هندسه ۱

GEOMETRY 1

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال ۷
فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن ۳۵
فصل سوم: چند ضلعی‌ها ۹۵
فصل چهارم: تجسم فضایی ۱۴۷

هندسه ۲

GEOMETRY 2

فصل اول: دایره ۱۷۹
فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها ۲۴۵
فصل سوم: روابط طولی در مثلث ۲۷۱

هندسه ۳

GEOMETRY 3

فصل اول: ماتریس و کاربردها ۳۰۵
فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی ۳۵۳
فصل سوم: بردارها ۴۰۱

پاسخ‌نامه

ANSWERS

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۴۱

کتاب‌های آی‌کیو

IQ Books

Geometric

هندسه دهم

. فصل اول .

هندســه دهم

ترسیم‌های هندسی و استدلال

Chapter One

Geometric Drawing

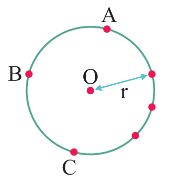
Rene **Descartes**

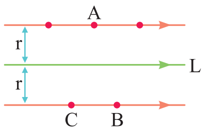
فصل اول

۱ درس اول: ترسیم‌های هندسی

هندسهٔ دهم

فاصله‌های مشخص در صفحه





فاصلهٔ مشخص از نقطه و خط: در این قسمت می‌خواهیم نقاطی از صفحه را مشخص کنیم که از یک نقطه یا یک خط در آن صفحه به فاصلهٔ معلوم و مشخصی باشند.

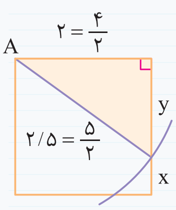
۱ فاصلهٔ مشخص و معلوم از یک نقطه: نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O در آن صفحه به فاصلهٔ معلوم r هستند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r قرار دارند. مثلاً نقاط A، B، C و ... در شکل مقابل.

۲ فاصلهٔ مشخص و معلوم از یک خط: نقاطی از صفحه که از خط L در آن صفحه به فاصلهٔ معلوم r هستند، روی دو خط به موازات L و به فاصلهٔ r در طرفین L قرار دارند. مثلاً نقاط A، B، C و ... در شکل مقابل.

نکته معمولاً در تست‌ها دنبال نقاطی از یک شکل هندسی هستیم که از یک نقطه از آن شکل یا یک ضلع یا قطر آن به فاصلهٔ معلوم r هستند. در این موارد نقطه یا نقاط تلاقی حاصل از رسم دایره یا رسم دو خط موازی با شکل هندسی، در صورت وجود، نقطه یا نقاط مدنظر سؤال هستند.

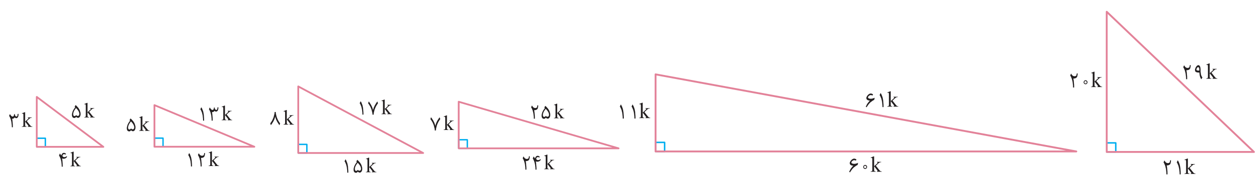
روی محیط مربعی به ضلع ۲ واحد، دو نقطه وجود دارد که به فاصلهٔ ۲/۵ واحد از یک رأس مربع قرار دارند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا هر یک از این نقاط کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$



گزینهٔ ۲ ابتدا دو نقطهٔ موردنظر را روی اضلاع مربع معلوم می‌کنیم. برای این کار دایره‌ای به مرکز رأس A و شعاع ۲/۵ رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی $y=\frac{۳}{۲}$ است. (اعداد ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند، پس هر مضرب غیرصفری از آن‌ها یعنی $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۴}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$ نیز فیثاغورسی می‌باشند.) فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا یکی از این نقاط برابر x است که $x=۲-y=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

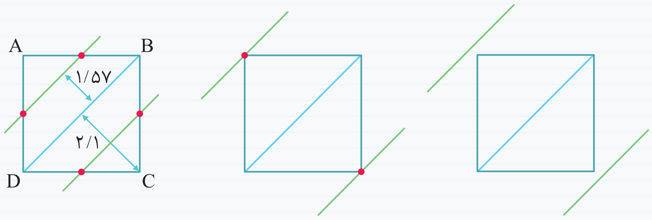
یادآوری به اعداد a، b و c که در رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ صدق می‌کنند، اعداد فیثاغورسی می‌گویند. در واقع این اعداد طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌باشند. توجه کنید که اگر a، b و c اعداد فیثاغورسی باشند، هر مضرب غیرصفری از آن‌ها نیز فیثاغورسی هستند. اعداد فیثاغورسی معروف را ببینید:



مربع ABCD به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع ABCD وجود دارد که فاصله‌اش از قطر BD برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

گزینهٔ ۱ کافی است دو خط به موازات قطر AC و در طرفین آن و به فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲} \simeq ۱/۵۷$ از آن رسم کنیم و ببینیم این دو خط، مربع را در چند نقطه قطع می‌کنند. می‌دانیم در مربع، قطرها عمودمنصف یکدیگرند و طول قطر مربع به ضلع ۳ برابر $۳\sqrt{۲} \simeq ۴/۲$ است که نصف آن برابر ۲/۱ می‌باشد. چون $۲/۱ > ۱/۵۷$ است، پس این دو خط مطابق شکل مقابل مربع را در چهار نقطه قطع می‌کنند. واضح است که با تغییر اندازه‌ها، مسئله می‌تواند دو جواب یا فاقد جواب باشد.



۴ جواب ۲ جواب فاقد جواب

نکته اگر در مسئله‌ای دنبال نقاطی هستیم که دارای دو ویژگی باشند، باید نقاط مطلوب هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم، آنگاه محل تلاقی آن‌ها در صورت وجود، جواب مسئله است.

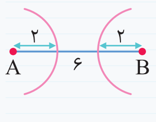
دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد، به طوری‌که:

الف) به فاصلهٔ ۲ واحد از هر کدام از نقاط A و B باشد؟

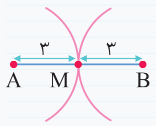
ب) به فاصلهٔ ۳ واحد از هر کدام از نقاط A و B باشد؟

پ) به فاصلهٔ ۳ واحد از A و به فاصلهٔ ۴ واحد از B باشد؟

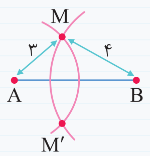
الف) نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع‌اند. هم‌چنین نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از نقطهٔ B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ می‌باشند. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، این دو دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس هیچ نقطه‌ای با شرایط گفته شده وجود ندارد.



ب) نقاطی که به فاصلهٔ ۳ واحد از هر یک از نقاط A و B قرار دارند، روی دایره‌هایی به مرکزهای A و B و شعاع ۳ قرار دارند. مطابق شکل مقابل، این دو دایره فقط در نقطهٔ M مشترک‌اند. پس فقط یک نقطه با این شرایط در صفحه وجود دارد.



پ) نقاطی که به فاصلهٔ ۳ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ هستند و هم‌چنین نقاطی که به فاصلهٔ ۴ واحد از B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ می‌باشند. با توجه به شکل مقابل، این دو دایره همدیگر را در نقاط M و M′ قطع می‌کنند. پس این دو نقطه، نقاط مطلوب ما هستند.

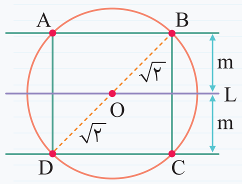


حتماً با خوندن مثال بالا، وضعیت دو دایره که در فصل اول هندسه (۲) خوندین، در ذهنتون تداعی شد.

نقطهٔ O روی خط L قرار دارد. نقاطی از صفحه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ و از خط L به فاصلهٔ m می‌باشند، رأس‌های یک مربع هستند. مقدار m کدام است؟

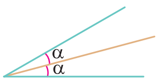
۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

گزینهٔ ۴ چون ۴ نقطه وجود دارند که هر دو ویژگی را دارا می‌باشند (مربع دارای ۴ رأس است.) پس نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است و طول قطر مربع برابر $۲\sqrt{۲}$ می‌باشد. پس طول هر ضلع آن برابر ۲ است و داریم: $۲m = ۲ \Rightarrow m = ۱$



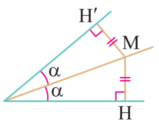
نیمساز و عمودمنصف

به کمک مطالبی که در مورد فاصله‌های مشخص از نقطه و خط فراگرفتیم، می‌توان مجموعهٔ نقاطی از صفحه را معلوم کرد که آن‌ها نیز از نظر فاصله، ویژگی مشخصی دارند که به‌صورت زیر هستند:



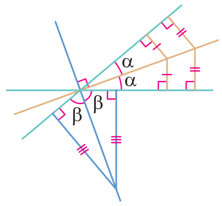
۱. نیمساز: نیمساز یک زاویه، خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

ویژگی‌های نیمساز یک زاویه:

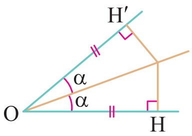


الف) هر نقطه‌ای که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و هر نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

$$MH = MH'$$



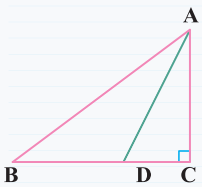
نتیجه نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع در آن صفحه به یک فاصله هستند، روی نیمسازهای زوایای دو خط متقاطع قرار دارند و در ضمن این نیمسازها بر هم عمود هستند.



ب) اگر از نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز، دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم کنیم، پاره‌خط‌هایی که روی دو ضلع زاویه ایجاد می‌شوند، با هم برابرند.

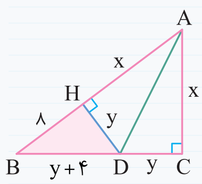
$$OH = OH'$$

؟ در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ BAC است. اگر $AB = AC + ۸$ و $BD = DC + ۴$ باشد، طول پاره‌خط DC کدام است؟



۱) ۶ ‌‌‌‌‌‌‌‌ ۲) ۷

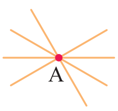
۳) ۸ ‌‌‌‌‌‌‌‌ ۴) ۹



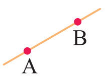
گزینهٔ ۱ با فرض $AC = x$ و $DC = y$، مقادیر $AB = x + ۸$ و $BD = y + ۴$ به‌دست می‌آیند. چون D روی نیمساز زاویهٔ BAC است، پس از D بر AB عمود می‌کنیم. در این صورت $DH = DC = y$ و $AH = AC = x$ می‌شود. حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

$$BD^۲ = HD^۲ + HB^۲ \Rightarrow (y+۴)^۲ = y^۲ + ۸^۲$$

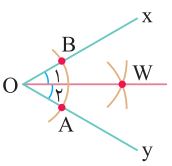
$$\Rightarrow y^۲ + ۸y + ۱۶ = y^۲ + ۶۴ \Rightarrow ۸y = ۴۸ \Rightarrow y = DC = ۶$$



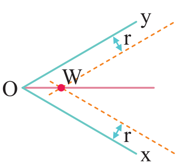
یادآوری از یک نقطه در صفحه، بی‌شمار خط می‌گذرد ولی از دو نقطهٔ متمایز در صفحه، یک و فقط یک خط می‌گذرد. بنابراین برای این‌که یک خط را به طور منحصربه‌فرد در صفحه مشخص کنیم، نیاز به حداقل دو نقطه از خط داریم.



رسم نیمساز یک زاویه:
برای رسم نیمساز یک زاویه دو روش وجود دارد:



۱) برای رسم نیمساز زاویهٔ xOy، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در W قطع کنند. از W به O وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویهٔ xOy است، زیرا مثلث‌های OAW و OBW به حالت سه ضلع برابر هم‌نهشت هستند، بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ است.

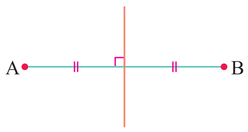


۲) برای رسم نیمساز زاویهٔ xOy، دو خط به فاصلهٔ معلوم r به موازات هر یک از اضلاع زاویه رسم می‌کنیم. این دو خط همدیگر را در نقطهٔ W قطع می‌کنند. از O به W وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویه است. زیرا فاصلهٔ W تا دو ضلع زاویه برابر r است، پس حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

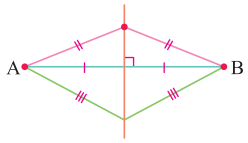
برای رسم نیمساز یک زاویه به کمک خط‌کش و پرگار نیاز به ترسیم حداقل چند کمان است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

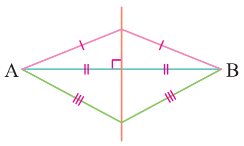
گزینهٔ ۳ با توجه به توضیحات بالا، باید حداقل سه کمان رسم کنیم.



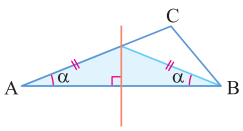
۲. عمودمنصف: عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود است.

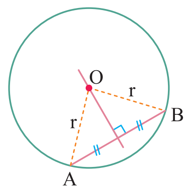


■ ویژگی عمودمنصف: هر نقطه که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، از نقاط A و B (دو سر پاره‌خط) به یک فاصله است و هم‌چنین هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.



● اگر از هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، به دو سر آن وصل کنیم، یک مثلث متساوی‌الساقین حاصل می‌شود.



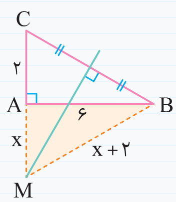


● اگر AB وتری از یک دایره باشد، مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB قرار دارد، زیرا فاصلهٔ مرکز دایره تا نقاط A و B (دو سر پاره‌خط AB) برابر شعاع دایره است. بنابراین برای پیدا کردن مرکز یک دایره می‌توان عمودمنصف‌های دو وتر ناموازی از دایره را رسم کرد. محل تلاقی آن‌ها مرکز دایره است.

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۶ و ۲، عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع کرده است. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{۸۰}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$

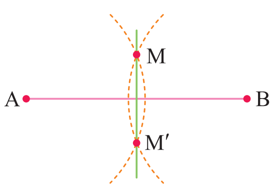
گزینهٔ ۲ شکل مسئله را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث همان MA است.



چون M روی عمودمنصف BC قرار دارد، پس فاصله‌اش تا دو سر BC برابر است؛ یعنی $MB = MC$ می‌باشد. با فرض $MA = x$ ، $MB = x + ۲$ خواهد بود. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث MAB داریم:

$$MB^۲ = MA^۲ + AB^۲ \Rightarrow (x+۲)^۲ = x^۲ + ۶^۲$$

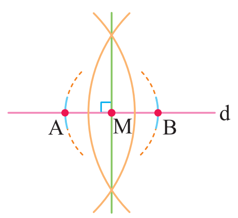
$$\Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + ۳۶ \Rightarrow ۴x = ۳۲ \Rightarrow x = ۸$$



■ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط: برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB ، دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان رسم می‌کنیم. این دو کمان همدیگر را در نقاط M و M' قطع می‌کنند. خط گذرا از M و M' عمودمنصف پاره‌خط AB است، چون فاصلهٔ M و M' از A و B یکسان است. (توجه کنید که دهانهٔ پرگار را بیش از نصف AB باز کردیم تا دو کمان همدیگر را قطع کنند و نقاط M و M' ایجاد شوند.)

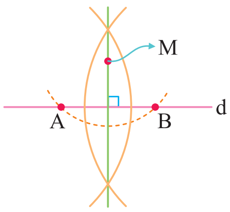
رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

بعد از این‌که رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را فرا گرفتیم، می‌توانیم به کمک آن، رسم‌های زیر را انجام دهیم:

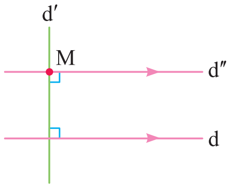


۱. رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن: ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. اکنون M وسط پاره‌خط AB است. حال اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را به ترتیبی که بلدیم رسم کنیم، آنگاه از M گذشته و بر خط d عمود خواهد بود.

۲. رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن: ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. (البته شعاع دایره آن‌قدرها هم دلخواه نیست. باید طول شعاع از فاصلهٔ M تا خط d بیش‌تر باشد تا دایره خط d را حتماً در دو نقطه قطع کند.) حال عمودمنصف پاره‌خط AB را به ترتیبی که بلدیم رسم می‌کنیم. عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ M گذشته و بر خط d عمود است. (چون دایره به مرکز M رسم کردیم و این دایره خط d را در نقاط A و B قطع کرد، پس حتماً $MA = MB$ است و این یعنی M حتماً روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.)

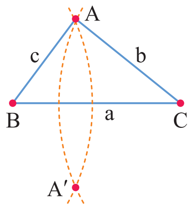


۳. رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیرواقع بر آن: ابتدا خط d' را عمود بر خط d و گذرا از نقطهٔ M رسم می‌کنیم. حال خط d'' راگذرا از M و عمود بر d' رسم می‌کنیم. خطوط d و d'' هر دو بر خط d' عمودند، پس طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب d و d'' با هم موازی‌اند. (توجه دارید که برای رسم خطوط عمود، از رسم عمودمنصف کمک می‌گیریم.)



رسم چندضلعی‌ها

۱. رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع: اگر a، b و c به اندازهٔ اضلاع مثلث ABC باشند، برای رسم آن ابتدا پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. سپس یک بار به مرکز C و شعاع b و بار دیگر به مرکز B و شعاع c دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی این دو دایره، رأس A از مثلث ABC است. توجه کنید دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کنند اما مثلث $A'BC$ با مثلث ABC هم‌نهشت است و هیچ فرقی با هم ندارند.



نکته در توضیحات بالا واضح است که $b+c$ باید از a بزرگ‌تر باشد تا دو دایره همدیگر را در نقاط A و A' قطع کنند و مثلث ABC یا $A'BC$ تشکیل شود. بنابراین سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c در صورتی اضلاع یک مثلث هستند که هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد.

کدام دسته از اعداد زیر می‌توانند سه ضلع یک مثلث باشند؟

۱) ۷ , ۵ , ۳   ۲) ۶ , ۳ , ۲   ۳) ۳ , ۲ , ۱   ۴) ۴ , ۳ , ۱

گزینهٔ ۱ باید بررسی کنیم که آیا مجموع هر دو عدد از عدد سوم بزرگ‌تر است یا خیر. واضح است که فقط باید بررسی کنیم که بزرگ‌ترین عدد از مجموع دو عدد دیگر، کوچک‌تر باشد (واضح است اگر این نامساوی برقرار باشد، حتماً دو نامساوی دیگر نیز برقرار است.):

$۱)\ ۵+۳>۷$ $۲)\ ۳+۲\not>۶$ $۳)\ ۱+۲\not>۳$ $۴)\ ۱+۳\not>۴$

نکته اگر اعداد a، b و c بخواهند طول اضلاع یک مثلث باشند، باید هر سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ برقرار باشند. (اگر a، b و c پارامتری نباشند و سه عدد معلوم باشند، فقط کافی است عدد بزرگ‌تر از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد. این مطلب را در مثال بالا دیدید.)
حال اگر حداقل یکی از این اعداد پارامتری باشند، دیگر عدد بزرگ‌تر معلوم نیست، پس ناچاریم هر سه نامساوی را بررسی کنیم که وقت‌گیر است.
از سه نامساوی فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و از مجموع آن‌ها کوچک‌تر است. یعنی داریم:

$\boxed{|b-c|<a<b+c}$ $\boxed{|a-c|<b<a+c}$ $\boxed{|a-b|<c<a+b}$

نکته اگر یک ضلع مجهول بود کافی است، ضلع مجهول را بین مجموع و تفاضل دو ضلع معلوم قرار دهیم و هم‌چنین اگر دو ضلع مجهول بود، ضلع معلوم را بین مجموع و قدرمطلق تفاضل دو ضلع مجهول قرار دهیم. اما اگر هر سه ضلع مجهول بود باید هر سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ را حل کنیم.

در هر مورد حدود x را طوری تعیین کنید که مقادیر داده شده طول اضلاع یک مثلث باشند.

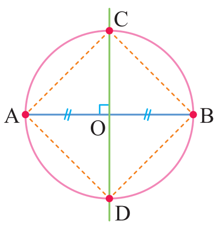
الف) x، ۵ و ۱۲   **ب)** ۲x، $x-۱$ و ۱۷   **پ)** $x+۱$، $۲x+۴$ و $۴x-۳$

الف) چون فقط طول یک ضلع مجهول است، داریم: $۱۲-۵<x<۱۲+۵ \Rightarrow ۷<x<۱۷$

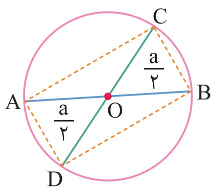
ب) دو ضلع مجهول داریم، پس:
$$|۲x-(x-۱)|<۱۷<۲x+x-۱ \Rightarrow |x+۱|<۱۷<۳x-۱$$
$$\begin{cases}|x+۱|<۱۷ \Rightarrow -۱۷<x+۱<۱۷ \Rightarrow -۱۸<x<۱۶\\ ۳x-۱>۱۷ \Rightarrow ۳x>۱۸ \Rightarrow x>۶\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۶<x<۱۶$$

پ) چون هر سه ضلع مجهول هستند، باید هر سه نامساوی $a<b+c$ ، $b<a+c$ و $c<a+b$ را چک کنیم:
$$\begin{cases}۴x-۳<(x+۱)+(۲x+۴) \Rightarrow ۴x-۳<۳x+۵ \Rightarrow x<۸\\ ۲x+۴<(x+۱)+(۴x-۳) \Rightarrow ۲x+۴<۵x-۲ \Rightarrow x>۲\\ x+۱<(۲x+۴)+(۴x-۳) \Rightarrow x+۱<۶x+۱ \Rightarrow x>۰\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۲<x<۸$$

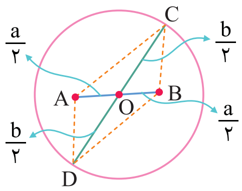
۲. رسم چهارضلعی‌ها: برای رسم چهارضلعی‌ها به کمک خط‌کش و پرگار باید ویژگی‌های آن چهارضلعی را بدانیم و با استفاده از روش رسم‌هایی که تاکنون آموختیم، چهارضلعی را رسم کنیم در کتاب درسی رسم مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و لوزی مطرح شده است که در ادامه نحوهٔ رسم آن‌ها را می‌بینیم:



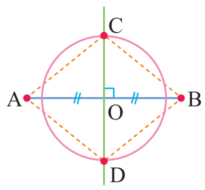
الف رسم مربع به قطر a: (برای رسم، به این ویژگی توجه می‌کنیم که «در مربع، قطرها عمودمنصف یکدیگرند.») ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی این دو را O می‌نامیم. حال به مرکز O و شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD مربعی به قطر a است.



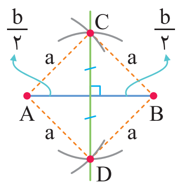
ب رسم مستطیل به قطر a: (برای رسم به این ویژگی توجه می‌کنیم که «در مستطیل، قطرها با هم برابر و منصف یکدیگرند.») ابتدا پاره‌خط AB به طول a و عمودمنصفش را رسم می‌کنیم تا نقطهٔ وسط پاره‌خط AB یعنی O معلوم شود. (البته می‌توانستیم برای پیداکردن وسط پاره‌خط AB به مرکز A یا B و شعاع $\frac{a}{۲}$ یک دایره رسم کنیم. نقطهٔ تلاقی دایره و پاره‌خط AB وسط پاره‌خط AB می‌شد.) به مرکز وسط AB یعنی O و شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. حال هر قطر غیرمنطبق و غیرعمود بر AB (مثلاً قطر CD در شکل مقابل) را رسم می‌کنیم، چهارضلعی ACBD مستطیلی به قطر a خواهد بود.



پ رسم متوازی‌الاضلاع به قطرهای a و b: (برای رسم به این ویژگی توجه می‌کنیم که «در متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند.») ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم و به کمک رسم عمودمنصف یا دایره‌ای به مرکز A یا B و شعاع $\frac{a}{۲}$ وسط AB را معلوم می‌کنیم. به مرکز O و شعاع $\frac{b}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. حال هر قطر غیرمنطبق و غیرعمود بر AB (مثلاً قطر CD در شکل مقابل) را رسم می‌کنیم. چهارضلعی ACBD متوازی‌الاضلاعی به قطرهای a و b خواهد بود.



ت رسم لوزی به قطرهای a و b: (برای رسم به این ویژگی توجه می‌کنیم که «در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند.») ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کرده و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع $\frac{b}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD لوزی است.

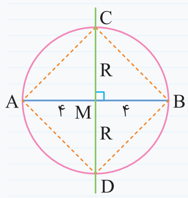


ث رسم لوزی به ضلع a و قطر b: (برای رسم به این ویژگی‌ها توجه می‌کنیم که «در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند و لوزی چهارضلع برابر دارد.») ابتدا پاره‌خط AB به طول b و سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. حال به مرکز A یا B و به شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD لوزی مطلوب است.

- در تست‌ها می‌توانند روش رسم یک چندضلعی را بیان کرده و از شما نوع چندضلعی یا اطلاعاتی در مورد چندضلعی را بپرسند.

؟ پاره‌خط AB به طول ۸ مفروض است. عمودمنصف AB آن را در نقطهٔ M قطع می‌کند. به مرکز M و شعاع R یک دایره رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. اگر چهارضلعی ACBD مربع باشد. مقدار R کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۳



گزینهٔ ۲ می‌دانیم در مربع، قطرها با هم برابر و عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین با توجه به شکل مقابل، $۲R=۸$ و در نتیجه $R=۴$ است.

درس ۱

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فاصله‌های مشخص در صفحه

۱. نقطهٔ ثابت A در صفحه مفروض است. نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از A بیشتر از ۳ و کم‌تر از ۵ می‌باشند، چگونه‌اند؟

۱) روی دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز A قرار دارند.
۲) در ناحیه‌ای به مساحت 16π قرار دارند.
۳) چهار نقطه با این شرایط وجود دارد.
۴) روی دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۳ و ۵ قرار دارند.

۲. مرکز تمام دایره‌هایی به شعاع ۲ که در یک صفحه قرار دارند و از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند، چگونه‌اند؟

۱) روی دو خط راست گذرا از A می‌باشند.
۲) روی دو خط راست و به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند.
۳) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ قرار دارند.
۴) روی دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۲ و ۴ قرار دارند.

۳. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از A و به فاصلهٔ ۲ واحد از B قرار داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴. نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d قرار دارد. نقاط M و M' روی خط d و به فاصلهٔ ۵ از نقطهٔ A قرار دارند. فاصلهٔ MM' کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۵. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند. فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ از A و $2a-1$ از B قرار دارد. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱ یا ۴

۶. نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۳ از هم قرار دارند. نقاطی که به فاصلهٔ ۱۲ از A و به فاصلهٔ ۵ از B می‌باشند را معلوم کرده و از آن‌ها به A و B وصل می‌کنیم. مجموع مساحت‌های شکل‌های حاصل کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۷. نقاط A و B به فاصلهٔ ۵ از هم قرار دارند. نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ۳ و ۴ از این نقاط می‌باشند را معلوم کرده و از آن‌ها به A و B وصل می‌کنیم. مجموع مساحت شکل‌های حاصل کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

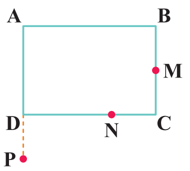
۸. مرکز همهٔ دایره‌هایی که از دو رأس A و B از مربع $ABCD$ می‌گذرند، چگونه‌اند؟

۱) روی دایره‌ای به قطر ضلع AB قرار دارند.
۲) روی خطی موازی ضلع AB قرار دارند.
۳) روی عمودمنصف ضلع CD قرار دارند.
۴) روی خطی عمود بر ضلع AB قرار دارند.

۹. مربع $ABCD$ به ضلع ۴ مفروض است. مرکز دو دایره از مجموعه دوایری به شعاع ۵ که همگی از رأس A می‌گذرند روی محیط مربع قرار دارد. فاصلهٔ مرکزهای این دو دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

۱۰. در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است و نقاط M، N و P که روی اضلاع مستطیل و امتداد آن‌ها هستند به فاصلهٔ برابر از رأس A قرار دارند. اگر $BM = 7$، $MC = 8$ و $DP = 10$ باشند، طول پاره‌خط NC کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۳/۵
۳) ۳ ۴) ۲

۱۱. روی محیط مستطیلی به ابعاد ۴ و ۸، دو نقطه وجود دارد که به فاصلهٔ ۵ از یک رأس آن قرار دارند. فاصلهٔ این دو نقطه از هم کدام است؟

۱) $2\sqrt{7}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) $2\sqrt{5}$

۱۲. نقطهٔ M درون مربع $ABCD$ به ضلع ۴ قرار دارد. اگر نقاط A، B و وسط ضلع CD از نقطهٔ M به یک فاصله باشند، فاصلهٔ M تا مرکز مربع کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۱۳. روی محیط یک مربع، m نقطه وجود دارد که از مرکز مربع به فاصلهٔ معلوم L می‌باشند، مقدار m کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۴. نقطهٔ O روی خط L قرار دارد. نقاطی از صفحه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ $\sqrt{2}$ و از خط L به فاصلهٔ m می‌باشند، رأس‌های یک مربع هستند. مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۱

۱۵. خط d بر دایرهٔ C مماس است. m نقطه روی دایره وجود دارد که از خط d به فاصلهٔ معلوم L هستند. مقدار m کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶. نقطهٔ A روی خط d و نقطهٔ B خارج خط d و به فاصلهٔ ۴ از خط d قرار دارند. اگر نقاط C و D روی خط d به‌گونه‌ای باشند که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ A برابر ۳ و از نقطهٔ B برابر m باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۷. نقطهٔ A و خط d مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ و از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ می‌باشند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸. دو خط موازی d و d′ به فاصلهٔ ۲ از هم در صفحه مفروض‌اند. نقطهٔ A در صفحه به گونه‌ای است که روی این دو خط قرار ندارد. اگر سه نقطه روی این دو خط باشند که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A باشند، مجموع فاصله‌های نقطهٔ A تا این دو خط کدام است؟

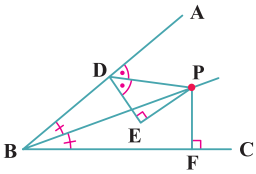
۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) این وضعیت امکان ندارد.

۱۹. نقطهٔ A خارج خط d مفروض است. اگر سه نقطه در صفحه وجود داشته باشند که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ و از خط d به فاصلهٔ ۲ باشند، چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

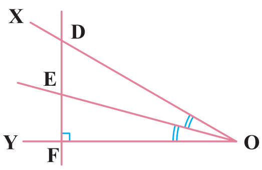
نیمساز و ویژگی‌های آن

۲۰. در شکل زیر، نقطهٔ P روی نیمساز زاویه‌های ABC و ADE قرار دارد. اگر PF = ۵ باشد، طول پاره‌خط PE کدام است؟



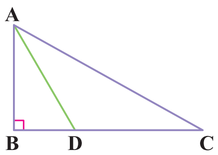
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۲۱. در شکل زیر، نیمساز زاویهٔ XOY رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



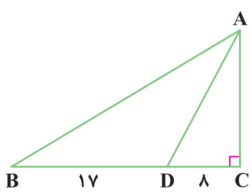
۱) $EF < DE$
۲) $EF = DE$
۳) $EF = ۲DE$
۴) $EF > DE$

۲۲. در شکل زیر AD نیمساز زاویهٔ A است. اگر BD = ۴ و $S_{ADC} = S_{ABD} + ۱۲$ باشند، طول پاره‌خط CD کدام است؟



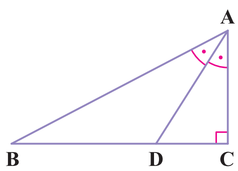
۱) ۷
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۱۳}$
۴) ۸

۲۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. در این مثلث، وتر چند واحد از ضلع کوچک‌تر مثلث، بزرگ‌تر است؟



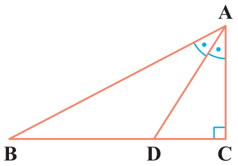
۱) ۱۱
۲) ۱۳
۳) ۹
۴) ۱۵

۲۴. در شکل زیر، اگر BD = ۱۵ و AB − AC = ۱۲ باشد، طول پاره‌خط DC کدام است؟



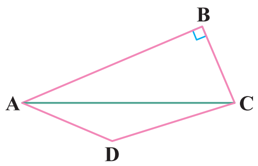
۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۲۵. در شکل زیر، مثلث ACB قائم‌الزاویه است. اگر $AB = AC + ۸$ و $BD = DC + ۴$ باشد، طول پاره‌خط DC کدام است؟



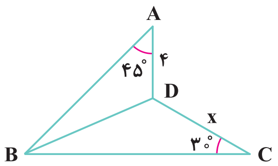
۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۲۶. در شکل زیر قطر AC نیمساز زاویهٔ A است. اگر $AB = ۷$ ، $BC = ۳$ و $CD = ۵$ باشند، طول ضلع AD کدام است؟



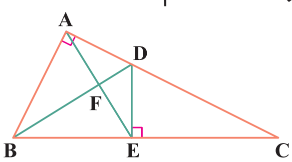
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۲۷. در شکل زیر، BD نیمساز زاویهٔ ABC است. مقدار x کدام است؟



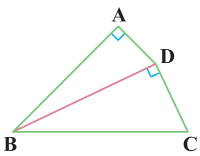
۱) ۶
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۵
۴) $۲\sqrt{۶}$

۲۸. در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه و BD نیمساز زاویهٔ B است. اگر $AD = ۲$ و $CD = ۴$ باشند، طول پاره‌خط AE کدام است؟



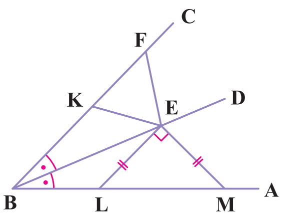
۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

۲۹. در شکل مقابل $A\hat{B}D = C\hat{B}D$ است. اگر $CD = ۴\sqrt{۵}$ و $AD = ۸$ باشند، طول ضلع AB کدام است؟



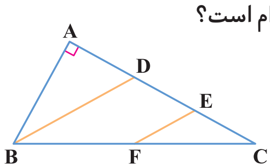
۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) ۱۲
۳) $۸\sqrt{۳}$
۴) ۱۶

۳۰. در شکل زیر، BD نیمساز زاویهٔ ABC است. اگر KEF مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت $۳\sqrt{۳}$ و LEM مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد، طول وتر آن کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) ۶
۳) ۸
۴) $۲\sqrt{۲}$

۳۱. در شکل زیر، BD نیمساز زاویهٔ B، $AB = BF$ ، $DE = EC$ ، $AD = ۶$ و $EF = ۵$ است. طول پاره‌خط FC کدام است؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

عمودمنصف و ویژگی‌های آن

۳۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه، فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از رأس قائم برابر ۳ می‌باشد. طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۳۳. در مثلث ABC $(AB = ۱۲, \hat{C} = ۳۰^\circ)$ عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC یکدیگر را در نقطهٔ F روی ضلع BC قطع می‌کنند. طول پاره‌خط FC کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) ۱۵

۳۴. درمثلث ABC داریم $AB = AC$. عمودمنصف ضلع AC، ضلع AB رادرنقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $AD = BC$ باشد، زاویهٔ BAC چند درجه است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

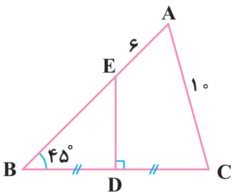
۳۵. درمثلث ABC داریم $AB = AC$ ، $\hat{A} = ۸۰^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۳۶. درمثلث ABC داریم $AB = ۸$ و $AC = ۱۴$. عمودمنصف ضلع BC ، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. محیط مثلث AEB کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۲۲

۳۷. در مثلث شکل مقابل، طول عمودمنصف ضلع BC کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۲}$

۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) ۶

۴) ۴

۳۸. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول ضلع کوچک ۴ است. عمودمنصف وتر روی ضلع متوسط دو قطعه ایجاد می‌کند. اگر طول قطعهٔ کوچک‌تر ۲ باشد، طول قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۵

۳۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، عمودمنصف ساق AB ، ارتفاع AH را در نقطهٔ O قطع کرده است. اگر $OA = ۵$ و $OH = ۳$ باشد، طول ساق مثلث کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) ۸ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۴۰. درمثلث ABC ، $\hat{C} - \hat{B} = ۹۰^\circ$ است. عمودمنصف ضلع BC روی ضلع AB پاره‌خط‌هایی به طول ۱۰ و ۵ ایجاد می‌کند. طول ضلع AC کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) ۷

۴۱. درمثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۶ و ۲، عمودمنصف وترامتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع کرده است. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{۸۰}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$

۴۲. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۱۲ و b $(b < ۱۲)$، عمودمنصف ضلع بزرگ‌تر امتداد کوچک‌ترین ضلع را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اگر فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث برابر ۹ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۳. در یک مستطیل به اضلاع $۴\sqrt{۶}$ و ۱۲، عمودمنصف قطر، طول مستطیل را با چه نسبتی قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۴۴. درمثلث ABC ، $\hat{B} = ۱۵^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ است. عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC به‌ترتیب ضلع BC را در F و K قطع می‌کنند. اگر $BF = ۶\sqrt{۳}$ باشد، طول پاره‌خط FK کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۴۵. پاره‌خط AB به طول ۳ مفروض است. نقطهٔ A را نسبت به خطوط گذرنده از نقطهٔ B قرینه می‌کنیم. نقاط حاصل کجا قرار دارند؟

۱) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ ۲) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶

۳) روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ ۴) روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۶

۴۶. مرکز دایرهٔ گذرا از سه رأس مثلث ABC بیرون این مثلث قرار دارد. کدام گزینه می‌تواند اندازهٔ دو زاویهٔ این مثلث باشد؟

۱) $۳۰^\circ, ۷۰^\circ$ ۲) $۵۵^\circ, ۳۵^\circ$ ۳) $۴۰^\circ, ۳۰^\circ$ ۴) $۸۰^\circ, ۳۰^\circ$

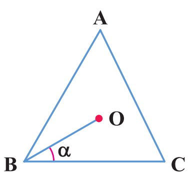
۴۷. در شکل زیر، O محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC است. اگر $A = ۵۶^\circ$ باشد، مقدار α کدام است؟

۱) ۲۸°

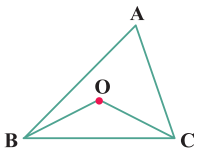
۲) ۳۰°

۳) ۳۶°

۴) ۳۴°



۴۸. در شکل مقابل، O نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC است. اگر $O\hat{B}C = ۲۷^\circ$ و $O\hat{C}A = ۴۴^\circ$ باشد، زاویهٔ OBA چند درجه است؟



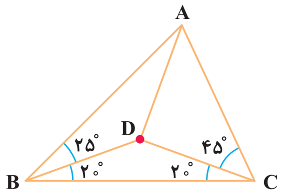
۱) ۲۲

۲) ۲۰

۳) ۱۹

۴) ۲۱

۴۹. در شکل مقابل، $DB = ۳$ می‌باشد. طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۳

۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) ۶

ترسیم به کمک خط‌کش و پرگار

۵۰. در مثلث ABC، $BC = ۷$ و $۴AB = ۳AC$ می‌باشند. طول ضلع AB چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۵۱. مثلثی با اضلاع $۲x - ۱$، ۲ و ۵ که در آن x عددی صحیح می‌باشد، چگونه است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) نامشخص ۴) نشدنی

۵۲. در بین مثلث‌هایی با اضلاع ۳/۵، ۶ و $۵x + ۱$ که اندازهٔ محیط آن‌ها مقداری صحیح است. بیشترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۵۳. سه پاره‌خط به طول‌های $۴x - ۴$، $x + ۷$ و $۶x$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$ ۲) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۳) $۲ < x < ۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$

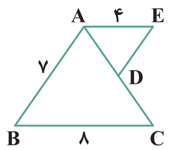
۵۴. به ازای چند مقدار صحیح x، مثلث ABC به اضلاع ۸، $۴x - ۱$ و $۲x + ۳$ و مثلث $A'B'C'$ به اضلاع $۳x - ۲$، $۲x + ۵$ و ۴ هر دو قابل رسم هستند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۵. محیط مثلثی برابر ۳۰ است. کدام گزینه نمی‌تواند طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

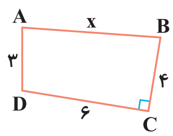
۵۶. در شکل مقابل، $CD = DE$ است. طول پاره‌خط AC چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟



۱) ۹ ۲) ۱۰

۳) ۱۱ ۴) ۱۲

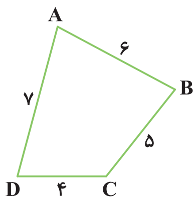
۵۷. در شکل مقابل، بیشترین مقدار صحیح x کدام است؟



۱) ۹ ۲) ۱۰

۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۵۸. در چهارضلعی شکل مقابل، بیشترین مقدار صحیح $AC + BD$ کدام است؟



۱) ۲۱

۲) ۱۸

۳) ۱۹

۴) ۲۰

۵۹. در مثلث ABC با $AB = ۴$ و $AC = ۶$ میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. مجموع مقادیر صحیحی که طول میانهٔ AM می‌پذیرد، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

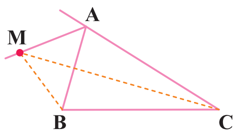
۶۰. در مثلث ABC، عمودمنصف ضلع AB، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $AC = ۶$ و $DC = ۴$ باشند، بیشترین مقدار صحیح برای طول BC کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۶۱. اندازهٔ ساق‌های یک ذوزنقه ۴ و ۸ و قاعدهٔ بزرگ آن ۱۵ است. طول قاعدهٔ کوچک آن کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱۱

۶۲. در شکل زیر، نقطهٔ M روی نیمساز خارجی زاویهٔ A است. نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۳)



۱) بزرگ‌تر از ۱

۲) کم‌تر از ۱

۳) برابر با ۱

۴) غیرمشخص

۶۳. می‌خواهیم به کمک خط‌کش و پرگار، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم. برای این کار نیاز به رسم چند دایره داریم؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۶۴. می‌خواهیم به کمک خط‌کش و پرگار از نقطهٔ M روی خط d ، خطی بر آن عمود کنیم. برای این کار نیاز به رسم چند دایره داریم؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۵. برای رسم میانهٔ وارد بر ضلع BC در مثلث ABC به کمک خط‌کش و پرگار نیاز به زدن چند کمان داریم؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶. پاره‌خط AB به طول ۸ مفروض است. عمودمنصف AB آن را در نقطهٔ M قطع می‌کند، به مرکز M و شعاع R یک دایره رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. اگر چهارضلعی ABCD مربع باشد، مقدار R کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) هر مقداری بزرگ‌تر از ۴

۶۷. پاره‌خط AB به طول ۵ مفروض است. عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ M قطع کند. به مرکز M و شعاع ۳ یک دایره رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند. چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) مربع به قطر ۶ ۲) لوزی به قطرهای ۵ و ۳ ۳) مربع به قطر ۵ ۴) لوزی به قطرهای ۵ و ۶

۶۸. کدام چهارضلعی با معلوم بودن طول یک قطر آن به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌شود؟

۱) لوزی ۲) مربع ۳) مستطیل ۴) متوازی‌الاضلاع

۶۹. با معلومات $AC=۱۲$ ، $BD=۶$ و $AB=a$ ، متوازی‌الاضلاع ABCD رسم شده است. مقدار a کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۴

۷۰. متوازی‌الاضلاعی با طول دو ضلع ۵ و ۹ و طول قطر d رسم شده است. مقدار d کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۱۳

۷۱. با معلومات طول ضلع a و طول قطر کوچک ۶، یک لوزی رسم شده است. مقدار a کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

یادداشت:

. فصل **آخر** .

پاسخ‌نامه

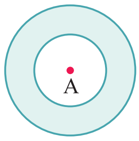
Final Chapter

Answers

پایه ۱۰ — فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

۱ — **۲**

نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A بیشتر از ۳ است، خارج دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. هم‌چنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A کم‌تر از ۵ است، درون دایره به مرکز A و شعاع ۵ قرار دارند. پس اشتراک این دو ناحیه به‌صورت ناحیهٔ رنگی زیر می‌باشد که مساحت آن برابر است با:

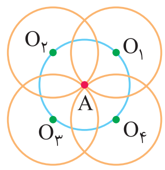


$$S_{\text{رنگی}} = \pi(۵)^۲ - \pi(۳)^۲ = ۲۵\pi - ۹\pi = ۱۶\pi$$

۲ — **۳**

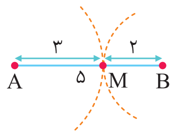
مرکز هر دایره به شعاع ۲ که از نقطهٔ A می‌گذرد، به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ A قرار دارد. واضح است تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ A می‌باشند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ هستند.

در شکل زیر O_1، O_2، O_3 و O_4 مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ و گذرا از A می‌باشند که همهٔ مرکزها روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ (دایرهٔ آبی) قرار دارند.



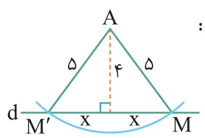
۳ — **۱**

کافی است یک‌بار به مرکز A و به شعاع ۳ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۲ دایره‌ای رسم کنیم. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید فقط نقطهٔ M روی هر دو دایره قرار دارد. پس فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد.



۴ — **۱**

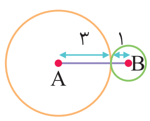
نقاط M و M′ روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ قرار دارند. با توجه به شکل مقابل و استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$۵^۲ = x^۲ + ۴^۲ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = ۳$$
$$\Rightarrow MM' = ۲x = ۲ \times ۳ = ۶$$

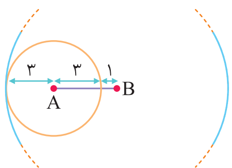
۵ — **۴**

همهٔ نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. هم‌چنین تمام نقاطی که به فاصلهٔ $۲a-۱$ از B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $۲a-۱$ واقع‌اند. در دو حالت این دو دایره فقط یک نقطهٔ مشترک خواهند داشت:



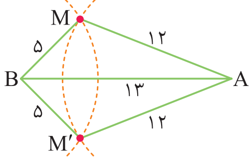
$$۲a - ۱ = ۱ \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$
$$۲a - ۱ = ۷ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

توجه کنید که دو دایره برای آن‌که یک نقطهٔ مشترک داشته باشند یا باید مماس داخل و یا مماس خارج باشند.



۶ — **۳**

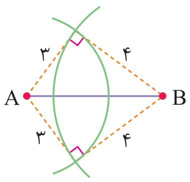
باید یک بار به مرکز A و شعاع ۱۲ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۵ دو دایره رسم کنیم. واضح است که این دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ M و M′ قطع می‌کنند. اگر M و M′ به A و B وصل کنیم، دو مثلث AMB و AM′B ایجاد می‌شوند که چون $۱۳^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲$ است، این مثلث‌ها قائم‌الزاویه می‌باشند. بنابراین مجموع مساحت‌های آن‌ها برابر است با:



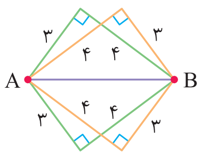
$$S = (\frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۲) \times ۲ = ۶۰$$

۷ — **۳**

ابتدا فرض می‌کنیم دنبال نقاطی هستیم که از A به فاصلهٔ ۳ و از B به فاصلهٔ ۴ می‌باشند. بنابراین دو نقطه با این ویژگی‌ها در صفحه معلوم می‌شود که شکل حاصل از وصل کردن این نقاط به A و B دو مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳، ۴ و ۵ می‌باشند.



حال ممکن است دو نقطه‌ای که پیدا می‌شوند به فاصلهٔ ۳ از B و به فاصلهٔ ۴ از A باشند، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر با طول اضلاع ۳، ۴ و ۵ نیز داریم. بنابراین مجموع مساحت چهار مثلث برابر است با:



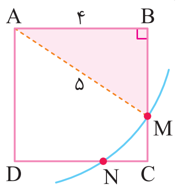
$$S = ۴ \times (\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴) = ۲۴$$

۸ — **۳**

می‌دانیم فاصلهٔ مرکز همهٔ دایره‌های گذرنده از دو نقطهٔ A و B تا این دو نقطه برابر شعاع دایره هستند، پس با هم برابرند. بنابراین مرکز دایره‌ها روی عمودمنصف ضلع AB و در نتیجه عمودمنصف ضلع CD قرار دارند.

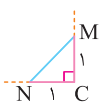
۹ — **۴**

مرکز دایره‌هایی به شعاع ۵ که همگی از رأس A می‌گذرند، به فاصلهٔ ۵ از A قرار دارند. بنابراین مرکز این دایره‌ها روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ هستند. به مرکز A و شعاع ۵ یک دایره رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی این دایره و مربع دو مرکز مطلوب هستند. در مثلث رنگی داریم:



$$۵^۲ = ۴^۲ + BM^۲ \Rightarrow BM^۲ = ۹ \Rightarrow BM = ۳$$
$$\Rightarrow CM = ۴ - ۳ = ۱$$

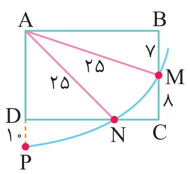
به طریق مشابه CN نیز برابر ۱ است. پس فاصلهٔ M و N برابر است با:



$$MN^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ \Rightarrow MN = \sqrt{۲}$$

۱۰ — **۱**

نقاط M، N و P روی دایره‌ای به مرکز A قرار دارند. با توجه به این‌که $BM = ۷$ و $MC = ۸$ است، پس عرض مستطیل برابر $AD = BC = BM + MC = ۷ + ۸ = ۱۵$ است.



همچنین در صورت سؤال گفته شده $DP = ۱۰$ است، پس شعاع دایره برابر است با:

$$AP = AD + DP = ۱۵ + ۱۰ = ۲۵$$

حال از A به N و M وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM داریم:

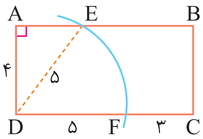
$$AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow 25^2 = AB^2 + 7^2 \Rightarrow AB^2 = 576$$
$$\Rightarrow AB = 24$$

بنابراین طول مستطیل برابر ۲۴ است. با فرض $NC = x$ ، $DN = 24 - x$ می‌شود و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADN به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 \Rightarrow 25^2 = 15^2 + (24 - x)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 48x + 176 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow NC = 4$$

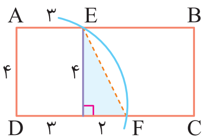
۱۱ ۴

فرض می‌کنیم دو نقطه به فاصلهٔ ۵ از رأس D قرار دارند، پس روی دایره‌ای به مرکز D و شعاع ۵ هستند. از D به E وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DAE داریم:



$$DE^2 = AE^2 + AD^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + AE^3$$
$$\Rightarrow AE = 3$$

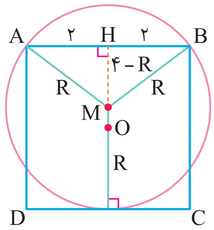
حال از E بر CD عمود می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی داریم:



$$EF^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow EF^2 = 20$$
$$\Rightarrow EF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۱۲ ۱

نقاط A، B و وسط CD روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع R قرار دارند. با توجه به شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBH داریم:



$$R^2 = 2^2 + (4 - R)^2$$
$$\Rightarrow R^2 = 4 + 16 + R^2 - 8R$$
$$\Rightarrow 8R = 20 \Rightarrow R = 2/5$$

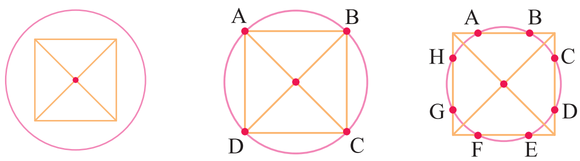
حال فاصلهٔ M تا نقطهٔ O مرکز مربع برابر است با:

$$OM = OH - MH \Rightarrow OM = 2 - (4 - R) = 2 - (4 - 2/5) = 0/5$$

نتیجه شعاع دایرهٔ گذرنده از دو رأس مربع و مماس بر ضلع دیگر آن همواره برابر $R = \frac{5}{8}a$ می‌باشد که a طول ضلع مربع است. اگر این رابطه را می‌دانستیم در سؤال بالا R برابر $\frac{5}{8} \times 4 = 2/5$ می‌شد.

۱۳ ۲

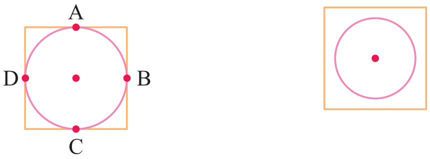
می‌دانیم تمام نقاطی که به فاصلهٔ معلوم L از مرکز مربع هستند، روی دایره‌ای قرار دارند که مرکز آن، همان مرکز مربع و شعاع آن L می‌باشد. با توجه به L و طول نصف قطر مربع و نصف ضلع مربع، حالات زیر را داریم:



$L <$ نصف قطر ⇐ ۸ نقطه

$L =$ نصف قطر ⇐ ۴ نقطه

$L >$ نصف قطر ⇐ صفر نقطه



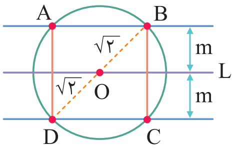
$L <$ نصف ضلع ⇐ هیچ نقطه

$L =$ نصف ضلع ⇐ ۴ نقطه

بنابراین با توجه به توضیحات فوق، m می‌تواند ۸ باشد.

۱۴ ۴

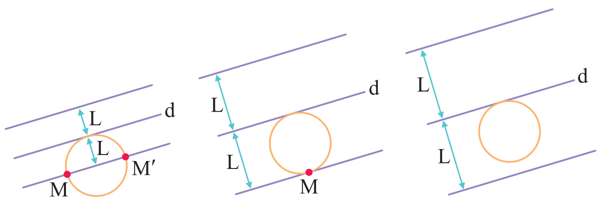
نقاطی که به فاصلهٔ $\sqrt{2}$ از نقطهٔ O قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{2}$ قرار دارند. از طرفی نقاطی که به فاصلهٔ m از خط L هستند روی دو خط به موازات L و به فاصلهٔ m از آن می‌باشند. چون ۴ نقطه وجود دارند که هر دو ویژگی را دارا می‌باشند (هر مربع دارای ۴ رأس می‌باشد.)، پس نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت زیر است. با توجه به شکل، طول قطر مربع برابر $2\sqrt{2}$ می‌باشد. پس طول هر ضلع آن ۲ بوده و داریم:



$$2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

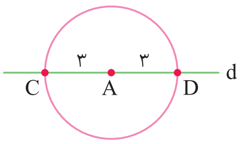
۱۵ ۴

نقاطی که به فاصلهٔ L از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ L از آن قرار دارند، بنابراین با توجه به صورت سؤال حالات زیر را داریم:

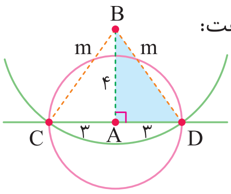


۱۶ ۳

نقاط C و D روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ قرار دارند. از آن‌جایی که نقاط C و D روی خط d نیز هستند، پس به‌صورت شکل مقابل می‌باشند:



حال چون همین دو نقطهٔ C و D به فاصلهٔ m از نقطهٔ B هستند، پس باید دایره به مرکز B و شعاع m نیز از نقاط C و D بگذرد. بنابراین به ناچار نقطهٔ B دقیقاً بالای (پایین) نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۴ از آن قرار دارد. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAD، اندازهٔ m برابر ۵ می‌باشد، زیرا اعداد ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند یا می‌توان گفت:

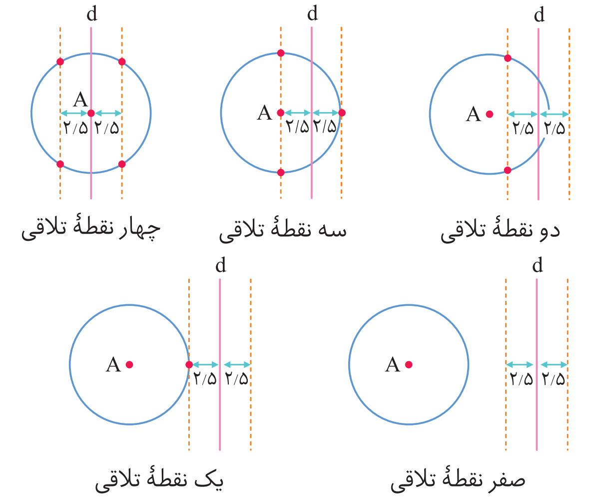


$$AD^2 + AB^2 = BD^2$$
$$\Rightarrow 9 + 16 = BD^2$$
$$\Rightarrow BD = m = 5$$

۱۷ ۴

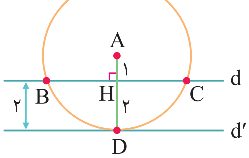
نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ هستند، روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۲/۵ در طرفین آن می‌باشند. از طرفی، نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ می‌باشند.

با توجه به وضعیت نقطهٔ A و خط d یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:



۱۸ **۳**

تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. حال این دایره باید با این دو خط در سه نقطه مشترک باشد، پس نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است. بنابراین داریم:

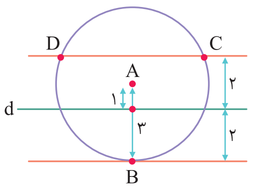


$$\text{مجموع فاصله‌های A از دو خط} = AH + AD = ۱ + ۳ = ۴$$

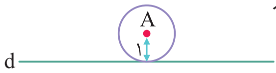
دقت کنید با توجه به این‌که فاصلهٔ دو خط از هم برابر ۲ و فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A برابر ۳ می‌باشد، نقطهٔ A نمی‌تواند بین دو خط قرار داشته باشد.

۱۹ **۱**

نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A هستند روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A قرار دارند. از طرفی، نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از خط d هستند روی دو خط موازی خط d و به فاصلهٔ ۲ از d می‌باشند.

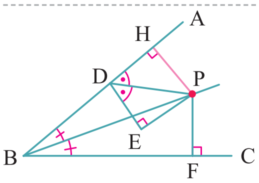


حال اشتراک این دو خط و دایره باید سه نقطه باشد. بنابراین نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است. همان‌طور که در شکل می‌بینید فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر ۱ است. پس یک نقطه روی خط d وجود دارد که به فاصلهٔ ۱ از نقطهٔ A می‌باشد.



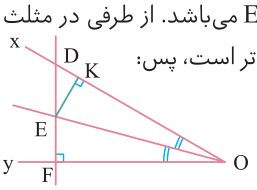
۲۰ **۲**

چون P روی نیمساز ABC است، پس مطابق شکل $PH = PF = ۵$ می‌باشد. از طرفی چون P روی نیمساز ADE نیز هست، پس $PH = PE = ۵$.



۲۱ **۱**

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. بنابراین در شکل مقابل $EF = EK$ می‌باشد. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ EKD، وتر از اضلاع قائمه بزرگ‌تر است، پس:

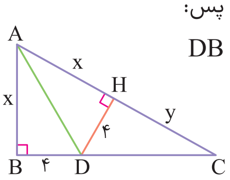


$$DE > EK \xRightarrow{EF = EK} DE > EF$$

۲۲ **۳**

نقطهٔ D بر روی نیمساز زاویهٔ BAC قرار دارد، پس:

$$DB = DH = ۴ \ , \ AB = AH = x$$



فرض می‌کنیم $HC = y$ باشد، با توجه به این‌که مساحت مثلث ADC، ۱۲ واحد بیشتر از مساحت مثلث ABD است. داریم:

$$\frac{۴x}{۲} + ۱۲ = \frac{(x+y) \times ۴}{۲} \Rightarrow \cancel{۴x} + ۲۴ = \cancel{۴x} + ۴y \Rightarrow y = ۶$$

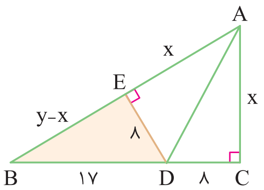
حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ DHC داریم:

$$CD^۲ = DH^۲ + HC^۲ \Rightarrow CD^۲ = ۱۶ + ۳۶ = ۵۲$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳}$$

۲۳ **۴**

فرض می‌کنیم $AC = x$ و $AB = y$ باشد. $y - x$ مدنظر سؤال است. از نقطهٔ D عمودی بر وتر مثلث رسم می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه برابر است و در نتیجه $DE = ۸$ و همچنین $AE = x$ خواهد بود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BED داریم:



$$BD^۲ = BE^۲ + DE^۲$$

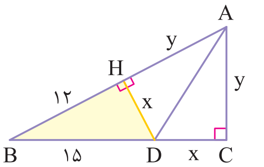
$$\Rightarrow ۱۷^۲ = (y - x)^۲ + ۸^۲$$

$$\Rightarrow (y - x)^۲ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow y - x = ۱۵$$

۲۴ **۲**

فرض می‌کنیم $DC = x$ و $AC = y$ باشد. از D بر AB عمود می‌کنیم، چون D روی نیمساز A می‌باشد، پس $DC = DH = x$ و $AH = AC = y$ است. با توجه به $AB - AC = ۱۲$، طول AB برابر $۱۲ + y$ به‌دست می‌آید، پس $BH = ۱۲$ خواهد بود. حال به کمک فیثاغورس در مثلث BHD داریم:



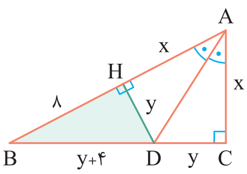
$$BD^۲ = HD^۲ + HB^۲$$

$$\Rightarrow ۱۵^۲ = x^۲ + ۱۲^۲ \Rightarrow x^۲ = ۸۱$$

$$\Rightarrow x = ۹ \Rightarrow DC = ۹$$

۲۵ **۱**

با فرض $AC = x$ و $DC = y$، مقادیر $AB = x + ۸$ و $BD = y + ۴$ به‌دست می‌آیند. از D بر AB عمود می‌کنیم، چون D روی نیمساز زاویهٔ A می‌باشد، پس $DH = DC = y$ و $AH = AC = x$ می‌باشند. به کمک فیثاغورس در مثلث BHD داریم:



$$BD^۲ = HD^۲ + HB^۲ \Rightarrow (y + ۴)^۲$$

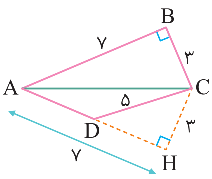
$$= y^۲ + ۸^۲ \Rightarrow y^۲ + ۸y + ۱۶$$

$$= y^۲ + ۶۴ \Rightarrow ۸y = ۴۸$$

$$\Rightarrow y = ۶ \Rightarrow DC = ۶$$

۲۶ **۳**

ضلع AD را امتداد داده و از C عمود CH را بر آن وارد می‌کنیم.



چون C روی نیمساز A است، پس $CB = CH = ۳$ و $AB = AH = ۷$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ CHD داریم:

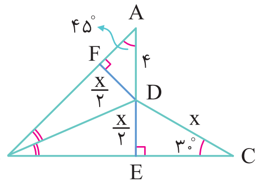
$CD^{۲}=CH^{۲}+DH^{۲} \Rightarrow ۲۵=۹+DH^{۲} \Rightarrow DH=۴$

بنابراین طول ضلع AD برابر است با: $AD=AH-DH=۷-۴=۳$

۲۷ **۲**

نیم‌نگاه

درفصل سوم خواهیم خواندکه درمثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌روبه زاویهٔ ۳۰°، برابر نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰°، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.



چون D روی نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ قرار دارد، پس فاصله‌اش تا BA و BC برابر است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC، DE ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس برابر نصف وتر یعنی $\frac{x}{۲}$ می‌باشد. همچنین مثلث DFA قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است $(\hat{A}=\hat{D}=۴۵^{\circ})$، بنابراین $AF=\frac{x}{۲}$ و داریم:

$AF^{۲}+DF^{۲}=AD^{۲} \Rightarrow (\frac{x}{۲})^{۲}+(\frac{x}{۲})^{۲}=۴^{۲}$

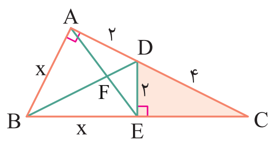
$\Rightarrow \frac{x^{۲}}{۴}+\frac{x^{۲}}{۴}=۱۶ \Rightarrow \frac{۲x^{۲}}{۴}=۱۶$

$\Rightarrow x^{۲}=۳۲ \Rightarrow x=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$

۲۸ **۲**

چون D روی نیمساز زاویهٔ ABC است، پس $DA=DE=۲$ و $BA=BE=x$ می‌باشند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC، ضلع DE نصف وتر DC است، پس $\hat{C}=۳۰^{\circ}$ و در نتیجه $B=۶۰^{\circ}$ است، بنابراین مثلث متساوی‌الساقین ABE با زاویهٔ رأس ۶۰° متساوی‌الاضلاع می‌باشد و این یعنی $AE=x$ است. حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های DEC و BAC داریم:

$DC^{۲}=DE^{۲}+CE^{۲} \Rightarrow ۱۶=۴+CE^{۲}$



$\Rightarrow CE^{۲}=۱۲ \Rightarrow CE=\sqrt{۱۲}$

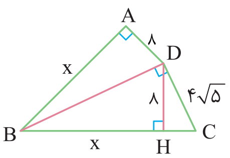
$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}$

$\Rightarrow (x+\sqrt{۱۲})^{۲}=x^{۲}+۳۶$

$\Rightarrow x^{۲}+۲\sqrt{۱۲}x+۱۲=x^{۲}+۳۶ \Rightarrow ۲\sqrt{۱۲}x=۲۴$

$\Rightarrow x=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳} \Rightarrow AE=۲\sqrt{۳}$

۲۹ **۴**



چون $A\hat{B}D=C\hat{B}D$ پس BD نیمساز زاویهٔ ABC است. از D بر BC عمود می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویهٔ ABC است، داریم:

$AD=DH=۸\ ,\ AB=BH=x$

به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ موجود داریم:

$BD^{۲}=AD^{۲}+AB^{۲} \Rightarrow BD^{۲}=۶۴+x^{۲}$

$CD^{۲}=CH^{۲}+DH^{۲} \Rightarrow (۴\sqrt{۵})^{۲}=CH^{۲}+۸^{۲}$

$\Rightarrow CH^{۲}=۱۶ \Rightarrow CH=۴$

$BC^{۲}=BD^{۲}+CD^{۲} \Rightarrow (x+۴)^{۲}=۶۴+x^{۲}+۸۰$

$\Rightarrow ۸x=۱۲۸ \Rightarrow x=۱۶$

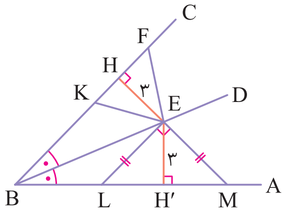
البته می‌توانستیم به جای فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC از رابطهٔ زیر استفاده کنیم: $DH^{۲}=BH \times HC \Rightarrow ۶۴=x \times ۴ \Rightarrow x=۱۶$

۳۰ **۲**

چون مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع KEF برابر $۳\sqrt{۳}$ است، پس طول ضلع مثلث برابر است با:

$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=۳\sqrt{۳} \Rightarrow a^{۲}=۱۲$

$\Rightarrow a=\sqrt{۱۲}$



حال ارتفاع مثلث KEF را به‌دست می‌آوریم:

$EH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \sqrt{۱۲}=۳$

با توجه به این‌که E نقطه‌ای روی نیمساز زاویهٔ B است، پس مطابق شکل، طول EH' نیز برابر ۳ می‌باشد. چون مثلث LEM قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع وارد بر وتر همان میانهٔ وارد بر وتر نیز هست و می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر می‌باشد. یعنی:

$EH'=۳ \Rightarrow LM=۲ \times ۳=۶$

۳۱ **۳**

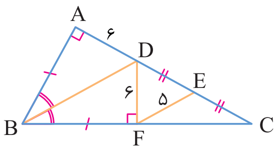
چون D روی نیمساز زاویهٔ B است، پس فاصله‌اش تا دو ضلع زاویهٔ B برابر است. هم‌چنین چون $AB=BF$ است، پس F پای عمودی است که از نقطهٔ D بر ضلع BC رسم می‌شود، بنابراین $DF=DA=۶$ خواهد بود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DFC، چون $DE=EC$، پس EF میانهٔ وارد بر وتر بوده که طول آن برابر نصف وتر است، بنابراین داریم:

$EF=\frac{۱}{۲}DC \Rightarrow ۵=\frac{۱}{۲}DC \Rightarrow DC=۱۰$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DFC داریم:

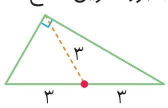
$۱۰^{۲}=۶^{۲}+FC^{۲} \Rightarrow FC^{۲}=۶۴$

$\Rightarrow FC=۸$



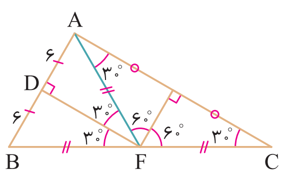
۳۲ **۳**

در مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها در وسط وتر قرار دارد و فاصلهٔ آن تا سه رأس مثلث برابر است. بنابراین طول بزرگ‌ترین ضلع که همان وتر می‌باشد برابر ۶ است.



۳۳ **۱**

با توجه به صورت تست، شکل مسأله به‌صورت مقابل است. حال کافی است از F به A وصل کنیم. چون F روی عمودمنصف اضلاع است، پس $FA=FB$ و $FA=FC$. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز زاویهٔ رأس نیز می‌باشد.

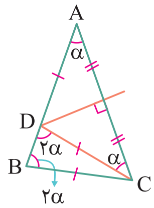


بنابراین زاویه‌ها مطابق شکل می‌باشند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است. پس:

$DA=۶ \Rightarrow FA=۱۲ \Rightarrow FA=FC=۱۲$

۳۴ ۴

شکل مسئله را رسم می‌کنیم. چون D روی عمودمنصف پاره‌خط AC قرار دارد، پس DA = DC می‌باشد، بنابراین در مثلث‌های متساوی‌الساقین ADC و BCD زاویه‌ها به صورت مقابل هستند. بنابراین داریم:

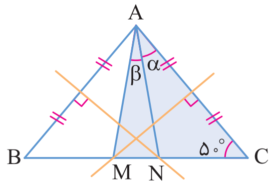


$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۲\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۵\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۳۶^\circ$$

۳۵ ۲

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس از $\hat{A}=۸۰^\circ$ نتیجه می‌شود $\hat{B}=\hat{C}=۵۰^\circ$. چون M روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس AMC متساوی‌الساقین می‌باشد. بنابراین $\alpha+\beta=۵۰^\circ$ است و در نتیجه زاویهٔ M در این مثلث برابر ۸۰° است. به طریق مشابه در مثلث متساوی‌الساقین BNA نیز $\hat{N}=۸۰^\circ$ می‌باشد. حال در مثلث AMN داریم:



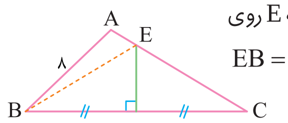
$$\beta+\hat{M}+\hat{N}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \beta+۸۰^\circ+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \beta=۲۰^\circ$$

۳۶ ۴

شکل مسئله را رسم می‌کنیم. چون نقطهٔ E روی عمودمنصف ضلع BC است، پس EB = EC می‌باشد و داریم:



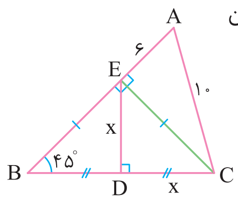
$$ABE\ \text{محیط}=AB+AE+\underbrace{EB}_{EC}=AB+AC=۸+۱۴=۲۲$$

۳۷ ۱

از E به C وصل می‌کنیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است، لذا مثلث CEA قائم‌الزاویه می‌باشد و داریم:

$$AE^۲+CE^۲=AC^۲ \Rightarrow ۶^۲+CE^۲=۱۰^۲ \Rightarrow CE=۸$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین CDE داریم:

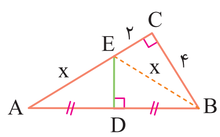


$$CD^۲+DE^۲=CE^۲ \Rightarrow x^۲+x^۲=۸^۲$$

$$\Rightarrow x^۲=۳۲ \Rightarrow x=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

۳۸ ۲

در شکل زیر عمودمنصف وتر، ضلع متوسط را در نقطهٔ E قطع کرده است. از E به B وصل می‌کنیم. چون E روی عمودمنصف ضلع AB است، پس EB = EA = x است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE داریم:

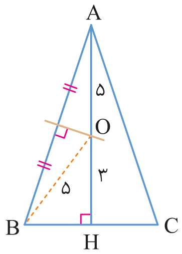


$$BE^۲=BC^۲+CE^۲ \Rightarrow x^۲=۴^۲+۲^۲$$

$$\Rightarrow x^۲=۲۰ \Rightarrow x=۲\sqrt{۵}$$

۳۹ ۴

شکل مسئله را رسم می‌کنیم. حال از O به B وصل می‌کنیم. چون O روی عمودمنصف AB است، پس OB = OA = ۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB داریم:



$$OB^۲=OH^۲+BH^۲ \Rightarrow ۲۵=۹+BH^۲$$

$$\Rightarrow BH=۴$$

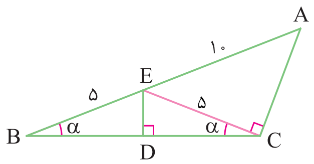
حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم:

$$AB^۲=AH^۲+BH^۲ \Rightarrow AB^۲=۶۴+۱۶=۸۰$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

۴۰ ۳

شکل مسئله به‌صورت زیر است. از E به C وصل می‌کنیم. چون E روی عمودمنصف BC است، پس EB = EC = ۵ می‌باشد. چون $\hat{C}-\hat{B}=۹۰^\circ$ است با فرض $\hat{B}=\alpha$، زاویهٔ ECD نیز برابر α است و در نتیجه زاویهٔ $ECA=۹۰^\circ$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ECA داریم:



$$AE^۲=EC^۲+AC^۲$$

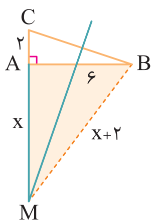
$$\Rightarrow ۱۰۰=۲۵+AC^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲=۷۵$$

$$\Rightarrow AC=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$$

۴۱ ۲

در مثلث شکل زیر، عمودمنصف وتر، امتداد ضلع کوچک‌تر را در نقطهٔ M قطع کرده است. طول MA فاصلهٔ M تا نزدیک‌ترین رأس مثلث است. با فرض MA = x، چون M روی عمودمنصف BC قرار دارد، پس MC = MB و در نتیجه MB = x + ۲ خواهد بود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MAB داریم:

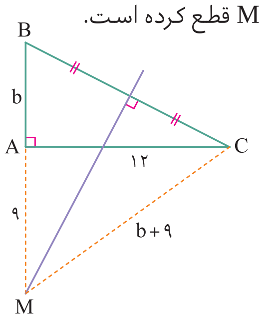


$$MB^۲=MA^۲+AB^۲ \Rightarrow (x+۲)^۲=x^۲+۳۶$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x+۴=x^۲+۳۶ \Rightarrow ۴x=۳۲ \Rightarrow x=۸$$

۴۲ ۳

شکل مسئله را رسم می‌کنیم. عمودمنصف بزرگ‌ترین ضلع یعنی وتر مثلث، امتداد ضلع کوچک‌تر را در نقطهٔ M قطع کرده است.



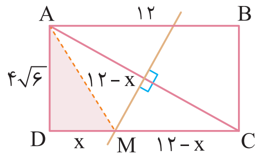
فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث طول MA است، پس MA = ۹ می‌باشد. چون M روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد، MC = MB = b + ۹ می‌باشد. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MAC داریم:

$$(b+۹)^۲=۹^۲+۱۲^۲ \Rightarrow (b+۹)^۲=۲۲۵$$

$$\Rightarrow b+۹=۱۵ \Rightarrow b=۶$$

۴۳ **۳**

در مستطیل زیر، عمودمنصف قطر AC را رسم می‌کنیم تا طول مستطیل را در نقطهٔ M قطع کند. با فرض $MD = x$، اندازهٔ $MC = 12 - x$ خواهد بود.



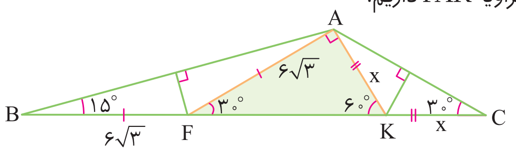
از M به A وصل می‌کنیم، چون M روی عمودمنصف پاره‌خط AC است، پس $MA = MC = 12 - x$. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ MDA داریم:

$$MA^2 = MD^2 + DA^2 \Rightarrow (12-x)^2 = x^2 + (4\sqrt{6})^2$$
$$\Rightarrow 144 - 24x + x^2 = x^2 + 96 \Rightarrow 24x = 48 \Rightarrow x = 2$$
$$\Rightarrow MD = 2\ ,\ MC = 10$$

بنابراین نقطهٔ M طول مستطیل را به نسبت $\frac{10}{2} = 5$ قطع می‌کند.

۴۴ **۳**

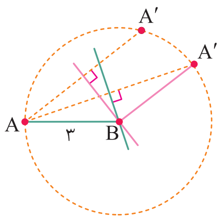
ابتدا شکل مسئله را رسم کرده و از F و K به رأس A وصل می‌کنیم. چون F و K روی عمودمنصف‌های AB و AC هستند، پس $FB = FA = 6\sqrt{3}$ و $KA = KC = x$ می‌باشند. زاویهٔ AFK زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین AFB است، پس $A\hat{F}K = 30°$ و هم‌چنین زاویهٔ AKF زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین AKC است، لذا $A\hat{K}F = 60°$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ FAK داریم:



$$\sin 60° = \frac{6\sqrt{3}}{FK} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow FK = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$$

۴۵ **۳**

وقتی نقطهٔ A نسبت به هر خط گذرنده از نقطهٔ B قرینه می‌شود تا نقطهٔ A' به‌دست آید، آن‌گاه آن خط، عمودمنصف پاره‌خط AA' است. چون B نقطه‌ای روی عمودمنصف پاره‌خط AA' است، پس $BA = BA'$ می‌باشد. بنابراین نقطهٔ A' روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $BA = 3$ قرار دارد.



۴۶ **۳**

مرکز دایرهٔ گذرا بر سه رأس مثلث، محل تلاقی عمودمنصف‌های آن می‌باشد. چون این نقطه بیرون مثلث است، پس مثلث منفرجه‌الزاویه می‌باشد که در ۳ با یک مثلث منفرجه‌الزاویه مواجهیم:

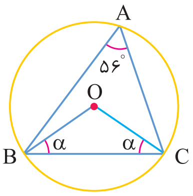
$30° + 40° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 110° \Rightarrow$ مثلث منفرجه‌الزاویه است.

۴۷ **۴**

به مرکز O و شعاع OB یک دایره رسم می‌کنیم. چون فاصلهٔ نقطهٔ O تا سه رأس مثلث یکسان است، پس حتماً دایره از رأس‌های A و C نیز می‌گذرد. حال از O به C وصل می‌کنیم، مثلث BOC متساوی‌الساقین است، زیرا $OB = OC$ می‌باشد و داریم:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}\ ,\ B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow B\hat{O}C = 2\hat{A} = 2\times 56° = 112°$$

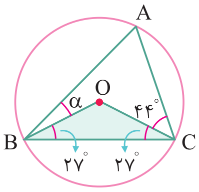
در مثلث BOC داریم:



$$\alpha + 112° + \alpha = 180°$$
$$\Rightarrow 2\alpha = 68° \Rightarrow \alpha = 34°$$

۴۸ **۳**

دایره به مرکز O و شعاع OB از رأس‌های دیگر مثلث نیز می‌گذرد. در ضمن مثلث OBC متساوی‌الساقین است، پس:



$$\overset{\Delta}{OBC}: \hat{O} + 27° + 27° = 180° \Rightarrow \hat{O} = 126°$$

از طرفی O زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان BC و A زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان BC است، پس:

$$\hat{O} = 2\hat{A} \Rightarrow 126° = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 63°$$

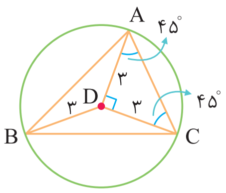
حال در مثلث ABC داریم:

$$63° + (44° + 27°) + (27° + \alpha) = 180°$$
$$\Rightarrow 161° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 19°$$

۴۹ **۲**

زوایای A و D را در مثلث‌های ABC و BDC به‌دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A} + (20° + 25°) + (20° + 45°) = 180° \Rightarrow \hat{A} = 70°$$
$$\overset{\Delta}{BDC}: 20° + \hat{D} + 20° = 180° \Rightarrow \hat{D} = 140°$$



چون $\hat{D} = 2\hat{A}$، پس $B\hat{D}C$، زاویهٔ مرکزی و $B\hat{A}C$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به یک کمان مشترک در دایره می‌باشند و این یعنی D محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC است.

پس $DA = DB = DC = 3$ می‌باشند و این یعنی مثلث CDA، متساوی‌الساقین است که در نتیجه قائم‌الزاویه نیز می‌شود. بنابراین $AC = 3\sqrt{2}$ است.

۵۰ **۲**

با توجه به رابطهٔ $4AB = 3AC$، فرض می‌کنیم $AB = 3k$ و $AC = 4k$ باشند. بنابراین داریم:

$$4k - 3k < 7 < 4k + 3k \Rightarrow \begin{cases} k < 7 \\ 7k > 7 \Rightarrow k > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 1 < k < 7 \Rightarrow 3 < 3k < 21 \Rightarrow 3 < AB < 21 \Rightarrow$ ۱۷ مقدار

۵۱ **۲**

حدود x را تعیین می‌کنیم:

$$5 - 2 < 2x - 1 < 5 + 2 \Rightarrow 3 < 2x - 1 < 7 \Rightarrow 2 < x < 4$$
$$\xrightarrow{\text{x صحیح است.}} x = 3$$

بنابراین به‌ازای $x = 3$ طول اضلاع مثلث ۲، ۵ و ۵ خواهد بود که مثلثی متساوی‌الساقین است.

۵۲ **۲**

حدود محیط را معلوم می‌کنیم تا بیشترین مقدار صحیح آن معلوم شود:

$$6 - 3/5 < 5x + 1 < 6 + 3/5 \Rightarrow 2/5 < 5x + 1 < 9/5$$
$$\Rightarrow 2/5 + 6 + 3/5 < \underbrace{(5x+1) + 6 + 3/5}_{\text{محیط}} < 9/5 + 6 + 3/5$$
$$\Rightarrow 12 < \text{محیط} < 19 \Rightarrow \max(\text{محیط}) = 18$$

۵۳ **۱**

باید مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد. پس:

$$\begin{cases}(۴x-۴)+(x+۷)>۶x\Rightarrow x<۳\\(۴x-۴)+(۶x)>x+۷\Rightarrow x>\frac{۱۱}{۹}\\(x+۷)+(۶x)>۴x-۴\Rightarrow x>-\frac{۱۱}{۳}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\frac{۱۱}{۹}<x<۳$$

۵۴ **۱**

ابتدا حدود x را برای این‌که مثلث ABC قابل رسم باشد، تعیین می‌کنیم.

$$|(۴x-۱)-(۲x+۳)|<۸<(۴x-۱)+(۲x+۳)$$

$$\Rightarrow|۲x-۴|<۸<۶x+۲$$

$$\begin{cases}|۲x-۴|<۸\Rightarrow -۸<۲x-۴<۸\Rightarrow -۴<۲x<۱۲\\\Rightarrow -۲<x<۶\\۶x+۲>۸\Rightarrow ۶x>۶\Rightarrow x>۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}۱<x<۶$$

حال حدود x را برای قابل رسم بودن مثلث $A'B'C'$ تعیین می‌کنیم:

$$|(۳x-۲)-(۲x+۵)|<۴<(۳x-۲)+(۲x+۵)$$

$$\Rightarrow|x-۷|<۴<۵x+۳$$

$$\begin{cases}|x-۷|<۴\Rightarrow -۴<x-۷<۴\Rightarrow ۳<x<۱۱\\۵x+۳>۴\Rightarrow ۵x>۱\Rightarrow x>\frac{۱}{۵}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}۳<x<۱۱$$

برای قابل رسم بودن هر دو مثلث باید اشتراک حدود به‌دست آمدهٔ x برای رسم هر دو مثلث را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases}۱<x<۶\\۳<x<۱۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}۳<x<۶$$

$$\xrightarrow{x\ \text{صحیح است.}}x=۴\ ,\ x=۵\Rightarrow$$ دو مقدار

۵۵ **۴**

نکته اگر a، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، به‌طوری‌که $a\ge b\ge c$، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases}a\ge b\\a\ge c\end{cases}\Rightarrow ۲a\ge b+c\Rightarrow ۳a\ge\underbrace{a+b+c}_{\text{محیط}}\Rightarrow a\ge\frac{\text{محیط}}{۳}$$

$$a<b+c\Rightarrow ۲a<a+b+c\Rightarrow a<\frac{\text{محیط}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\text{محیط}}{۳}\le\text{بزرگ‌ترین ضلع}<\frac{\text{محیط}}{۲}$$

با توجه به مطلب فوق داریم:

$$\frac{۳۰}{۳}\le\text{بزرگ‌ترین ضلع}<\frac{۳۰}{۲}\Rightarrow ۱۰\le\text{بزرگ‌ترین ضلع}<۱۵$$

$\Rightarrow$ با توجه به گزینه‌ها بزرگ‌ترین ضلع ۱۵ نیست.

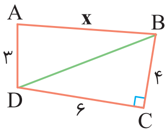
۵۶ **۲**

فرض می‌کنیم $CD=DE=x$ و $AD=y$ است. در مثلث ADE، $x+y>۴$ است. در مثلث ABC نیز $x+y<\underbrace{۷+۸}_{۱۵}$ می‌باشد.

پس: $۴<x+y<۱۵\Rightarrow ۴<AC<۱۵\Rightarrow$ ۱۰ مقدار

۵۷ **۲**

ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD طول قطر BD را به‌دست می‌آوریم:



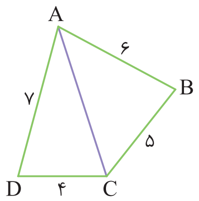
$$BD^۲=۴^۲+۶^۲=۵۲\Rightarrow BD=\sqrt{۵۲}$$

حال در مثلث ABD داریم:

$$BD-AD<AB<BD+AD\Rightarrow\sqrt{۵۲}-۳<x<\sqrt{۵۲}+۳$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۵۲}=۷/\cdots}۴/\cdots<x<۱۰/\cdots\qquad\xrightarrow{x\ \text{صحیح است.}}\max(x)=۱۰$$

۵۸ **۳**



قطر AC را رسم می‌کنیم.

در مثلث ABC داریم:

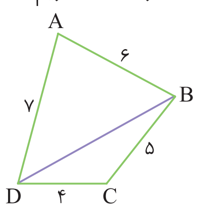
$$۶-۵<AC<۵+۶\Rightarrow ۱<AC<۱۱\quad(۱)$$

حال در مثلث ADC می‌توان گفت:

$$۷-۴<AC<۷+۴\Rightarrow ۳<AC<۱۱\quad(۲)$$

با توجه به نامساوی‌های (۱) و (۲) داریم: $۳<AC<۱۱$

این بار قطر BD را رسم می‌کنیم. در مثلث‌های DAB و DCB داریم:



$$\begin{cases}۷-۶<BD<۷+۶\\۵-۴<BD<۵+۴\end{cases}\Rightarrow ۱<BD<۹\quad(۳)$$

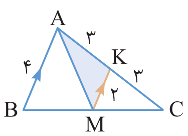
بنابراین می‌توان گفت:

$$\begin{cases}۳<AC<۱۱\\۱<BD<۹\end{cases}\Rightarrow ۴<AC+BD<۲۰$$

پس بیشترین مقدار صحیح $AC+BD$ برابر ۱۹ می‌باشد.

۵۹ **۲**

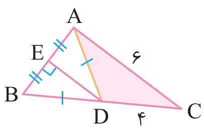
در شکل زیر از M به موازات AB رسم می‌کنیم. بنا بر تعمیم قضیهٔ تالس $MK=۲$ و $AK=CK=۳$ می‌شود. در مثلث رنگی داریم:



$$۳-۲<AM<۳+۲\Rightarrow ۱<AM<۵$$

بنابراین مجموع مقادیر صحیح برای AM برابر $۲+۳+۴=۹$ می‌باشد.

۶۰ **۲**



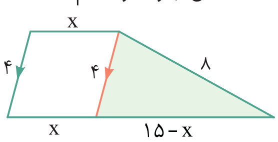
شکل مسئله را رسم می‌کنیم. از D به A وصل کرده، چون D روی عمودمنصف AB است، پس $DB=DA$ می‌باشد. در مثلث ADC داریم:

$$۶-۴<AD<۶+۴\Rightarrow ۲<AD<۱۰$$

بنابراین بیشترین مقدار صحیح AD برابر ۹ است. چون $BD=AD$ می‌باشد، پس بیشترین مقدار BC برابر $۱۳=۹+۴$ است.

۶۱ **۳**

باید نامساوی مثلثی را روی مثلث رنگ‌شدهٔ شکل زیر اجرا کنیم:



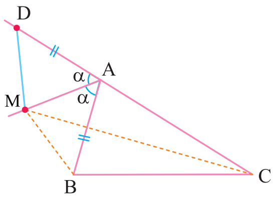
$$۸-۴<۱۵-x<۸+۴$$

$$\Rightarrow ۴-۱۵<-x<۱۲-۱۵$$

$$\Rightarrow ۳<x<۱۱$$

۶۲ **۱**

روی امتداد پاره‌خط AC، پاره‌خط AD را به اندازهٔ AB جدا می‌کنیم. مثلث‌های AMD و AMB همنهشت هستند، بنابراین $MB = MD$ می‌باشد، در مثلث MDC، $MD + MC > DC$ است. چون $MB = MD$ و $AD = AB$ می‌باشند، داریم:



$$MD + MC > DC$$
$$\Rightarrow MB + MC > AB + AC$$
$$\Rightarrow \frac{MB + MC}{AB + AC} > ۱$$

۶۳ **۱**

همان‌طور که در رسم عمودمنصف گفته شد، برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB کافی است دو دایره با شعاع برابر و بیشتر از نصف طول AB به مراکز A و B رسم کنیم تا یکدیگر را در نقاط M و M' قطع کنند. خط گذرنده از M و M' عمودمنصف پاره‌خط AB است.

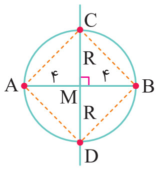
۶۴ **۲**

ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند (اکنون M وسط پاره‌خط AB است). حال اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، حتماً از M می‌گذرد و بر خط d عمود است. می‌دانیم برای رسم عمودمنصف نیاز به رسم دو دایره داریم. پس در مجموع نیاز به رسم سه دایره خواهیم داشت.

۶۵ **۲**

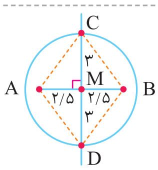
کافی است عمودمنصف ضلع BC را رسم کنیم تا نقطهٔ M وسط ضلع BC مشخص شود. پاره‌خط AM میانهٔ وارد بر ضلع BC است. می‌دانیم برای رسم عمودمنصف ضلع BC نیاز به زدن دو کمان داریم.

۶۶ **۲**



می‌دانیم در مربع، قطرها با هم برابر و عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین با توجه به شکل مقابل $۲R = ۸$ می‌باشد، پس $R = ۴$ است.

۶۷ **۴**



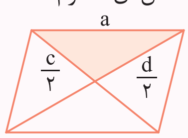
مطابق شکل مقابل، چهارضلعی ACBD یک لوزی به قطرهای ۵ و ۶ می‌باشد، زیرا قطرها عمودمنصف یکدیگرند.

۶۸ **۲**

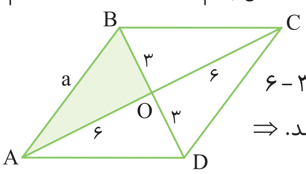
فقط یک مربع با طول قطر d وجود دارد، زیرا در مربع قطرها با هم برابر و بر هم عمودند. اما در لوزی و متوازی‌الاضلاع طول قطر دیگر را نمی‌دانیم و در مستطیل زاویهٔ بین دو قطر معلوم نیست.

۶۹ **۳**

نکته برای این‌که ببینیم یک چهارضلعی قابل رسم است یا نه، ابتدا با اطلاعات داده‌شده، چهارضلعی را رسم‌شده فرض می‌کنیم. حال در چهارضلعی یک مثلث پیدا می‌کنیم که اطلاعات سه جزء مستقل آن معلوم است. اگر آن مثلث قابل رسم بود، چهارضلعی نیز قابل رسم است. مثلاً برای آن‌که یک متوازی‌الاضلاع به ضلع a و قطرهای c و d قابل رسم باشد، باید a، $\frac{c}{۲}$ و $\frac{d}{۲}$ در نامساوی مثلثی صدق کنند.



فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع ABCD به صورت زیر باشد. در ضمن می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگر هستند. اگر مثلث AOB قابل رسم باشد، متوازی‌الاضلاع ABCD نیز قابل رسم است. بدین ترتیب که ابتدا مثلث AOB را رسم می‌کنیم. سپس AO و BO را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس‌های C و D به‌دست آیند، حال متوازی‌الاضلاع ABCD مشخص می‌شود. می‌دانیم برای آن‌که مثلث AOB قابل رسم باشد، باید داشته باشیم:

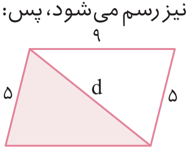


$$۶ - ۳ < a < ۶ + ۳ \Rightarrow ۳ < a < ۹$$

با توجه به گزینه‌ها a نمی‌تواند ۱۰ باشد. $\Leftarrow$

۷۰ **۳**

فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع مطلوب به صورت زیر باشد، واضح است که اگر مثلث رنگ‌شده قابل رسم باشد، متوازی‌الاضلاع نیز رسم می‌شود، پس:

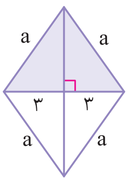


$$۹ - ۵ < d < ۵ + ۹ \Rightarrow ۴ < d < ۱۴$$

با توجه به گزینه‌ها d نمی‌تواند ۴ باشد. $\Leftarrow$

۷۱ **۱**

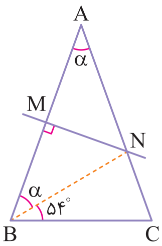
فرض می‌کنیم لوزی رسم‌شده به صورت مقابل باشد. اگر مثلث رنگ‌شده که طول سه ضلع آن را در اختیار داریم، قابل رسم شد، لوزی نیز قابل رسم است، پس:



$$a + a > ۶ \Rightarrow ۲a > ۶ \Rightarrow a > ۳$$

با توجه به گزینه‌ها a نمی‌تواند ۳ باشد. $\Leftarrow$

۷۲ **۳**

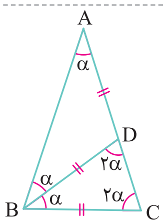


ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم.
چون نقطهٔ N روی عمودمنصف ضلع AB است، پس مثلث ANB متساوی‌الساقین بوده و زاویه‌های زیرساق با هم برابرند. از طرفی مثلث ABC نیز متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C} = \alpha + ۵۴^\circ$ می‌باشد.
حال در مثلث ABC داریم:

$$\alpha + \alpha + ۵۴^\circ + \alpha + ۵۴^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha = ۷۲^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴^\circ$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ NMB یکی از زاویه‌های حاده ۲۴° است، پس زاویهٔ حادهٔ دیگر یعنی زاویهٔ MNB برابر $۹۰^\circ - ۲۴^\circ = ۶۶^\circ$ می‌باشد.

۷۳ **۳**

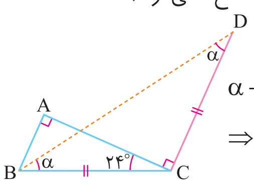


ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. با فرض $\hat{A} = \alpha$، زاویهٔ D، زاویهٔ خارجی مثلث ABD بوده و اندازهٔ آن برابر ۲α است:

$$۲\alpha + ۲\alpha + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵\alpha = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$

۷۴ **۱**

ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم (توجه کنید اگر CD را از سمت مخالف رسم می‌کردیم، BD ضلع AC را قطع نمی‌کرد.). مثلث BCD متساوی‌الساقین است، پس:



$$\alpha + \alpha + (۹۰^\circ + ۲۴^\circ) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۶۶^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha = ۳۳^\circ \Rightarrow D\hat{B}C = ۳۳^\circ$$