد. به وسیله‌ی روشی که در قبل ارائه شد می‌توانیم به هر نقطه از فضای دوبعدی یا صفحه یک زوج مرتب یکتا نسبت دهیم مانند (شکل ۳-۱).

$$A = (x, y) = (3, 1), \quad B = (x, y) = (4, 4)$$



شکل ۳-۱

فرض کنید ما در مرکز یک دایره ایستاده‌ایم و می‌خواهیم مکان نقطه‌ای روی محیط دایره را مشخص کنیم. آیا در دست داشتن شعاع دایره برای تعیین مکان نقطه‌ای روی محیط آن کافی می‌باشد؟ جواب این سؤال منفی است. زیرا علاوه بر شعاع دایره جهت‌گیری آن نقطه نسبت به مرکز دایره عاملی تعیین کننده می‌باشد. بسیاری از کمیت‌های فیزیکی علاوه بر مقدار جهت نیز دارند مانند مکان و جابه‌جایی و ... و همچنین کمیت‌هایی نیز وجود دارند که تنها به وسیله‌ی یک عدد که نشان دهنده‌ی مقدار آنهاست قابل بیان می‌باشند مانند زمان و جرم و ... بردار ایزاریست برای بیان کمیت‌هایی که در آنها هر دو مشخصه‌ی جهت و اندازه تأثیرگذار می‌باشند.

بردار مکان

از نظر هندسی بردار مکان را می‌توان به صورت فلشی نمایش داد که ابتدای آن روی مبدأ مختصات و انتهای آن منطبق بر نقطه مورد نظر می‌باشد. نمایش یک بردار به صورت عددی ارتباط مستقیم با دستگاه مختصاتی دارد که بردار را در آن رسم می‌کنیم. نحوه‌ی نمایش بردار مکان در دستگاه مختصات دکارتی به وسیله‌ی ترکیبی از دو عدد ریاضی می‌باشد همان‌طور که مکان یک نقطه را در این مختصات مشخص کردیم که در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.

بردار جابه‌جایی

جابه‌جایی یا تغییر مکان نیز مانند مکان یک کمیت برداری است. بردار جابه‌جایی را می‌توان به صورت فلشی نمایش داد که ابتدای آن نقطه‌ی شروع حرکت و انتهای آن نقطه‌ی پایان حرکت می‌باشد در نتیجه بردار جابه‌جایی تنها به نقاط ابتدا و انتهای حرکت وابسته می‌باشد و مستقل از مسیر حرکت است.

برای اینکه بیشتر مفهوم بردار را درک کنیم و با چگونگی کاربرد آن بیشتر آشنا شویم ابتدا باید با برخی از خواص و روابط بردارها آشنایی پیدا کنیم:

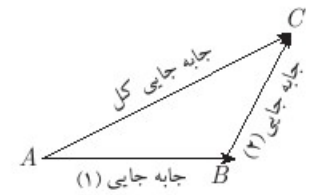
قوانین حاکم بر بردارها

بردار نیز همانند دستگاه مختصات یک تعریف ریاضی می‌باشد و در علم ریاضی تعاریف و روابط حاکم بر آنها به گونه‌ای شکل می‌گیرند که بتوان به وسیله‌ی آنها قوانین حاکم بر طبیعت را بیان و توجیه نمود. برای درک بهتر این موضوع برخی از روابط حاکم بر بردارها و ارتباط آنها با مشاهدات طبیعی را شرح می‌دهیم:

جمع برداری

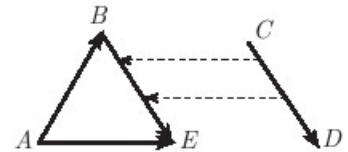
بسیاری از کمیت‌های ثانویه در فیزیک از جابه‌جایی یا تغییر مکان حاصل می‌شوند و همان‌طور که گفته شد جابه‌جایی یک کمیت برداری است، پس روابط حاکم بر بردارها باید به گونه‌ای تعریف شوند که به وسیله‌ی آنها بتوان هر گونه تغییرات در جابه‌جایی‌های مختلف را بیان نمود از این رو جمع برداری را می‌توان به شکل زیر تعریف نمود:

فرض کنید مطابق شکل (۴-۱) جسمی در اثر جابه جایی (۱) از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B تغییر مکان دهد و سپس در اثر جابه جایی (۲) از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C برود. آنچه مشاهده می‌شود این است که این جسم در نهایت در مجموع دو جابه جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی C تغییر مکان داده است و می‌توان بردار \vec{AC} را که معرف جابه جایی کل جسم است به صورت مجموع دو بردار \vec{AB} و \vec{BC} معرفی کرد. پس به طور کلی مجموع دو بردار \vec{a} و \vec{b} را که ابتدای \vec{b} بر انتهای \vec{a} منطبق باشد به صورت برداری نمایش می‌دهیم که ابتدای آن منطبق بر ابتدای \vec{a} و انتهای آن منطبق بر انتهای \vec{b} باشد و آن را برآیند یا مجموع بردارهای \vec{a} و \vec{b} می‌نامیم.



شکل ۴-۱

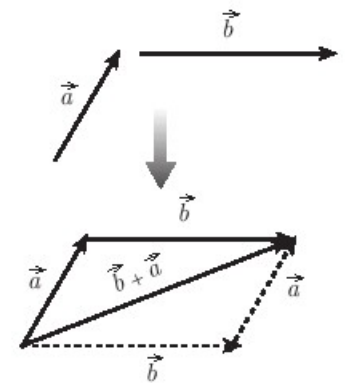
حال فرض کنید دو بردار ما به گونه‌ای انتخاب شوند که ابتدای یکی روی انتهای دیگری نباشد (مانند شکل ۵-۱). این حالت برای جابه جایی غیرممکن است زیرا جابه جایی به صورت پیوسته انجام می‌پذیرد اما برای بسیاری از کمیت‌های ثانویه تنها جهت و طول بردار اهمیت دارد و نقاط ابتدا و انتهای بردارها اهمیتی نخواهد داشت. در این حالت برای به دست آوردن برآیند دو بردار، یکی از آنها را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و آن را به گونه‌ای جابه جا می‌کنیم تا ابتدای آن بر انتهای بردار دیگر منطبق شود و سپس حاصل جمع دو بردار را به دست می‌آوریم.



شکل ۵-۱

$$\vec{BE} = \vec{CD} \rightarrow \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$$

با توجه به مطالبی که گفته شد می‌توان روشی برای به دست آوردن مجموع دو بردار ارائه کرد بدین صورت که هرگاه دو بردار مورد نظر را مانند (شکل ۶-۱) به صورت اضلاع یک متوازی‌الاضلاع رسم کنیم یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع برابر با برآیند دو بردار خواهد شد.

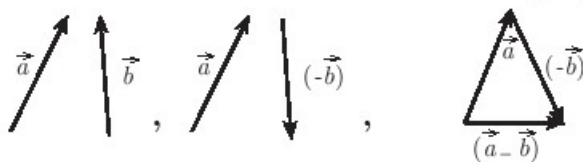


شکل ۶-۱

تفاضل دو بردار

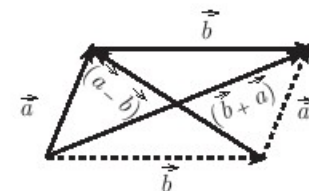
برای توضیح تفاضل دو بردار ابتدا باید قرینه‌ی یک بردار را شرح دهیم. قرینه‌ی بردار \vec{AB} برداریست به همان اندازه و در خلاف جهت \vec{AB} و یا به عبارت دیگر بردار \vec{BA} قرینه‌ی بردار \vec{AB} است. تفاضل دو بردار \vec{a} و \vec{b} به شکل $(\vec{a} - \vec{b})$ به این معناست که بردار \vec{a} را با قرینه‌ی بردار \vec{b} جمع کنیم و می‌توان نوشت:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



شکل ۷-۱

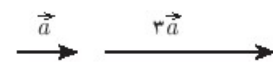
قابل ذکر است که در متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن دو بردار \vec{a} و \vec{b} باشد یک قطر برابر با حاصل جمع دو بردار و قطر دیگر بسته به جهت آن برابر با یکی از دو عبارت $(\vec{a} - \vec{b})$ یا $(\vec{b} - \vec{a})$ می‌شود.



شکل ۸-۱

ضرب عدد در بردار

در فیزیک عدد برای نمایش کمیت‌هایی استفاده می‌شود که تنها با یک مقدار قابل بیان هستند و جهت ندارند. به این کمیت‌ها، کمیت‌های اسکالر یا مقداری گفته می‌شود و از بردار برای نمایش کمیت‌هایی استفاده می‌شود که علاوه بر مقدار جهت نیز دارند. ضرب یک عدد در یک بردار در علم فیزیک نشان دهنده‌ی ضرب یک کمیت مقداری مانند زمان در یک کمیت برداری مانند



شکل ۹-۱

جابه‌جایی است و حاصل آن یک کمیت برداری می‌باشد. در ضرب عدد در یک بردار، جهت بردار ثابت می‌ماند و مقدار بردار با توجه به مقدار عدد ضرب شده تغییر می‌کند (مانند شکل ۹-۱).

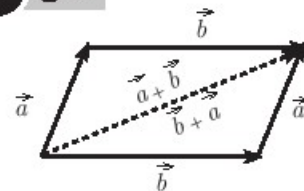
ضرب بردار در بردار

این ضرب نمایش دهنده‌ی ضرب دو کمیت برداری در یکدیگر می‌باشد و حاصل آن هم می‌تواند یک بردار باشد و هم می‌تواند یک عدد باشد. در آینده این نوع ضرب را بیشتر توضیح خواهیم داد. به صورت هندسی نشان دهید برای دو بردار دلخواه \vec{a} و \vec{b} داریم:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

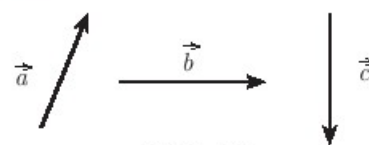
حل. برای به دست آوردن طرف چپ تساوی ابتدای بردار \vec{b} را روی انتهای بردار \vec{a} قرار می‌دهیم و برای به دست آوردن طرف راست تساوی ابتدای بردار \vec{a} را روی انتهای بردار \vec{b} قرار می‌دهیم و در دو حالت مشاهده می‌کنیم بردار برآیند قطری از یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع \vec{a} و \vec{b} می‌باشد (شکل ۱۰-۱). به این خاصیت در جمع، خاصیت جابه‌جایی گفته می‌شود.

مثال ۱

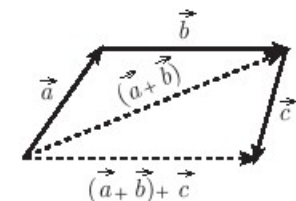


شکل ۱۰-۱

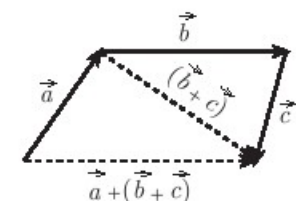
مثال ۲



شکل ۱۱-۱



شکل ۱۲-۱



شکل ۱۳-۱

با استفاده از رسم شکل ثابت کنید که رابطه‌ی زیر برای سه بردار دلخواه \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} برقرار می‌باشد:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

حل. سه بردار دلخواه \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} را به صورت فرضی مانند شکل (۱۱-۱) اختیار می‌نماییم. با توجه به طرف چپ تساوی ابتدا بردارهای \vec{a} و \vec{b} را با هم جمع نموده و سپس بردار \vec{c} را با برآیند این دو بردار جمع می‌نماییم. برای این کار ابتدای بردار \vec{b} را روی انتهای بردار \vec{a} قرار داده و سپس ابتدای بردار \vec{c} را روی انتهای برآیند دو بردار \vec{a} و \vec{b} قرار می‌دهیم. با توجه به تعریف جمع برداری انتهای برآیند دو بردار \vec{a} و \vec{b} در حالتی که ابتدای \vec{b} روی انتهای \vec{a} باشد همان انتهای بردار \vec{b} خواهد بود در نتیجه طرف چپ تساوی را از نظر هندسی می‌توان مانند (شکل ۱۲-۱) رسم کرد.

برای طرف راست تساوی به دلیل وجود پراتز ابتدا باید برآیند دو بردار \vec{b} و \vec{c} را به دست آوریم و سپس آن را با بردار \vec{a} جمع نماییم. برای این کار ابتدای بردار \vec{c} را روی انتهای بردار \vec{b} قرار می‌دهیم و سپس ابتدای برآیند این دو بردار را که همان ابتدای بردار \vec{b} می‌باشد بر انتهای بردار \vec{a} منطبق می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که بردار برآیند نهایی همان بردار $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ خواهد بود. به این خاصیت در جمع خاصیت انجمنی گفته می‌شود.

اکنون قوانین کلی حاکم بر بردارها را دانستیم و قادر هستیم نمایش بردار در دستگاه مختصات دکارتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بردار در دستگاه مختصات دکارتی

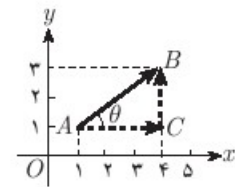
در یک فضای دوبعدی یا صفحه، هر بردار را می‌توان به صورت مجموعی از دو بردار دیگر نمایش داد و اگر ما این دو بردار را موازی با محورهای دستگاه مختصات در نظر بگیریم قادر خواهیم بود که هر برداری در صفحه را به صورت مجموع دو بردار موازی با محورهای دستگاه نمایش دهیم.

این روش برای ما بسیار مفید است زیرا به وسیلهی آن می‌توانیم مسائل پیچیده‌ی صفحه‌ای را به مسأله‌ای بر روی خط راست تبدیل کنیم و با تحلیل مسأله روی دو محور دستگاه مختصات به جواب مسأله دست یابیم.

برای این کار یک بردار به طول واحد در جهت محور x به نام \vec{i} تعریف می‌کنیم و یک بردار به طول واحد در جهت محور y به نام \vec{j} تعریف می‌کنیم، به این دو بردار، بردارهای یکه نیز گفته می‌شود. اکنون هر برداری در صفحه را می‌توانیم به صورت ترکیبی از این دو بردار واحد نمایش دهیم و مسأله‌ی صفحه‌ای را ساده‌سازی کنیم. برای مثال به (شکل ۱۴-۱) توجه نمایید، در این شکل می‌خواهیم بردار \vec{AB} را به وسیلهی بردارهای یکه نمایش دهیم. این کار را به روش زیر انجام می‌دهیم:

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}, \quad \vec{AC} = (4 - 1)\vec{i} = 3\vec{i}$$

$$\vec{CB} = (3 - 1)\vec{j} = 2\vec{j} \rightarrow \vec{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$



شکل ۱۴-۱

دیدیم که نحوه‌ی نمایش بردار در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $a\vec{i} + b\vec{j}$ می‌باشد که در این ترکیب a و b دو عدد حقیقی می‌باشند و اگر این بردار، بردار مکان یک نقطه باشد a عدد محور x و b عدد محور y خواهد بود. با توجه به (شکل ۱۴-۱) و روابط مثلثاتی حاکم بر مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت: $|AB|$ نشان دهنده‌ی اندازه‌ی \vec{AB} است)

$$|BC| = |AB| \sin \theta, \quad |AC| = |AB| \cos \theta$$

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2$$

با داشتن مقدار بردار \vec{AB} و زاویه‌ی θ می‌توانیم بردارهای \vec{AC} و \vec{CB} را به شکل زیر نمایش دهیم:

$$\vec{AC} = |AB| \cos \theta \vec{i}, \quad \vec{CB} = |AB| \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{AB} = |AB| \cos \theta \vec{i} + |AB| \sin \theta \vec{j}$$

یک پستیچی از نقطه‌ی شروع حرکت خود مسیری را که در (شکل ۱۵-۱) نشان داده شده است می‌پیماید. بردار جابه‌جایی کل را در دستگاه مختصات دکارتی به دست آورده و اندازه‌ی آن و زاویه‌ی θ را که این بردار با محور x می‌سازد بیابید. $(\vec{AB} \parallel y$ و $\vec{BC} \parallel x)$

حل. با توجه به شکل پستیچی حرکت خود را در ۳ مرحله انجام داده است. این مراحل را به صورت ۳ بردار نمایش می‌دهیم و سپس این بردارها را با یکدیگر جمع می‌نماییم:

$$\vec{AB} = 2.6\vec{j}, \quad \vec{BC} = 4\vec{i}$$

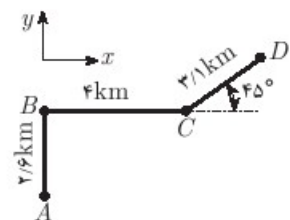
$$\vec{CD} = (3.1 \times \cos 45^\circ)\vec{i} + (3.1 \times \sin 45^\circ)\vec{j}$$

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$$

$$= (4 + 3.1 \times \cos 45^\circ)\vec{i} + (2.6 + 3.1 \times \sin 45^\circ)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{AD} = 6.19\vec{i} + 4.79\vec{j}$$

مثال ۳



شکل ۱۵-۱

$$\Rightarrow |AD| = \sqrt{(6,19)^2 + (4,79)^2} = 7,83 \text{ km}$$

$$\sin \theta = \frac{4,79}{7,83} \rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{4,79}{7,83}\right) = 37,7^\circ$$

دقت کنید که طول بردار \overrightarrow{AD} برابر با مسافتی که پستی طی می‌کند نیست بلکه برابر با کمترین مسافت بین دو نقطه‌ی A و D می‌باشد. مسافتی که پستی طی می‌پیماید برابر است با:

$$\Delta S = |AB| + |BC| + |CD| = 2,6 + 4 + 3,1 = 9,7 \text{ km}$$

حرکت روی خط راست

در حرکت بر روی خط راست مسیر حرکت یک خط مستقیم مانند یکی از محورهای دستگاه مختصات می‌باشد و به همین دلیل تحلیل این حرکت بسیار ساده‌تر از تحلیل حرکت دوبعدی یا سه‌بعدی می‌باشد. در این نوع حرکت بردارهای جابه‌جایی مختلف و بردارهای مکان با یکدیگر موازی می‌باشند و به این دلیل محاسبات برداری بسیار ساده می‌شوند.

نمودار مکان - زمان

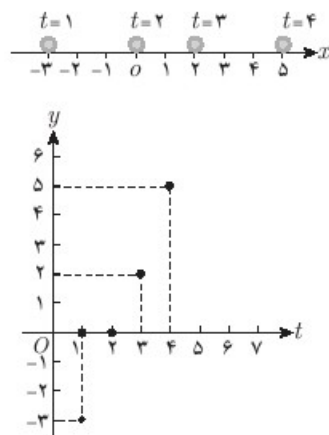
نمودار مکان - زمان، نموداری است که یکی از محورهای آن مکان و محور دیگر زمان می‌باشد و در یک حرکت مکان جسم را بر حسب زمان بیان می‌کند یا به عبارت دیگر مکان جسم را در هر لحظه بیان می‌کند. این نمودار ابزاری مفید برای حل مسائل سینماتیکی می‌باشد.

در (شکل ۱-۱۶) یک جسم نشان داده شده که بر روی محور ox در حال حرکت است. مکان این جسم را در هر لحظه می‌توان توسط برداری به شکل $a\vec{i}$ روی این محور نمایش داد، مثلاً در زمان $t = 1 \text{ s}$ این جسم در مکان $x = -3\vec{i}$ قرار دارد و در زمان‌های ۲، ۳ و ۴ ثانیه به ترتیب در مکان‌های $0\vec{i}$ ، $2\vec{i}$ و $5\vec{i}$ قرار دارد. به این ترتیب می‌توان این چهار نقطه را مطابق شکل روی نمودار مکان - زمان این جسم رسم کرد.

با در اختیار داشتن نمودار مکان - زمان می‌توانیم تعیین کنیم که یک جسم در هر لحظه در چه مکانی قرار دارد و یا بین دو لحظه‌ی متفاوت چه مقدار جابه‌جایی صورت گرفته است. نکته‌ی جالب توجه این است که نمودار مکان - زمان یک جسم همواره یک تابع است زیرا یک جسم در یک لحظه نمی‌تواند در دو مکان متفاوت حضور داشته باشد و همچنین این تابع پیوسته است زیرا یک جسم نمی‌تواند به‌طور ناگهانی از یک نقطه به نقطه‌ای با فاصله‌ی دور تغییر مکان دهد و مقید است که به‌طور پیوسته تغییر مکان دهد. نمودار مکان - زمان را می‌توان به صورت معادله نیز نشان داد که مکان را بر حسب زمان بیان می‌کند:

$$x = f(t) \quad \xrightarrow{\text{برای مثال}} \quad x = t^2 + 3t + 5$$

معادله‌ی حرکت جسمی که بر روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = 3t - 4$ می‌باشد: الف) چه مدت پس از لحظه‌ی $t = 0 \text{ s}$ متحرک به مبدأ می‌رسد؟ ب) متحرک در لحظه‌ی



شکل ۱-۱۶

مثال ۴

$t = 1s$ در چه فاصله‌ای از مبدأ قرار دارد و جابه‌جایی آن بین دو لحظه‌ی $t = 1s$ و $t = 5s$ چه مقدار می‌باشد؟

حل. الف) متحرک زمانی به مبدأ حرکت می‌رسد که x برابر با صفر شود.

$$x = 3t - 4 = 0 \rightarrow 3t = 4 \rightarrow t = \frac{4}{3}s$$

ب) متحرک در لحظه‌ی $t = 1s$ در فاصله‌ی یک متری از مبدأ قرار دارد

$$t = 1s \Rightarrow \vec{x}_1 = 3 - 4 = -1\vec{i}$$

$$t = 5s \Rightarrow \vec{x}_5 = 15 - 4 = 11\vec{i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Delta x}_{\text{بردار جابه‌جایی}} = \vec{x}_5 - \vec{x}_1 = 11\vec{i} - (-1\vec{i}) = 12\vec{i}$$

متحرک در بازه‌ی زمانی $1s < t < 5s$ به اندازه‌ی ۱۲ متر و در جهت مثبت محور x جابه‌جا شده است.

نمودار مکان - زمان جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند مطابق (شکل ۱-۱۷) می‌باشد مکان این جسم را در لحظات $t = 7s$ و $t = 12s$ بیابید و جابه‌جایی را بین این دو لحظه تعیین کنید. (منحنی بین لحظات $6s$ و $10s$ یک نیم‌دایره می‌باشد و مقیاس درجه‌بندی برای دو محور یکسان است.)

حل. به دلیل اینکه زاویه‌ی اولین خط 45° درجه می‌باشد مکان در لحظه‌ی $4s$ با زمان برابر و همان 4 می‌شود و طبق نمودار تا لحظه‌ی $t = 6s$ مکان روی $x = 4m$ ثابت می‌ماند در لحظه‌ی $t = 6s$ نمودار وارد نیم‌دایره می‌شود و مکان در لحظه‌ی $t = 7s$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

مطابق (شکل ۱-۱۸) شعاع دایره معادل با زمانی برابر با $2s$ می‌باشد پس می‌توان گفت:

$$\cos \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{R} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 60^\circ \rightarrow AB = R \sin \theta = 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3} = 1,73$$

$$\Rightarrow x_{(t=7s)} = 4 - 1,73 = 2,27m$$

و اما در $t = 10s$ مکان جسم به $x = 4m$ باز می‌گردد و پس از 6 ثانیه به صفر می‌رسد پس برای $t = 12s$ داریم:

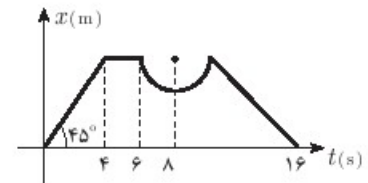
$$m \text{ شیب خط} = \frac{0 - 4}{16 - 10} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x_{(t=12s)} = x_{(t=10s)} + \left(-\frac{2}{3}\right) \times (12 - 10) = 4 - \frac{4}{3} = 2,67m$$

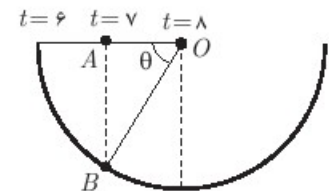
$$\Rightarrow \Delta x = 2,67 - 2,27 = 0,4m$$

به دلیل اینکه حرکت بر روی خط راست است محاسبات برداری مانند محاسبات عددی می‌باشند.

مثال ۵



شکل ۱-۱۷



شکل ۱-۱۸

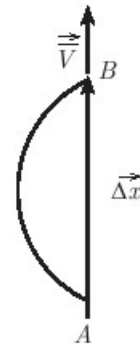


پس از آشنایی با بردار به تعریف کمیت‌های ثانویه می‌پردازیم. کمیت‌های ثانویه، کمیت‌هایی هستند که مشخصات حرکت‌های مختلف را بیان می‌کنند و بررسی عمیق حرکت‌ها را امکان‌پذیر می‌سازد. سرعت، یکی از پرکاربردترین کمیت‌های ثانویه در علم فیزیک می‌باشد که از بردار جابه‌جایی ناشی می‌شود و در نتیجه یک کمیت برداری خواهد بود. ابتدا به تعریف سرعت متوسط می‌پردازیم و سپس سرعت لحظه‌ای را توضیح خواهیم داد.

سرعت متوسط

فرض کنید متحرکی روی یک مسیر دلخواه مانند (شکل ۱-۱۹) از نقطه‌ی A تا B تغییر مکان دهد. در طی این حرکت بردار سرعت متوسط این متحرک برابر خواهد بود با بردار جابه‌جایی بین دو نقطه‌ی A و B تقسیم بر زمان جابه‌جایی. بردار سرعت متوسط را با \vec{v} نمایش می‌دهیم و همان‌طور که از تساوی زیر مشاهده می‌شود سرعت متوسط به صورت ضرب یک عدد در بردار جابه‌جایی تعریف می‌شود پس خود برداریست هم جهت با بردار جابه‌جایی. یکای سرعت متوسط در SI طبق تعریف آن برابر است با متر تقسیم بر ثانیه:

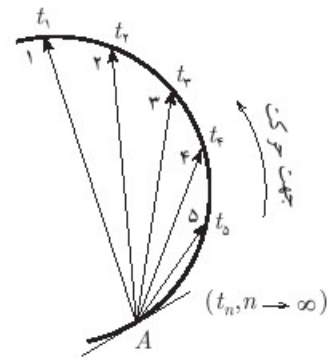
$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t}\right) \Delta \vec{x}$$



شکل ۱-۱۹

سرعت لحظه‌ای

به (شکل ۱-۲۰) نگاه کنید. فرض کنید متحرکی در زمان t در نقطه‌ی A قرار دارد و این متحرک بر روی مسیر منحنی شکل در جهت نشان داده شده در حال حرکت است. اگر این متحرک در لحظه‌ی t_n از نقطه‌ی n عبور کند (n هر عدد طبیعی می‌تواند باشد) با دانستن بردار جابه‌جایی بین دو لحظه‌ی t و t_n می‌توان سرعت متوسط متحرک بین این دو لحظه را محاسبه نمود. با توجه به شکل ۱-۲۰ هر قدر مقدار n بزرگتر شود بازه‌ی زمانی حرکت یعنی $(t_n - t)$ کوچکتر خواهد شد و بردار جابه‌جایی بین این دو لحظه نزدیک به خط مماس بر مسیر حرکت در لحظه‌ی t (نقطه‌ی A) خواهد شد. حال اگر لحظه‌ی t_n را آنقدر به لحظه‌ی t نزدیک کنیم که بردار جابه‌جایی بین این دو لحظه در جهت مماس بر مسیر شود طبق تعریف گفته می‌شود سرعت متوسط بین این دو لحظه برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه‌ی t خواهد بود. در نتیجه سرعت یک متحرک در یک لحظه برابر خواهد بود با سرعت متوسط متحرک بین آن لحظه و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. اکنون شاید این سؤال به وجود بیاید که این سرعت متعلق به کدام یک از دو لحظه‌ی t یا t_n می‌باشد. پاسخ این سؤال این است که این دو لحظه آنقدر به یکدیگر نزدیک می‌باشند که هیچگاه نمی‌توان آنها را از یکدیگر تفکیک کرد و تنها به صورت حدی قابل نمایش می‌باشند. یعنی $(t_n - t \rightarrow 0)$ یا $t_n \rightarrow t$ و این به معنی آن است که اختلاف این دو لحظه به سمت صفر میل می‌کند. برای فهم بهتر این موضوع فرض کنید بخواهیم سرعت جسمی را در لحظه‌ی $t = 2\text{s}$ محاسبه کنیم. اگر برای این کار سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی $t = 2\text{s}$ و $t = 2.0001\text{s}$ را محاسبه کنیم جواب ما برابر با جواب حاصل از محاسبات حدی نخواهد بود ولی بسیار به یکدیگر نزدیک خواهند بود و اختلاف ناچیزی خواهند داشت. چگونگی محاسبه‌ی سرعت حدی را در آینده خواهیم آموخت.



شکل ۱-۲۰

سرعت و نمودار مکان - زمان

همان طور که گفته شد بردار سرعت متوسط یک متحرک بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر خواهد بود با:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

حال اگر حرکت بر روی خط راست انجام پذیرد محاسبات برداری تبدیل به محاسبات عددی خواهد شد زیرا تمامی بردارها با یکدیگر موازی خواهند بود و می توان نوشت:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

که این رابطه برابر خواهد بود با شیب خط مستقیمی که دو نقطه (t_1, x_1) و (t_2, x_2) را در نمودار مکان - زمان متحرک به یکدیگر متصل می نماید. حال اگر دو لحظه t_1 و t_2 بی نهایت به یکدیگر نزدیک باشند این رابطه برابر با سرعت لحظه ای در این لحظات خواهد بود و در نمودار مکان - زمان نیز این عبارت برابر خواهد بود با شیب خط واصل بین دو نقطه (t_1, x_1) و (t_2, x_2) و به دلیل اینکه این دو نقطه بی نهایت به یکدیگر نزدیک هستند این خط همان خط مماس بر منحنی در لحظه t_1 خواهد بود پس در نمودار مکان - زمان سرعت در هر لحظه برابر با شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در آن لحظه خواهد بود.

اتومبیلی در یک مسیر دایره ای شکل به شعاع 100 m دور می زند:

الف) هنگامی که بردارهای سرعت متوسط و سرعت لحظه ای جسم برای اولین بار با یکدیگر زاویه 45° می سازند اتومبیل چه مسافتی را پیموده است؟

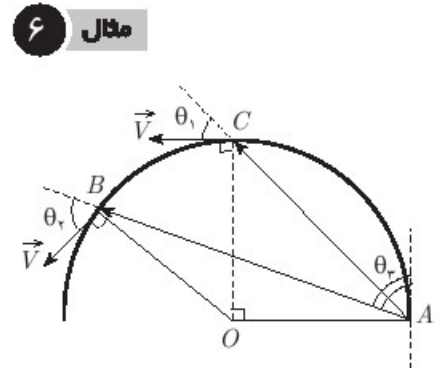
ب) در این حالت طول بردار جابه جایی جسم را بیابید و آن را با مسافت طی شده مقایسه کنید.
 حل. الف) می دانیم نقطه ای شروع حرکت نقطه ای مانند A می باشد و همچنین می دانیم که سرعت در هر لحظه در جهت مماس بر مسیر حرکت در آن لحظه خواهد بود و همچنین بردار سرعت متوسط میان دو لحظه هم جهت با بردار جابه جایی بین آن دو لحظه است. مطابق شکل (۱-۲۱) نقطه ای دلخواه B را در نظر بگیرید. در این نقطه زاویه ای که دو بردار سرعت لحظه ای و جابه جایی با یکدیگر می سازند برابر خواهد بود با θ_2 قابل ذکر است که زاویه ای بین دو بردار زاویه ای است که ابتدای آن دو بردار با یکدیگر می سازند نه انتهای یکی با ابتدای دیگری. از طرفی می دانیم شعاع دایره در هر نقطه روی محیط دایره بر سرعت لحظه ای در آن نقطه عمود می باشد زیرا سرعت لحظه ای مماس بر دایره می باشد پس شعاع OB بر بردار \vec{v} در نقطه B عمود خواهد بود در نتیجه زاویه \hat{OBA} برابر خواهد بود با $(90^\circ - \theta_2)$ ، با دانستن این نکته می توان نوشت:

$$\hat{OBA} = 90^\circ - \theta_2$$

$$OA = OB = R \Rightarrow \hat{OBA} = \hat{OAB} = 90^\circ - \theta_2$$

$$\hat{OAB} + \theta_3 = 90^\circ \Rightarrow 90^\circ - \theta_2 + \theta_3 = 90^\circ \Rightarrow \theta_2 = \theta_3$$

بنابراین زاویه ای بردار جابه جایی با سرعت لحظه ای برای هر نقطه برابر خواهد بود با زاویه ای میان بردار جابه جایی و مماس بر دایره در نقطه ای A که این زاویه هنگامی برابر با 45° می شود که



شکل ۱-۲۱

مثال ۶

متحرک روی نقطه‌ی C باشد و در هیچ نقطه‌ای قبل از آن این اتفاق نمی‌افتد:

$$\widehat{AOC} = 90^\circ, \quad OA = OC \Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OAC}$$

$$180^\circ - \widehat{OCA} - \widehat{OAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 45^\circ$$

(زاویه‌ی AC با مماس بر نقطه C برابر با 45° می‌باشد.)

از روی شکل می‌توان نشان داد در طی حرکت متحرک از نقطه‌ی A تا زمانی که نیمی از محیط دایره پیموده شود این زاویه از 0° تا 90° درجه تغییر می‌کند و تنها در نقطه‌ی C برابر با 45° می‌شود و مسافت طی شده تا نقطه‌ی C برابر است با:

$$\Delta S = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2} = 50\pi = 157,08 \text{ m}$$

ب) طول بردار جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x^2 = AC^2 = OA^2 + OB^2 = 2R^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}R = 141,42 \text{ m}$$

$$\Rightarrow 141,42 < 157,08 \Rightarrow \Delta x < \Delta S$$

حرکت یکنواخت روی خط راست



هرگاه سرعت لحظه‌ای متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در تمام لحظه‌ها یکسان باشد، حرکت آن متحرک یکنواخت نامیده می‌شود. در حرکت یکنواخت روی خط راست نمودار مکان - زمان، یک خط راست خواهد بود زیرا شیب مماس بر این نمودار که بیانگر سرعت متحرک در هر لحظه می‌باشد باید در تمام لحظات یکسان باشد و تنها خط راست است که این خصوصیت را داراست. در نتیجه در این نوع حرکت، سرعت متوسط بین هر دو لحظه‌ی دلخواه برابر با سرعت لحظه‌ای یا شیب خط در نمودار مکان - زمان می‌باشد:

$$\bar{v} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v \Delta t$$

این رابطه برای حرکت یکنواخت بر روی خط راست برقرار می‌باشد و در حالت کلی اگر فاصله متحرکی تا مبدأ در لحظه‌ی $t = 0$ برابر با x_0 باشد و فاصله آن تا مبدأ در لحظه‌ی t برابر با x باشد با فرض حرکت یکنواخت بر روی خط راست می‌توان گفت:

$$x - x_0 = v(t - t_0) \xrightarrow{t_0=0} x = vt + x_0$$

این رابطه همان معادله‌ی خط گذرنده از نمودار مکان - زمان می‌باشد که در آن v شیب خط و x_0 عرض از مبدأ خط می‌باشد.

راننده‌ای فاصله‌ی بین دو شهر را به ترتیب زیر می‌پیماید:

مثال ۷

ابتدا به مدت یک ساعت با سرعت متوسط 15 m/s رانندگی کرده و پس از آن به مدت 10 دقیقه توقف می‌کند. آنگاه با سرعت متوسط 20 m/s به مدت 30 دقیقه به رانندگی ادامه می‌دهد

و بقیه‌ی مسیر را تا مقصد به مدت یک ربع ساعت با سرعت متوسط 12 m/s رانندگی می‌کند.
اگر جاده‌ی میان این دو شهر یک مسیر مستقیم باشد به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) فاصله‌ی بین دو شهر چند کیلومتر است؟

ب) سرعت متوسط او در کل مسیر چند کیلومتر بر ساعت است؟

ج) سرعت متوسط او در طول مدت رانندگی چند متر بر ثانیه است؟

حل. الف)

$$\Delta x_1 = \bar{v}_1 \Delta t_1 = 15 \times (1 \times 60 \times 60) = 54000 \text{ m} = 54 \text{ km}$$

$$\Delta x_2 = \bar{v}_2 \Delta t_2 = 0 \times (10 \times 60) = 0 \text{ km}$$

$$\Delta x_3 = \bar{v}_3 \Delta t_3 = 20 \times (30 \times 60) = 36000 \text{ m} = 36 \text{ km}$$

$$\Delta x_4 = \bar{v}_4 \Delta t_4 = 12 \times (15 \times 60) = 10800 \text{ m} = 10,8 \text{ km}$$

$$\sum_{i=1}^4 \Delta x_i = 54 + 36 + 10,8 = 100,8 \text{ km}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{54 + 36 + 10,8}{1 + \frac{10}{60} + \frac{30}{60} + \frac{15}{60}} = 52,59 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{ب)}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100,8}{1 + \frac{30}{60} + \frac{15}{60}} = 57,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{ج)}$$

$$\bar{v} = 57,6 \times \left(\frac{1000}{3600}\right) = 16 \text{ m/s}$$

نمودار سرعت - زمان

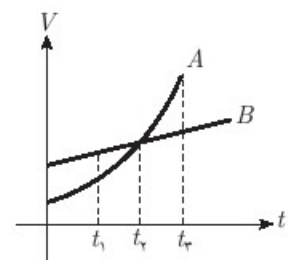


نمودار سرعت - زمان نیز مانند نمودار مکان - زمان برای حل مسائل سینماتیکی بسیار مفید است. این نمودار سرعت یک متحرک را بر حسب زمان نمایش می‌دهد. محور عمودی این نمودار سرعت و محور افقی آن زمان می‌باشد و این نمودار نیز مانند نمودار مکان - زمان همواره یک تابع پیوسته می‌باشد.

نمودار سرعت - زمان (شکل ۱-۲۲) سرعت دو متحرک A و B را بر حسب زمان بیان می‌کند. اگر این دو متحرک در لحظه‌ی $t = 0$ در یک مکان قرار داشته باشند در کدام یک از لحظات t_1 , t_2 و t_3 این دو متحرک می‌توانند برای بار دوم در یک مکان قرار گیرند.

حل. همان‌طور که مشاهده می‌شود در بازه‌ی زمانی $0 < t < t_2$ سرعت متحرک A کمتر از B می‌باشد پس تا لحظه‌ی $t = t_2$ متحرک B همواره جلوتر از متحرک A می‌باشد ولی پس از لحظه‌ی $t = t_2$ سرعت متحرک A بیشتر از B می‌شود و از این لحظه به بعد فاصله‌ی دو متحرک کاهش می‌یابد تا در لحظه‌ای مانند t_3 این دو متحرک برای بار دوم در یک مکان قرار خواهند گرفت.

مثال ۸



شکل ۱-۲۲



هنگامی که شما از حال سکون شروع به دویدن می‌کنید سرعت شما از صفر شروع به افزایش یافتن می‌کند تا در نهایت به مقداری ثابت می‌رسد و هنگام ایستادن نیز سرعت شما کاهش می‌یابد تا به مقدار صفر برسد و شما به حالت سکون باز گردید. شتاب متوسط کمیتی برداری است که از تقسیم بردار تغییر سرعت بین دو لحظه بر زمان بین آن دو لحظه به دست می‌آید:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

بردار شتاب متوسط را به وسیله \vec{a} نمایش می‌دهند. در حرکت بر روی خط راست به دلیل موازی بودن بردارها این رابطه به شکل عددی درخواهد آمد:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

شتاب کمیتی است که نرخ تغییر سرعت را بر حسب زمان بیان می‌کند و بر اساس تعریف آن، برداری هم جهت با بردار تغییر سرعت خواهد بود. یکای شتاب در سیستم واحد SI (m/s^2) می‌باشد.

اگر دو لحظه t_1 و t_2 بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک باشند شتاب متوسط بین این دو لحظه برابر با شتاب لحظه‌ای آنها خواهد بود. به دلیل شباهتی که تعریف شتاب با تعریف سرعت دارد تمام روابطی که بین سرعت و مکان برقرار بود، اینک بین شتاب و سرعت برقرار خواهد بود. پس برای حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$\bar{a} = a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \quad v = at + v_0$$

در حرکت بر روی خط راست هنگامی که دو بردار شتاب و سرعت هم جهت باشند سرعت در حال افزایش و حرکت تند شونده خواهد بود و هنگامی که این دو بردار در خلاف یکدیگر باشند حرکت کند شونده خواهد بود:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حرکت تند شونده} : a^+, v^+ \\ \text{حرکت کند شونده} : a^-, v^- \end{array} \right\} \Rightarrow a \times v > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{حرکت کند شونده} : a^+, v^- \\ \text{حرکت تند شونده} : a^-, v^+ \end{array} \right\} \Rightarrow a \times v < 0$$

در حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت معادله‌ی سرعت - زمان متحرک به صورت خطی با شیب a و عرض از مبدأ v_0 خواهد بود. در این حالت می‌توان نشان داد که سرعت متوسط بین هر دو لحظه‌ی دلخواه برابر خواهد بود با مجموع سرعت در آن دو لحظه تقسیم بر دو:

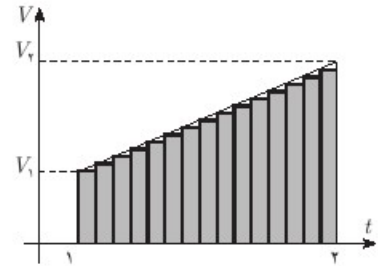
$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

برای اثبات این رابطه تنها کافیست نشان دهیم جابه‌جایی بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 برابر است با:

$$\Delta x = \bar{v} \Delta t = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) \Delta t$$

برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 نمودار سرعت - زمان جسم را بین لحظات t_1 تا t_2 رسم می‌کنیم (مانند شکل ۱-۲۳) و سپس محور زمان را به بازه‌های بسیار کوچک زمانی تقسیم می‌کنیم. می‌دانیم در هر یک از این بازه‌ها جابه‌جایی برابر خواهد بود با سرعت متوسط در آن بازه ضرب در مقدار بازه‌ی زمانی. حال اگر بازه‌های زمانی را بی‌نهایت کوچک در نظر بگیریم سرعت متوسط در هر بازه برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در هر لحظه از آن بازه بی‌نهایت کوچک خواهد بود و مقدار جابه‌جایی متحرک در هر بازه برابر خواهد بود با سرعت لحظه‌ای ضرب در زمان آن بازه و بدین ترتیب جابه‌جایی کل برابر با مجموع همه‌ی جابه‌جایی‌ها خواهد بود. مقدار هر جابه‌جایی را می‌توان به صورت مساحت مستطیلی در نظر گرفت که طول آن مقدار سرعت متوسط در آن بازه‌ی زمانی بی‌نهایت کوچک و عرض آن برابر با زمان خواهد بود. در نتیجه جابه‌جایی کل بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 برابر خواهد بود با مساحت زیر نمودار سرعت - زمان بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 :

$$\begin{aligned} \Delta x = \text{مساحت زیر نمودار} &= \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) (t_2 - t_1) \\ &= \bar{v} \Delta t \Rightarrow \bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} \end{aligned}$$



شکل ۱-۲۳

قابل ذکر است که مساحت زیر نمودار شتاب - زمان نیز برابر با تغییرات سرعت می‌باشد. اکنون با استفاده از سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست می‌توانیم معادله‌ی مکان - زمان را برای این حرکت بیابیم.

معادله‌ی مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

با استفاده از روابطی که به‌دست آوردیم می‌توانیم بنویسیم:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

در رابطه‌ی زیر Δx میزان جابه‌جایی در زمان Δt است و v_1 و v_2 به ترتیب سرعت در لحظات t_1 و t_2 می‌باشند.

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t$$

حال اگر فرض کنیم t_1 مبدأ زمان انتخاب شود ($t_1 = 0$) و t_2 را یک لحظه‌ی دلخواه در نظر بگیریم و سرعت متحرک را در $t = 0$ برابر با v_0 و در t_2 برابر با v_2 قرار دهیم همچنین مکان متحرک را نیز در این لحظات x_0 و x_2 قرار دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$$x_2 - x_0 = \frac{v_2 + v_0}{2} (t_2 - t_0)$$

$$v_2 = a(t_2 - t_0) + v_0, \quad t_0 = 0 \Rightarrow v_2 = at_2 + v_0$$

$$\Rightarrow x_2 - x_0 = \frac{at_2 + v_0 + v_0}{2} t_2 \Rightarrow x_2 = \frac{a}{2} t_2^2 + v_0 t_2 + x_0$$

حال به دلیل اینکه t_2 یک لحظه‌ی کاملاً دلخواه بوده است این رابطه برای هر لحظه‌ای مانند t برقرار خواهد بود:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

که در این رابطه x_0 و v_0 به ترتیب مکان و سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = 0$ می‌باشند و x مکان متحرک در لحظه‌ی t و a شتاب حرکت می‌باشد.

برای به دست آوردن رابطه‌ای که کمیت زمان در آن حذف شده باشد به شکل زیر عمل خواهیم کرد:

$$v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

سقوط آزاد



سقوط آزاد مثالی از حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت است که ما هر روزه آن را مشاهده می‌کنیم. هنگامی که شما ایستاده‌اید و یک پاککن از دست شما رها می‌شود، حرکت پاککن تا لحظه‌ی برخورد با زمین یک سقوط آزاد است که در مسیری مستقیم و تحت شتاب جاذبه‌ی زمین صورت می‌گیرد (این در صورتی است که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود). در سقوط آزاد جابه‌جایی در امتداد قائم صورت می‌گیرد و ما می‌توانیم برای راحتی کار بردار یکه‌ی خود را رو به سمت پایین در نظر بگیریم تا شتاب جاذبه همواره مثبت باشد در نتیجه جهت مثبت محور حرکت را رو به سمت پایین اختیار می‌کنیم: (مانند شکل ۱-۲۴)



شکل ۱-۲۴

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$v = gt + v_0$$

گلوله‌ی کوچکی از بالای ساختمانی رها می‌شود. وقتی در ارتفاع ۱۵ متری بالای سطح زمین قرار دارد سرعتش 10 m/s است.

مثال ۹

الف) سرعت سنگ در لحظه‌ی رسیدن به زمین چقدر است؟

ب) ارتفاع ساختمان و سرعت متوسط گلوله در مدت سقوط چقدر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$) فرض شود)

حل. الف) گلوله برای رسیدن به سطح زمین باید مسافتی معادل ۱۵m را طی کند:

$$y - y_0 = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t \Rightarrow 15 = 5t^2 + 10t$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 1\text{s} & \text{قق} \\ -3\text{s} & \text{غق} \end{cases}$$

۱ ثانیه زمان می‌گذرد تا سنگ به سطح زمین برسد پس سرعت سنگ در سطح زمین خواهد بود:

$$v = gt + v_0 \Rightarrow v = g \times 1 + 10 = 20 \text{ m/s}$$

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v_{\text{سطح زمین}}}{2} = \frac{0 + 20}{2} = 10 \text{ m/s} \quad (\text{ب})$$

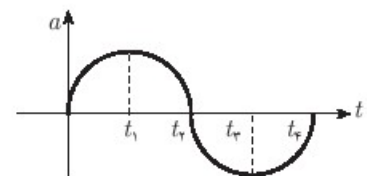
$$h = y = \bar{v} \Delta t = 10 \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{20 - 0}{10} = 2 \text{ s} \Rightarrow y = 10 \times 2 = 20 \text{ m}$$

در نمودار شتاب - زمان (شکل ۱-۲۵) تعیین کنید در هر بازه‌ی زمانی حرکت کند شونده یا تند شونده می‌باشد. ($v_0 = 0$)

حل. در فاصله‌ی زمانی $0 < t < t_1$ شتاب مثبت می‌باشد و سرعت نیز که برابر با مساحت زیر نمودار است در هر لحظه بین این بازه مثبت خواهد بود پس حرکت در این بازه تند شونده خواهد بود. در بازه‌ی $t_1 < t < t_2$ شتاب منفی است و اما سرعت همچنان مثبت است زیرا در لحظه‌ی t_2 سرعت برابر است با مساحت نیم‌دایره از $t = 0$ تا $t = t_2$ و سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = t_2$ به دلیل برابر بودن مساحت دو نیم‌دایره در بالا (مثبت) و پایین (منفی) محور زمان برای بار دوم صفر خواهد شد ولی هیچگاه منفی نخواهد شد بنابراین در بازه‌ی $t_2 < t < t_3$ حرکت کند شونده خواهد بود.

مثال ۱۰



شکل ۱-۲۵

جسمی را از حالت سکون از ارتفاع بسیار زیاد رها می‌کنیم رابطه‌ای بیابید که بگوید این جسم در ثانیه‌ی n ام از حرکت خود چه مقدار جابه‌جا می‌شود. (n هر عدد طبیعی می‌تواند باشد)

حل. ثانیه‌ی اول حرکت یعنی بازه‌ی زمانی $0 < t < 1$ ثانیه در نتیجه ثانیه‌ی n ام حرکت یعنی بازه‌ی زمانی $n - 1 < t < n$ ثانیه، برای به دست آوردن جابه‌جایی در ثانیه‌ی n ام حرکت می‌نویسیم:

$$v_{n-1} = g(n - 1) + v_0, \quad v_0 = 0$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}g(1)^2 + v_{n-1}(1) = \frac{1}{2}g + ng - g = g(n - \frac{1}{2})$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید جملات جابه‌جایی در هر ثانیه از حرکت یک تصاعد حسابی را تشکیل می‌دهند که قدر آن برابر با شتاب حرکت می‌باشد. در حالت سقوط آزاد قدر این تصاعد برابر با g می‌باشد و جابه‌جایی کل را می‌توان از حاصل جمع جملات این تصاعد محاسبه نمود.

$$\Delta y_1 = g(1 - \frac{1}{2}) = \frac{g}{2} \quad \text{ثانیه ۱ ام}$$

$$\Delta y_2 = g(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3g}{2} \quad \text{ثانیه ۲ ام}$$

$$\Delta y_3 = g(3 - \frac{1}{2}) = \frac{5g}{2} \quad \text{ثانیه ۳ ام}$$

⋮

$$\Delta y_n = g(n - \frac{1}{2}) = \frac{(2n - 1)g}{2} \quad \text{ثانیه } n \text{ ام}$$

مثال ۱۱

حرکت در دو بعد

تا اینجا حرکت بر روی خط راست را آموختیم و با مشخصه‌های این حرکت آشنایی پیدا کردیم. اکنون می‌پردازیم به حرکت‌های منحنی شکل در دو بعد و با مشخصات این دسته از حرکات آشنایی پیدا می‌کنیم. همان‌طور که اشاره شد ما می‌توانیم هر برداری در صفحه را به صورت حاصل جمع دو بردار موازی با محورهای مختصات بیان کنیم و گفتیم که می‌توانیم به وسیله‌ی دو بردار \vec{i} و \vec{j} حرکات پیچیده‌ی صفحه‌ای را به حرکت بر روی خط راست ساده‌سازی کنیم. اکنون چگونگی این عمل را توضیح خواهیم داد.

بردار مکان و بردار جابه‌جایی در دو بعد

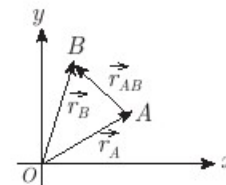
بردار مکان یک نقطه مانند A برداریست که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن نقطه‌ی A می‌باشد و بردار جابه‌جایی بین دو نقطه‌ی A و B برابر خواهد بود با:

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad \text{جابه‌جایی از } A \text{ به } B$$

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad \text{جابه‌جایی از } B \text{ به } A$$

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}, \quad \vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$$



شکل ۲۶-۱

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تکنیک کردن بردارها به دو بردار موازی با محورها بر اساس \vec{i} و \vec{j} محاسبات برداری را تبدیل به محاسبات ساده‌ی عدد خواهد کرد.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی دلخواه برداری است هم جهت با بردار جابه‌جایی بین آن دو لحظه و همان‌طور که توضیح داده شد سرعت لحظه‌ای در یک لحظه‌ی دلخواه برابر است با سرعت متوسط بین آن لحظه و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط را نیز می‌توان بر اساس بردارهای \vec{i} و \vec{j} بیان کرد برای مثال اگر ما رابطه‌ی x و t را برای یک متحرک در اختیار داشته باشیم می‌توانیم سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای متحرک را در هر زمانی در راستای محور x بردار \vec{i} به دست آوریم مانند رابطه‌ی زیر:

$$x = 3t - 5 \Rightarrow v_x = 3 \text{ m/s} \Rightarrow v_x = 3 \vec{i}$$

اما باید توجه داشت که v_x تنها مؤلفه‌ی افقی سرعت متحرک است و رابطه میان دو کمیت x و t هیچگونه اطلاعاتی درباره‌ی مؤلفه‌ی عمودی سرعت متحرک (v_y) در اختیار ما قرار نمی‌دهد.

نمایش سرعت لحظه‌ای در حرکت دوبعدی

می‌دانیم سرعت یک متحرک در لحظه‌ی t برابر خواهد بود با سرعت متوسط آن متحرک بین لحظه‌ی t و لحظه‌ای بی‌نهایت نزدیک به آن، در نتیجه برای محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای می‌توان

به روش زیر عمل کرد:

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}, \quad \Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j}$$

به دلیل اینکه Δt به سمت صفر می‌کند متحرک زمان بسیار کوتاهی برای تغییر مکان خواهد داشت پس مقادیر Δx و Δy نیز به سمت صفر میل خواهند کرد. در این حالت رابطه‌ی سرعت لحظه‌ای را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$

در این رابطه عبارت $\frac{dx}{dt}$ برابر است با مشتق تابع x بر حسب متغیر t و عبارت $\frac{dy}{dt}$ برابر است با مشتق تابع y نسبت به متغیر t .

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y \Rightarrow \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

معادله‌ی حرکت جسمی با دو رابطه‌ی زیر در SI مشخص شده است:

$$y = 2t^2 + 1, \quad x = 6t$$

الف) معادله‌ی مسیر حرکت را بیابید.

ب) معادله‌ی سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t = 2$ s محاسبه کنید.

ج) بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه‌های $t = 1$ s و $t = 2$ s بر حسب بردارهای یکه‌ی \vec{i} و \vec{j} بنویسید.

حل. الف) معادله‌ی مسیر حرکت معادله‌ای است که x و y را بر حسب یکدیگر بیان می‌کند:

$$x = 6t \Rightarrow t = \frac{x}{6} \Rightarrow y = 2\left(\frac{x}{6}\right)^2 + 1 \Rightarrow y = \frac{x^2}{18} + 1$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} = 6 \vec{i} + (4t) \vec{j} \quad \text{ب)}$$

$$t = 2 \text{ s} \Rightarrow \vec{v} = 6 \vec{i} + 8 \vec{j} \Rightarrow |v| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j} \quad \text{ج)}$$

$$\vec{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{12 - 6}{2 - 1} = 6 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_y = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{9 - 3}{2 - 1} = 6 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = 6 \vec{i} + 6 \vec{j}$$

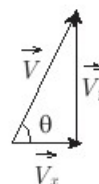
معادله‌ی حرکت جسمی به صورت $y = 3x^2 + 5x$ می‌باشد اگر در مکان $x = 1\text{m}$ سرعت جسم در راستای محور x برابر با 2m/s باشد سرعت جسم در این مکان را به صورت برداری نمایش دهید.

$$x = 1\text{m} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 9x^2 + 5 = 9 + 5 = 14 = \tan \theta \quad (\text{شیب خط مماس})$$

از آنجایی که سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر است داریم: (شکل ۱-۲۷)

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = 14 \Rightarrow v_y = 14v_x = 28\text{m/s}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = 2\vec{i} + 28\vec{j}$$



شکل ۱-۲۷

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

در حرکت دوبعدی در صفحه شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 بردار است هم جهت با بردار تغییر سرعت بین این دو لحظه و شتاب لحظه‌ای در لحظه‌ی t_1 بردار است هم جهت با بردار تغییر سرعت بین لحظه‌ی t_1 و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. هنگامی که یک جسم روی یک منحنی حرکت می‌کند به دلیل اینکه سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد، جهت آن همواره در حال تغییر می‌باشد و حتی اگر سرعت جسم از نظر اندازه ثابت بماند جهت آن در حال تغییر خواهد بود و در نتیجه بردار سرعت همواره در حال تغییر می‌باشد بنابراین حرکت روی یک مسیر منحنی شکل همواره یک حرکت شتابدار خواهد بود.

برای شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{i} + \Delta v_y \vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta v_x \vec{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta v_y \vec{j}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j}$$

و برای شتاب لحظه‌ای در لحظه‌ی t_1 می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)_{\Delta \rightarrow 0} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad \vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y \Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

همان‌طور که از روابط استنباط می‌شود بردار شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 با بردار تغییر سرعت بین این دو لحظه هم جهت می‌باشد اما هیچ لزومی ندارد که این بردار با بردارهای \vec{v}_1 یا \vec{v}_2 هم جهت باشد. در حرکت بر روی خط راست به دلیل توازی دو بردار \vec{v}_1 و \vec{v}_2 تقاضل آنها نیز موازی با خودشان بود ولی در حرکت صفحه‌ای و حرکت بر روی مسیر منحنی شکل این امر تنها بین نقاطی از مسیر امکان‌پذیر است که مماس بر مسیر در آن نقاط با یکدیگر موازی باشند.



در این قسمت به تحلیل و بررسی حرکت در فضای دوبعدی با شتاب ثابت می‌پردازیم. در حرکت با شتاب ثابت مقدار و جهت بردار شتاب در تمام طول مدت حرکت ثابت می‌ماند. در این نوع حرکت برای سادگی حل مسأله دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که یکی از محورهای دستگاه موازی با بردار شتاب باشد و مقدار شتاب در راستای محور دیگر برابر با صفر شود. ساده‌ترین نوع حرکت با شتاب ثابت در صفحه حرکت پرتابی است. هنگامی که شما پاک‌کن خود را به سمت دوستان پرتاب می‌کنید در صورت صرف‌نظر کردن از مقاومت هوا، پاک‌کن یک حرکت پرتابی را انجام خواهد داد. در حالت کلی اگر جسمی را به گونه‌ای پرتاب کنیم که امتداد سرعت اولیه‌ی جسم با امتداد قائم، زاویه‌ای به غیر از صفر درجه بسازد این جسم یک حرکت پرتابی را طی می‌کند و به آن یک پرتابه می‌گوییم. در حرکت پرتابی اندازه‌ی شتاب برابر با g و جهت آن رو به پایین خواهد بود.

محاسبات برای یک پرتابه که با سرعت v_0 و زاویه‌ی α پرتاب می‌شود مانند شکل ۲۸-۱ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= 0, & \vec{a}_y &= -g\vec{j} \\ \vec{v}_{0x} &= v_0 \cos \alpha \vec{i}, & \vec{v}_{0y} &= v_0 \sin \alpha \vec{j} \end{aligned}$$

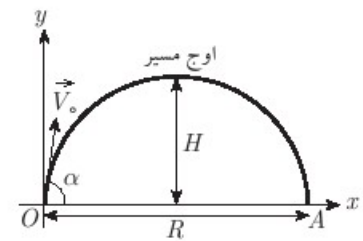
سرعت افقی در طول مسیر ثابت می‌ماند.

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= 0 \Rightarrow \vec{v}_{0x} = \text{cte} \\ x_0 &= 0 \Rightarrow \vec{x} = (v_0 \cos \alpha \vec{i})t \\ \vec{a}_y &= -g\vec{j}, & \vec{v}_{0y} &= v_0 \sin \alpha \vec{j} \\ y_0 &= 0 \Rightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}(-g\vec{j})t^2 + (v_0 \sin \alpha \vec{j})t \\ &\Rightarrow \vec{y} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \right) \vec{j} \\ \vec{v}_y &= (-g\vec{j})t + \vec{v}_{0y} \Rightarrow \vec{v}_y = (-gt + v_0 \sin \alpha)\vec{j} \end{aligned}$$

به وسیله‌ی این معادلات می‌توانیم بردارهای مکان، سرعت و شتاب پرتابه را در هر لحظه مشخص کنیم. اکنون به وسیله‌ی معادلات زیر مسیر حرکت یک پرتابه را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x\vec{i} &= (v_0 \cos \alpha \vec{i})t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y\vec{j} &= \left(-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \right) \vec{j} \\ &\Rightarrow y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right) \\ &\Rightarrow y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha \end{aligned}$$

از معادله‌ی مسیر حرکت مشخص است که حرکت پرتابی یک مسیر سهمی شکل را طی می‌کند.



شکل ۲۸-۱

در حرکت پرتابی فاصله‌ی افقی را که پرتابه طی می‌کند تا دوباره به ارتفاع اولیه برگردد، برد پرتابه و ارتفاع بالاترین نقطه‌ای را که پرتابه به آن می‌رسد ارتفاع اوج می‌نامیم. برای محاسبه‌ی برد و ارتفاع اوج یک پرتابه با سرعت اولیه \vec{v}_0 و زاویه‌ی α می‌توان به روش زیر عمل کرد:
نقطه‌ی اوج نقطه‌ای است که سرعت پرتابه در راستای محور y در آن نقطه برابر با صفر شود زیرا از این لحظه به بعد بردار سرعت v_y تغییر جهت خواهد داد و ارتفاع پرتابه کاهش می‌یابد:

$$\vec{v}_y = 0 \Rightarrow 0 = (-gt)\vec{j} + v_0 \sin \alpha \vec{j}$$

$$\Rightarrow gt = v_0 \sin \alpha \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$y_0 = 0 \Rightarrow \vec{H} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \right) \vec{j}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + (v_0 \sin \alpha) \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) \right) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \vec{j}$$

زمان رسیدن پرتابه تا نقطه‌ی اوج برابر با نصف کل زمان حرکت پرتابه می‌باشد تا به ارتفاع نقطه‌ی پرتاب بازگردد:

$$\vec{x} = (v_0 \cos \alpha \vec{i})t$$

$$\vec{R} = v_0 \cos \alpha \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \right) \vec{i} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \vec{i}$$

به روش دیگر: هنگامی که پرتابه به ارتفاع نقطه‌ی پرتاب باز می‌گردد با استفاده از معادله‌ی مسیر حرکت می‌توان نوشت:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-g(R^2)}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + R \tan \alpha \Rightarrow R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

نشان دهید در چه زاویه‌ای از پرتاب، برد حرکت پرتابی بیشینه خواهد شد و سپس ثابت کنید برای زاویه‌هایی که به یک اندازه از آن زاویه بیشتر و یا کمترند، بردها مساوی خواهند بود.

مثال ۱۴

حل. $R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, $R_{\max} \Rightarrow \frac{dR}{d\alpha} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dR}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \times 2 \times \cos 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

در زاویه‌ی 45° برد حرکت پرتابی بیشینه خواهد بود.

$$\theta = \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) , \quad \beta = \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$\Rightarrow R_\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right) = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha$$

$$R_\beta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\beta = \frac{v_0^2}{g} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha = R_\theta$$

مثال ۱۵

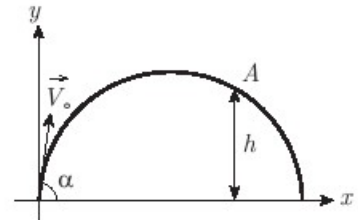
مطابق (شکل ۱-۲۹) جسمی را با سرعت اولیه \vec{v}_0 و با زاویه α نسبت به افق پرتاب می‌کنیم. با صرف‌نظر کردن از نیروی مقاومت هوا بزرگی سرعت عمودی جسم را در نقطه‌ی A به دست آورید.

حل.
$$\vec{y} = h\vec{j}$$

در این مسأله هیچ اطلاعاتی راجع به زمان مطرح نشده است پس بهتر است از معادله‌ای استفاده کنیم که زمان در آن حذف شده است.

$$\begin{aligned} v_y^2 - v_{0y}^2 &= 2(a_y)(y - y_0) \Rightarrow v_y^2 - v_{0y}^2 = 2(-g)(y - y_0) \\ \Rightarrow v_h^2 - (v_0 \sin \alpha)^2 &= -2g(h - 0) \\ \Rightarrow v_h^2 &= v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh \\ \Rightarrow v_h &= \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh} \end{aligned}$$

اکنون طبق معادله‌ی روبه‌رو دو جواب قرینه برای سرعت در نقطه‌ی A به دست آمد که جواب مثبت غیرقابل قبول می‌باشد زیرا در نقطه‌ی A حرکت رو به پایین است و سرعت منفی می‌باشد. جواب مثبت برای نقطه‌ای در ارتفاع h قبل از رسیدن به نقطه اوج می‌باشد.



شکل ۱-۲۹

مثال ۱۶

مطابق (شکل ۱-۳۰) سرعت اولیه‌ی پرتابه را طوری تعیین کنید که مسیر حرکت پرتابه از نقطه‌ی A عبور کند.

حل. در این مسأله برای سادگی دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که محور x منطبق بر خط BA باشد و نقطه‌ی B را مبدأ دستگاه قرار می‌دهیم در این حالت داریم:

$$\vec{a}_x = g \sin \alpha \vec{i} \quad , \quad \vec{a}_y = -g \cos \alpha \vec{j}$$

t را زمان حرکت تا نقطه‌ی A در نظر می‌گیریم:

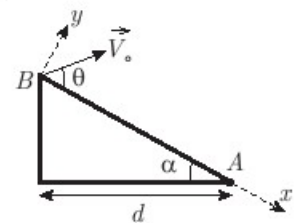
$$\begin{aligned} y_A = y_B = 0 &\Rightarrow \vec{y}_A = 0 = \frac{1}{2} \vec{a}_y t^2 + \vec{v}_{0y} t \\ \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2} (-g \cos \alpha \vec{j}) t^2 + (v_0 \sin \theta \vec{j}) t \\ \Rightarrow (v_0 \sin \theta) t &= \left(\frac{1}{2} g \cos \alpha \right) t^2 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$\vec{x}_A = |AB| \vec{i} = \frac{d}{\cos \alpha} \vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_A &= \frac{1}{2} \vec{a}_x t^2 + \vec{v}_{0x} t = \left(\frac{1}{2} g \sin \alpha \vec{i} \right) t^2 + (v_0 \cos \theta \vec{i}) t \\ \Rightarrow \frac{d}{\cos \alpha} &= \frac{1}{2} g \sin \alpha \left(\frac{2v_0 \sin \theta}{g \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \cos \theta \left(\frac{2v_0 \sin \theta}{g \cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2v_0^2 \sin^2 \theta \sin \alpha}{g \cos \alpha} + \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$\Rightarrow d = v_0^2 \left(\frac{2 \sin^2 \theta \tan \alpha + \sin 2\theta}{g} \right) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{dg}{2 \sin^2 \theta \tan \alpha + \sin 2\theta}}$$



شکل ۱-۳۰

یکی از راه‌های ارزیابی نهایی جواب در فیزیک تحلیل دیمانسیون جواب است یعنی اگر جواب را به صورت پارامتری به دست آوریم در این جواب هر پارامتر نشان دهنده‌ی یک کمیت فیزیکی می‌باشد و واحد خاص خود را دارد و در یک عبارت پارامتری اعدادی که نشان دهنده‌ی کمیت‌های فیزیکی نیستند بدون واحد هستند و در اثر محاسبات ریاضی ایجاد می‌شوند. برای مثال در مسأله‌ی بالا واحد جواب نهایی باید به صورت m/s باشد:

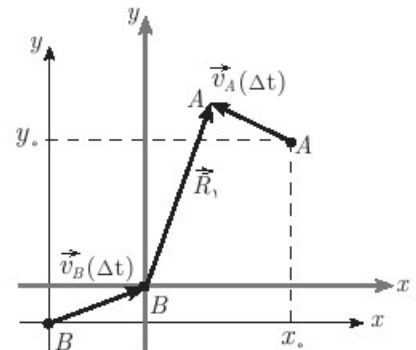
$$m/s = \sqrt{\frac{(m)(m/s^2)}{(\frac{m}{m})^2(\frac{m}{m})^2 + (\frac{m}{m})}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

سرعت و شتاب نسبی

حتماً تا به حال به وسیله قطار سفر کرده‌اید. هنگامی که شما در واگن قطار هستید و قطاری در مجاورت شما به حرکت درمی‌آید شما احساس خواهید کرد که قطار شما به حرکت درآمده است اما هنگامی که به زمین یا دیوارهای ایستگاه نگاه می‌کنید متوجه می‌شوید که سرعت شما صفر است و ساکن هستید. در این فرآیند شما دو سرعت متفاوت را برای خود قائل شده‌اید و دلیل این امر تفاوت دستگاه ناظر بر شما در این دو حالت می‌باشد. در حالت اول شما از دید ناظری در قطار مجاورتان سرعت خود را اندازه گرفته‌اید یعنی این سرعت در دستگاهی که متصل به قطار مجاور می‌باشد اندازه‌گیری شده است. به این سرعت، سرعت نسبی شما نسبت به قطار مجاورتان گفته می‌شود اما در حالت دوم دستگاه ناظر بر شما زمین می‌باشد که همان دستگاه ساکن یا اینرسی است و ناظر متصل به این دستگاه سرعت حقیقی شما را اندازه خواهد گرفت.

برای محاسبه سرعت جسم A نسبت به جسم B کافی است یک دستگاه مختصات به جسم B بچسبانیم و سرعت جسم A را در آن دستگاه اندازه‌گیری کنیم:

با توجه به شکل (۳۱-۱) مکان جسم A در دستگاه مختصات چسبیده به جسم B در لحظه t_0 به صورت $\vec{R}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$ می‌باشد. پس از گذشت زمان (Δt) علاوه بر این که جسم A به طور جداگانه به میزان $\Delta \vec{R}_A = \vec{V}_A(\Delta t)$ تغییر مکان می‌دهد دستگاه متصل به جسم B نیز همراه جسم B به میزان $\vec{R}_B = \vec{V}_B(\Delta t)$ جابه‌جا می‌شود و مکان جدید جسم A در دستگاه متصل به جسم B در لحظه $t_0 + \Delta t$ به شکل زیر خواهد بود:



شکل ۳۱-۱

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_0 + \Delta \vec{R}_A - \Delta \vec{R}_B = \vec{R}_0 + \Delta t(\vec{V}_A - \vec{V}_B)$$

حال اگر مقدار Δt را به سمت صفر میل دهیم می‌توانیم در هر لحظه سرعت نسبی جسم A نسبت به جسم B را بیابیم:

$$\vec{R}_1 - \vec{R}_0 = \Delta t(\vec{V}_A - \vec{V}_B)$$

$$\text{سرعت } A \text{ نسبت به } B = \frac{\text{جابه‌جایی جسم } A \text{ در این دستگاه}}{\text{تغییر زمان}} = \text{سرعت جسم } A \text{ در دستگاه چسبیده به جسم } B$$

$$\vec{V}_{A/B} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}_{A/B}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}_1(t_0 + \Delta t) - \vec{R}_1(t_0)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{A/B} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{\Delta t} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \Rightarrow \frac{d\vec{R}_{A/B}}{dt} = \vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

در رابطه به دست آمده \vec{V}_B و \vec{V}_A سرعت‌های دو متحرک A و B نسبت به یک دستگاه مرجع مانند زمین می‌باشند. به همین صورت می‌توان نشان داد که سرعت جسم B نسبت به جسم A برابر است با:

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

این روابط در مورد شتاب نسبی نیز صدق می‌کند:

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

برای اثبات رابطه شتاب نسبی کافی است محورهای x و y را به v_x و v_y تبدیل کنیم. در یک چهارراه خودروهای A و B مانند شکل (۳۲-۱) در حرکت می‌باشند. اگر این خودروها در لحظه t در مکان‌های نشان داده شده باشند، حداقل فاصله بین این دو خودرو را بیابید. حل. برای حل این مسأله جسم A را ساکن در نظر می‌گیریم و سرعت جسم B را نسبت به جسم A محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = (10)\vec{j} - (-5)\vec{i} = 10\vec{j} + 5\vec{i}$$

همان‌طور که شکل (۳۳-۱) نشان می‌دهد اگر جسم A را ساکن در نظر بگیریم جسم B با سرعت $\vec{V}_{B/A}$ حرکت خواهد کرد و از کنار جسم A عبور خواهد کرد اما کمترین فاصله جسم A از امتداد سرعت $\vec{V}_{B/A}$ یعنی مسیر حرکت جسم B همان عمود AH خواهد بود که جواب مسأله می‌باشد: (شکل ۳۴-۱)

$$AH = AC \sin \theta, \quad AC = DE = BD - BE = 5\text{m}$$

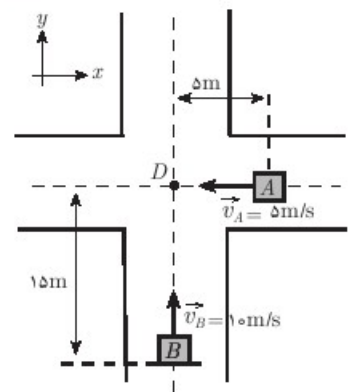
$$\sin \theta = \frac{EC}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{5}{\sqrt{10^2 + 5^2}} = 0.45 \rightarrow AH = 2.2\text{m}$$

آب رودخانه‌ای با سرعت $V_w = 4\text{m/s}$ از شمال به جنوب در حال حرکت است. می‌خواهیم به وسیله یک قایق موتوری عرض این رودخانه را طی کنیم اگر سرعت قایق موتوری در آب ساکن برابر با $V_b = 5\text{m/s}$ باشد: ($L = 10\text{m}$ عرض رودخانه)

الف) مسافت طی شده توسط قایق در کمترین زمان لازم برای عبور از عرض رودخانه را بیابید.
ب) زمان لازم برای عبور از عرض رودخانه از طریق کمترین مسافت ممکن را بیابید.
حل. الف) هنگامی که می‌گوییم سرعت قایق در آب ساکن برابر با 5m/s می‌باشد، یعنی سرعت قایق نسبت به آب در هر شرایطی 5m/s خواهد بود، زیرا اگر آب رودخانه با سرعت فرضی v در حال حرکت باشد، قایق نیز این سرعت را علاوه بر سرعت ایجاد شده توسط موتور خود به دست خواهد آورد و به‌طور خلاصه سرعت آب بر سرعت قایق تأثیرگذار خواهد بود:

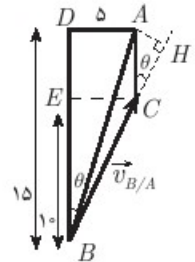
سرعت قایق در آب ساکن یا سرعت حاصل توسط موتور: V_b

مثال ۱۷

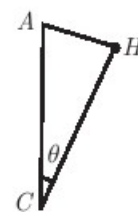


شکل ۳۲-۱

مثال ۱۸



شکل ۳۳-۱



شکل ۳۴-۱

سرعت آب رودخانه: V_w

$$\vec{V}_B : \text{سرعت کل قایق} = \vec{V}_b + \vec{V}_w$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{\text{قایق}, \text{اب}} = \vec{V}_B - \vec{V}_w = \vec{V}_b + \vec{V}_w - \vec{V}_w = \vec{V}_b$$

پس اگر آب رودخانه را ساکن در نظر بگیریم سرعت قایق 5 m/s مشاهده می‌شود. حال اگر این سرعت به صورت کامل در راستای عرض رودخانه باشد، زمان حرکت قایق کمینه خواهد بود.

$$\vec{V}_{\text{قایق}, \text{اب}} \parallel \vec{j} \rightarrow \vec{V}_{\text{قایق}, \text{اب}} = V_b \vec{j} = 5 \vec{j} \text{ (m/s)}$$

پس سرعت حاصل از موتور در راستای \vec{j} خواهد بود و برای سرعت کل قایق داریم:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_b + \vec{V}_w = 5 \vec{j} + 4 \vec{i}$$

و از آنجایی که مسیر حرکت بر راستای سرعت مماس می‌باشد، مسیر حرکت قایق در حالت «الف» بر روی خط AC خواهد بود و طول AC به شکل زیر قابل محاسبه است: (شکل ۱-۳۶)

$$\cos \theta = \frac{|\vec{V}_b|}{|\vec{V}_B|} = \frac{5}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 0,78$$

$$AB = AC \cos \theta, AB = L = 10 \text{ m} \rightarrow AC = \frac{10}{0,78} = 12,8 \text{ m}$$

$$AB \vec{j} = V_b \vec{j} (\Delta t_1) \rightarrow \Delta t_1 = \frac{10}{5} = 2 \text{ s} \text{ زمان لازم}$$

ب) کمترین مسافت ممکن هنگامی اتفاق می‌افتد که قایق مسیر عرض رودخانه یعنی همان مسیر AB را طی کند. برای این امر سرعت کل قایق باید در راستای مسیر AB باشد.

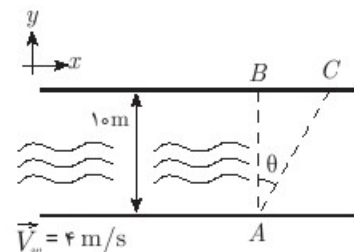
$$\vec{V}_B \parallel AB \vec{j} : \vec{V}_B = \vec{V}_b + \vec{V}_w = \vec{V}_b + 4 \vec{i}$$

$$(\vec{V}_b + 4 \vec{i}) \parallel \vec{j} \rightarrow \vec{V}_b = V'_b \vec{j} - 4 \vec{i}, |\vec{V}_b| = 5 \text{ m/s}$$

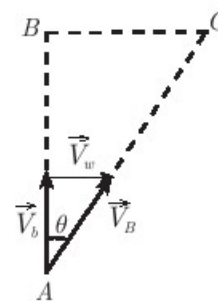
$$\rightarrow 5^2 = 4^2 + (V'_b)^2 \rightarrow (V'_b)^2 = 9 \rightarrow V'_b = 3 \text{ m/s} \rightarrow \vec{V}_b = 3 \vec{j} - 4 \vec{i}$$

$$\rightarrow \vec{V}_B = 3 \vec{j} - 4 \vec{i} + 4 \vec{i} = 3 \vec{j} \text{ (m/s)}$$

$$AB \vec{j} = V_B \vec{j} (\Delta t_2) \rightarrow 10 = 3 \Delta t_2 \rightarrow \Delta t_2 = 3,3 \text{ s}$$



شکل ۱-۳۵

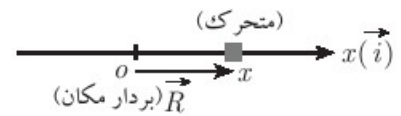


شکل ۱-۳۶



در قسمت المپیاد به بحث درباره‌ی موضوعات مطرح شده به شکل جامع‌تری می‌پردازیم و همچنین موضوعات جدیدی را مطرح خواهیم کرد که در حل مسائل پیچده‌تر از آنها بهره خواهیم برد. ابتدا به‌طور کلی مروری بر روابط به‌دست آمده در سینماتیک یک‌بعدی و دوبعدی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} \quad \text{بردار مکان} \\ \vec{v} &= \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(x_2 - x_1)\vec{i}}{t_2 - t_1} \\ \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned}$$



شکل ۱-۳۷

از این قسمت به بعد مشتق هر تابع دلخواه از زمان مانند f نسبت به زمان را با نماد \dot{f} نشان

می‌دهیم:

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}, \quad \frac{dg}{dt} = \dot{g}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}}$$

شاید این سؤال برایتان به وجود آید که تفاوت میان دو تابع $f(t)$ و $\vec{R}(t)$ در چیست؟ پاسخ این سؤال بسیار ساده است. تابع $f(t)$ یک تابع اسکالر است یعنی به ازای هر ورودی t ، تابع به شما یک عدد تحویل خواهد داد. در صورتی که تابع $\vec{r}(t)$ یک تابع برداری می‌باشد یعنی به ازای هر ورودی t شما یک بردار را به عنوان خروجی تابع خواهید داشت. حال شاید بپرسید مشتق در یک تابع برداری چگونه قابل محاسبه می‌باشد. در اینجا به صورت خلاصه این مطلب را توضیح می‌دهیم اما در قسمت‌های بعدی به‌طور مفصل به شرح این موضوع خواهیم پرداخت. مشتق یک تابع برداری همانند مشتق یک تابع اسکالر با استفاده از تعریف مشتق محاسبه می‌شود. برای مثال سرعت یک متحرک در دو بعد به وسیله مشتق‌گیری از تابع مکان آن جسم که یک تابع برداری است به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{(t+\Delta t) - t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j}] - [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t+\Delta t) - x(t)]\vec{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\vec{j}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) \vec{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \vec{j} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \\ &\rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \vec{v} \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید مشتق یک بردار بر حسب زمان نیز به صورت برداری دیگر ظاهر می‌شود که با توجه به تعریف مشتق قابل توجیه است. مشتق سرعت را نیز می‌توان به همین صورت محاسبه کرد و بردار شتاب را به‌دست آورد.



مروری بر روابط سینماتیکی در یک بعد

$$\vec{r} = x\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} \rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{d(x\vec{i})}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + x \frac{d(\vec{i})}{dt}$$

از آنجایی که بردار یکه‌ی \vec{i} ثابت و مستقل از زمان است، جمله‌ی $\frac{d(\vec{i})}{dt}$ برابر با صفر خواهد بود.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \rightarrow \Delta \vec{v} = \vec{a} \Delta t$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\frac{dx}{dt}\vec{i})}{dt} \\ = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} dt (\vec{i})$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a} dt = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x} dt (\vec{i})$$

در دو تساوی فوق از مفهوم انتگرال استفاده شده است که آن را توضیح خواهیم داد. در قسمت قبل روابط سینماتیکی خود را بدون استفاده از مفهوم انتگرال و در سطح درس پیش‌دانشگاهی بیان نمودیم اما در واقعیت کمتر مسأله‌ای بدون استفاده از مفاهیم مشتق و انتگرال قابل حل است. برای درک کاربرد انتگرال در مسائل فیزیکی مسأله‌ی زیر را حل خواهیم کرد.

متحرکی با سرعت متغیر $\vec{v}(t)$ بر یک جاده‌ی مستقیم در حال حرکت می‌باشد.

الف) مقدار جابه‌جایی این متحرک را بین لحظات $t = 2\text{s}$ و $t = 5\text{s}$ بیابید.

ب) سرعت متوسط متحرک را در بازه‌ی زمانی $2\text{s} < \Delta t < 5\text{s}$ بیابید.

ج) تابع مکان این متحرک را بیابید. $(\vec{r}_{(t=0)} = 15\vec{i})$

$$\vec{v}(t) = (at^2 + bt + c \sin t)\vec{i} \text{ (m/s)}, \quad a = b = 2, \quad c = 55$$

حل. الف) با توجه به صورت مسأله تنها اطلاعاتی که در اختیار ما قرار داده شده است تابع سرعت جسم بر حسب زمان می‌باشد. برای اینکه مقدار جابه‌جایی متحرک در بازه‌ی زمانی $2\text{s} < \Delta t < 5\text{s}$ را بیابیم، می‌توانیم از سرعت متوسط متحرک در این بازه‌ی زمانی استفاده کنیم اما در این مسأله سرعت متوسط را در اختیار نداریم بلکه سرعت لحظه‌ای متحرک در هر لحظه‌ی دلخواه را در اختیار داریم. اکنون به روش‌های زیر در یافتن میزان جابه‌جایی بین لحظات $t = 2\text{s}$ و $t = 5\text{s}$ توجه کنید:

روش اول:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_{t=5} - \vec{r}_{t=2} = \vec{v} \times \Delta t = 3\vec{v}, \quad \vec{v}: 2s < \Delta t < 5s$$

روش دوم:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_{t=5} - \vec{r}_{t=3.5} + \vec{r}_{t=3.5} - \vec{r}_{t=2} = \vec{v}_1 \times \Delta t_1 + \vec{v}_2 \times \Delta t_2$$

$$\begin{cases} \Delta t_1 = (5 - 3.5) = 1.5s, & \vec{v}_1: 3.5s < \Delta t_1 < 5s \\ \Delta t_2 = (3.5 - 2) = 1.5s, & \vec{v}_2: 2s < \Delta t_2 < 3.5s \end{cases}$$

روش سوم:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_{t=5} - \vec{r}_{t=2} + \vec{r}_{t=4} - \vec{r}_{t=4} + \vec{r}_{t=3} - \vec{r}_{t=3} + \vec{r}_{t=2} - \vec{r}_{t=2}$$

$$= \vec{\Delta r}_1 + \vec{\Delta r}_2 + \vec{\Delta r}_3 = \vec{v}_1 \Delta t_1 + \vec{v}_2 \Delta t_2 + \vec{v}_3 \Delta t_3$$

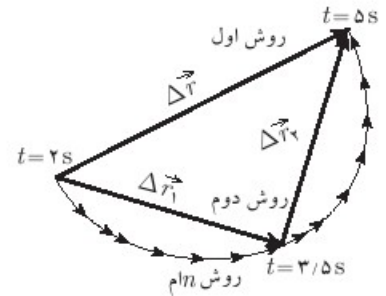
$$\begin{cases} \Delta t_1 = (5 - 4) = 1s, & \vec{v}_1: 4s < \Delta t_1 < 5s \\ \Delta t_2 = (4 - 3) = 1s, & \vec{v}_2: 3s < \Delta t_2 < 4s \\ \Delta t_3 = (3 - 2) = 1s, & \vec{v}_3: 2s < \Delta t_3 < 3s \end{cases}$$

⋮

روش nام:

$$n \rightarrow \infty : \vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}_1 + \vec{\Delta r}_2 + \vec{\Delta r}_3 + \dots + \vec{\Delta r}_n$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta r_i \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta r_i = dr_i$$



شکل ۱-۳۸

همان طور که مشاهده می‌کنید در روش nام بردار جابه‌جایی کل در بازه‌ی زمانی $2s < \Delta t < 5s$ را به وسیله مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچک جابه‌جایی به وجود آمده در بازه‌های زمانی بی‌نهایت کوچک نشان داده‌ایم (مانند شکل ۱-۳۸). در نتیجه سرعت‌های متوسط نوشته شده در روش nام برابر با سرعت لحظه‌ای در لحظه‌ی متناظر با آن بردار جابه‌جایی بی‌نهایت کوچک خواهد بود. انتگرال یک ابزار ریاضی است که به وسیله‌ی آن می‌توان مجموع این مقادارهای بی‌نهایت کوچک را به دست آورد. برای درک کامل مفهوم انتگرال می‌توانید کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال از همین مجموعه کتاب‌ها را مطالعه کنید.

مجموع بردارهای جابه‌جایی در روش‌های مختلف حل مسأله را می‌توان به وسیله ابزار \sum نشان داد و در حالتی که این بردارها بی‌نهایت کوچک باشند علامت \sum به انتگرال با نماد \int تبدیل خواهد شد.

$$\vec{\Delta r} = \sum_{i=1}^n \Delta r_i$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta r_i = \int dr_i : \text{مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچک جابه‌جایی}$$

برای به دست آوردن حاصل یک انتگرال قضایایی وجود دارد که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به اثبات رسیده است. طبق این قضایا انتگرال به دو نوع انتگرال معین و انتگرال نامعین تفکیک می‌شود.

انتگرال معین: انتگرال ایزاری است که به وسیله‌ی آن می‌توان بی‌نهایت مقدار بسیار کوچک را با یکدیگر جمع کرد. حال این مقادیر بسیار کوچک می‌توانند به صورت تابعی از یک متغیر خاص باشند مثلاً در عبارت $\left(\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} v(t_i) \Delta t_i \right)$ کل عبارت تابعی از متغیر t می‌باشد. این امر بسیار مفید می‌باشد زیرا محاسبه‌ی چنین انتگرالی با استفاده از قضایای انتگرال بسیار ساده خواهد بود. در انتگرال معین، متغیر انتگرال بین دو نقطه‌ی مشخص تغییر می‌کند مانند مسأله‌ی فوق بود. در این نوع انتگرال، حاصل انتگرال یک عدد (در صورت اسکالر بودن تابع داخل انتگرال) و یا یک بردار (در صورت برداری بودن تابع داخل انتگرال) خواهد بود. انتگرال ایجاد شده در روش n ام برای حل مسأله‌ی فوق از نوع انتگرال معین است.

$$\vec{\Delta R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \Delta t_i = \int_{t=2s}^{t=5s} \vec{v} dt \quad \text{فرم نمایش انتگرال معین}$$

انتگرال نیز مانند \sum حاصل جمع عبارات مختلف می‌باشد در نتیجه تمامی قوانین حاکم بر \sum بر انتگرال نیز حاکم است.

$$\begin{aligned} ۱) \sum_{i=1}^n a_i + b_i &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} [f(x) + g(x)] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx \end{aligned}$$

ضرایب ثابت از انتگرال خارج می‌شوند:

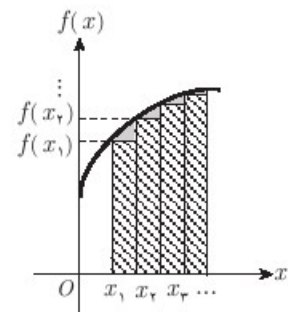
$$۲) \sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} k f(x) dx = k \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

توجیه هندسی انتگرال

از نظر هندسی می‌توان انتگرال یک تابع را به صورت مساحت زیر منحنی آن تابع رسم کرد. در شکل (۳۹-۱) حاصل جمع مساحت مستطیل‌های هاشورزده شده برابر است با:

$$\begin{aligned} S &= f(x_1) \times (x_2 - x_1) + f(x_2) \times (x_3 - x_2) + \dots + f(x_n) \times (x_{n+1} - x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \times (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

حاصل عبارت به دست آمده برابر با مساحت مستطیل‌های هاشور خورده در زیر منحنی تابع می‌باشد و اما اختلاف کوچکی میان مساحت به دست آمده توسط مستطیل‌ها و مساحت زیر منحنی تابع وجود دارد که برابر با مساحت قسمت‌های سیاه شده در نمودار شکل (۳۹-۱) می‌باشد. حال اگر جمله‌ی $(x_{i+1} - x_i)$ را به سمت صفر میل دهیم آنگاه تعداد جملات موجود



شکل ۳۹-۱

در حاصل جمع (n) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و در این حالت مساحت قسمت‌های سیاه شده بین مستطیل‌ها و نمودار تابع به سمت صفر میل خواهد کرد در نتیجه مساحت زیر نمودار تابع با مساحت مستطیل‌ها برابر خواهد شد. از طرفی با میل دادن n به سمت بی‌نهایت عبارت

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \times (x_{i+1} - x_i)$$

تبدیل به انتگرال تابع $f(x)$ از x_1 تا x_n خواهد شد در نتیجه انتگرال معین یک تابع از x_i تا x_j برابر با مساحت زیر منحنی تابع در بازه‌ی $x_j > x > x_i$ می‌باشد:

$$(n \rightarrow \infty) : (\Delta x_i \rightarrow 0) : \Delta x_i = dx$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \times (\Delta x_i) = \int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = f(x) \text{ مساحت زیر منحنی نمودار تابع}$$

این نکته در مسائلی که نمودار تابع داخل انتگرال به صورت چندضلعی و یا دایروی باشد بسیار پر کاربرد می‌باشد زیرا محاسبه‌ی مساحت این اشکال هندسی ساده‌تر از محاسبه‌ی انتگرال از روش‌های جبری است.

اکنون به حل مسأله‌ی خودمان برمی‌گردیم:

در مسأله‌ی مطرح شده تابع سرعت بر حسب زمان همان تابع داخل انتگرال می‌باشد که با ضابطه‌ی $v(t) = at^2 + bt + c \sin t$ بیان شده است. ضابطه‌ی تابع نشان می‌دهد که شکل منحنی تابع پیچیده خواهد بود و نمی‌توان مساحت زیر نمودار تابع را به راحتی محاسبه نمود پس باید به دنبال روش دیگری برای حل این انتگرال باشیم.

برای حل چنین انتگرالی از روش حل انتگرال نوع دوم یا انتگرال نامعین استفاده می‌کنیم. برای آشنایی با این نوع انتگرال به اختصار به توضیح مفهوم انتگرال نامعین و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم.

تفاوت اساسی میان انتگرال معین و انتگرال نامعین در کران‌های بالا و پایین متغیر انتگرال‌گیری در این دو نوع انتگرال می‌باشد. در انتگرال معین دیدیم که حاصل انتگرال یک عدد است که با توجه به کران‌های بالا و پایین انتگرال تعیین می‌شود ولی در انتگرال نامعین حداقل یکی از کران‌های انتگرال به صورت متغیر نوشته می‌شود که به ازای هر مقدار خاص برای کران متغیر انتگرال حاصل انتگرال نیز عددی مشخص خواهد بود و به ازای هر عددی که به جای کران متغیر در انتگرال نامعین قرار گیرد، این انتگرال تبدیل به یک انتگرال معین خواهد شد:

$$\begin{aligned} x = b &\rightarrow \int_a^b f(x) dx = A \\ x = c &\rightarrow \int_a^c f(x) dx = B \end{aligned}$$

شکل انتگرال نامعین با کران بالای متغیر: $\int_a^x f(x) dx$,

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با تغییر در مقدار کران متغیر انتگرال، حاصل انتگرال نیز تغییر می‌کند در نتیجه انتگرال نامعین خود تابعی از متغیر موجود در کران انتگرال می‌باشد:

$$\int_a^x f(x) dx = F(x), \int_a^t f(x) dx = F(t), \int_a^s f(x) dx = F(s)$$

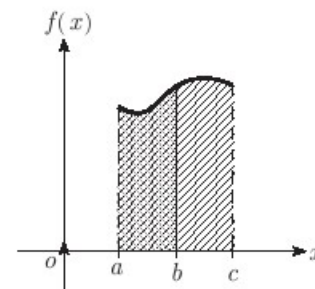
متغیر تابع f و متغیر کران انتگرال مستقل از یکدیگرند و هیچ لزومی ندارد که آنها را به وسیله نمادهای یکسان نشان دهیم برای مثال می‌توان متغیر کران انتگرال را با نماد t و متغیر تابع را با نماد x نشان داد، ولی باید توجه داشت که تابع جواب انتگرال به صورت تابعی از متغیر کران انتگرال می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم به وسیله تابع F به دست آمده از انتگرال نامعین، مقدار انتگرال معین تابع f را در بازه‌ی $b < x < c$ به دست آوریم. برای این کار به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) \rightarrow \begin{cases} F(b) = \int_a^b f(x)dx = A \\ F(c) = \int_a^c f(x)dx = B \end{cases}$$

$$F(c) - F(b) = \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

در عبارت $F(c) - F(b)$ یک بار انتگرال معین تابع f در محدوده‌ی $a < x < c$ محاسبه می‌شود و سپس انتگرال معین همان تابع از a تا b محاسبه شده و از حاصل انتگرال اول کم می‌شود. شمای هندسی حاصل عبارت $F(c) - F(b)$ بر روی نمودار تابع f در شکل ۴۰-۱ نمایش داده شده است.



شکل ۴۰-۱

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx = \text{مساحت قسمت هاشور خورده بین } a < x < c$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = \text{مساحت قسمت هاشور خورده بین } a < x < b$$

$$\rightarrow F(c) - F(b) = \text{مساحت قسمت هاشور خورده بین } b < x < c$$

$$= \int_b^c f(x)dx : \text{انتگرال معین تابع } f(x) \text{ در بازه‌ی } b < x < c$$

با آگاهی از برخی خواص انتگرال‌ها نتیجه‌ی فوق را می‌توان به صورت جبری نیز به دست آورد:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (I)$$

اثبات خاصیت (I) بسیار ساده است و می‌توان به وسیله‌ی جمع کردن مساحت زیر نمودار تابع $f(x)$ در بازه‌های $a < x < b$ و $b < x < c$ آن را نشان داد.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (II)$$

خاصیت (II) با توجه به خاصیت (I) قابل اثبات می‌باشد:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0 \rightarrow \int_a^b f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

با توجه به دو خاصیت (I) و (II) داریم:

$$\begin{aligned} F(c) - F(b) &= \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_b^a f(x)dx \\ &= \int_b^c f(x)dx : b < x < c \end{aligned}$$

انتگرال معین تابع f در بازه‌ی $b < x < c$

با توجه به مطالب گفته شده می‌توان با استفاده از تابع F ، انتگرال معین تابع f را در هر بازه‌ی دلخواه به دست آورد. به تابع F یک تابع اولیه برای تابع f گفته می‌شود. قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان می‌کند که رابطه‌ی میان دو تابع F و f به صورت زیر می‌باشد:

$$F'(x) = f(x) \rightarrow \int f(x)dx = F(x)$$

قضیه‌ی فوق در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال از همین مجموعه به اثبات رسیده است. این تساوی نشان می‌دهد به ازای یک تابع f یکتا، بی‌نهایت تابع اولیه F می‌توان یافت که در قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال صدق کند. این ادعا را به شکل زیر می‌توان اثبات کرد:

$$F_1(x) = \int f(x)dx \rightarrow F_1'(x) = f(x)$$

$$F_2(x) = F_1(x) + c$$

c : یک عدد ثابت دلخواه

$$\frac{dF_2(x)}{dx} = \frac{d(F_1(x) + c)}{dx} = \frac{dF_1(x)}{dx} + \frac{dc}{dx}$$

$$= \frac{dF_1(x)}{dx} = F_1'(x) = f(x)$$

$$\rightarrow F_2'(x) = f(x) \rightarrow F_2(x) = \int f(x)dx$$

همان‌طور که در اثبات فوق نشان داده شده است برای هر تابع انتگرال‌پذیر دلخواه مانند f بی‌نهایت تابع اولیه وجود دارد که تفاضل هر دو تابع دلخواه از میان این توابع اولیه برابر با عددی ثابت و مستقل از متغیر انتگرال خواهد بود. دلیل تفاوت در ثابت‌های موجود در توابع اولیه، تفاوت در کران‌های ثابت انتگرال نامعین می‌باشد برای مثال انتگرال نامعین تابع $f(x)$ را می‌توان به اشکال مختلفی نشان داد که در هر یک از این انتگرال‌ها کران پایین انتگرال عددی ثابت ولی متفاوت با کران پایین انتگرال‌های دیگر است:

$$\int_{a_1}^x f(x)dx, \int_{a_2}^x f(x)dx, \int_{a_3}^x f(x)dx, \int_{a_4}^x f(x)dx, \dots$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots = \text{cte} \quad , \quad a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \dots$$

$$\int_{a_1}^x f(x)dx = F(x) \quad , \quad \int_{a_2}^x f(x)dx = F(x) + c_1$$

$$\int_{a_3}^x f(x)dx = F(x) + c_2 \quad , \quad \int_{a_4}^x f(x)dx = F(x) + c_3$$

$$\int_{a_1}^x f(x)dx - \int_{a_2}^x f(x)dx = \int_{a_1}^x f(x)dx + \int_x^{a_2} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \quad (I)$$

$$\int_{a_1}^x f(x)dx - \int_{a_2}^x f(x)dx = F(x) - [F(x) + c_1] = -c_1 \quad (II)$$

$$(I), (II) \rightarrow c_1 = - \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = \int_{a_2}^{a_1} f(x)dx$$

تفاوت در ثابت‌های موجود در توابع اولیه، به دلیل تفاوت در کران‌های ثابت انتگرال نامعین می‌باشد.

با توجه به مطالب گفته شده با مفاهیم انتگرال معین و نامعین به صورت کلی آشنا شدیم و روش استفاده از آنها را آموختیم. در واقع مفاهیم مشتق و انتگرال جدا از یکدیگر نیستند و هرگاه بتوانیم مفهوم یکی را به خوبی درک کنیم، فهم دیگری نیز امکان‌پذیر خواهد بود زیرا هر دوی این مفاهیم با مقادیر بی‌نهایت کوچک سروکار دارند و به نوعی می‌توان گفت انتگرال همان معکوس مشتق می‌باشد.

انتگرال نامعین برخی توابع پرکاربرد ریاضی در زیر آورده شده است. (برای اثبات درستی انتگرال‌های زیر تنها کافی است از حاصل انتگرال نامعین مشتق گرفته و برابری آن را با تابع درون انتگرال بررسی کنید.)

- ۱) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
- ۲) $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- ۳) $\int \cos x dx = \sin x + c$
- ۴) $\int \left(\frac{1}{x \pm a}\right) dx = \ln|x \pm a| + c, \quad (\ln a = \log_e a)$
- ۵) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \text{Arctan} x + c$
- ۶) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \text{Arcsin} x + c$
- ۷) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$
- ۸) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$
- ۹) $\int (e^{ax}) dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

با استفاده از انتگرال‌های فوق می‌توانیم مسأله‌ی مطرح شده را به‌طور کامل حل نماییم:
الف) بردار جابه‌جایی بین لحظات $0s < t < 5s$:

$$\vec{v}(t) = (at^2 + bt + c \sin t)\vec{i}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_{(t_2)} - \vec{R}_{(t_1)} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt \\ t_1 &= 2s, t_2 = 5s \end{aligned} \right\} \rightarrow \overline{\Delta R} = \vec{R}_{(5)} - \vec{R}_{(2)}$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta R} = \int_2^5 (at^2 + bt + c \sin t) \vec{i} dt$$

\vec{i} : بردار یکه‌ی مستقل از زمان $\rightarrow \overline{\Delta R} = \vec{i} \int_2^5 (at^2 + bt + c \sin t) dt$

با استفاده از خواص انتگرال داریم:

$$\overline{\Delta R} = \vec{i} \left[a \int_2^5 t^2 dt + b \int_2^5 t dt + c \int_2^5 \sin t dt \right]$$

$$\rightarrow \overline{\Delta R} = \vec{i} \left[\frac{a}{3} (5^3 - 2^3) + \frac{b}{2} (5^2 - 2^2) + c (-\cos(5) - (-\cos(2))) \right]$$

($a = b = 2, c = 55$): $2s < t < 5s$ لحظات بین جابه‌جایی بردار

$$\overline{\Delta R} = \vec{i} [78 + 21 - 38,5] = 60,5 \vec{i} \text{ (m)}$$

ب) سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $2s < t < 5s$:

$$\vec{v} = \frac{\vec{R}_{(5)} - \vec{R}_{(2)}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta R}}{\Delta t} = \frac{60,5}{(5-2)} \vec{i} = 20,17 \vec{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

\vec{v} نشان دهنده‌ی مقدار متوسط تابع $\vec{v}(t)$ در بین لحظات $t = 2s$ و $t = 5s$ است. در حالت کلی برای تابع دلخواه $f(x)$ مقدار متوسط این تابع در بازه‌ی دلخواه $x_1 < x < x_2$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{f} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{(x_2 - x_1)} \rightarrow \bar{f}(x_2 - x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

توجیه هندسی مقدار متوسط تابع $f(x)$ در شکل نمودار (۱-۴۱) نشان می‌دهد که مساحت مستطیل هاشور خورده در شکل برابر با مساحت زیر نمودار در بازه‌ی $x_1 < x < x_2$ است:

$$\bar{f}(x_2 - x_1) : \text{مساحت مستطیل هاشور خورده}$$

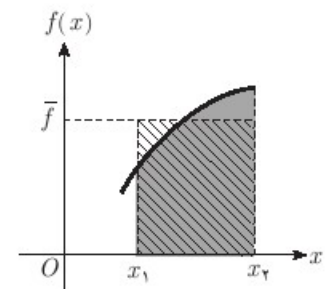
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx : \text{مساحت زیر نمودار}$$

ج) تابع مکان متحرک: برای حل این قسمت از مسأله باید از روش حل انتگرال نامعین استفاده کنیم:

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \rightarrow \vec{R}(t) = \int \vec{v}(t) dt$$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \int (at^2 + bt + c \sin t) \vec{i} dt$$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \vec{i} \left[a \int t^2 dt + b \int t dt + c \int \sin t dt \right]$$



شکل ۱-۴۱

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{R}(t) &= \vec{i} \left[\left(a \frac{t^3}{3} + c_1 \right) + \left(b \frac{t^2}{2} + c_2 \right) + (-c \cos t + c_3) \right] \\ \rightarrow \vec{R}(t) &= \left(\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} - c \cos t + \underbrace{(c_1 + c_2 + c_3)}_{c'} \right) \vec{i} \\ &= \left(\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} - c \cos t + c' \right) \vec{i} \end{aligned}$$

نتیجه‌ی حاصل از انتگرال نامعین نشان می‌دهد که بی‌نهایت تابع برداری به ازای مقدار ثابت‌های مختلف برای c' وجود دارد که از نظر ریاضی همگی آنها می‌توانند نشان دهنده‌ی تابع مکان این متحرک باشند اما در دنیای واقعی تنها یکی از این توابع است که نشان دهنده‌ی تابع مکان این متحرک است در نتیجه برای مشخص نمودن این تابع باید اطلاعاتی در اختیار داشته باشیم تا بتوانیم ثابت c' متناظر با این تابع را به دست آوریم. این اطلاعات از روی شرایط اولیه‌ی مسأله در اختیار ما قرار می‌گیرد که در این مسأله به صورت $\vec{R}(0) = 15\vec{i}$ (m) بیان شده است یعنی از میان تمامی توابع مکان به دست آمده از انتگرال نامعین تنها در یکی از توابع با یک ثابت c' مشخص است که متحرک در لحظه‌ی $t = 0$ s در مکان $\vec{R} = 15\vec{i}$ قرار دارد و این تابع جواب قطعی مسأله‌ی ما می‌باشد. این احتمال وجود دارد که در برخی از مسائل تعداد ثابت‌های انتگرال‌گیری دو و یا چند ثابت باشد که در این حالت شرایط اولیه‌ی مسأله نیز به همین میزان افزایش پیدا می‌کند و به ازای هر یک ثابت انتگرال‌گیری، یک شرط اولیه خواهیم داشت. اگر تعداد ثوابت از تعداد شرایط اولیه‌ی مسأله بیشتر باشد نمی‌توانیم به جواب قطعی مسأله دست پیدا کنیم:

$$\vec{R}(t) = \left(\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} - c \cos t + c' \right) \vec{i}, \quad a = b = 2, \quad c = 55$$

$$\vec{R}(0) = (0 + 0 - c + c')\vec{i} = 15\vec{i} \rightarrow c' - c = 15 \rightarrow c' = 70$$

تابع مکان متحرک بر حسب زمان:

$$\vec{R}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t^2 - 55 \cos t + 70 \right) \vec{i}$$

ذره‌ی شماره‌ی (۱) تحت شتاب $a = -kv$ و ذره‌ی شماره‌ی (۲) تحت شتاب $a = -kt$ و ذره‌ی شماره‌ی (۳) تحت شتاب $a = -ks$ بر روی محور مستقیم S حرکت می‌کنند. هر سه ذره حرکت خود را از مبدأ مختصات در $S = 0$ و با سرعت اولیه‌ی $v_0 = 10$ m/s در زمان $t = 0$ آغاز کرده‌اند و مقدار ضریب k برای هر سه ذره برابر با 10^{-1} است. (دقت کنید که واحد k برای سه ذره متفاوت می‌باشد). تابع موقعیت، سرعت و شتاب هر سه ذره را بر حسب زمان به دست آورید. **حل.** برای به دست آوردن توابع سرعت و مکان یک متحرک می‌توانیم از تابع شتاب آن متحرک انتگرال‌گیری کنیم و سپس به وسیله‌ی اعمال شرایط مرزی ثابت‌های حاصل از انتگرال را تعیین نماییم. اما در صورت این مسأله تابع شتاب ذرات (۱) و (۳) به صورت تابعی از زمان بیان نشده‌اند و در نتیجه نمی‌توان از آنها بر حسب متغیر زمان انتگرال‌گیری کرد. برای این که بتوانیم توابع شتاب، سرعت و مکان این دو ذره را بر حسب زمان بیان نماییم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مثال ۲۰