فصل ۱

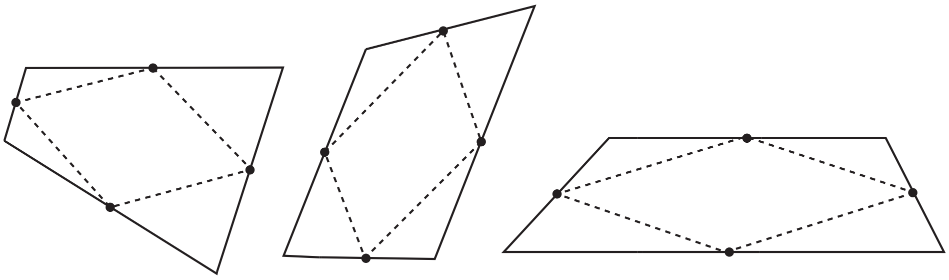
استدلال در هندسه

۱.۱ استدلال استقرایی

◄ رسیدن به نتیجه‌ای کلی از راه مشاهدهٔ درستی این نتیجه در موارد متعدد **استقرا**۱ نام دارد.

مثال ۱.۱

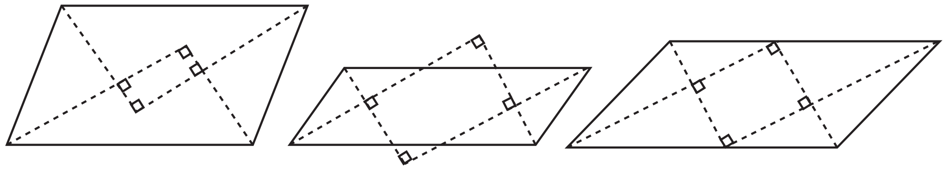
چند چهارضلعی مختلف بکشید. وسطهای اضلاع هر یک از این چهارضلعیها را متوالیاً به‌هم وصل کنید. اگر شکلهایتان را با دقت خوبی کشیده باشید، متوجه می‌شوید که شکل حاصل از به‌هم وصل کردن وسطهای اضلاع هر چهارضلعی، یک متوازی‌الاضلاع است.



شکل ۱.۱

مثال ۲.۱

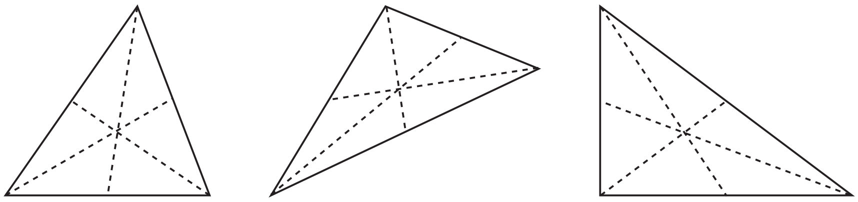
چند متوازی‌الاضلاع مختلف بکشید و نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر یک از این متوازی‌الاضلاعها را رسم کنید. اگر شکلهایتان را با دقت خوبی کشیده باشید، متوجه می‌شوید که چهارضلعی حاصل از تلاقی نیمسازها در هر شکل یک مستطیل است.



شکل ۲.۱

مثال ۳.۱

چند مثلث مختلف بکشید و میانه‌های این مثلثها را رسم کنید. اگر شکلهایتان را با دقت خوبی کشیده باشید، متوجه می‌شوید که در هر یک از این مثلثها میانه‌ها در یک نقطه درون مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر این کار را برای چند مثلث دیگر تکرار کنید، ممکن است قانع شوید که در هر مثلث، میانه‌ها در یک نقطه درون مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند.



شکل ۳.۱

- ممکن است نتیجه‌هایی که از راه استقرا به‌دست می‌آیند در حالت کلی درست نباشند، زیرا این نتیجه‌ها فقط بر اساس بررسی چند مورد خاص به دست آمده‌اند (مثال ۸.۱ را ببینید).

مثال ۴.۱

اصول هندسه که درکتاب هندسهٔ ۱ با آنها آشنا شده‌اید از راه استقرا به‌دست آمده‌اند و بدون اثبات پذیرفته می‌شوند.

۲.۱ استدلال استنتاجی

- در هندسه فقط درستی اصول را بدون اثبات می‌پذیریم و بقیهٔ حکمها و نتیجه‌ها را (همان‌طور که می‌دانید آنها را قضیه می‌نامند) بر اساس سلسله‌ای از داوریها نتیجه می‌گیریم.
- استفاده از اصول هندسه یا حکمهایی که درستی آنها را قبلاً ثابت کرده‌ایم برای اثبات درستی حکمی دیگر **استدلال استنتاجی** نام دارد.

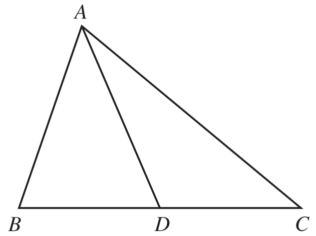
مثال ۵.۱

روند اثبات هر قضیه نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

قضیه در هر مثلث نیمساز هر زاویه، ضلع روبه‌رو به این زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند.
(برهان این قضیه را در کتاب درسی ببینید.)

مثال ۶.۱

در شکل ۴.۱ فرض کنید $AB = ۱۲$، $BC = ۱۸$ و $AC = ۲۴$.



شکل ۴.۱

نیمساز AD ضلع BC را به دو قسمت تقسیم می‌کند. طول این دو قسمت را حساب می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ قبل، نیمساز AD، ضلع BC را به نسبت دو ضلع زاویهٔ A، یعنی AB و AC تقسیم می‌کند. یعنی

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

پس

$$\frac{BD}{DC} = \frac{۱۲}{۲۴} = \frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

حتماً به یاد دارید که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، آنگاه

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

پس از تساویهای (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{BD+DC}{DC} = \frac{۱+۲}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

توجه کنید که $BD + DC = BC = ۱۸$. پس

$$\frac{۱۸}{DC} = \frac{۳}{۲}$$

در نتیجه $DC = ۱۲$. پس

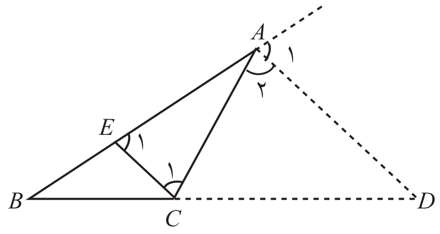
$$BD = BC - DC = ۱۸ - ۱۲ = ۶$$

خودتان به عنوان تمرین طول پاره‌خطهایی را حساب کنید که نیمسازهای زاویه‌های B و C به‌ترتیب روی ضلعهای AC و AB جدا می‌کنند.

مثال ۷.۱

می‌خواهیم ثابت کنیم نیمساز هر زاویهٔ خارجی مثلث نیز ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به‌نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند. یعنی با توجه به شکل ۵.۱ اگر AD نیمساز زاویهٔ خارجی زاویهٔ A از مثلث ABC باشد، آنگاه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$



شکل ۵.۱

از C خطی به موازات نیمساز زاویهٔ خارجی A یعنی AD رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند. دو زاویهٔ $C_۱$ و $A_۲$ برابرند، چون AD و EC موازی‌اند و AC مورب است. همچنین $\hat{E}_۱$ و $\hat{A}_۱$ برابرند، چون AD و EC موازی‌اند و AE مورب است. از طرفی $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$. (چون AD نیمساز زاویهٔ خارجی A است) بنابراین $\hat{C}_۱ = \hat{E}_۱$ و در نتیجه، $AE = AC$. در مثلث ABD، CE موازی AD است. پس طبق قضیهٔ تالس داریم

$$\frac{AB}{AE} = \frac{DB}{DC}$$

به‌جای AE مساوی آن AC را قرار می‌دهیم، پس

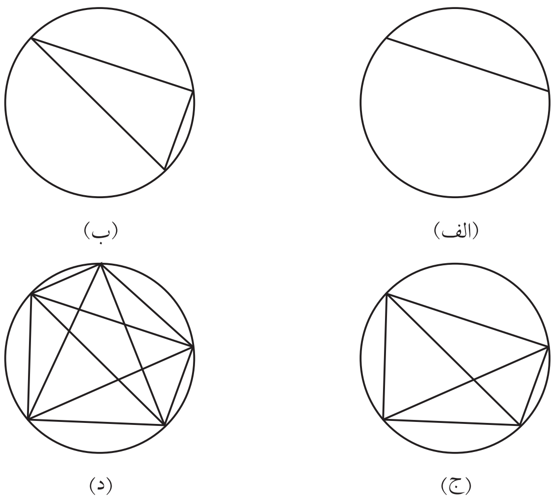
$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

۳.۱ مثال نقض

◄ برای اطمینان از درستی هر نتیجه‌ای که از راه استقرا به آن رسیده‌اید یا درستی هر حدسی که از راه مشاهدهٔ چند مورد خاص زده‌اید باید از استدلال استنتاجی استفاده کنید، زیرا استقراگواهی بر درستی نیست. مثلاً ممکن است با مشاهدهٔ چند مورد خاص حدس بزنید نتیجه‌ای درست است، اما این نتیجه برای حالت خاص دیگری درست نباشد.

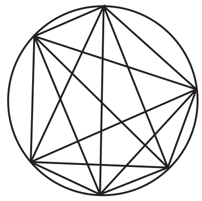
مثال ۸.۱

دو نقطه روی دایره‌ای انتخاب و آنها را با پاره‌خطی به هم وصل کنید. معلوم است که دایره به ۲ ناحیه تقسیم می‌شود (شکل ۶.۱ (الف) را ببینید). اگر سه نقطه روی دایره انتخاب کنید، پاره‌خطهایی که این نقطه‌ها را به‌هم وصل می‌کنند دایره را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنند (شکل ۶.۱ (ب) را ببینید). اکنون چهار نقطه روی دایره طوری انتخاب کنید که از پاره‌خطهای میان آنها هیچ سه‌تایی از یک نقطه رد نشوند. دراین صورت این پاره‌خطها دایره را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند (شکل ۶.۱ (ج) را ببینید). همین کار را با پنج نقطه تکرارکنید. معلوم می‌شود که پاره‌خطهای میان این نقطه‌ها دایره را به ۱۶ ناحیه تقسیم می‌کنند (شکل ۶.۱ (د) را ببینید).



شکل ۶.۱

ممکن است از بررسی این چند مورد خاص حدس بزنید که اگر از پاره‌خطهای میان n نقطه روی دایره هیچ سه‌تایی از یک نقطه رد نشوند، این پاره‌خطها دایره را به 2^{n-1} ناحیه تقسیم می‌کنند. اکنون درستی حدس خود را برای شش نقطه امتحان کنید (شکل ۷.۱ را ببینید). باید



شکل ۷.۱

۳۲ ناحیه را شمرده باشید. آیا تعداد ناحیه‌هایی که شمرده‌اید برابر با ۳۲ است؟ اگر تعداد ناحیه‌ها را دقیق شمرده باشید، متوجه می‌شوید که تعداد ناحیه‌ها برابر با ۳۱ است نه ۳۲! همین یک مورد نشان می‌دهد که حدستان درست نیست.

- به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا حدس نادرست است **مثال نقض** گفته می‌شود.
- یافتن الگوی مناسب و درست یکی از روشهای ریاضیدانان برای حل مسئله‌ها یا اثبات حکمهایی است که گمان می‌کنند درست است. یافتن الگوکار مهمی است، اما مهمتر این است که مطمئن شویم الگوی درست را یافته‌ایم. وحدت استقرا و استنتاج از ویژگیهای تفکر علمی است.

مثال ۹.۱

به تساویهای زیر توجه کنید

$$\begin{aligned}
۶ &= ۳ + ۳\\
۸ &= ۳ + ۵\\
۱۰ &= ۵ + ۵\\
۱۲ &= ۵ + ۷\\
۱۴ &= ۷ + ۷\\
۱۶ &= ۳ + ۱۳\\
۱۸ &= ۷ + ۱۱\\
۲۰ &= ۳ + ۱۷\\
&\vdots
\end{aligned}$$

خودتان چند تساوی بعدی را بنویسید. آیا می‌توانید الگویی بیابید؟ ممکن است با بررسی این تساویها، و چند تساوی دیگر به این شکل، حدس بزنید که هر عدد زوج بزرگتر از ۴ را می‌توان به

شکل مجموع دو عدد اول فرد نوشت. آیا می‌توانید این حدس را ثابت کنید؟ اگر بتوانید این حدس را ثابت کنید، ریاضیدان بزرگی هستید؛ بیش از ۲۵۰ سال است که ریاضیدانان تلاش می‌کنند این حدس را (که به حدس گُلدباخ مشهور است) ثابت کنند. حتی وقتی الگویی مناسب یافته‌ایم ممکن است به راحتی نتوانیم حکم را ثابت کنیم.

۴.۱ قضیه‌های شرطی

◄ هر قضیه دو بخش دارد:

الف) فرض قضیه؛ یعنی ویژگیهای موضوع مورد بررسی چیست.

ب) حکم قضیه؛ یعنی چه مطالبی را باید دربارهٔ موضوع بررسی تأیید یا رد کنیم.

◄ هر قضیه را می‌توانیم به شکل

«اگر $\boxed{\text{فرض قضیه}}$، آنگاه $\boxed{\text{حکم قضیه .}}$»

بیان کنیم. وقتی قضیه‌ای را با جمله‌ای شرطی بیان می‌کنیم آن را **قضیهٔ شرطی** می‌نامیم.

مثال ۱۰.۱

این قضیه را در نظر بگیرید: «در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.» در این قضیه باید مطلبی را در مورد نوع خاصی از چهارضلعیها ثابت کنیم. ویژگی این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع بودن است، یعنی ضلعهای روبه‌رو در این چهارضلعی موازی‌اند (فرض). باید ثابت کنیم قطرهای این چهارضلعی یکدیگر را نصف می‌کنند (حکم). این قضیه را می‌توان به این شکل نوشت: «اگر چهارضلعی‌ای متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.»

۵.۱ عکس قضیه

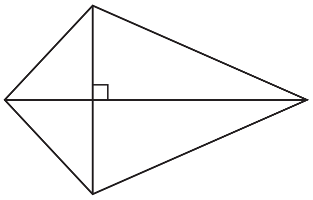
◄ اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، حکمی به دست می‌آید که آن را عکس قضیهٔ موردنظر می‌نامند.

مثال ۱۱.۱

قضیهٔ مثال ۱۰.۱ را در نظر بگیرید. اگر جای فرض و حکم این قضیه را عوض کنیم، این حکم به دست می‌آید: «اگر قطرهای چهارضلعی‌ای یکدیگر را نصف کنند، آنگاه این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.» توجه کنید که این حکم هم قضیه است.

مثال ۱۲.۱

ممکن است عکس قضیه‌ای خودش قضیه نباشد. مثلاً عکس قضیهٔ «قطرهای لوزی بر هم عمودند.» قضیه نیست. مثال نقضی که این موضوع را نشان می‌دهد در شکل ۸.۱ آمده است.



شکل ۸.۱

۶.۱ قضیهٔ دوشرطی

◄ اگر عکس قضیه‌ای شرطی خودش قضیه‌ای شرطی باشد، می‌توانیم این دو قضیهٔ شرطی را به‌صورت یک قضیه به شکل

«$\boxed{\text{فرض یکی از دو قضیهٔ شرطی}}$، اگر و فقط اگر $\boxed{\text{حکم همان قضیهٔ شرطی}}$.»

بیان کنیم. چنین قضیه‌ای را **قضیهٔ دوشرطی** می‌نامیم.

مثال ۱۳.۱

قضیهٔ مثال ۱۰.۱ و قضیهٔ مثال ۱۱.۱ را می‌توان به این شکل بیان کرد:

«چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و فقط اگر قطرهایش یکدیگر را نصف کنند.»

◄ برای اثبات قضیه‌ای دوشرطی به شکل «p اگر و فقط اگر q» باید یک بار با فرض درستی p درستی q را ثابت کنیم و سپس با فرض درستی q درستی p را ثابت کنیم.

مثال ۱۴.۱

برای اثبات قضیهٔ دوشرطی «در مثلث یک ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است، اگر و فقط اگر زاویهٔ روبه‌رو به این ضلع از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع دیگر بزرگتر باشد.» باید دو قضیهٔ شرطی «اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگتر از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچکتر، بزرگتر است.» و «اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچکتر، بزرگتر است.» را ثابت کنیم. (برهان این دو قضیه را در کتاب درسی ببینید.)

۷.۱ اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

◄ معمولاً برای اثبات قضیه‌ها **به طور مستقیم** از فرض قضیه استفاده می‌کنیم و درستی حکم را بر پایهٔ استفاده از اصول و قضیه‌هایی که آنها را قبلاً ثابت کرده‌ایم نشان می‌دهیم. با این وجود، گاهی ممکن است اثبات قضیه‌ای به روش مستقیم بسیار دشوار باشد، درحالی‌که اثبات نادرستی خلاف (نقیض) حکم ساده است. این روش اثبات را روش **اثبات غیرمستقیم** یا روش **برهان خلف** می‌نامند.

◄ اساس روش برهان خلف این حقیقت است که ممکن نیست حکمی هم درست باشد هم نادرست.

◄ از هر حکم و خلاف (نقیض) آن حکم فقط یکی درست است.

برای اینکه حکمی را با استفاده از برهان خلف ثابت کنیم، گامهای زیر را برمی‌داریم:

گام اول. فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد.

گام دوم. ثابت می‌کنیم درستی نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه تناقض دارد.

گام سوم. با نادرست بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.

مثال ۱۵.۱

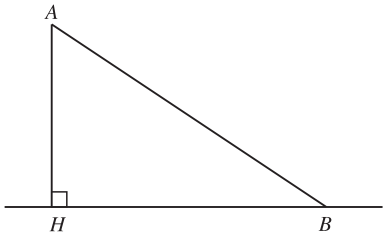
ثابت می‌کنیم هر n ضلعی محدب حداکثر سه زاویهٔ حاده دارد. توجه کنید که مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی محدب برابر ۳۶۰ درجه است. روش اثباتمان برهان خلف است. فرض می‌کنیم خلاف حکم درست باشد، یعنی n ضلعی بیش از سه زاویهٔ حاده داشته باشد در نتیجه بیش از سه زاویهٔ خارجی منفرجه دارد و مجموع آنها از ۳۶۰ درجه بیشتر می‌شود و این یک تناقض است. بنابراین خلاف حکم نادرست است و در نتیجه حکم درست است.

قضیهٔ نابرابری مثلث در هر مثلث، مجموع طولهای هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.
(برهان این قضیه را در کتاب درسی ببینید.)

مثال ۱۶.۱

ثابت می‌کنیم فاصلهٔ میان هر نقطهٔ بیرون خط و پای عمود وارد از این نقطه بر خط، از فاصلهٔ میان این نقطه و هر نقطهٔ دیگر خط کمتر است. مثلاً، در شکل ۹.۱ ثابت می‌کنیم $AH < AB$.

روش اول. نقطهٔ C را روی امتداد AH از سمت H طوری انتخاب می‌کنیم که $AH = HC$ (شکل ۱۰.۱ را ببینید). دراین صورت مثلث ABC متساوی‌الساقین است، زیرا مثلثهای AHB و CHB بنابر حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند، و در نتیجه $AB = BC$. از طرف دیگر، بنابر



شکل ۹.۱

قضیهٔ نابرابری مثلث، در مثلث ABC،

$$AB + BC > AC$$

چون

$$AC = ۲AH$$

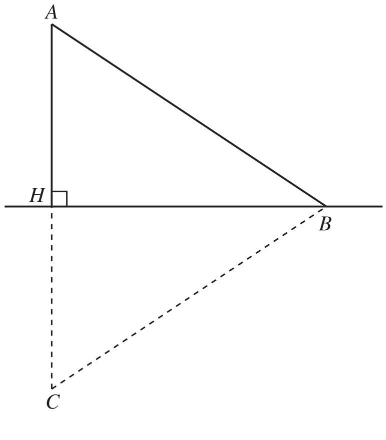
و

$$AB + BC = ۲AB$$

این نابرابری را می‌توان چنین نوشت

$$۲AB > ۲AH$$

یعنی $AB > AH$.



شکل ۱۰.۱

روش دوم. در مثلث AHB، زاویهٔ AHB قائمه و زاویهٔ ABH حاده است. پس

$$\angle ABH < \angle AHB$$

در نتیجه،

$$AH < AB$$

(مثال ۱۴.۱ را ببینید.)

قضیهٔ وجود مثلث فرض‌کنید a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند. اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که طول ضلعهایش a، b و c هستند.

(برهان این قضیه را در مجلهٔ ریاضی پایان فصل اول کتاب درسی ببینید.)

مثال ۱۷.۱

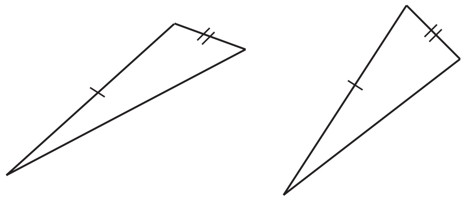
مثلثی با طول ضلع‌های ۱۴، ۲۰ و ۳۴ وجود ندارد. زیرا رابطهٔ

$$۳۵ < ۲۰ + ۱۴$$

برقرار نیست.

قضیهٔ لولا (قضیهٔ قیچی) اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند و زاویهٔ میان این دو ضلع در مثلث اول از زاویهٔ میان دو ضلع نظیرشان در مثلث دوم بزرگتر باشد، آنگاه ضلع سوم مثلث اول از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر است (شکل ۱۱.۱ را ببینید).

(برهان این قضیه را در کتاب درسی ببینید.)

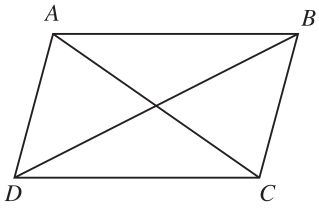


شکل ۱۱.۱

مثال ۱۸.۱

فرض کنید در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ زاویهٔ A منفرجه باشد. ثابت می‌کنیم قطر BD از قطر AC بزرگتر است (شکل ۱۲.۱ را ببینید). توجه کنید که زاویه‌های ABC و DAB مکمل‌اند، و چون زاویهٔ DAB منفرجه است، پس زاویهٔ ABC حاده است. پس در مثلثهای ABD و ABC،

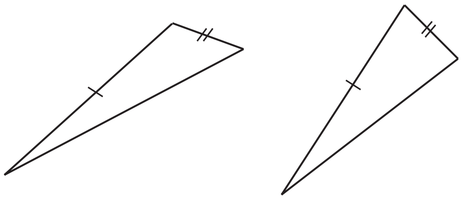
$$AD = BC, \qquad AB = AB, \qquad \angle DAB > \angle ABC$$



شکل ۱۲.۱

در نتیجه، بنابر قضیهٔ لولا، $BD > AC$.

عکس قضیهٔ لولا اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر نظیر به نظیر برابر باشند و ضلع سوم مثلث اول از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر باشد، آنگاه زاویهٔ میان دو ضلع مثلث اول از زاویهٔ میان دو ضلع نظیرشان در مثلث دوم بزرگتر است (شکل ۱۳.۱ را ببینید).



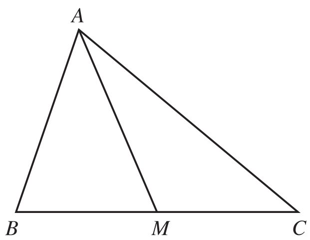
شکل ۱۳.۱

(این قضیه را با استفاده از روش برهان خلف و قضیهٔ لولا ثابت کنید.)

مثال ۱۹.۱

فرض کنید در مثلث ABC، $AB < AC$ و AM میانه باشد. ثابت می‌کنیم

$$\angle AMB < \angle AMC$$



شکل ۱۴.۱

توجه کنید که در مثلثهای AMB و AMC،

$$AM = AM, \qquad MB = MC$$

پس چون $AB < AC$، از عکس قضیهٔ لولا نتیجه می‌شود $\angle AMB < \angle AMC$.

۸.۱ مکان هندسی

- **مکان هندسی** نقطه‌هایی در صفحه یا نقطه‌هایی در فضا که ویژگی مشترکی دارند، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌ها در صفحه یا همهٔ نقطه‌ها در فضاست که این ویژگی را دارند؛ یعنی، هر نقطه در این مجموعه ویژگی موردنظر را دارد و هر نقطه که این ویژگی را دارد عضو این مجموعه است.
- برای مشخص کردن مکان هندسی برداشتن سه گام زیر سودمند است:

گام اول. به اندازهٔ کافی نقطه‌هایی که ویژگی موردنظر را دارند بیابید.

گام دوم. این نقطه‌ها را به‌هم وصل کنید تا تصوری شهودی از مکان هندسی موردنظر پیدا کنید.

گام سوم. مکان هندسی را توصیف کنید. سپس بررسی کنید که آیا هر نقطه در مجموعهٔ نقطه‌هایی که یافته‌اید ویژگی موردنظر را دارد و برعکس، آیا هر نقطه که ویژگی موردنظر را دارد عضو مجموعه‌ای که یافته‌اید هست؟ اگر پاسخ این دو سؤال مثبت باشد، مجموعهٔ نقطه‌هایی که یافته‌اید مکان هندسی موردنظر است.

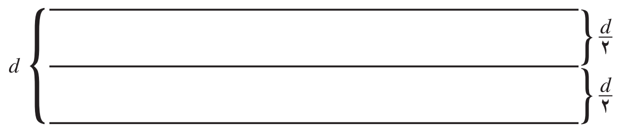
- دو اصل زیر را به عنوان اصلهای مکان هندسی می‌پذیریم:

اصل ۱. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که به فاصلهٔ R از نقطهٔ O قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.

اصل ۲. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از خطی راست به فاصلهٔ d قرار دارند، دو خط راست موازی با این خط است که به فاصلهٔ d و در دو طرف خط قرار دارند.

مثال ۲۰.۱

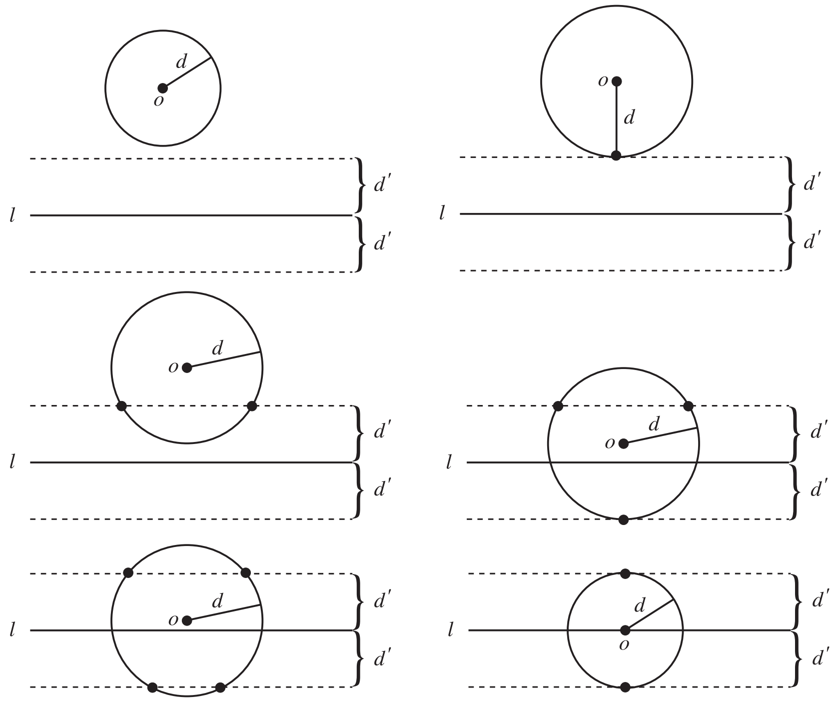
مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که فاصلهٔ آنها از دو خط موازی برابر است، خط راستی موازی با آنهاست که بین آنها و به فاصلهٔ نصف فاصلهٔ دو خط از آن دو قرار دارد (شکل ۱۵.۱ را ببینید).



شکل ۱۵.۱

مثال ۲۱.۱

فرض کنید d و d' عددهایی مثبت باشند. می‌خواهیم همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنیم که فاصلهٔ آنها از نقطه‌ای مفروض، مانند O، برابر با d و فاصلهٔ آنها از خطی مفروض مانند l برابر با d' باشد. مکان هندسی نقطه‌هایی که به فاصلهٔ d از نقطهٔ O قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع d است. این دایره را رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از خط l برابر با d' است دو خط موازی l است که فاصلهٔ آنها از l برابر با d' است. این دو خط را هم رسم می‌کنیم. نقطه‌های موردنظر محل برخورد این خطها و دایره‌اند (شکل ۱۶.۱ را ببینید). توجه کنید که برحسب اینکه d و d' چه رابطه‌ای با یکدیگر داشته باشند و O نسبت به l چگونه قرارگرفته باشد، مسئله جوابهای مختلفی دارد.



شکل ۱۶.۱

قضیه مکان هندسی نقطه‌هایی در صفحه که فاصلهٔ آنها از دو سر پاره‌خط برابر است، عمودمنصف پاره‌خط است.

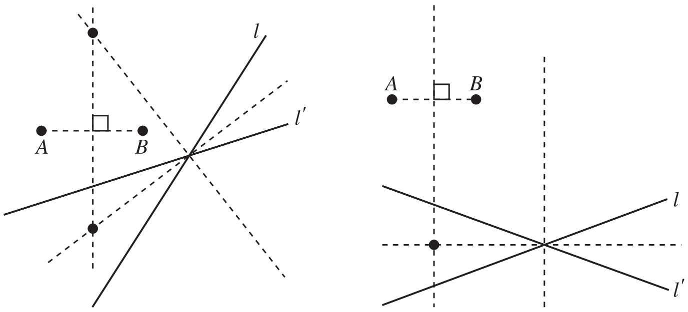
(برهان این قضیه را در کتاب درسی ببینید.)

قضیه مکان هندسی نقطه‌هایی در صفحه که فاصلهٔ آنها از دو ضلع زاویه برابر است، نیمساز زاویه است.

(برهان این قضیه را در کتاب درسی ببینید.)

مثال ۲۲.۱

همهٔ نقطه‌هایی را پیدا می‌کنیم که فاصلهٔ آنها از دو نقطهٔ مفروض A و B برابر باشد و درضمن فاصلهٔ آنها از دو خط متقاطع l و l' نیز برابر باشد. مکان هندسی نقطه‌هایی که از نقطه‌های A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع l و l' به یک فاصله‌اند، نیمسازهای دو زاویه‌ای است که با این خطها تشکیل می‌شوند. نقطه‌های موردنظر محلهای برخورد این مکانهای هندسی هستند (شکل ۱۷.۱ را ببینید).



شکل ۱۷.۱

◄ چند خط را **همرس** می‌نامند، هرگاه فقط در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند.

قضیه سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث همرس‌اند.

(برهان این قضیه را در کتاب درسی ببینید.)

قضیه عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث همرس‌اند.

(برهان این قضیه را در کتاب درسی ببینید.)

قضیه سه میانهٔ هر مثلث همرس‌اند.

(برهان این قضیه را در فعالیت ۱۲.۱ کتاب درسی بخوانید.)

قضیه سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.

(برهان این قضیه را به کمک راهنمایی داده شده در صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی بنویسید.)

۹.۱ ترسیم با خط‌کش و پرگار

◄ استراتژی حل مسئله‌های ترسیمهای هندسی:

گام اول. مسئلهٔ ترسیم را حل شده فرض می‌کنیم.

گام دوم. مسئلهٔ ترسیم را به یافتن یک یا چند نقطهٔ مجهول تبدیل می‌کنیم.