

انتگرالگو

تعمیرات  
تمرین امتحان

# هندسه دهیم

حمیدرضا ملکی

پاسخ‌های  
تشریحی

سوالات  
امتحانی

سوالات  
تکمیلی

سوالات  
تالیفی

درس‌نامه  
سؤال محور

## پیشگفتار

### به نام خدا

این کتاب بر اساس محتوای کتاب درسی هندسه ۱ پایه دهم نوشته شده است و سه ویژگی مهم دارد:

۱ مطالب کتاب درسی را کاملاً پوشش می‌دهد. شما می‌توانید حل تشریحی همه فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی هندسه ۱ را در آن ببینید.

۲ شما را برای امتحان نهایی کاملاً آماده می‌کند. در پایان هر فصل، تعدادی سؤال آورده شده‌اند که بر اساس امتحانات نهایی بارمبندی و پاسخ داده شده‌اند. همچنین سه امتحان شبیه‌ساز امتحان نوبت اول و سه امتحان شبیه‌ساز امتحان نهایی (نوبت دوم) طراحی شده‌اند که با بررسی همه آن‌ها، کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی برای شما آسان می‌شود.

۳ توانایی حل مسئله شما را افزایش می‌دهد.

بی‌شک بسیاری از شما در برخورد با مسئله‌های هندسه با این پرسش مواجه شده‌اید که چطور آن را حل کنم؟ در تألیف این کتاب، هدف اصلی‌ام این بوده است که مهارت حل مسئله شما در هندسه افزایش یابد. برای این منظور، علاوه بر مسئله‌های کتاب درسی، سؤالاتی آورده شده‌اند که به شما در رسیدن به این هدف کمک می‌کنند. همچنین بسیاری از مسئله‌ها و تمرین‌های این کتاب با روش‌های گوناگون حل شده‌اند تا با ایده‌ها و تکنیک‌های مختلف حل مسئله‌های هندسه آشنا شوید. در پایان هر فصل، برای دانش‌آموزان علاقه‌مند چند مسئله تکمیلی وجود دارد. با حل این مسئله‌ها، چالش‌های بیشتری را تجربه می‌کنید. حتماً به آن‌ها فکر کنید.

ترتیب درس‌های این کتاب بر اساس کتاب درسی هندسه ۱ است. البته در ابتدای کتاب، درسی با عنوان یادآوری آورده شده است. در این درس با بیان چند مسئله و تمرین، مطالب دوره اول متوسطه مرور شده‌اند. حتماً برای این درس وقت بگذارید و به آن مسلط شوید. چند توصیه برای افزایش توانایی حل مسئله در هندسه به شما داریم:

۱ شکل مسئله‌ها را خوب و دقیق رسم کنید. رسم شکل زیبا و دقیق به شما در یافتن ایده حل مسئله کمک می‌کند.

۲ به مسئله‌ها خوب فکر کنید. ما در این کتاب یک شعار را دنبال می‌کنیم. حل نکردن اشکال ندارد ولی فکر نکردن اشکال دارد.

خیلی مهم است که به اندازه کافی روی مسائل فکر کنید. اگر هم حل نشد، هیچ اشکالی ندارد.

۳ از پاسخنامه خیلی کم استفاده کنید. سعی کنید تا جای ممکن خودتان مسئله‌ها را حل کنید. اگر نتوانستید، باز هم حل کامل را از پاسخنامه نخوانید، بلکه از آن راهنمایی بگیرید.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزم در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس و دکتر ابوالفضل علی‌بمانی برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

حمیدرضا ملکی

## فهرست مطالب

### فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

- یادآوری ..... ۲
- تمرین‌های تشریحی ..... ۶
- درس اول: ترسیم‌های هندسی ..... ۸
- تمرین‌های تشریحی ..... ۱۶
- درس دوم: استدلال ..... ۱۹
- تمرین‌های تشریحی ..... ۳۴
- مسائل تکمیلی ..... ۳۷
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ..... ۳۸

### فصل سوم: چندضلعی‌ها

- درس اول: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها ..... ۹۲
- تمرین‌های تشریحی ..... ۱۰۵
- درس دوم: مساحت و کاربردهای آن ..... ۱۰۸
- تمرین‌های تشریحی ..... ۱۱۹
- مسائل تکمیلی ..... ۱۲۲
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ..... ۱۲۴

### فصل چهارم: تجسم فضایی

- درس اول: خط، نقطه و صفحه ..... ۱۳۰
- تمرین‌های تشریحی ..... ۱۳۸
- درس دوم: تفکر تجسمی ..... ۱۴۰
- تمرین‌های تشریحی ..... ۱۴۹
- مسائل تکمیلی ..... ۱۵۱
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ..... ۱۵۲
- امتحان نوبت دوم (۱) ..... ۱۵۶
- امتحان نوبت دوم (۲) ..... ۱۵۸
- امتحان نوبت دوم (۳) ..... ۱۶۰

### فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

- درس اول: نسبت و تناسب در هندسه ..... ۴۲
- تمرین‌های تشریحی ..... ۴۷
- درس دوم: قضیهٔ تالس ..... ۴۹
- تمرین‌های تشریحی ..... ۵۵
- درس سوم: تشابه مثلث‌ها ..... ۵۷
- تمرین‌های تشریحی ..... ۶۵
- درس چهارم: کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها ..... ۶۹
- تمرین‌های تشریحی ..... ۷۴
- مسائل تکمیلی ..... ۷۸
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ..... ۸۰
- امتحان نوبت اول (۱) ..... ۸۴
- امتحان نوبت اول (۲) ..... ۸۶
- امتحان نوبت اول (۳) ..... ۸۸

### فصل پنجم: پاسخ‌های تشریحی

#### فصل اول

- پاسخ تمرین‌های تشریحی ..... ۱۶۴
- پاسخ مسائل تکمیلی ..... ۱۷۱
- پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ..... ۱۷۳

### فصل دوم

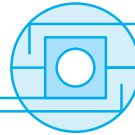
- پاسخ تمرین‌های تشریحی ..... ۱۷۸
- پاسخ مسائل تکمیلی ..... ۱۹۱
- پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ..... ۱۹۴
- پاسخنامهٔ امتحان نوبت اول (۱) ..... ۱۹۸
- پاسخنامهٔ امتحان نوبت اول (۲) ..... ۱۹۹
- پاسخنامهٔ امتحان نوبت اول (۳) ..... ۲۰۰

### فصل سوم

- پاسخ تمرین‌های تشریحی ..... ۲۰۲
- پاسخ مسائل تکمیلی ..... ۲۱۲
- پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ..... ۲۱۴

### فصل چهارم

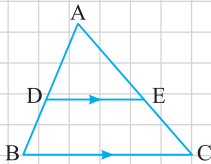
- پاسخ تمرین‌های تشریحی ..... ۲۱۹
- پاسخ مسائل تکمیلی ..... ۲۲۶
- پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ..... ۲۲۷
- پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۱) ..... ۲۳۰
- پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۲) ..... ۲۳۱
- پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۳) ..... ۲۳۳



یکی از مهم‌ترین قضیه‌های هندسه ۱، قضیه تالس است. در این درس قضیه تالس، نتایج قضیه تالس، عکس قضیه تالس، تعمیم قضیه تالس و قضیه تالس در ذوزنقه بیان و ثابت می‌شوند.

### قضیه ۱ قضیه تالس

اگر در شکل مقابل  $DE \parallel BC$ ، آن‌گاه  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$



ما در اینجا قضیه تالس را با نماد ریاضی بیان کرده‌ایم. بیان کلامی آن بدین صورت است: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها تشکیل یک تناسب را می‌دهند.

**اثبات:** اثبات این قضیه با استفاده از مساحت است. در واقع از لم ۱ و لم ۲ که در درس قبل گفته شدند، استفاده می‌شود. در ابتدا دو بار از لم ۱ استفاده می‌کنیم:

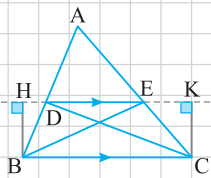
$$\triangle EAB, E \text{ گره: } \frac{AD}{DB} = \frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}, \quad \triangle DAC, D \text{ گره: } \frac{AE}{EC} = \frac{S_{ADE}}{S_{CDE}}$$

با مقایسه حکم قضیه و دو تناسب بالا، کافی است ثابت کنیم  $S_{BDE} = S_{CDE}$ . این همان لم ۲ است.

در حقیقت،

$$\begin{cases} S_{BDE} = \frac{1}{2} BH \cdot DE \\ S_{CDE} = \frac{1}{2} CK \cdot DE \end{cases} \Rightarrow S_{BDE} = S_{CDE}$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow BH = CK$$



### مسئله ۱۱

کتاب درسی

در شکل مقابل  $DE \parallel BC$ ، اگر  $AD = 1$ ،  $DB = 3$  و  $AE = \frac{1}{8}$ ، آن‌گاه طول پاره‌خط  $AC$  را به دست آورید.

**راه‌حل:** کافی است از قضیه تالس استفاده کنیم.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{8}}{EC} \Rightarrow EC = \frac{2}{4}$$

$$AC = AE + EC = \frac{1}{8} + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

در نتیجه

به قضیه تالس که در بالا بیان شد، جز به جزء از بالا نیز گفته می‌شود. این قضیه، صورت‌های دیگری نیز دارد که آن‌ها را به صورت نتایج قضیه تالس بیان می‌کنیم.

**نتیجه ۱:** (نتایج قضیه تالس) اگر در شکل مقابل  $DE \parallel BC$ ، آن‌گاه

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

(الف) جزء به کل از بالا:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{CE}{CA}$$

(ب) جزء به کل از پایین:

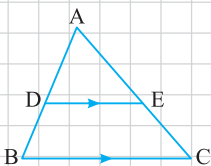
**اثبات:** اثبات این دو مورد بسیار ساده است. اگر به یاد داشته باشید، در مسئله ۵ بیان شده‌اند. کافی است

از قضیه تالس و ویژگی‌های تناسب استفاده کنیم. چون  $DE \parallel BC$ ، پس طبق قضیه تالس  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

در نتیجه

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \begin{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب صورت در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \xrightarrow{\text{ترکیب مخرج در صورت}} \frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \end{cases}$$

تناسب اول نتیجه (الف) و معکوس تناسب دوم نتیجه (ب) است.



اکنون می‌خواهیم قضیه تالس را تعمیم دهیم و به یک قضیه فوق‌العاده مهم برسیم. در واقع تعمیم قضیه تالس اساس اثبات قضیه‌های مربوط به تشابه دو مثلث است که در درس سوم در مورد آن‌ها صحبت می‌کنیم.

### قضیه ۲: تعمیم قضیه تالس

اگر در شکل مقابل  $DE \parallel BC$ ، آن‌گاه

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

در اینجا تعمیم قضیه تالس با نماد ریاضی بیان شده است. آیا می‌توانید آن را به صورت کلامی بیان کنید؟ این‌گونه بیان می‌شود: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند. حتماً به اثبات تعمیم قضیه تالس فکر کنید. مهم نیست که نتوانید آن را ثابت کنید، اما مهم است که خوب به آن فکر کنید. شاید برخی از شما بگویند این را با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توان به راحتی ثابت کرد. این اثبات نادرست است، زیرا قضیه‌های تشابه دو مثلث از تعمیم قضیه تالس نتیجه می‌شوند و نمی‌توان تعمیم قضیه تالس را با استفاده از تشابه مثلث‌ها ثابت کرد. از توضیح بیشتر درباره تشابه در این بخش صرف نظر می‌کنیم و در درس سوم به‌طور مفصل در مورد آن صحبت می‌کنیم. اما اثبات درست تعمیم قضیه تالس به صورت زیر است:

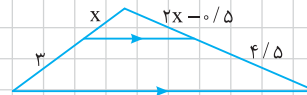
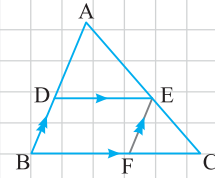
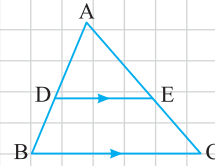
**اثبات:** در نتیجه قضیه تالس قسمت (الف)، ثابت کردیم

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{جزء به کل از بالا}$$

پس کافی است ثابت کنیم  $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ . برای این منظور از E خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا BC را در نقطه F قطع کند. در این صورت چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه  $DE = BF$  (در واقع پاره‌خط DE را روی BC منتقل کردیم). اکنون از نتیجه قضیه تالس در حالت  $EF \parallel AB$  استفاده می‌کنیم (از رأس C قضیه را به کار می‌بریم).

$$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به کل از پایین}} \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \xrightarrow{DE=BF} \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

خب تا اینجا چند قضیه گفتیم و ثابت کردیم. احتمالاً حوصله‌تان سر رفته است. کمی استراحت کنید و برگردید که می‌خواهیم چند مسئله با هم حل کنیم. 😊



### مسئله ۱۲

در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.

**راه‌حل:** با توجه به قضیه تالس،

$$\frac{x}{3} = \frac{2x - 0.5}{4/5} \Rightarrow 4/5x = 6x - 1/5 \Rightarrow 1/5x = 1/5 \Rightarrow x = 1$$

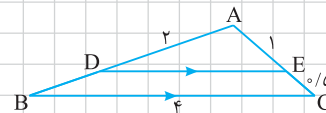
### مسئله ۱۳

با توجه به اندازه‌های روی شکل مقابل، طول پاره‌خط‌های BD و DE را به دست آورید.

**راه‌حل:** توجه کنید که

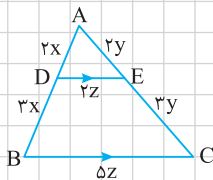
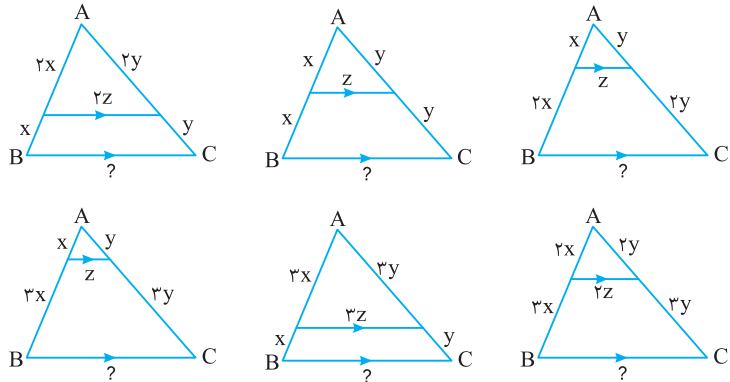
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{2}{BD} = \frac{1}{0.5} \Rightarrow BD = 1$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{DE}{4} \Rightarrow DE = \frac{8}{3}$$



مسئله ۱۴

در هر کدام از شکل‌های زیر درستی قضیه تالس و نتایج قضیه تالس و تعمیم قضیه تالس را بررسی کنید و در هر کدام طول ضلع BC را برحسب Z به دست آورید.



۳z	۲z	۳z
۴z	۴z	۵z

**راه‌حل** سعی کنید به همه شکل‌های این مسئله مسلط شوید. ما در اینجا فقط شکل سمت راست از ردیف پایین را بررسی می‌کنیم. در این شکل تناسب جزء به جزء از بالا (قضیه تالس) به صورت

$$\frac{2x}{3x} = \frac{2y}{3y} = \frac{z}{5z}$$

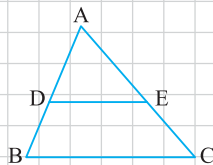
$$\frac{2x}{5x} = \frac{2y}{5y} = \frac{z}{BC} \Rightarrow \frac{2z}{BC} = \frac{z}{5} \Rightarrow BC = 5z$$

با توجه به جایگاه شکل‌ها، پاسخ‌های قسمت‌های دیگر مطابق جدول مقابل است:

مسئله بالا کمک می‌کند که قضیه تالس را به خوبی یاد بگیرید. سعی کنید خودتان چند مثال دیگر بنویسید و در هر کدام نسبت‌ها و طول‌های پاره‌خط‌ها را حساب کنید. این کار بسیار اهمیت دارد.

قضیه ۳ عکس قضیه تالس

اگر در شکل مقابل  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ، آن‌گاه  $DE \parallel BC$ .



ما در اینجا عکس قضیه تالس را با نماد ریاضی بیان کرده‌ایم. آیا می‌توانید آن را به صورت کلامی نیز بیان کنید؟ بیان کلامی آن بدین صورت است: اگر خطی دو ضلع مثلث را قطع کند و روی آن‌ها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظر متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است. قبول داریم که بیان کلامی آن سخت است. اما سعی کنید آن را یاد بگیرید. ☺

**اثبات:** از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد، یعنی  $DE \not\parallel BC$ . از

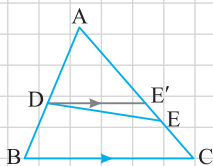
نقطه D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه E' قطع کند. در نتیجه

$$DE' \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$$

توجه کنید که طبق فرض  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ . در نتیجه،

$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب صورت در مخرج}} \frac{AE'}{AE' + E'C} = \frac{AE}{AE + EC} \Rightarrow \frac{AE'}{AC} = \frac{AE}{AC}$$

بنابراین  $AE' = AE$ ، که تناقض است، زیرا E و E' دو نقطه متمایزند.





**مسئله ۱۵** قضیه میان خط در مثلث

مطابق شکل مقابل وسطهای دو ضلع مثلث به هم وصل شده‌اند. ثابت کنید  $MN \parallel BC$  و  $MN = \frac{BC}{2}$ .

**راه حل** با توجه به فرض هر دو نسبت  $\frac{AM}{MB}$  و  $\frac{AN}{NC}$  برابر یک هستند. پس

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC$$

اکنون با استفاده از تعمیم قضیه تالس به دست می‌آید

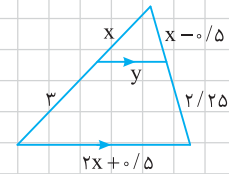
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \xrightarrow{AB=2AM} \frac{1}{2} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$$

در فصل سوم از قضیه میان خط در مثلث استفاده می‌کنیم.

**مسئله ۱۶**

کتاب درسی

با توجه به شکل مقابل مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.



**راه حل** بنابر قضیه تالس،  $\frac{x}{3} = \frac{x-0.5}{2/25} \Rightarrow 2/25x = 3x - 1/5 \Rightarrow 0.75x = 1/5 \Rightarrow x = 2$

و طبق تعمیم قضیه تالس،  $\frac{x}{x+3} = \frac{y}{2x+0.5} \xrightarrow{x=2} \frac{2}{5} = \frac{y}{4.5} \Rightarrow y = \frac{9}{5} = 1.8$

مسئله بعدی خیلی مهم است.

**مسئله ۱۷**

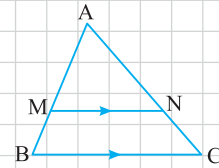
کتاب درسی

با توجه به شکل مقابل درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید:

(الف)  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

(ب)  $\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA} = \frac{MN}{BC}$

(پ)  $\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA} = \frac{BC}{MN}$



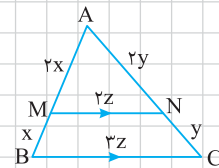
**راه حل** در هر سه عبارت بالا، دو نسبت اول با هم برابرند ولی با سومی برابر نیستند. به عنوان مثال نقض هر سه عبارت را در شکل مقابل بررسی می‌کنیم:

(الف)  $\frac{2x}{x} = \frac{2y}{y} \neq \frac{2z}{3z}$

(ب)  $\frac{x}{3x} = \frac{y}{3y} \neq \frac{2z}{3z}$

(پ)  $\frac{x}{3x} = \frac{y}{3y} \neq \frac{3z}{2z}$

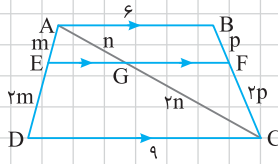
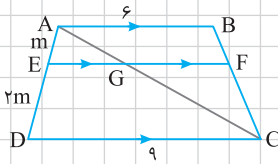
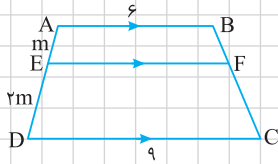
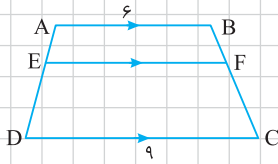
پس هر سه عبارت نادرست‌اند.



موافقت که کمی چالش مسئله‌ها را بیشتر کنیم؟ تا اینجا همه مسئله‌ها با یک قضیه تالس حل می‌شدند. اکنون می‌خواهیم سه مسئله ترکیبی مطرح کنیم. سعی کنید به خوبی به هر مسئله فکر کنید.

کتاب درسی

در شکل مقابل  $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{2}$  . با توجه به اندازه‌های روی شکل طول پاره‌خط EF را به دست آورید.



**راه‌حل** گام اول در پاسخ به این مسئله، انتقال اطلاعات مسئله به شکل است. در فرض مسئله، تناسب

$\frac{AE}{ED} = \frac{1}{2}$  وجود دارد که با انتخاب یک پارامتر مانند  $m$  می‌توان این فرض را به شکل منتقل کرد.

گام دوم، تمرکز روی شکل و یافتن اطلاعات جدید است. یافتن اطلاعات جدید ممکن است زمان‌بر باشد ولی باید صبور باشید. در شکل بالا خطوط موازی وجود دارند و قصد داریم که از قضیه تالس استفاده کنیم. به نظرتان چطور می‌توان در شکل تغییراتی ایجاد کرد که از قضیه تالس بتوانیم استفاده کنیم؟ سه روش در اینجا پیشنهاد می‌کنیم.

**روش اول:** یکی از قطرهای دوزنقه را رسم می‌کنیم.

اکنون اطلاعات جدیدی به مسئله اضافه می‌شوند. با تمرکز روی شکل، دو قضیه تالس در مثلث‌های ADC و CAB مشاهده می‌شوند. توجه کنید که قضیه تالس در مثلث CAB از طرف رأس C است. پس می‌توان نوشت

$$\triangle ADC: EG \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC} \Rightarrow \frac{AG}{GC} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle CAB: GF \parallel AB \Rightarrow \frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow \frac{CF}{FB} = 2$$

اکنون با پارمترهای  $n$  و  $p$  اطلاعات را به شکل منتقل می‌کنیم و سعی می‌کنیم طول قطعه‌های EG و GF را حساب کنیم. برای این منظور از تعمیم قضیه تالس استفاده می‌کنیم:

$$\triangle ADC: EG \parallel DC \Rightarrow \frac{EG}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EG}{9} = \frac{m}{3m} = \frac{1}{3} \Rightarrow EG = 3$$

$$\triangle CAB: GF \parallel AB \Rightarrow \frac{GF}{AB} = \frac{CG}{CA} \Rightarrow \frac{GF}{6} = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \Rightarrow GF = 4$$

در نتیجه  $EF = EG + GF = 3 + 4 = 7$ .

**روش دوم:** دو ساق AD و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند.

آیا می‌توانید سه تا قضیه تالس در شکل ببینید؟ از دو تا از آنها استفاده می‌کنیم و به جواب مسئله می‌رسیم. چنین می‌توان نوشت

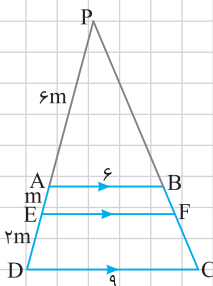
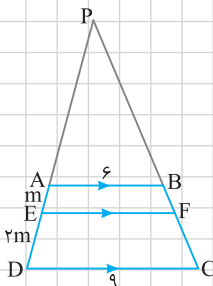
$$\triangle PDC: AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{PA}{PD} = \frac{AB}{CD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

حال با استفاده از تفصیل صورت در مخرج داریم

$$\frac{PA}{PD - PA} = \frac{2}{3 - 2} \Rightarrow \frac{PA}{AD} = 2 \Rightarrow PA = 2AD = 6m$$

دوباره اطلاعات به دست آمده را به شکل منتقل می‌کنیم. اکنون کافی است از تعمیم قضیه تالس یک‌بار دیگر استفاده کنیم:

$$\triangle PEF: AB \parallel EF \Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{PA}{PE} \Rightarrow \frac{6}{EF} = \frac{6m}{7m} = \frac{6}{7} \Rightarrow EF = 7$$



**روش سوم:** از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا EF را در G و CD را در H قطع کند. در شکل چند متوازی‌الاضلاع می‌بینید؟ آیا یک قضیه تالس در شکل مشاهده می‌کنید؟

از متوازی‌الاضلاع‌ها استفاده می‌کنیم و اطلاعات جدید را به شکل اضافه می‌کنیم:

$$AB = EG = DH = ۶, \quad HC = DC - DH = ۳$$

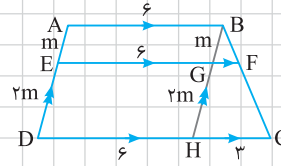
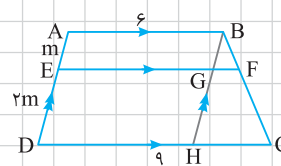
$$AE = BG = m, \quad ED = GH = ۲m$$

اکنون طبق تعمیم قضیه تالس،

$$\triangle BHC : GF \parallel HC \Rightarrow \frac{GF}{HC} = \frac{BG}{BH} \Rightarrow \frac{GF}{۳} = \frac{m}{۳m} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow GF = ۱$$

در نتیجه  $EF = EG + GF = ۶ + ۱ = ۷$ .

این مسئله را به‌طور مفصل توضیح دادیم و سعی کردیم که روش‌ها و ایده‌های حل آن را بررسی کنیم. ممکن است شما هم روش‌های دیگری برای حل آن ارائه کنید که خیلی ارزشمند است.



### مسئله ۱۹ قضیه تالس در ذوزنقه

کتاب درسی

در شکل مقابل، ثابت کنید

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

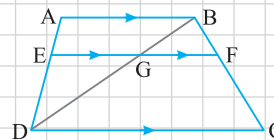
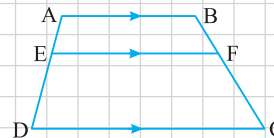
**راه‌حل**

سعی کنید قبل از دیدن راه‌حل، خودتان آن را اثبات کنید.

قطر BD را رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه G قطع کند. در این صورت ذوزنقه به دو مثلث تقسیم می‌شود که در هر کدام می‌توانیم قضیه تالس را به کار ببریم:

$$\triangle DAB : EG \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{EA} = \frac{DG}{GB}, \quad \triangle BCD : GF \parallel DC \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{BG}{GD}$$

توجه کنید که  $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$  معکوس یکدیگرند. پس  $\frac{BG}{GD} = \frac{DG}{GB}$



حکم مسئله بالا را می‌توانید با امتداد دادن ساق‌های ذوزنقه نیز ثابت کنید. حتی می‌توانید حکم این مسئله را با یک‌بار استفاده از قضیه تالس نیز ثابت کنید. برای این منظور کافی است از B خطی موازی AD رسم کنید. حتماً سعی کنید این دو روش را تکمیل کنید.

### مسئله ۲۰

با توجه به شکل مقابل، مقدار x را به دست آورید.

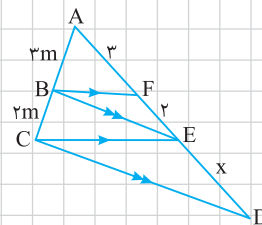
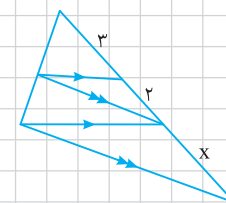
**راه‌حل**

کلید حل این سؤال توجه کامل به شکل است. آیا می‌توانید دو تا قضیه تالس در شکل ببینید؟ آیا دو جفت پاره‌خط موازی در شکل دو تا قضیه تالس را به ذهن‌تان نمی‌آورند؟ با یافتن دو قضیه تالس در شکل، بیش از نیمی از راه‌حل مسئله را پیموده‌اید. کافی است که نسبت‌ها را با هم مقایسه کنید و اطلاعات جدید را به شکل منتقل کنید. بدین صورت که

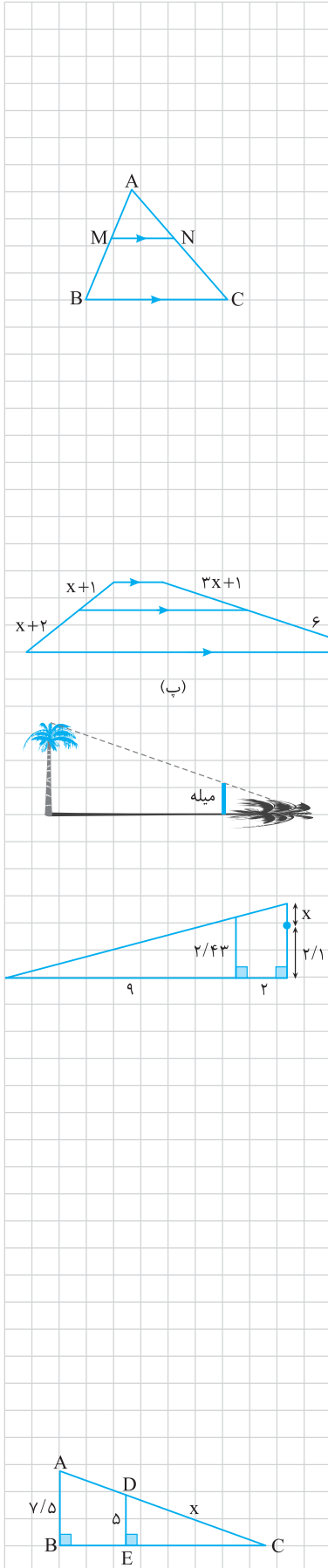
$$\triangle ACE : BF \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FE} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow AB = ۳m, \quad BC = ۲m$$

$$\triangle ACD : BE \parallel CD \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED} = \frac{۳m}{۲m} = \frac{۵}{x} \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۳}$$

در مسئله بالا ایده انتقال نسبت‌ها انجام شد. در واقع نسبت روی پاره‌خط AE به پاره‌خط AC منتقل شد و سپس از AC به AD انتقال یافت.



تمرین‌های تشریحی



۵۳ در شکل مقابل پاره خط MN موازی BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را

مشخص کنید:

کتاب درسی

(ب)  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

(الف)  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

(ت)  $\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{BC}$

(پ)  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

(ج)  $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$

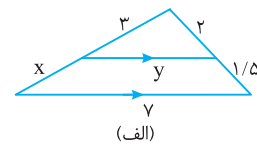
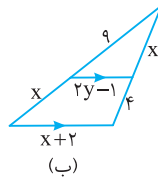
(ث)  $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC} = \frac{MN}{BC}$

(ح)  $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC}$

(چ)  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

کتاب درسی

۵۴ با توجه به شکل‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید.



۵۵ شکل مقابل یک کاربرد از قضیه تالس برای محاسبه بلندی درخت است. اگر طول سایه

درخت ۶۰m، طول سایه میله شاخص ۳m و ارتفاع این میله ۱m باشد، بلندی

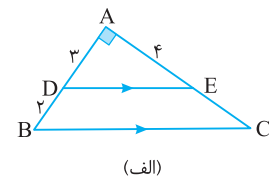
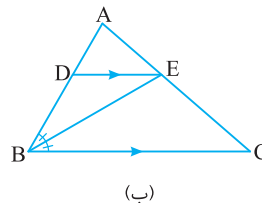
درخت چند متر است؟ (میله و درخت را عمود بر زمین در نظر بگیرید.)

کتاب درسی

کتاب درسی

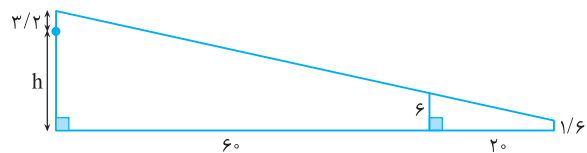
۵۶ با توجه به اندازه‌های روی شکل مقدار x را به دست آورید.

۵۷ در شکل‌های زیر طول ضلع BC را محاسبه کنید.



کتاب درسی

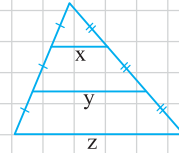
۵۸ با توجه به اندازه‌های داده شده در شکل زیر، مقدار h را به دست آورید.



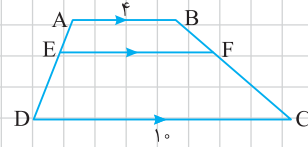
۵۹ در شکل مقابل  $BC = 18$ . با توجه به سایر اندازه‌های روی شکل، مقدار x را

به دست آورید.

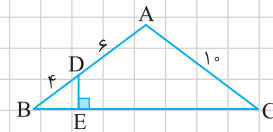
۶۰. با توجه به شکل مقابل، ثابت کنید  $x + y = z$ .



۶۱. در ذوزنقه مقابل  $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{2}$ . طول پاره خط EF را به دست آورید.



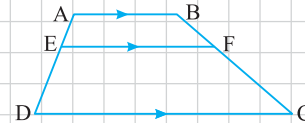
۶۲. در شکل مقابل DE بر BC عمود است،  $AD = 6$ ،  $DB = 4$ ،  $AC = 10$  و  $BC = 16$ . طول پاره خط DE را به دست آورید.



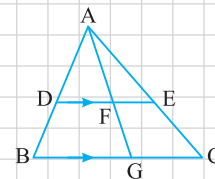
۶۳. با توجه به شکل مقابل کدامیک از عبارتهای زیر درست است؟

(الف)  $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$       (ب)  $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$

(پ)  $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{DC}$       (ت)  $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} = \frac{AB}{DC}$

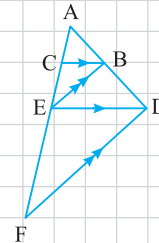


۶۴. با توجه به شکل مقابل ثابت کنید  $\frac{DF}{FE} = \frac{BG}{GC}$ .

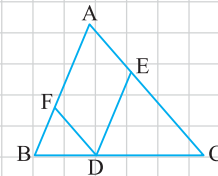


۶۵. در شکل مقابل ثابت کنید طول پاره خط AE واسطه هندسی طول پاره خطهای AC و AF است.

کتاب درسی

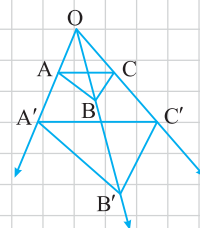


۶۶. در شکل مقابل AFDE متوازی الاضلاع است. ثابت کنید  $1 = \frac{DE}{AB} + \frac{DF}{AC}$ .



۶۷. در شکل مقابل  $AB \parallel A'B'$  و  $BC \parallel B'C'$ . ثابت کنید  $AC \parallel A'C'$ .

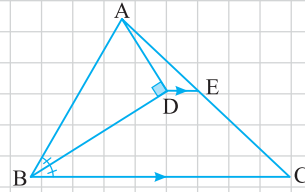
کتاب درسی



### مسائل تکمیلی

صفحات پاسخ: ۱۹۱ تا ۱۹۳

۱- مطابق شکل از A بر نیمساز زاویه B عمود رسم شده است. اگر  $AB = ۹۶\text{cm}$  و  $BC = ۱۵۶\text{cm}$ ، طول پاره خط DE چند سانتی متر است؟

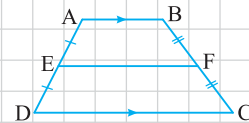


۲- قضیه میان خط در ذوزنقه در ذوزنقه مقابل وسطهای دو ساق را به هم وصل کرده ایم.

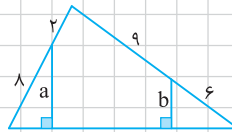
ثابت کنید:

الف) EF موازی دو قاعده است.

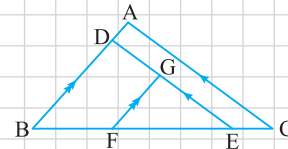
ب)  $EF = \frac{AB + CD}{۲}$



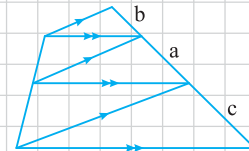
۳- با توجه به اندازه‌های شکل مقابل، مقدار  $\frac{a}{b}$  را به دست آورید.



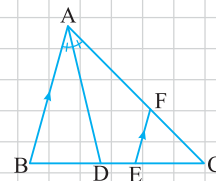
۴- اگر در شکل مقابل  $AD = ۲$ ،  $BF = ۲EC$  و  $FE = ۳EC$ ، طول پاره خط GF چقدر است؟



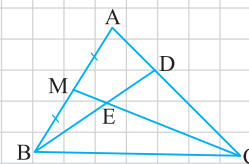
۵- با توجه به شکل مقابل ثابت کنید a واسطه هندسی b و c است.



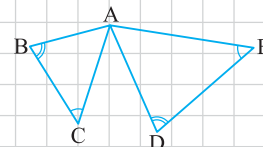
۶- مطابق شکل مقابل، اگر  $BD = ۲DE$ ،  $AB = ۲۴$  و  $AF = ۲۰$ ، آن گاه طول پاره خط CF چقدر است؟



۷- اگر در شکل روبه‌رو  $AM = MB$  و  $CD = ۲AD$ ، مقدار  $\frac{BE}{ED}$  را به دست آورید.



۸- در شکل روبه‌رو  $\hat{B} = \hat{D}$  و  $\hat{C} = \hat{E}$  ثابت کنید  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ .



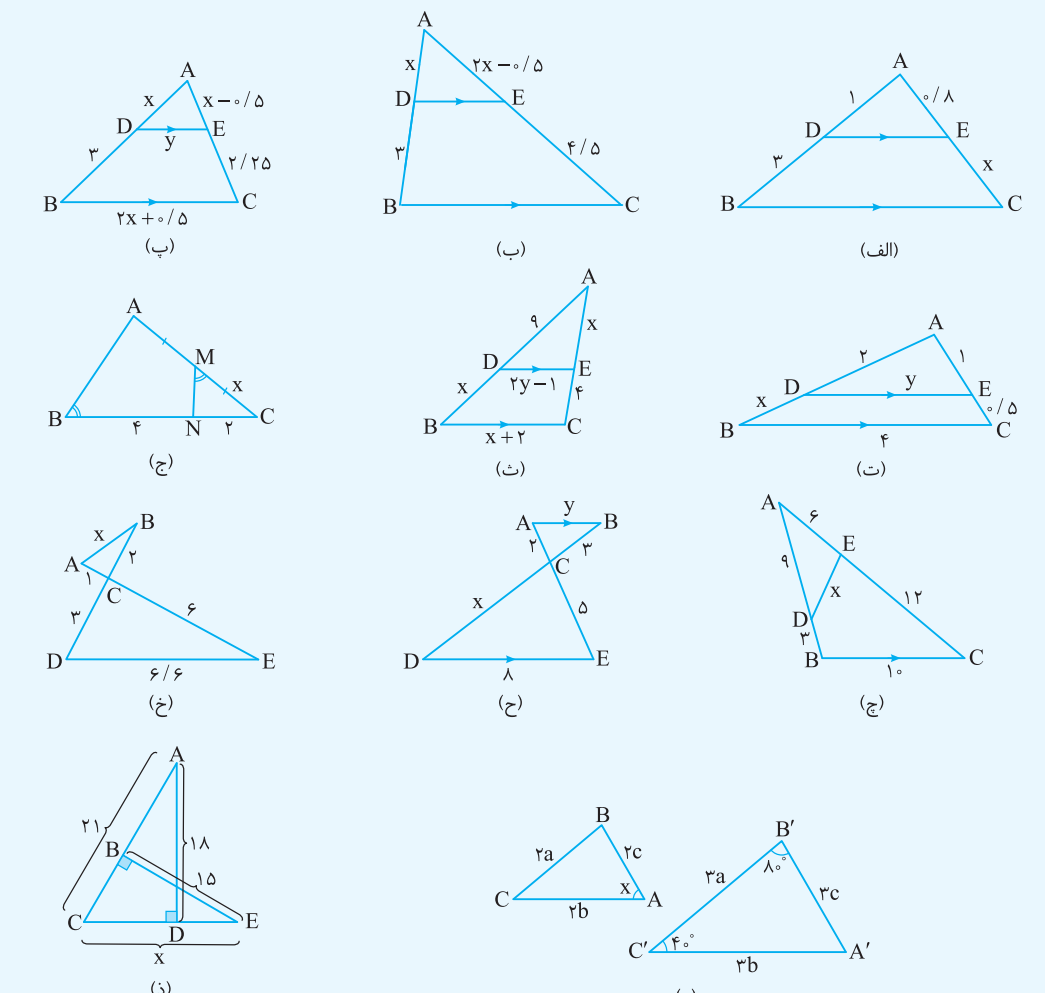
## سؤالات امتحانی بارمبندی شده

صفحات پاسخ: ۱۹۴ تا ۱۹۷

بارم	سؤالات	ردیف
۴	<p>درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است.</p> <p>(ب) هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد می‌شوند.</p> <p>(پ) واسطه هندسی دو عدد ۸ و ۱۰ برابر ۹ است.</p> <p>(ت) قضیه تالس یک قضیه دوشرطی است.</p> <p>(ث) با توجه به شکل مقابل،</p> <p>(a) <math>\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}</math></p> <p>(b) <math>\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA}</math></p> <p>(c) <math>\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA} = \frac{MN}{BC}</math></p> <p>(d) <math>\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA}</math></p> <p>(ج) هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.</p> <p>(چ) با توجه به شکل مقابل،</p> <p>(a) <math>AB^2 = BH \cdot HC</math></p> <p>(b) <math>AB \cdot BC = AH \cdot BH</math></p> <p>(c) <math>AH^2 = BH \cdot HC</math></p> <p>(d) <math>AC^2 = CH \cdot CB</math></p> <p>(ه) هر سه مثلث شکل، دوبه‌دو متشابه‌اند.</p> <p>(ح) هرگاه دو مثلث متشابه باشد، نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی نسبت مساحت‌های آن‌هاست.</p> <p>(خ) هر دو مثلث منتظم، با هم متشابه‌اند.</p>	۱
۷	<p>جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) با توجه به شکل مقابل،</p> <p><math>S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \times \dots = \frac{1}{2} CE \times \dots</math></p> <p>(ب) در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ..... وارد بر آن‌ها برابر است.</p> <p>(پ) هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ..... که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده‌اند.</p> <p>(ت) اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ..... آن‌هاست.</p> <p>(ث) اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آن‌ها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها ..... هستند.</p> <p>(ج) اگر <math>\frac{a}{b} = \frac{b}{c}</math>، آن‌گاه b را ..... و a و c می‌نامند.</p> <p>(چ) با توجه به شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت مثلث ABC برابر ..... است.</p>	۲

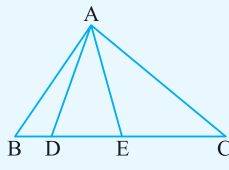
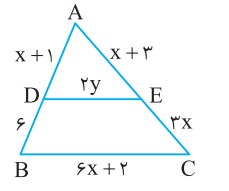
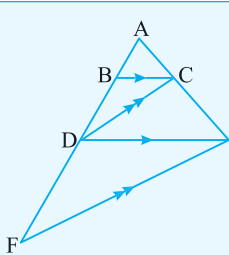
	<p>(ح) با توجه به شکل مقابل،</p> <p>(a) <math>\frac{AD}{DB} = \dots\dots\dots</math></p> <p>(b) <math>\frac{BD}{BA} = \dots\dots\dots</math></p> <p>(c) <math>\frac{AD}{AB} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots</math></p> <p>(d) <math>\frac{CE}{EA} = \dots\dots\dots</math></p> <p>(خ) با توجه به شکل مقابل،</p> <p>(a) <math>\frac{AM}{MD} = \dots\dots\dots</math></p> <p>(b) <math>\frac{DM}{DA} = \dots\dots\dots</math></p> <p>(د) اگر خطی موازی یکی از ضلع‌های مثلثی، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی ..... است.</p> <p>(ذ) هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و ..... باشند، دو مثلث متشابه‌اند.</p> <p>(ر) با توجه به شکل مقابل،</p> <p>(a) <math>AB^2 = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots</math></p> <p>(b) <math>AH^2 = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots</math></p> <p>(c) <math>AC^2 = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots</math></p> <p>(d) <math>AH \times BC = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots</math></p> <p>(ز) اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر k باشد، نسبت اندازه‌های هر دو میانه متناظر مساوی ..... است.</p> <p>(ژ) هرگاه دو چندضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی ..... و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ..... است.</p> <p>(س) هر دو n ضلعی منتظم، با هم ..... هستند.</p>
<p>۲/۲۵</p>	<p>جاهای خالی را با عددهای مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) واسطه هندسی دو عدد ۳ و ۱۲ برابر ..... است.</p> <p>(ب) اگر <math>\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}</math>، آن‌گاه <math>x+y</math> مساوی ..... است.</p> <p>(پ) با توجه به شکل مقابل <math>\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}</math> برابر ..... است.</p> <p>(ت) اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر ۹ باشد، نسبت طول‌های ارتفاع‌های متناظر آن‌ها مساوی ..... است.</p> <p>(ث) اگر نسبت محیط‌های دو چندضلعی متشابه برابر ۴ باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی ..... است.</p> <p>(ج) اندازه‌های محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۲۵ سانتی‌متر است. اگر مساحت مثلث بزرگ ۱۲۵ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، ..... سانتی‌متر مربع است.</p> <p>(چ) نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه <math>\frac{9}{16}</math> است. اگر محیط یکی از آن‌ها ۱۲ واحد باشد، محیط دیگری ..... یا ..... است.</p> <p>(ح) اندازه‌های اضلاع یک ده‌ضلعی را چهار برابر می‌کنیم، بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت ده‌ضلعی ..... برابر می‌شود.</p>
<p>۱/۵</p>	<p>قضیه تالس در ذوزنقه را بیان و ثابت کنید.</p>
<p>۱/۵</p>	<p>با استفاده از قضیه تالس و با توجه به شکل مقابل موارد زیر را ثابت کنید.</p> <p>(الف) <math>\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}</math></p> <p>(ب) <math>\frac{BD}{BA} = \frac{CE}{CA}</math></p>
<p>۱/۵</p>	<p>(الف) با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، قضیه فیثاغورس را ثابت کنید.</p> <p>(ب) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دوشرطی بیان کنید.</p>

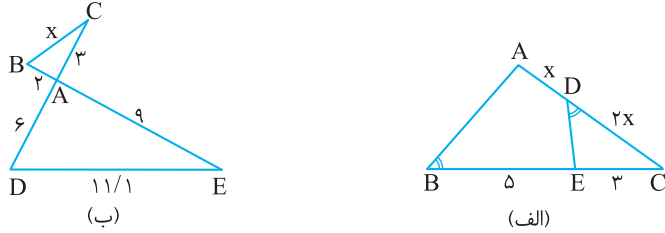
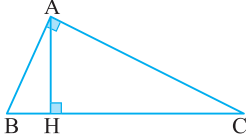


۱/۵	<p>۷ دو مثلث با نسبت تشابه <math>k</math> متشابه‌اند. موارد زیر را ثابت کنید.                  الف) نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی <math>k</math> است.                  ب) نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی <math>k^2</math> است.</p>	۷
۱/۷۵	<p>۸ سه مورد زیر را ثابت کنید.                  الف) هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده است.                  ب) اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آن‌هاست.                  پ) اگر دو مثلث قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبروی این قاعده آن‌ها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.</p>	۸
۱/۲۵	<p>۹ در شکل مقابل مساحت مثلث <math>ACE</math> سه برابر مساحت مثلث <math>ADE</math> و دو برابر مساحت مثلث <math>ABD</math> است. نسبت‌های <math>\frac{DE}{BD}</math> و <math>\frac{BC}{DE}</math> را به دست آورید.</p>	۹
۱	<p>۱۰ در شکل مقابل <math>d \parallel d'</math> و مساحت مثلث <math>ABC</math> برابر <math>۸\text{cm}^2</math> است. اگر <math>BD = ۶\text{cm}</math>، فاصله نقطه <math>C</math> از <math>BD</math> را به دست آورید.</p>	۱۰
۱۳/۲۵	<p>۱۱ در هریک از شکل‌های زیر مقادیر <math>x</math> و <math>y</math> (در صورت وجود) را به دست آورید.</p>  <p>(پ) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(ب) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(الف) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(ج) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(ث) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(ت) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(خ) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(ح) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(ج) <math>x = \dots</math>, <math>y = \dots</math></p> <p>(ذ) <math>x = \dots</math></p> <p>(د) <math>x = \dots</math></p>	۱۱

## امتحان نوبت اول (۲)

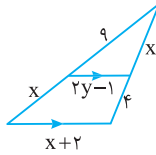
صفحات پاسخ: ۱۹۹ و ۲۰۰

ردیف	سؤالات	بارم
<b>سؤالات فصل اول</b>		
۱	جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید. الف) هر نقطه که روی ..... یک پاره خط قرار داشته باشد، ..... به یک فاصله است. ب) نتیجه گیری بر مبنای چند آزمایش محدود، استدلال ..... است. پ) به مثالی که درستی یک حکم کلی را رد می کند، ..... گفته می شود.	۱
۲	عکس قضیه های زیر را بنویسید و سپس آن ها را به صورت یک قضیه دوشرطی بیان کنید. الف) قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آن گاه قطرهاش منصف یکدیگرند. ب) قضیه: در هر مثلث، اگر سه ضلع هم اندازه باشند، آن گاه سه زاویه نیز هم اندازه اند.	۲
۳	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید. الف) با وصل کردن هر سه رأس یک هفت ضلعی منتظم، یک مثلث متساوی الساقین پدید می آید. ب) همه اعداد صحیح، منفی اند.	۱
۴	نقطه A به فاصله ۱cm از خط d مفروض است. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲cm از A باشند.	۰/۷۵
۵	متوازی الاضلعی رسم کنید که طول قطره های آن ۳ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع غیرهم نهشت با این شرایط می توان رسم کرد؟	۱/۵
۶	نشان دهید نیمسازهای زاویه های داخلی هر مثلث هم رس اند.	۱/۵
۷	می دانیم از یک نقطه خارج از یک خط موازی با آن می توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می کند.	۱/۲۵
<b>سؤالات فصل دوم</b>		
۸	در شکل مقابل مساحت مثلث ACE دو برابر مساحت مثلث ADE و سه برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت های $\frac{BC}{CE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید.	۱/۵
		
۹	در شکل مقابل $DE \parallel BC$ . مقادیر x و y را به دست آورید.	۱/۵
		
۱۰	در شکل مقابل $BC \parallel DE$ و $DC \parallel FE$ . ثابت کنید $AD^2 = AB \cdot AF$ .	۱
		

۳	<p>در هریک از دو شکل زیر مقدار <math>x</math> را به دست آورید.</p>  <p>(ب)</p> <p>(الف)</p>	۱۱
۱/۵	<p>به هریک از دو مورد زیر پاسخ دهید.                  الف) طول‌های اضلاع یک مثلث ۸، ۹ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه با آن ۱۲ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.                  ب) نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی منتظم <math>\frac{4}{9}</math> است. اگر محیط پنج‌ضلعی کوچک‌تر ۲۴ باشد، محیط دیگری چقدر است؟</p>	۱۲
۲/۵	<p>در مثلث قائم‌الزاویه مقابل،                  الف) ثابت کنید <math>\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2</math> و <math>\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2</math>                  ب) با استفاده از دو نتیجه قسمت (الف)، درستی قضیه فیثاغورس را بررسی کنید.</p> 	۱۳
۲۰	جمع بارم	سربلند و پیروز باشید

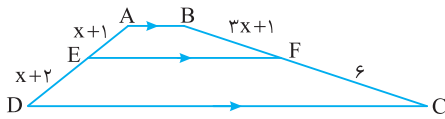
(ب) طبق قضیه تالس،  
با استفاده از تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{9}{9+x} = \frac{2y-1}{x+2} \xrightarrow{x=6} \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8} \Rightarrow 2y-1 = 4/8 \Rightarrow y = 2/9$$



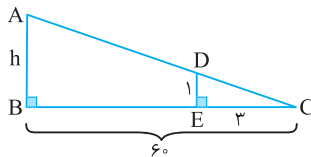
(ب) طبق قضیه تالس در دوزنقه،

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x+1}{6} \Rightarrow 6x+6 = 3x^2+7x+2 \Rightarrow 3x^2+x-4=0 \Rightarrow (3x+4)(x-1)=0 \Rightarrow x=1$$



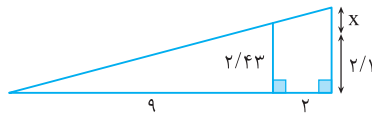
۵۵ شکل مسئله را به طور ساده تر رسم و رأس های آن را نام گذاری می کنیم تا بتوانیم از قضیه تالس یا تعمیم آن استفاده کنیم. در شکل زیر، بنابر فرض مسئله  $BC=6m$  و  $CE=3m$ ،  $DE=1m$  پس کافی است از تعمیم قضیه تالس در مثلث CAB استفاده کنیم.

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{3}{6} \Rightarrow h = 2.0m$$



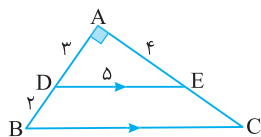
۵۶ این مسئله همان تمرین والیالیست از کتاب درسی است (تمرین ۸ صفحه ۳۷). با توجه به تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{9}{11} = \frac{2/43}{x+2/1} \Rightarrow \frac{1}{11} = \frac{2/43}{x+2/1} \Rightarrow x+2/1 = 2/97 \Rightarrow x = 0/87$$



۵۷ الف) با توجه به قضیه فیثاغورس  $DE=5$ . پس طبق تعمیم قضیه تالس،

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{5}{BC} \Rightarrow BC = \frac{25}{3}$$



(ب) شاید تصور کنید که فرض مسئله کم است. در جواب باید بگوییم که به فرض نیمساز بودن BE توجهی نکرده اید. کلید حل آنجاست. کافی است از قضیه خطوط موازی و مورب استفاده کنید. توجه کنید که

$$DE \parallel BC \Rightarrow \angle DEB = \angle EBC = \alpha$$

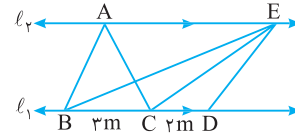
۵۰ ابتدا فرض  $\frac{BC}{CD} = \frac{3}{2}$  را با پارامتر m به شکل منتقل می کنیم. طبق لم ۲،

$$S_{EBC} = S_{ABC} = 63cm^2$$

اکنون با استفاده از لم ۱ در مثلث EBD با گره E داریم

$$\frac{S_{EBC}}{S_{ECD}} = \frac{2m}{2m} \Rightarrow \frac{63}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{ECD} = 42cm^2$$

البته می توانیم این مسئله را با رسم ارتفاع های رأس های A و E نیز پاسخ دهیم و در بیان راه حل از لم ۱ و لم ۲ استفاده نکنیم. اما هدف ما آموزش استفاده از این لم ها و به ویژه لم ۱ است.



۵۱ ابتدا فرض ها را با انتخاب پارامترهای m و n به شکل منتقل می کنیم.

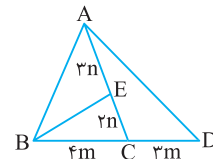
$$\frac{CD}{BD} = \frac{3}{7} \Rightarrow CD = 3m, BD = 7m \Rightarrow BC = BD - CD = 4m$$

$$\frac{EC}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow EC = 2n, AE = 3n$$

اکنون سعی کنید با دو بار استفاده از لم ۱ مسئله را حل کنید و اگر نتوانستید، بقیه راه حل را بخوانید.

$$\triangle ABD, A \text{ گره} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{4m}{7m} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{70} = \frac{4}{7} \Rightarrow S_{ABC} = 40cm^2$$

$$\triangle BCA, B \text{ گره} \Rightarrow \frac{S_{BAE}}{S_{BAC}} = \frac{3n}{5n} \Rightarrow \frac{S_{BAE}}{40} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{BAE} = 24cm^2$$

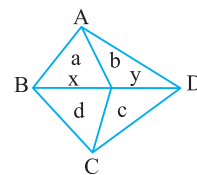


۵۲ از ظاهر مسئله متوجه شوید. بسیار ساده و در واقع همان مسئله ۱۰ درس نامه است. کافی است دو بار از لم ۱ استفاده کنیم:

$$\triangle ABD, A \text{ گره} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y}, \triangle CBD, C \text{ گره} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow ac = bd$$

با مقایسه دو تناسب بالا به دست می آید



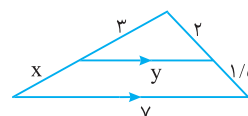
۵۳ مورد (ب) قضیه تالس و مورد (ج) معکوس مورد (پ) است. پس هر دو درست اند. مورد (ج) تعمیم قضیه تالس و مورد (ب) قسمتی از آن است. پس هر دو درست اند. بقیه موارد نادرست اند. برای مثال نقض به مسئله ۱۷ درس نامه رجوع کنید.

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{1/5} \Rightarrow x = 2/25$$

۵۴ الف) بنابر قضیه تالس

$$\frac{2}{3/5} = \frac{y}{7} \Rightarrow y = 4$$

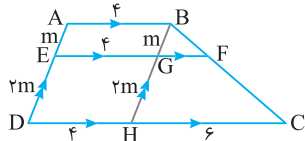
حال با استفاده از تعمیم قضیه تالس داریم



۶۱ همان‌طور که در مسئله ۱۸ درس‌نامه دیدید، سه روش برای حل این مسئله ارائه شد. با هر کدام از آن‌ها می‌توان به این مسئله پاسخ داد. ما در اینجا از روش سوم استفاده می‌کنیم. ابتدا اطلاعات مسئله را به شکل منتقل می‌کنیم. سپس از نقطه B خطی موازی AD رسم می‌کنیم و دوباره اطلاعات جدید را به شکل منتقل می‌کنیم. بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BHC،

$$GF \parallel HC \Rightarrow \frac{GF}{HC} = \frac{BG}{BH} \Rightarrow \frac{GF}{6} = \frac{m}{3m} = \frac{1}{3} \Rightarrow GF = 2$$

$$EF = GF + EG = 6$$



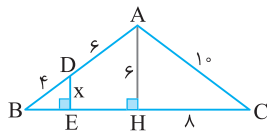
۶۲ توجه کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین است. ( $AB = AC = 10$ )

کافی است ارتفاع وارد بر قاعده این مثلث متساوی‌الساقین را رسم کنیم. در این صورت

$$BH = HC = 8 \Rightarrow AH^2 = AC^2 - HC^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

اکنون از تعمیم قضیه تالس در مثلث BAH استفاده می‌کنیم:

$$DE \parallel AH \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AH} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{24}{10} = 2.4$$



۶۳ موارد (الف) و (ب) درست‌اند. موارد (پ) و (ت) نادرست‌اند. ابتدا

ثابت می‌کنیم مورد (الف) درست است. طبق قضیه تالس در دوزنقه

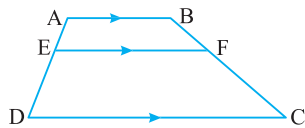
$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \quad \text{با ترکیب صورت در مخرج این تناسب به دست می‌آید}$$

$$\frac{AE}{AE+ED} = \frac{BF}{BF+FC} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \quad \text{برای مورد (ب) کافی است از ترکیب مخرج در صورت تناسب}$$

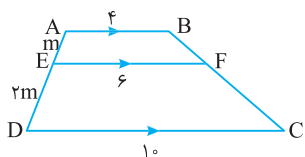
استفاده شود:

$$\frac{AE+ED}{ED} = \frac{BF+FC}{FC} \Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{BC}{FC} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$$



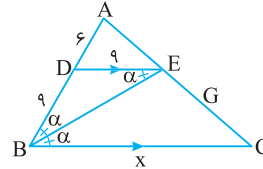
برای رد کردن دو مورد (پ) و (ت) از تمرین ۶۱ استفاده می‌کنیم که مثال نقضی

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{3} \quad \text{ولی} \quad \frac{AB}{DC} = \frac{4}{10} \quad \text{و} \quad \frac{EF}{DC} = \frac{6}{10}$$



بنابراین  $\hat{D}EB = \hat{D}BE = \alpha$  و در نتیجه مثلث DBE متساوی‌الساقین است. پس  $DB = DE = 9$ . اکنون با استفاده از تعمیم قضیه تالس معلوم می‌شود که

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{45}{2} = 22.5$$



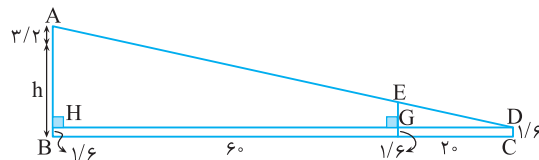
۵۸ این سؤال را با هر یک از سه روشی که در مسئله ۱۸ درس‌نامه ارائه شد،

می‌توان پاسخ داد. ما در اینجا از روش سوم استفاده می‌کنیم. از نقطه D بر پاره‌خط AB عمودی رسم می‌کنیم. اکنون کافی است از تعمیم قضیه تالس در مثلث DAH استفاده کنیم:

$$EG \parallel AH \Rightarrow \frac{DG}{DH} = \frac{EG}{AH} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{4/6}{AH} \Rightarrow AH = 12/6$$

پس  $AB = AH + BH = 12/6 + 16/6 = 19/2$  در نتیجه

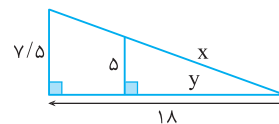
$$3/2 + h = 19/2 \Rightarrow h = 16$$



۵۹ بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{5}{7/5} = \frac{y}{18} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{y}{18} \Rightarrow y = 12$$

پس طبق قضیه فیثاغورس  $x = 13$ .



۶۰ در ابتدا با دو بار استفاده از عکس قضیه تالس در مثلث ABC ثابت

می‌کنیم  $DE \parallel BC$  و  $FG \parallel BC$ . توجه کنید که

$$\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{2}{2} = \frac{AG}{GC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} FG \parallel BC$$

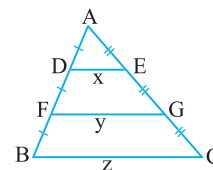
اکنون از تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{z} \Rightarrow x = \frac{z}{3}$$

$$FG \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{FG}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{y}{z} \Rightarrow y = \frac{2}{3}z$$

$$x + y = \frac{z}{3} + \frac{2z}{3} = z$$

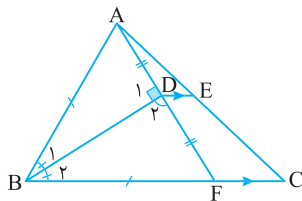
در نتیجه



پاسخ مسائل تکمیلی

۱ حل را بخوانید و سعی کنید خودتان به آن پاسخ دهید. کافی است AD را امتداد دهیدیم تا BC را در نقطه F قطع کند. به شکل توجه کنید. در آن چه چیزی مشاهده می کنید؟ آیا یک هم نهشتی و یک قضیه تالس می بینید؟ دو مثلث ABD و FBD به حالت (رضز) هم نهشت اند، زیرا  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$ ،  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$  و  $BD = BD$ .  
 در نتیجه  $BF = BA = 96 \text{ cm} \Rightarrow FC = BC - BF = 156 - 96 = 60 \text{ cm}$   
 همچنین  $AD = DF$ . پس طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث AFC.

$$DE \parallel FC \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DE}{60} \Rightarrow DE = 30 \text{ cm}$$

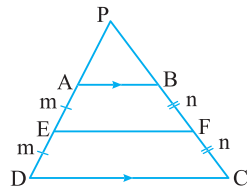


۲ حتماً به این نتیجه رسیده اید که اگر (الف) اثبات شود، قسمت (ب) ساده است. با سه روش قسمت (الف) را ثابت می کنیم.  
**روش اول:** دو ساق را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند. توجه کنید که در مثلث PDC.

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{PA}{AD} = \frac{PB}{BC} \Rightarrow \frac{PA}{2m} = \frac{PB}{2n} \Rightarrow \frac{PA}{m} = \frac{PB}{n} \Rightarrow \frac{PA}{AE} = \frac{PB}{BF}$$

تناسب آخر را در شکل بررسی کنید. از چه چیزی باید استفاده کنیم؟ از عکس قضیه تالس در مثلث PEF به دست می آید.

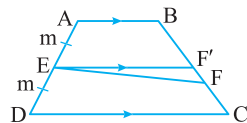
$$\frac{PA}{AE} = \frac{PB}{BF} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس قضیه}} AB \parallel EF$$



**روش دوم:** با استفاده از برهان خلف: فرض می کنیم EF موازی AB نیست. پس از نقطه E خطی موازی AB رسم می کنیم تا BC را در نقطه F' قطع کند. حال طبق قضیه تالس در دوزنقه.

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF'}{F'C} \Rightarrow \frac{m}{m} = \frac{BF'}{F'C} \Rightarrow BF' = F'C$$

بنابراین نقطه F' وسط BC است که با فرض وسط بودن F تناقض دارد.



**روش سوم:** این روش، روش معروفی است. محل برخورد امتدادهای AF و DC را نقطه G می نامیم. دو مثلث ABF و GCF هم نهشت اند، زیرا

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel CG, BC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_1 \\ BF = FC \end{array} \right. \xrightarrow{\text{(رضز)}} \triangle ABF \cong \triangle GCF$$

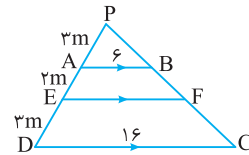
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{F}_1 \\ \hat{F}_1 \text{ متقابل به رأس} \end{array} \right.$$

**روش اول:** دو ساق را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند. اکنون می خواهیم PA را بر حسب m حساب کنیم. از تعمیم قضیه تالس استفاده می کنیم:

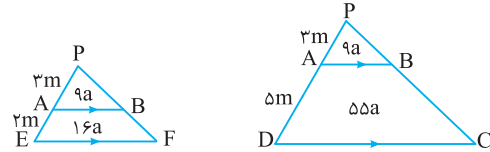
$$\triangle PDC: AB \parallel DC \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

با تفصیل صورت در مخرج این تناسب داریم

$$\frac{PA}{PD-PA} = \frac{3}{8-3} \Rightarrow \frac{PA}{AD} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{PA}{3m} = \frac{3}{5} \Rightarrow PA = 3m$$



اکنون به دو مثلث زیر توجه کنید.



$$\triangle PAB \sim \triangle PEF \Rightarrow \frac{S_{PAB}}{S_{PEF}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$S_{PAB} = 9a, \quad S_{PEF} = 25a$$

$$\triangle PAB \sim \triangle PDC \Rightarrow \frac{S_{PAB}}{S_{PDC}} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow \frac{9a}{S_{PDC}} = \frac{9}{64}$$

$$S_{PDC} = 64a$$

$$S_{ABFE} = S_{PEF} - S_{PAB} = 25a - 9a = 16a$$

بنابراین

$$S_{ABCD} = S_{PDC} - S_{PAB} = 64a - 9a = 55a$$

$$S_{EFCD} = S_{ABCD} - S_{ABFE} = 55a - 16a = 39a$$

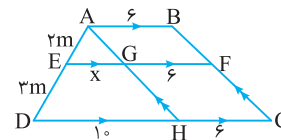
$$\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{16a}{39a} = \frac{16}{39}$$

در نتیجه

**روش دوم:** آیا می توانید طول پاره خط EF را محاسبه کنید؟ برای این منظور از A خطی موازی BC رسم می کنیم تا EF را در نقطه G و CD را در نقطه H قطع کند. از تعمیم قضیه تالس استفاده می کنیم:

$$\triangle ADH: EG \parallel DH \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EG}{DH} \Rightarrow \frac{2m}{5m} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 4$$

بنابراین  $EF = 10$ .



اکنون از A بر قاعده عمود رسم می کنیم. توجه کنید که

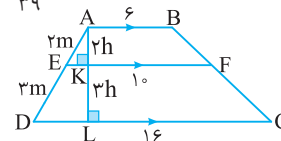
$$\triangle ADL: EK \parallel DL \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{AK}{KL} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AK}{KL}$$

با انتخاب پارامتر h می توان نوشت  $AK = 2h$  و  $KL = 3h$ . می دانیم مساحت دوزنقه برابر با نصف مجموع اندازه های دو قاعده در طول ارتفاع است، پس

$$S_{ABFE} = \frac{6+10}{2} \times 2h = 16h, \quad S_{EFCD} = \frac{10+16}{2} \times 3h = 39h$$

$$\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{16h}{39h} = \frac{16}{39}$$

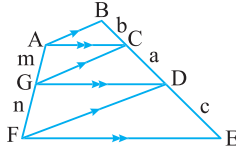
بنابراین



۵] ظاهر مسئله ترسناک است اما اثبات آن ساده است. پس قبل از اینکه اثبات را بخوانید خوب به آن فکر کنید. اگر بخواهیم شما را راهنمایی کنیم، می‌گوییم دو بار از قضیه تالس در دوزنقه استفاده کنید. در دوزنقه  $ABDF$

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{c} \text{ داریم} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{a}{c} \text{ داریم} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{a}{c} \text{ داریم}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = bc$$



۶] در شکل فقط یک تالس مشاهده می‌شود اما با کمی تغییر در آن می‌توان به نتایج بهتری رسید. کافی است  $AD$  و  $FE$  را امتداد دهیم تا یکدیگر را در نقطه  $G$  قطع کنند. اکنون در شکل یک مثلث متساوی الساقین و یک تالس  $AB \parallel FG$ ,  $\hat{A}_1 = \hat{G}$  مورب می‌شود.

پس  $\hat{A}_1 = \hat{G}$  و در نتیجه مثلث  $FAG$  متساوی الساقین است. بنابراین

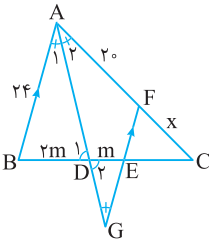
$$FG = FA = 20$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{G} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle ABD \sim \triangle GED$$

$$\frac{AB}{GE} = \frac{BD}{ED} = \frac{AD}{GD} \Rightarrow \frac{24}{GE} = \frac{24}{m} \Rightarrow GE = 12$$

پس  $FE = FG - GE = 20 - 12 = 8$  اکنون با استفاده از تعمیم قضیه تالس در مثلث  $CAB$  نتیجه می‌شود

$$FE \parallel AB \Rightarrow \frac{FE}{AB} = \frac{CF}{CA} \Rightarrow \frac{8}{24} = \frac{x}{x+20} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{x+20} \Rightarrow x = 10$$



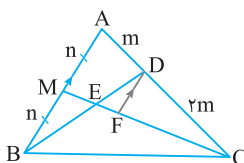
۷] ابتدا اطلاعات را به شکل انتقال می‌دهیم. مانند مسئله ۳۰ درس‌نامه، برای حل این سؤال روش‌های زیادی وجود دارد. ما در اینجا به یک روش اکتفا می‌کنیم. اما شما سعی کنید روش‌های دیگری هم پیدا کنید. این موضوع باعث افزایش تسلط و توانایی شما در قضیه تالس و تشابه می‌شود.

از  $D$  خطی موازی  $AB$  رسم می‌کنیم تا  $EC$  را در نقطه  $F$  قطع کند. اکنون در شکل یک تالس و یک تالس پروانه‌ای مشاهده می‌شود. توجه کنید که

$$\triangle CAM : DF \parallel AM \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{DF}{AM} \Rightarrow \frac{2m}{3m} = \frac{DF}{n} \Rightarrow DF = \frac{2n}{3}$$

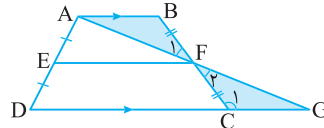
اکنون با استفاده از تالس پروانه‌ای معلوم می‌شود که  $\triangle BEM \sim \triangle DEF$ ، پس

$$\frac{BE}{DE} = \frac{EM}{EF} = \frac{BM}{DF} \Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{n}{\frac{2n}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$$



پس طبق اجزای متناظر  $AF = GF$ . اکنون در مثلث  $ADG$  از عکس قضیه تالس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AF}{FG} \Rightarrow EF \parallel DG$$

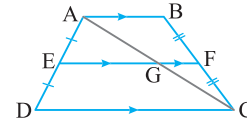


حالا اثبات قسمت (ب) ساده است. می‌توانیم روش سوم در بالا را ادامه دهیم و به اثبات قسمت (ب) برسیم. اما ما در اینجا روش دیگری ارائه می‌کنیم. با رسم قطر  $AC$  دو تا تعمیم قضیه تالس در شکل به وجود می‌آید. توجه کنید که

$$\triangle ADC : EG \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EG}{DC} \Rightarrow \frac{EG}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow EG = \frac{DC}{2}$$

$$\triangle CAB : GF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{GF}{AB} \Rightarrow \frac{GF}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow GF = \frac{AB}{2}$$

$$EF = EG + GF = \frac{DC}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{AB + CD}{2} \text{ در نتیجه}$$



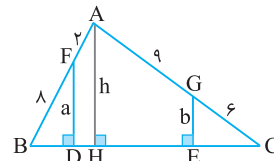
۳] در شکل هیچ قضیه تالسی مشاهده نمی‌شود. اما با رسم یک پاره خط (در شکل، ارتفاع  $AH$ ) مسئله واضح می‌شود. اکنون مطابق شکل دو تا قضیه تالس در شکل مشاهده می‌شود.

$$\triangle BAH : FD \parallel AH \Rightarrow \frac{BF}{BA} = \frac{FD}{AH} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{a}{h}$$

$$\triangle CAH : GE \parallel AH \Rightarrow \frac{CG}{CA} = \frac{GE}{AH} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{b}{h}$$

با استفاده از دو تناسب بالا به جواب مسئله می‌رسیم. کافی است این دو را بر هم تقسیم کنیم یا به صورت زیر عمل کنیم:

$$\begin{cases} \frac{a}{h} = \frac{10}{h} = \frac{a}{h} \Rightarrow a = \frac{10h}{10} = h \\ \frac{b}{h} = \frac{15}{h} = \frac{6}{h} \Rightarrow b = \frac{15h}{15} = h \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h}{h} = 1$$

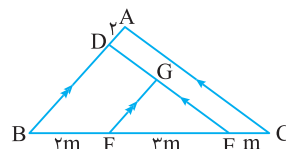


۴] گام اول انتقال اطلاعات به شکل است. آیا دو تا قضیه تالس در شکل مشاهده می‌کنید؟

$$\triangle BAC : DE \parallel AC \Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{BD}{2} = \frac{\Delta m}{m} \Rightarrow BD = 10$$

همچنین از تعمیم قضیه تالس در مثلث  $EBD$  نتیجه می‌شود

$$GF \parallel DB \Rightarrow \frac{EF}{EB} = \frac{GF}{DB} \Rightarrow \frac{2m}{\Delta m} = \frac{GF}{10} \Rightarrow GF = 6$$



پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

۵ الف) بنا بر قضیهٔ تالس داریم

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

بنابراین

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب صورت}} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

(ب)

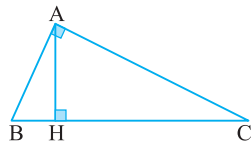
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل مخرج}} \frac{AB-AD}{AB} = \frac{AC-AE}{AC}$$

$$\frac{BD}{BA} = \frac{CE}{CA}$$

۶ الف)

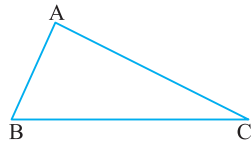
$$\begin{cases} AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = CH \cdot BC \end{cases} \xrightarrow{+}$$

$$AB^2 + AC^2 = (BH + CH) \cdot BC \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$



(ب)

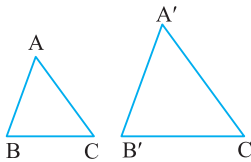
$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$



۷ الف)

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

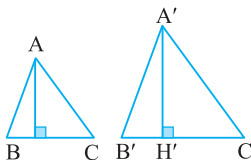
$$\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = k \Rightarrow \frac{P}{P'} = k$$



(ب)

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'} = k$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BC}{\frac{1}{2} A'H' \cdot B'C'} = \left(\frac{AH}{A'H'}\right) \left(\frac{BC}{B'C'}\right) = k^2$$



- ۱ الف) نادرست (۰/۲۵) (ب) درست (۰/۲۵)  
 (ب) نادرست (۰/۲۵) (ت) درست (۰/۲۵)  
 (ث) a نادرست (۰/۲۵) (b) درست (۰/۲۵)  
 (c) نادرست (۰/۲۵) (d) درست (۰/۲۵)  
 (ج) درست (۰/۲۵)  
 (چ) a نادرست (۰/۲۵) (b) نادرست (۰/۲۵)  
 (c) درست (۰/۲۵) (d) درست (۰/۲۵)  
 (e) درست (۰/۲۵)  
 (ح) نادرست (۰/۲۵) (خ) درست (۰/۲۵)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \times AC = \frac{1}{2} CE \times AB$$

- (ب) اندازه‌های ارتفاع‌های (۰/۲۵) (پ) اندازه‌های قاعده‌هایی (۰/۲۵)  
 (ت) اندازه‌های قاعده‌های (۰/۲۵) (ث) هم‌مساحت (۰/۲۵)  
 (ج) واسطهٔ (میانگین) هندسی (۰/۲۵)

$$\frac{DE}{BC}$$

(a)  $\frac{AE}{EC}$  (۰/۲۵) (b)  $\frac{CE}{CA}$  (۰/۲۵)

(c)  $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$  (۰/۲۵) (d)  $\frac{BD}{DA}$  (۰/۲۵)

(a)  $\frac{BN}{NC}$  (۰/۲۵) (b)  $\frac{CN}{CB}$  (۰/۲۵)

(د) متشابه (۰/۲۵) (ذ) زاویهٔ بین آن‌ها هم‌اندازه (۰/۲۵)

(a)  $BH \times BC$  (۰/۵) (b)  $BH \times HC$  (۰/۵)

(c)  $CH \times CB$  (۰/۵) (d)  $AB \times AC$  (۰/۵)

(z)  $k$  (۰/۲۵) (ژ)  $k^2$  (۰/۲۵)

(س) متشابه (۰/۲۵)

۳ الف) ۶ (۰/۲۵) (ب) ۳ (۰/۲۵)

(پ)  $\frac{3}{2}$  (۰/۲۵) (ت) ۳ یا  $\frac{1}{3}$  (۰/۲۵)

(ث) ۱۶ یا  $\frac{1}{16}$  (۰/۲۵) (ج) ۲۰ (۰/۲۵)

(چ) ۹ (۰/۲۵) / ۱۶ (۰/۲۵) (ح) ۱۶ (۰/۲۵)

۴ قضیهٔ تالس در دوزنقه:  $AB \parallel EF \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم و از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \triangle ADC: EG \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC} \\ \triangle CAB: GF \parallel AB \Rightarrow \frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

