به نام خدایی که هست من است

گچ اکنون دوباره به دست من است

نردبان المپیاد ریاضی

هندسه (مرحله اول)

مهدی تفرشی

مدال برنز المپیاد ریاضی

سرشناسه	:	تفرشی، مهدی، ۱۳۷۲
عنوان و نام پدیدآور	:	نردبان المپیاد ریاضی، هندسه (مرحله اول) / مولف مهدی تفرشی
مشخصات نشر	:	تهران: انتشارات گچ، ۱۳۹۶
مشخصات ظاهری	:	۲۰۰ ص. : مصور (رنگی)، جدول (رنگی)، نمودار (رنگی)
فروست	:	نردبان المپیاد ریاضی؛ ۴
موضوع	:	المپیادها (هندسه)، مسابقه‌ها، مسائل، تمرین‌ها و غیره، راهنمای آموزشی (متوسطه)
موضوع	:	Geometry - Competitions ، Olympiads (Problems, exercises, etc)، (Study and teaching Secondary)
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۹۸۱۳-۰-۰
رده‌بندی کنگره	:	۱۳۹۶ ۴ن۷ت/ ۲۴/۳۰۶۰ LB
رده‌بندی دیویی:	:	۲۳۸۰۷۶/۳۷۳
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
شماره کتابشناسی ملی	:	۴۸۲۸۰۰۲

نشر گچ

نردبان المپیاد ریاضی- هندسه مرحله اول

- مؤلف: مهدی تفرشی
- ناشر: گــچ
- صفحه‌آرایی: نشر گچ
- طراحی جلد: مهدی صمدی
- نوبت و سال چاپ: اول- ۱۳۹۶
- شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه
- قیمت: ۲۵۰۰۰ تومان
- شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۹۸۱۳-۰-۰

email: info@gachpub.com | www.gachpub.com

فهرست مطالب

سخن ناشر؛

گذرِ عمر تابع حالت است که تغییرات آن با داشتن نقاط ابتدا و انتهای هر بازه مشخص می‌شود. حتماً شما ده سال بعد، ده سال بزرگ‌تر (و یا شاید پیرتر) شده‌اید. این طول زندگی شماست و با سرعت در حال پیش‌روی است، جالب اینکه هیچ کنترلی بر روی آن ندارید. این طول، محدودیت دارد و در نهایت به پایان می‌رسد. برای انسان‌های مختلف هم تفاوت زیادی ندارد، چند سال کمتر یا بیشتر!

حالا چشمان خود را ببندید و به آینده نگاه کنید، می‌توانید بگویید ده سال بعد، شما که هستید؟ حالت‌های ممکن، عرض زندگی شما و یک تابع مسیر است. هر لحظه از این ده سال می‌تواند در چیزی که در انتهای آن خواهید بود مؤثر باشد.

هیچ وقت کسی ما را به خاطر توابع حالت زندگی‌مان بازخواست نمی‌کند، مثلاً تا حالا از شما پرسیده‌اند چرا در این سه سال فقط سی و شش ماه بزرگ‌شده‌ای؟ اما توابع مسیر را خودمان باید بسازیم، برای همین باید پاسخگوی این تغییرات باشیم. شاید بعضی از این سؤالات را شنیده باشید:

- چرا این‌قدر لاغر شدی؟ (پس وزن یک تابع مسیر است)
- چی شد که این‌قدر خطت قشنگ شد؟ (پس هنر یک تابع مسیر است)
- چطور تونستی صبر کنی؟ (پس اخلاق یک تابع مسیر است)
- چی کار کردی این همه پول درآوردی؟ (پس موفقیت شغلی یک تابع مسیر است)
- چرا همه تو رو دوست دارند؟ (پس شهرت یک تابع مسیر است)
- چقدر خوب می‌فهمی! (پس درک، فهم و تحصیلات تابع مسیر است)
- ...

می‌توانیم بخوابیم و همین‌طور که خوابیم، صد یا دویست سال بعد، کلاً و برای همیشه در این دنیا بخوابیم، بدون اینکه تابع مسیری از خود باقی گذاشته باشیم! اما عرض زندگی نهایت ندارد و در هر فرصتی، هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم به آن وسعت بدهیم؛ انتخاب با خود ما است.

مقدمه مؤلف؛

یکی از دلایل ناکامی دانش‌آموزانی که در ابتدای راه از گردونهٔ المپیاد خارج می شوند انتخاب کتاب‌هایی فراتر از سطح علمی آن‌ها است. دانش‌آموز بدون داشتن پایهٔ مناسب، خود را درگیر مطالعه می‌کند و با اینکه محتوای این کتاب‌ها بسیار غنی است، کمترین بهره را از خواندنشان می‌برد. به همین رو هدف کتاب حاضر آموزش مبانی و اصول اولیهٔ حل مسأله در مبحث هندسه است. کتاب به گونه‌ای نگاشته شده تا دانش‌آموزانی که قصد شرکت در مرحلهٔ اول المپیاد را دارند با دانشی در حدود کتاب‌های درسی مباحث را دنبال کرده و ضمن افزایش مهارت در حل مسأله، دانش مورد نیاز برای مطالعهٔ کتاب‌های پیشرفته تر را فراگیرند.

در این کتاب نیز با توجه به هدفِ مجموعهٔ نردبان المپیاد ریاضی، مهم ترین مباحث مطرح در مرحلهٔ اول آموزش داده شده و از هرگونه مباحث غیرضروری یا با اهمیت کمتر در این مرحله چشم پوشی شده تا اولاً کتاب در حجمی مناسب ارائه شود، ثانیاً دانش آموز در ابتدای کار با مباحث پیچیده دست به گریبان نشود و با اعتماد بنفس و علاقهٔ بیشتری به دنبال ادامهٔ مسیر و آشنایی با سطح بالاتری از هندسه باشد. البته با توجه به ماهیت المپیاد حل مسائل در سطح مقدماتی هم نیازمند صرف وقت، پشتکار و کمی خلاقیت است.

در انتها لازم است از آقای خلینا مدیر مجموعهٔ آیریسک و انتشارات گچ و همچنین استاد ارجمندم جناب آقای احمدپور تشکر و قدردانی کنم.

لطفاً هرگونه نظر و پیشنهاد در رابطه با کتاب را به ایمیل mahditafreshi7@yahoo.com ارسال کنید.

مهدی تفرشی

تابستان ۱۳۹۶

۱

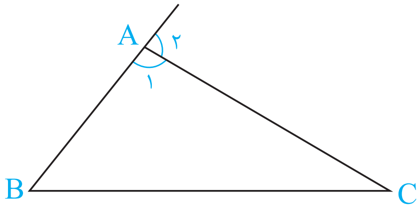
اشکال هندسی

پیش از شروع بحث اصلی بهتر است یک سری مقدمات را یادآوری کنیم که انتظار داریم شما پیش از مطالعه این کتاب با آن‌ها آشنا باشید.

آیا مجموع زوایای داخلی مثلث را می‌دانید؟ اگر پاسخ‌تان مثبت است به مطالعه کتاب ادامه دهید در غیر این‌صورت پیش از شروع این کتاب حتماً یک‌بار کتاب‌های درسی ریاضی خود را مطالعه کنید.

اکنون حتماً می‌دانید که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. با توجه به این موضوع ثابت کنید در هر مثلث هر زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور است.

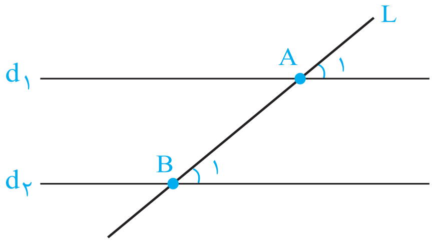
اثبات:



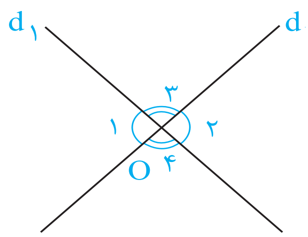
$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

موضوع دیگری که باید به‌خاطر داشته باشید قضیه خطوط موازی و مورب است که بیان می‌کند

هرگاه خط مورب L دو خط موازی d_1 و d_2 را در دو نقطه A و B قطع کند آن‌گاه داریم $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$



زاویه‌های متقابل به رأس

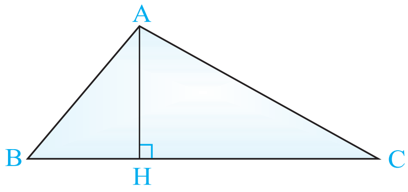


$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

به همین ترتیب $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

مساحت

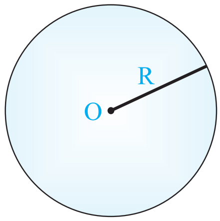
مساحت هر مثلث به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} BC.AH$$

که معادل فارسی آن به این صورت است: مساحت هر مثلث برابر است با یک دوم حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع «ارتفاع را در آغاز بحث اصلی تعریف کرده‌ایم»

مساحت هر دایره به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:



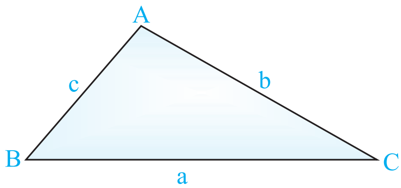
$$S = \pi R^2$$

که در آن R شعاع دایره و π عددی ثابت است

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵...... \simeq ۳/۱۴$$

نامساوی مثلث

در هر مثلث طول هر ضلع از مجموع طول دو ضلع دیگر کوچکتر است.



$$a < b + c$$

در این فصل قصد داریم تا شما را با برخی از مهم‌ترین اشکال هندسی و خواص آن‌ها آشنا کنیم. پس ابتدا به سراغ مثلث و سپس دایره و چهارضلعی خواهیم رفت.

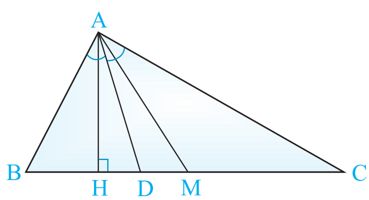
۱- مثلث

پیش از هر چیز اجزای مثلث را معرفی می‌کنیم و بررسی خواص این اجزا را به فصل‌های بعد موکول می‌کنیم.

ارتفاع: ارتفاع نظیر هر رأس از مثلث، پاره‌خطی است که از آن رأس بر ضلع مقابل یا امتداد آن عمود می‌شود که به محل تلاقی ارتفاع با ضلع مقابل پای ارتفاع می‌گویند. (AH)

میانه: میانه نظیر هر رأس مثلث، پاره‌خطی است که آن رأس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند. (AM)

نیمساز: خطی است که از رأس زاویه گذشته و آن را به دو زاویه مساوی تقسیم می‌کند. (AD)



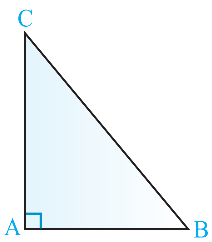
۱-۱ انواع مثلث

مثلث‌ها را می‌توان به چند دسته تقسیم کرد. مثلاً مثلثی که یک زاویه قائمه داشته باشد در دسته مثلث‌های قائم‌الزاویه قرار می‌گیرد و دارای خواص ویژه‌ای خواهد بود. در ادامه به معرفی مهم‌ترین انواع مثلث‌ها خواهیم پرداخت.

مثلث قائم‌الزاویه

مثلثی را که یک زاویه ۹۰° داشته باشد قائم‌الزاویه می‌نامند. مهم‌ترین خاصیت چنین مثلث‌هایی برقراری رابطه فیثاغورس در آن‌ها است که بیان می‌کند مجذور طول وتر برابر مجموع مجذورهای طول دو ضلع دیگر است.

وتر: ضلع روبه‌رو زاویه قائمه را گویند.



رابطه فیثاغورس $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$

این رابطه را می‌توان پلی میان جبر و هندسه دانست. بنابراین چند رابطه جبری را که می‌تواند در محاسبات این رابطه راه‌گشا باشد بیان می‌کنیم.

برای هر دو عدد حقیقی a و b رابطه‌های زیر همواره برقرارند.

۱) $a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)$ اتحاد مزدوج

۲) $(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$ اتحاد مربع دو جمله‌ای

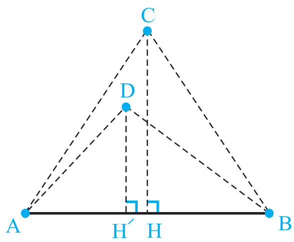
۳) $(a-b)^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab$ اتحاد مربع دو جمله‌ای

مثال ۱

دو نقطه A و B مفروض‌اند. دو نقطه C و D را چنان درنظر می‌گیریم که داشته باشیم $AC^۲ - BC^۲ = AD^۲ - BD^۲$. ثابت کنید CD بر AB عمود است.

اثبات:

پای عمودهای وارد از C و D بر AB را به ترتیب H و H' می‌نامیم. با استفاده از رابطه فیثاغورس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} AD^۲ = (DH')^۲ + (AH')^۲ \\ BD^۲ = (DH')^۲ + (BH')^۲ \end{cases} \Rightarrow AD^۲ - BD^۲ = (AH')^۲ - (BH')^۲ \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \\ BC^۲ = BH^۲ + CH^۲ \end{cases} \Rightarrow AC^۲ - BC^۲ = AH^۲ - BH^۲ \qquad (۲)$$

طبق فرض مسأله سمت چپ عبارات (۱) و (۲) با هم برابرند.

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow (AH')^۲ - (BH')^۲ = AH^۲ - BH^۲$$

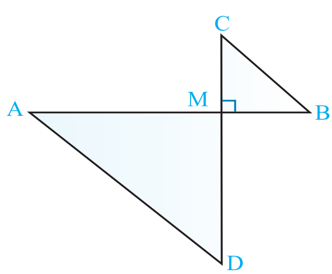
$$\Rightarrow (AH' - BH')(AH' + BH') = (AH - BH)(AH + BH)$$

$$\Rightarrow AB(AH' - BH') = AB(AH - BH) \Rightarrow \left.\begin{matrix} AH' - BH' = AH - BH \\ AH' + BH' = AH + BH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH = AH' , BH = BH'$$

پس H بر H' منطبق است یعنی CD بر AB عمود است.

مثال ۲

دو پاره‌خط AB و CD با طول واحد در نقطه M بر هم عمودند. اگر محیط مثلث $\overset{\triangle}{MBC}$ برابر یک باشد، مساحت مثلث $\overset{\triangle}{AMD}$ چه‌قدر است؟



پاسخ:

فرض کنید $MB = x$ و $MC = y$ در این صورت $AM = ۱ - x$ و $MD = ۱ - y$.

می‌دانیم $MC+CB+BM=۱$ پس $(*)$ $y+\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}+x=۱$.

«توجه کنید که BC وتر مثلث قائم‌الزاویه $M\hat{B}C$ است و طول آن برابر $\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$»

از طرفی مساحت مثلث $A\hat{M}D$ برابر است با

$$S_{A\hat{M}D}=\frac{۱}{۲}AM.MD=\frac{۱}{۲}(۱-x)(۱-y)=\frac{۱}{۲}(۱-x-y+xy)$$

پس برای محاسبه مساحت مثلث $A\hat{M}D$ باید مقدار رابطه $xy-x-y$ را محاسبه کنیم.

با استفاده از رابطه $(*)$ و اتحاد نوع اول می‌توان نوشت:

$$\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=۱-(x+y)\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=(۱-(x+y))^{۲}=۱+(x+y)^{۲}-۲(x+y)\Rightarrow$$
$$x^{۲}+y^{۲}=۱+x^{۲}+y^{۲}+۲xy-۲x-۲y\Rightarrow ۱+۲xy-۲x-۲y=۰\Rightarrow$$
$$xy-x-y=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{A\hat{M}D}=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$$

مثلث متساوی‌الاضلاع

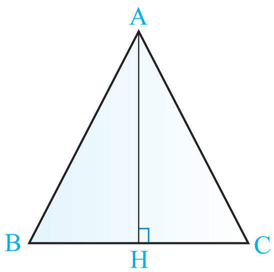
اگر سه ضلع یک مثلث برابر باشند آن مثلث را متساوی‌الاضلاع می‌نامیم. زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع با هم برابر و مساوی ۶۰° می‌باشند. در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر یک رأس بر هم منطبق‌اند.

مثال ۳

طول ارتفاع و مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را برحسب طول یک ضلع به‌دست آورید.

پاسخ:

فرض کنید $A\hat{B}C$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع و $AB=AC=BC=a$. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.



$$BH=HC\Rightarrow BH=\frac{BC}{۲}=\frac{a}{۲}$$ (ارتفاع و میانه بر هم منطبق‌اند)

$$AB^{۲}=AH^{۲}+BH^{۲}\Rightarrow a^{۲}=AH^{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲}\Rightarrow AH^{۲}=\frac{۳}{۴}a^{۲}$$

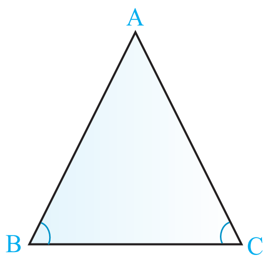
$$\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH.BC=\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)a=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

مثلث متساوی‌الساقین

اگر دو ضلع یک مثلث برابر باشند آن مثلث را متساوی‌الساقین می‌گویند. دو ضلع برابر را ساق، ضلع سوم را قاعده و نقطه مشترک دو ساق را رأس می‌نامیم. در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با هم برابراند.

در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ $(\hat{B}=\hat{C})$ ارتفاع، میانه و نیم‌ساز رأس A برهم منطبق‌اند. هم‌چنین رابطه زیر بین زاویه‌ها برقرار است.



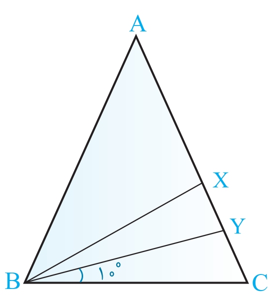
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=\hat{B}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}$$

مثال ۴

در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ که در آن $AB = AC$، نقاط X و Y روی پاره‌خط AC طوری قرار گرفته‌اند که X بین A و Y قرار دارد و به علاوه $BX = AX = BY$. اگر $Y\hat{B}C=۱۰^\circ$، زاویه $B\hat{A}C$ چند درجه است؟

پاسخ:

فرض کنید $B\hat{A}C=\alpha$



$$\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-\alpha}{۲}=۹۰^\circ-\frac{\alpha}{۲} \quad (۱)$$

از طرفی $\overset{\triangle}{ABX}$ متساوی‌الساقین است.

$$A\hat{B}X=B\hat{A}X=\alpha \Rightarrow B\hat{X}Y=۲\alpha$$

همچنین مثلث $\overset{\triangle}{BXY}$ متساوی‌الساقین است.

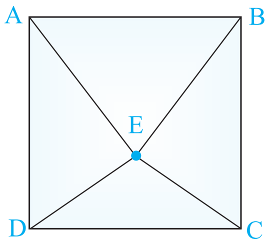
$$B\hat{Y}X=B\hat{X}Y=۲\alpha \Rightarrow X\hat{B}Y=۱۸۰^\circ-۴\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = A\hat{B}X + X\hat{B}Y + Y\hat{B}C = \alpha + ۱۸۰^\circ - ۴\alpha + ۱۰^\circ \\ (۱) \Rightarrow \hat{B} = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۱۹۰^\circ - ۳\alpha = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

مثال ۵

نقطه E درون مربع ABCD به نحوی قرار دارد که مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ متساوی‌الاضلاع است. زاویه $E\hat{D}C$ چند درجه است؟

پاسخ:



$$\overset{\triangle}{ABE} \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow AE = AB = BE \quad (۱)$$

$$ABCD \text{ مربع} \Rightarrow AD = AB \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow AE = AD \Rightarrow \overset{\triangle}{DAE} \text{ متساوی‌الساقین}$$

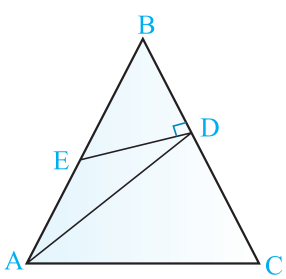
$$\Rightarrow A\hat{D}E = \frac{۱۸۰^\circ - D\hat{A}E}{۲}$$

از طرفی داریم $D\hat{A}E = D\hat{A}B - E\hat{A}B = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ$ پس $A\hat{D}E = ۷۵^\circ \Leftarrow E\hat{D}C = ۱۵^\circ$.

مثال ۶

در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ $(AB = BC)$ از نقطه E روی ضلع AB عمود ED را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. اگر $AE = DE$ باشد، آن‌گاه زاویه $D\hat{A}C$ چند درجه است؟

پاسخ:



$$\begin{cases} A\hat{B}C = \alpha \Rightarrow \begin{cases} B\hat{E}D = ۹۰^\circ - \alpha \\ B\hat{A}C = \frac{۱۸۰^\circ - \alpha}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲} \end{cases} \\ B\hat{E}D = ۹۰^\circ - \alpha \Rightarrow E\hat{A}D = \frac{۹۰^\circ - \alpha}{۲} = ۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D\hat{A}C = B\hat{A}C - B\hat{A}D = (۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}) - (۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲}) = ۴۵^\circ$$

۱-۲ همنهشتی مثلث‌ها

دو مثلث را همنهشت یا برابر گوییم هرگاه آن دو مثلث قابل انطباق باشند. حتماً از دوره اول متوسطه به‌خاطر دارید که دو مثلث بنابر هر یک از سه حالت زیر با هم همنهشت یا برابرند.

الف) هرگاه سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشد (ض ض ض)

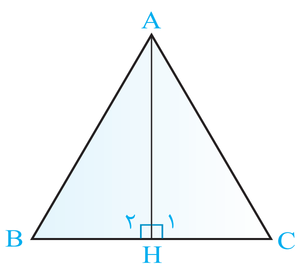
ب) هرگاه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلث دیگر برابر باشند (ض ز ض)

ج) هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر برابر باشند (ز ض ز)

مثال ۷

ثابت کنید هرگاه در یک مثلث ارتفاع و میانه نظیر یک رأس بر هم منطبق شوند آن مثلث متساوی‌الساقین خواهد بود.

پاسخ:



فرض کنید در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ارتفاع و میانه نظیر رأس A بر هم منطبق باشند. پس اگر H را پای ارتفاع رأس A بنامیم آن‌گاه باید H وسط BC باشد پس $BH = HC$

با استفاده از بند «ب» در تساوی مثلث‌ها (ض ز ض) ثابت می‌کنیم دو مثلث $\overset{\triangle}{AHC}$ و $\overset{\triangle}{AHB}$ همنهشت‌اند.

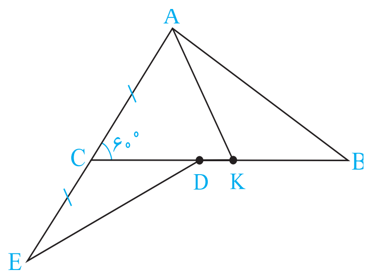
$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ HC = BH \\ AH \quad \text{ضلع مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AHC} = \overset{\triangle}{AHB} \Rightarrow AC = AB \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \ \text{متساوی‌الساقین}$$

مثال ۸

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم $\hat{C} = 60^\circ$ و $AC < BC$. نقطه D را روی ضلع BC چنان انتخاب می‌کنیم که $BD = AC$. ضلع AC را از طرف C به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه E برسیم. ثابت کنید $AB = DE$.

راهنمایی: نقطه K را روی BC چنان درنظر بگیرید که $\overset{\triangle}{ACK}$ متساوی‌الاضلاع باشد و نشان دهید $\overset{\triangle}{AKB} = \overset{\triangle}{ECD}$.

پاسخ:



طبق راهنمایی نقطه K را درنظر می‌گیریم. حال ثابت می‌کنیم دو مثلث $\overset{\triangle}{AKB}$ و $\overset{\triangle}{ECD}$ همنهشت‌اند.

$$\overset{\triangle}{ACK} \Rightarrow \begin{cases} AC = CK = AK \\ A\hat{K}C = ۶۰^\circ \Rightarrow A\hat{K}B = ۱۲۰^\circ \end{cases}$$ متساوی‌الاضلاع

توجه کنید که چون طبق فرض $BD = AC$ و این‌که $CK = AC$ پس $CK = BD$ در نتیجه $CD = BK$

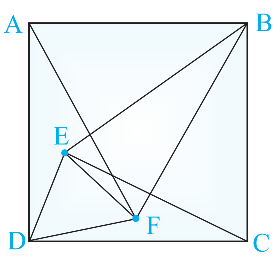
$$A\hat{C}D = A\hat{C}K = ۶۰^\circ \Rightarrow D\hat{C}E = ۱۲۰^\circ$$

$$\begin{cases} CD = KB \\ D\hat{C}E = B\hat{K}A = ۱۲۰^\circ \\ EC = AC = AK \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ECD} = \overset{\triangle}{AKB} \Rightarrow DE = AB$$

مثال ۹

نقاط E و F درون مربع ABCD قرار دارند. اگر دو مثلث $\overset{\triangle}{AFB}$ و $\overset{\triangle}{BEC}$ متساوی‌الاضلاع باشند ثابت کنید مثلث $\overset{\triangle}{DEF}$ نیز متساوی‌الاضلاع است.

پاسخ:



طبق مثال «۵» می‌دانیم $F\hat{D}C = ۱۵^\circ$ و $E\hat{D}A = ۱۵^\circ$ پس $E\hat{D}F = ۶۰^\circ$. همچنین به‌سادگی می‌توان ثابت کرد دو مثلث $\overset{\triangle}{AED}$ و $\overset{\triangle}{DFC}$ همنهشت‌اند زیرا

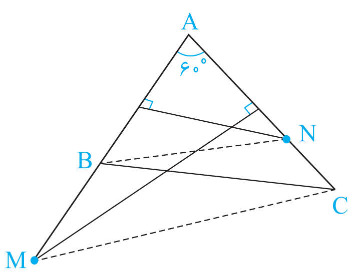
$$\begin{cases} F\hat{D}C = E\hat{D}A = ۱۵^\circ \\ F\hat{C}D = E\hat{A}D = ۱۵^\circ \\ DC = AD \end{cases} \Rightarrow D\overset{\Delta}{F}C = D\overset{\Delta}{E}A \Rightarrow DF = DE$$

$$\begin{cases} E\hat{D}F = ۶۰ \\ DF = DE \end{cases} \Rightarrow$$ متساوی‌الاضلاع $D\overset{\Delta}{E}F$

مثال ۱۰

زاویه $\hat{A}$ در مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ برابر ۶۰° است. نقطه N محل برخورد عمود منصف AB با ضلع AC و M محل برخورد عمود منصف AC با امتداد ضلع AB است. ثابت کنید $CB = MN$.

پاسخ:



دو مثلث $A\overset{\Delta}{N}B$ و $A\overset{\Delta}{M}C$ متساوی‌الاضلاع هستند (چرا؟)

در نتیجه

$AB = AN$ و $AM = AC$

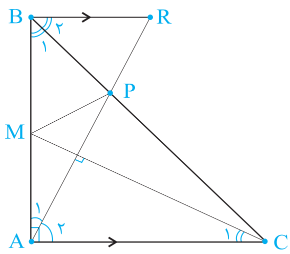
$$\begin{cases} AB = AN \\ AC = AM \\ B\hat{A}C = M\hat{A}N = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C = A\overset{\Delta}{N}M \Rightarrow BC = MN$$

مثال ۱۱

در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $A\overset{\Delta}{B}C$ $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ نقطه M وسط ضلع AB است. از A خطی عمود بر CM رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در P قطع کند. ثابت کنید $A\hat{M}C = B\hat{M}P$

پاسخ:

از B خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا امتداد AP را در R قطع کند.



$$\begin{cases}\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ\\ \hat{C}_1+\hat{A}_2=90^\circ\end{cases}\Rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1$$

$$\begin{cases}A\hat{B}R=M\hat{A}C=90^\circ\\ \hat{A}_1=\hat{C}_1\\ AB=AC\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABR}=\overset{\triangle}{CAM}\Rightarrow\begin{cases}BR=AM=BM\\ B\hat{R}A=A\hat{M}C\quad (1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}BM=BR\\ BP\quad \text{ضلع مشترک}\\ \hat{B}_1=\hat{B}_2=45^\circ\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{MBP}=\overset{\triangle}{RBP}\Rightarrow B\hat{R}P=B\hat{M}P\quad (2)$$

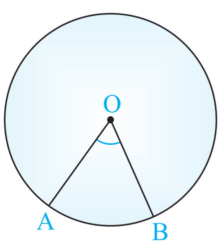
(1) و (2) $\Rightarrow A\hat{M}C=B\hat{M}P$

۱-۳ دایره

این بخش را با معرفی انواع زاویه‌ها در دایره و برخی ویژگی‌های مهم دایره آغاز می‌کنیم و در انتها دایره‌های محیطی و محاطی مثلث را معرفی می‌کنیم.

انواع زوایا:

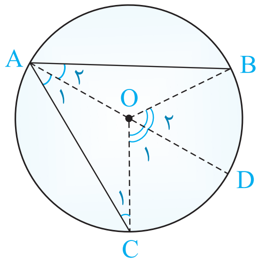
۱- زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و ضلع‌های آن، شعاع‌های دایره باشند. اندازه زاویه مرکزی برابر اندازه کمانی است که در داخل زاویه قرار دارد.



$$A\hat{O}B=\overset{\frown}{AB}$$

پس به این ترتیب می‌توان گفت که یک دایره 360° است.

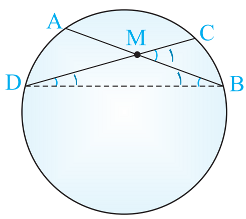
۲- زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و ضلع‌های آن دو وتر از دایره باشند و اندازه آن طبق رابطه صفحهٔ بعد محاسبه می‌شود.



$$\hat{A}=\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}=\frac{\hat{O}_{۱}}{۲}+\frac{\hat{O}_{۲}}{۲}=\frac{B\hat{O}C}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BDC}}{۲}$$

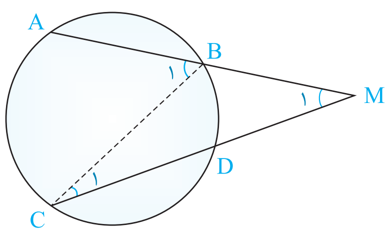
توجه کنید که در رابطه بالا از این موضوع که $\hat{O}_{۱}$ زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{AOC}$ است و در نتیجه $\hat{O}_{۱}=\hat{A}_{۱}+\hat{C}_{۱}=۲\hat{A}_{۱}$ استفاده کردیم. به طریق مشابه $(\hat{O}_{۲}=۲\hat{A}_{۲})$.

۳- زاویه درونی: زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره حاصل می‌شود.



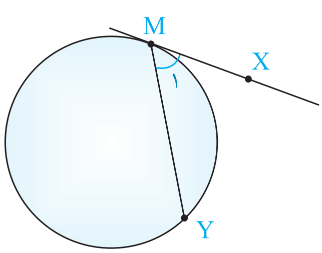
$$\hat{M}_{۱}=\hat{B}_{۱}+\hat{D}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

۴- زاویه بیرونی: زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر در خارج دایره حاصل می‌شود و اندازه آن طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود.



$$\hat{M}_{۱}=\hat{B}_{۱}-\hat{C}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}}{۲}$$

۵- زاویه ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر وتری از دایره باشد. اندازه آن نصف کمانی از دایره است که در داخل زاویه قرار دارد.



$$\hat{M}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{MY}}{۲}$$

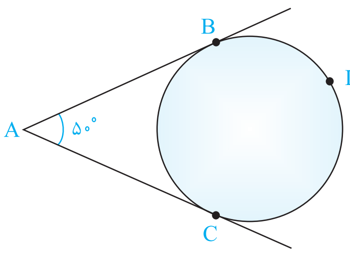
مثال ۱۲

در شکل زیر زاویه $\hat{A}=۵۰^\circ$ است. اندازه کمان بزرگتر BC چند درجه است؟ AB و AC بر دایره مماس‌اند.

پاسخ:

فرض کنید $\overset{\frown}{BC}=x$ و $\overset{\frown}{BDC}=y$.

چون $\hat{A}$ یک زاویه بیرونی است پس



$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BDC}-\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{y-x}{۲}$$

$$\Rightarrow y-x=۱۰۰^\circ$$

از طرفی می‌دانیم تمام دایره برابر ۳۶۰° است پس $x+y=۳۶۰^\circ$.

$$\begin{cases} x+y=۳۶۰^\circ \\ y-x=۱۰۰^\circ \end{cases} \Rightarrow y=۲۳۰^\circ \ , \ x=۱۳۰^\circ$$

مثال ۱۳

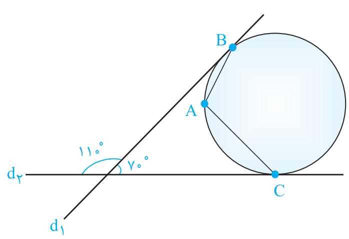
فرض کنید زاویه بین دو خط مفروض $d_۱$ و $d_۲$ برابر ۷۰° باشد. اگر A نقطه‌ای بر روی دایره‌ای باشد که بر این دو خط در B و C مماس است، آن‌گاه زاویه $B\hat{A}C$ برابر کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳۵° ۲) ۴۵° ۳) ۵۵° ۴) ۱۲۵° ۵) ۱۴۵°

پاسخ:

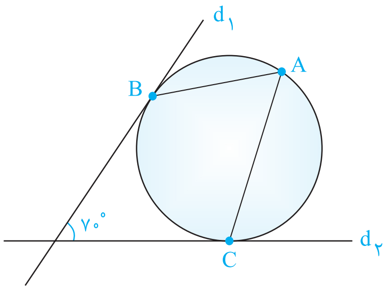
با توجه به موقعیت قرارگیری دایره و نقطه A بر روی آن ۴ حالت ممکن است:

حالت اول) مانند مثال ۱۲ می‌توانیم اندازه کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{BAC}$ را محاسبه کنیم.



$$\overset{\frown}{BAC}=۱۱۰^\circ \text{ و } \overset{\frown}{BC}=۲۵۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=۱۲۵^\circ$$

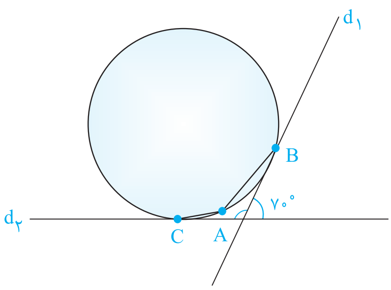
حالت دوم) این بار نیز مانند حالت قبل اندازه کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{BAC}$ را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که موقعیت نقطه A تغییر کرده است.



$$\overset{\frown}{BC}=۱۱۰^\circ \text{ و } \overset{\frown}{BAC}=۲۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۱۱۰^\circ}{۲}=۵۵^\circ$$

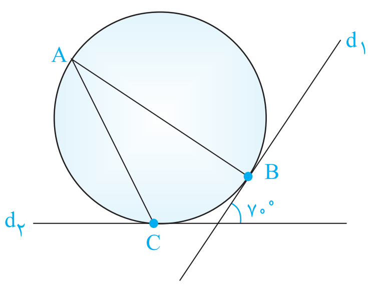
حالت سوم) در این حالت نیز اندازه کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{BAC}$ را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که در این حالت موقعیت دایره تغییر کرده و در داخل زاویه $۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$ قرار گرفته است.



$$\overset{\frown}{BC}=۲۹۰^\circ \text{ و } \overset{\frown}{BAC}=۷۰^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۲۹۰^\circ}{۲}=۱۴۵^\circ$$

حالت چهارم) این حالت نیز مانند حالت قبل است با این تفاوت که موقعیت نقطه A تغییر کرده است.



$$\overset{\frown}{BC}=۷۰^\circ \text{ و } \overset{\frown}{BAC}=۲۹۰^\circ$$

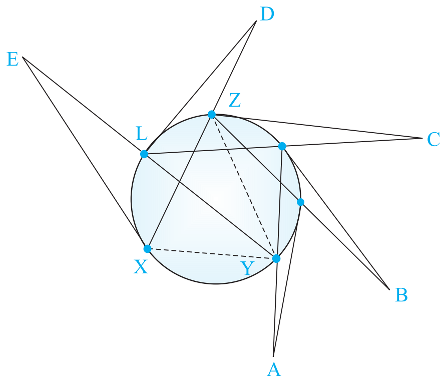
$$\Rightarrow B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=۳۵^\circ$$

پس در نهایت گزینه «۲» پاسخ درست است.

مثال ۱۴

شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط واصل آن‌ها شکل

زیر حاصل شده است اگر زاویای $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$ به ترتیب برابر با ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ درجه باشند اندازه زاویه $X\hat{Y}Z$ چند درجه است؟



پاسخ:

شش کمانی را که به وسیله شش نقطه مفروض روی دایره ایجاد شده‌اند با شروع از کمان $\overset{\frown}{XY}$ در جهت عقربه‌های ساعت به ترتیب a، b، c، d، e و f نامگذاری می‌کنیم به این ترتیب داریم

$(\overset{\frown}{XY} = a, \overset{\frown}{LX} = b, \overset{\frown}{ZL} = c, ...)$

$$\hat{E} = \frac{a-b}{۲} \Rightarrow a-b = ۳۲^\circ \quad (۱)$$

$$\hat{D} = \frac{b-c}{۲} \Rightarrow b-c = ۲۶^\circ \quad (۲)$$

$$\hat{C} = \frac{c-d}{۲} \Rightarrow c-d = ۲۰^\circ \quad (۳)$$

$$\hat{B} = \frac{d-e}{۲} \Rightarrow d-e = ۱۴^\circ \quad (۴)$$

$$\hat{A} = \frac{e-f}{۲} \Rightarrow e-f = ۸^\circ \quad (۵)$$

از طرفی واضح است که (۶) $a+b+c+d+e+f = ۳۶۰^\circ$ (دایره ۳۶۰° است)

حال اگر با استفاده از روابط (۱) تا (۵) همه کمان‌ها را برحسب f بنویسیم و در معادله (۶) قرار دهیم اندازه f و به تبع آن اندازه تمام کمان‌ها محاسبه خواهد شد.

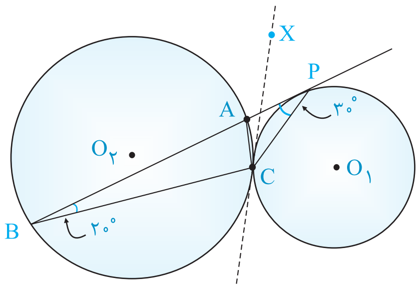
$e = f + ۸^\circ$ و $d = e + ۱۴^\circ = f + ۲۲^\circ$ و $c = ۲۰^\circ + d = f + ۴۲^\circ$ و $b = ۲۶^\circ + c = f + ۶۸^\circ$ و $a = ۳۲^\circ + b = f + ۱۰۰^\circ$

$$\Rightarrow a+b+c+d+e+f = (f+۱۰۰^\circ)+(f+۶۸^\circ)+(f+۴۲^\circ)+(f+۲۲^\circ)+(f+۸^\circ)+f = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶f + ۲۴۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow f = ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow X\hat{Y}Z = \frac{\overset{\frown}{XLZ}}{۲} = \frac{b+c}{۲} = \frac{۸۸^\circ + ۶۲^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

مثال ۱۵



در شکل مقابل BP بر دایره (O_1) مماس است. داریم $A\hat{P}C = 30^\circ$ و $C\hat{B}A = 20^\circ$. همچنین دو دایره (O_1) و (O_2) در نقطه C بر هم مماس‌اند. اندازه $B\hat{A}C$ چند درجه است؟

پاسخ:

زاویه $B\hat{A}C$ زاویه خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ACP}$ است. با توجه به این‌که $B\hat{A}C = A\hat{C}P + A\hat{P}C$ و $A\hat{P}C = 30^\circ$ پس کافیست زاویه $A\hat{C}P$ را محاسبه کنیم. برای محاسبه زاویه $A\hat{C}P$ کافیست مماس مشترک دو دایره در نقطه C را رسم کنیم با این کار دو زاویه ظلی $X\hat{C}P$ و $X\hat{C}A$ حاصل می‌شوند (X نقطه‌ای دلخواه روی مماس مشترک دو دایره است)

$$A\hat{C}P = X\hat{C}A + X\hat{C}P = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{PC}}{2} = \frac{40^\circ}{2} + \frac{60^\circ}{2} = 50^\circ$$

«دقت کنید که: «زاویه محاطی» $A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ پس $\overset{\frown}{AC} = 40^\circ$ و «زاویه ظلی» $A\hat{P}C = \frac{\overset{\frown}{PC}}{2}$ پس $\overset{\frown}{PC} = 60^\circ$»

پس در نهایت

$$B\hat{A}C = A\hat{C}P + A\hat{P}C = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$$

معمولاً رسم مماس مشترک دو دایره مماس بر هم در مواردی‌که به دنبال محاسبه زاویه‌ها هستیم می‌تواند راه‌گشا باشد.

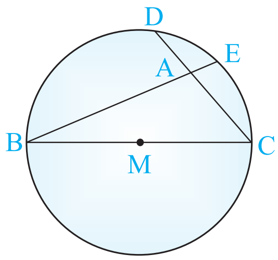
مثال ۱۶

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، M وسط ضلع BC است و همواره داریم $AM \le \frac{BC}{2}$، حداقل زاویه $\hat{A}$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

اگر دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{BC}{2}$ رسم کنیم با توجه به رابطه $AM \le \frac{BC}{2}$ حتماً نقطه A داخل

یا روی این دایره خواهد بود. با توجه به شکل زیر زاویه $\hat{A}$ یک زاویه درونی و برابر



$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{۲} = \frac{۱۸۰ + \overset{\frown}{DE}}{۲} = ۹۰ + \frac{\overset{\frown}{DE}}{۲}$$

پس زاویه $\hat{A}$ همواره بزرگتر مساوی ۹۰° است و زمانی حداقل می‌شود که $\overset{\frown}{DE}$ صفر شود پس باید $\hat{A}$ روی دایره باشد و مقدار حداقل آن برابر ۹۰° است.

♣ **تذکر:**

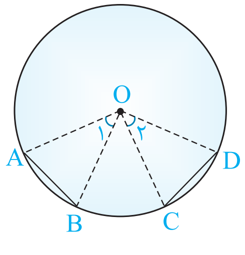
دقت کنید که BC قطر دایره بوده و در نتیجه کمان $\overset{\frown}{BC}$ یک نیم‌دایره و برابر ۱۸۰° است.

در طی چند مسئله بعدی قصد داریم تا برخی از ویژگی‌های ساده و البته مهم دایره‌ها را معرفی کنیم و از آن‌ها در حل مسائل پیچیده‌تر استفاده کنیم.

ویژگی اول

ثابت کنید اگر دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ از یک دایره با هم برابر باشند آن‌گاه وترهای نظیر آن‌ها یعنی AB و CD نیز با هم برابر خواهند بود.

☑ **پاسخ:**



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

$$\begin{cases} OA = OC & \text{شعاع دایره} \\ OB = OD & \text{شعاع دایره} \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{cases} \Rightarrow A\hat{O}B = C\hat{O}D \Rightarrow AB = CD$$

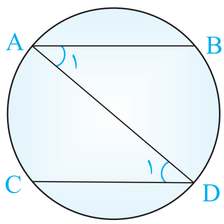
عکس این مسأله نیز درست می‌باشد یعنی اگر دو وتر AB و CD از یک دایره با هم برابر باشند آن‌گاه کمان‌های نظیر آن‌ها یعنی $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ نیز با هم برابرند.

ویژگی دوم

ثابت کنید اگر دو وتر AB و CD موازی باشند کمان‌های محصور بین آن‌ها مساوی خواهند بود.

پاسخ:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$$



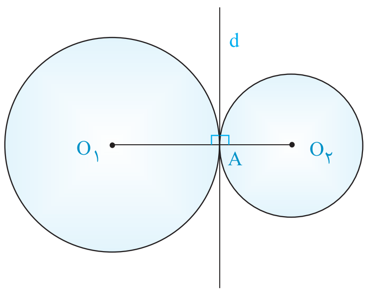
عکس این مسأله نیز برقرار است.

ویژگی سوم

فرض کنید دو دایره به مراکز $O_۱$ و $O_۲$ در نقطه A مماس باشند. در این صورت نقطه A روی خط واصل $O_۱O_۲$ قرار خواهد داشت.

اثبات:

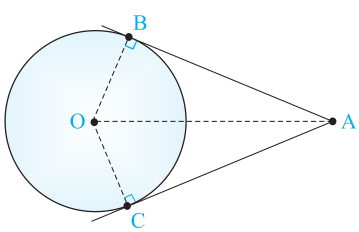
فرض کنید خط d مماس مشترک دو دایره باشد در این صورت A بر روی خط d واقع است. حال توجه کنید که چون d بر $(O_۱)$ مماس است پس $O_۱A \perp d$ و به همین ترتیب $O_۲A \perp d$ و چون از هر نقطه تنها یک عمود بر هر خط می‌توان رسم کرد پس $O_۱$، $O_۲$ و A هم خطاند. اگر دو دایره مماس داخل باشند باز استدلال مشابه بالا خواهد بود.



ویژگی چهارم

طول دو مماسی که از یک نقطه بر دایره رسم می‌شوند برابرند.

اثبات:



$$OB^۲ + AB^۲ = OA^۲ \Rightarrow AB^۲ = OA^۲ - OB^۲ \quad (۱)$$

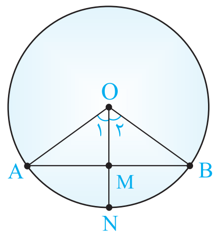
$$OC^۲ + AC^۲ = OA^۲ \Rightarrow AC^۲ = OA^۲ - OC^۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \quad \Rightarrow AB^۲ = AC^۲ \Rightarrow AB = AC$$

ویژگی پنجم

فرض کنید AB وتری از یک دایره به مرکز O باشد. اگر N وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ از دایره O باشد ثابت

کنید ON عمود منصف وتر AB است.



اثبات:

$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow$.است $A\hat{O}B$ نیمساز ON

$OA = OB \Rightarrow$.است متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{AOB}$ مثلث

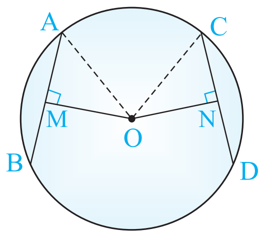
می‌دانیم نیمساز، میانه و ارتفاع نظیر رأس O در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{AOB}$ بر هم منطبق‌اند. پس چون ON نیمساز رأس O است میانه و ارتفاع نیز می‌باشد پس ON عمود منصف AB است. یعنی نقطه O روی عمود منصف AB واقع است.

مثال ۱۷

ثابت کنید طول دو وتری از یک دایره که فاصله یکسانی از مرکز دایره دارند با هم برابرند.

پاسخ:

فرض کنید M و N اواسط وترهای AB و CD باشند. طبق ویژگی پنجم $OM \perp AB$ و $ON \perp CD$ طبق فرض مسئله $OM = ON$



$$\begin{cases} OC^2 = ON^2 + NC^2 \Rightarrow OC^2 - ON^2 = NC^2 & (1) \\ OA^2 = OM^2 + MA^2 \Rightarrow OA^2 - OM^2 = MA^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow NC^2 = MA^2 \Rightarrow NC = MA \Rightarrow 2NC = 2MA$$

$$\Rightarrow CD = AB$$

لازم به ذکر است که به جای نوشتن رابطه فیثاغورس می‌توانستیم از تساوی دو مثلث $\overset{\triangle}{ONC}$ و $\overset{\triangle}{OMA}$ برای حل مسأله استفاده کنیم.

$$\begin{cases} OM = ON & \text{فرض مسأله} \\ OA = OC & \text{شعاع دایره} \\ \widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OMA} = \overset{\triangle}{ONC} \Rightarrow NC = MA \Rightarrow CD = AB$$

حتماً متوجه شدید که تساوی مثلث‌های بالا جزء هیچ‌یک از سه حالت عنوان شده در بخش همنهشتی مثلث‌ها نیست. در واقع به صورت خاص برای مثلث‌های قائم‌الزاویه می‌توان دو حالت

تساوی علاوه بر سه حالت عنوان شده بیان کرد.

۱. هرگاه وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشد آن دو مثلث برابرند (وتر و یک ضلع)

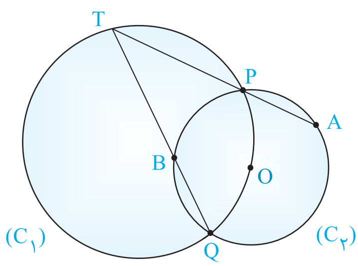
۲. هرگاه وتر و یک زاویه حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشند آن دو مثلث برابرند. (وتر و یک زاویه)

دو مثلث $O\overset{\triangle}{M}A$ و $O\overset{\triangle}{N}C$ بنابر حالت «۱» با هم مساوی‌اند.

مثال ۱۸

دایره C_1 و نقطه O بر روی آن مفرض‌اند. دایره C_2 به مرکز O دایره C_1 را در P و Q قطع می‌کند. نقطه T روی دایره C_1 قرار دارد. از T به P و Q وصل می‌کنیم تا دایره C_2 را برای بار دوم در A و B قطع کنند.

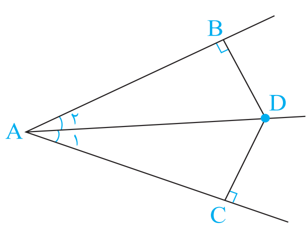
ثابت کنید $AP = BQ$



پاسخ:

لم:

ثابت کنید فاصله هر نقطه بر روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه یکسان است.



فرض کنید نقطه D روی نیمساز زاویه $\widehat{A}$ باشد

$$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ AD \quad \text{ضلع مشترک} \end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}D = A\overset{\triangle}{C}D \Rightarrow BD = CD$$

دو مثلث فوق بنابر حالت «۲» از تساوی مثلث‌های قائم‌الزاویه با هم برابراند.

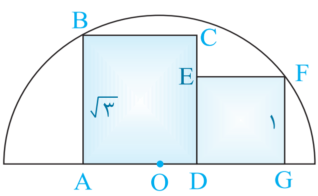
حال به سراغ مسأله اصلی می‌رویم. OP و OQ شعاع‌های دایره $C_۲$ هستند.

نقطه O روی نیمساز زاویه $\hat{T}$ قرار دارد. $\Rightarrow OP = OQ \xrightarrow{\text{ویژگی اول}} \overset{\frown}{OP} = \overset{\frown}{OQ} \Rightarrow O\hat{T}P = O\hat{T}Q$

پس طبق لم بیان شده فاصله O از AP و BQ یکسان است که با توجه به مثال «۱۷» باید طول دو وتر AP و BQ یکسان باشد.

مثال ۱۹

نیم دایره‌ای به شعاع R درنظر بگیرید که در آن دو مربع به ضلع‌های ۱ و $\sqrt{۳}$ مانند شکل محاط شده‌اند شعاع نیم‌دایره چه‌قدر است؟



پاسخ:

فرض کنید O مرکز نیم‌دایره و $OG = y$ و $OA = x$ با استفاده از رابطه فیثاغورس در دو مثلث $O\hat{G}F$ و $O\hat{A}B$ می‌توان نوشت

$$OF^۲ = OG^۲ + GF^۲ \Rightarrow R^۲ = y^۲ + ۱^۲ \qquad (۱)$$
$$OB^۲ = OA^۲ + AB^۲ \Rightarrow R^۲ = x^۲ + (\sqrt{۳})^۲ \qquad (۲)$$
$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow y^۲ + ۱ = x^۲ + ۳ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۲$$

از طرفی داریم: $y + x = OG + OA = AG = AD + DG = \sqrt{۳} + ۱$

$$\begin{cases} y^۲ - x^۲ = ۲ \\ y + x = \sqrt{۳} + ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \begin{cases} (y-x)(y+x) = ۲ \\ y + x = \sqrt{۳} + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = \dfrac{۲}{y+x} = \dfrac{۲}{\sqrt{۳}+۱} = \sqrt{۳} - ۱ \\ y + x = \sqrt{۳} + ۱ \end{cases}$$

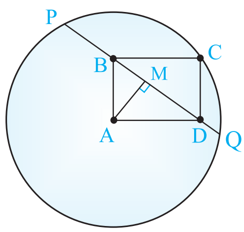
$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = \sqrt{۳} - ۱ \\ y + x = \sqrt{۳} + ۱ \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{۳}, x = ۱$$

$$(۱) \Rightarrow R^۲ = y^۲ + ۱ = (\sqrt{۳})^۲ + ۱ = ۴ \Rightarrow R = ۲$$

مثال ۲۰

فرض کنید ABCD مستطیلی ۲×۱ باشد. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC رسم می‌کنیم. اگر امتداد BD دایره را در نقاط P و Q قطع کند طول PQ چه‌قدر است؟

پاسخ:



عمود AM را بر BD رسم می‌کنیم با توجه به ویژگی پنجم M وسط PQ خواهد بود.

ابتدا شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم (R = AC)

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ = ۵ \Rightarrow AC = \sqrt{۵}$$

از طرفی طول BD نیز برابر $\sqrt{۵}$ است.

$$\text{مساحت } \overset{\triangle}{ABD} = \frac{۱}{۲} \times AM \times BD = \frac{۱}{۲} \times AB \times AD$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times AM \times \sqrt{۵} = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۲ \Rightarrow AM = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

با استفاده از فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{AMP}$ داریم:

$$AP^۲ = AM^۲ + MP^۲ \Rightarrow MP^۲ = AP^۲ - AM^۲ = (\sqrt{۵})^۲ - (\frac{۲}{\sqrt{۵}})^۲$$

$$\Rightarrow MP^۲ = ۵ - \frac{۴}{۵} = \frac{۲۱}{۵} \Rightarrow MP = \sqrt{\frac{۲۱}{۵}}$$

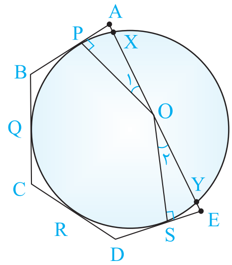
$$PQ = ۲MP = ۲\sqrt{\frac{۲۱}{۵}}$$

مثال ۲۱

در پنج ضلعی محدب ABCDE رابطه AB + CD = BC + DE برقرار است. دایره ω بر ضلع‌های AB، BC، CD و DE به ترتیب در P، Q، R و S مماس است. اگر مرکز دایره ω روی AE باشد ثابت کنید: $PS \parallel AE$

پاسخ:

طبق ویژگی چهارم داریم



$BP = BQ$ و $CQ = CR$ و $DR = DS$

$AB = AP + PB$ و $CD = CR + RD$ و $BC = BQ + QC$ و $DE = DS + SE$

$$AB + CD = BC + DE \Rightarrow AP + PB + CR + RD = BQ + QC + DS + SE \Rightarrow AP = SE$$

$$\begin{cases} OP = OS & \text{شعاع دایره} \\ AP = SE \\ \hat{P} = \hat{S} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAP} = \overset{\triangle}{OES} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

اگر X و Y محل برخورد AE با دایره باشند آن‌گاه

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{XP} = \overset{\frown}{YS} \Rightarrow PS \parallel XY \Rightarrow PS \parallel AE$$

در خط آخر از عکس ویژگی دوم استفاده شد.

دایره محیطی

برای هر مثلث می‌توان یک دایره رسم کرد که از سه رأس آن مثلث بگذرد. این دایره یکتاست و آن را دایره محیطی مثلث می‌نامند. برای اثبات وجود و یکتایی این دایره برای هر مثلث از نتیجه‌ای که از ویژگی پنجم دایره به دست می‌اید استفاده می‌کنیم.

با توجه به ویژگی پنجم می‌توان نتیجه گرفت که مرکز دایره‌ای که از دو نقطه مفروض می‌گذرد بر روی عمود منصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه قرار دارد.

حال مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را درنظر بگیرید. محل برخورد عمود منصف‌های AB و AC را O می‌نامیم.