هندسه دهم

ویژه استعدادهای درخشان

• لیلا کاظمی •

مجموعه کتاب‌های علامه حلی

هندسه دهم

• لیلا کاظمی

شناسنامه کتاب

سرشناسه : کاظمی، لیلا، ۱۳۵۷

عنوان و نام پدیدآور : هندسه دهم

مشخصات نشر : تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۵.

مشخصات ظاهری : ۱۵۲ ص.: مصور(رنگی)، جدول(رنگی)، نمودار (رنگی)؛ ۲۲ × ۲۹ س‌م.

فروست : مجموعه کتاب علامه حلی

شابک : ۴-۵۹-۷۷۵۵-۶۰۰-۹۷۸

وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر

یادداشت : فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی: *http://opac.nlai.ir* قابل دسترسی است.

یادداشت : واژه‌نامه

شماره کتابشناسی ملی : ۴۴۲۷۴۸۷

علامه حلی

عنوان کتاب	هندسه دهم
ناشر	انتشارات حلی
مؤلفان	لیلا کاظمی
صفحه‌آرا	عاطفه قلیچ‌خانی
طراح جلد	سعید شمس
حروف‌نگار	آزاده مهری
تصویرساز	محمدحسین صفدریان
هماهنگی	سمیه سادات فاطمی
سال چاپ	۱۴۰۱
نوبت چاپ	هفتم
شمارگان	۲۰۰۰ جلد
قیمت	۱۰۹۰۰۰ تومان
شماره شابک	۴-۵۹-۷۷۵۵-۶۰۰-۹۷۸

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ واحد ۱۴

تلفن دفتر مرکزی: ۵-۶۶۷۴۴۳۸۴

فهرست مطالب

پیشگفتار

به نام خدا

چند سال پیش، تعدادی از معلمان با دغدغه «آموزش استعدادهای درخشـان»، دورهم جمع شدند و موسسه علامه حلی را تأسیس کردند. این معلم‌ها ـ که خودشان از دانش‌آموختگان مدارس استعدادهای درخشان شهر تهران می‌باشند ـ سال‌ها در مدارس سمپاد (سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان)، به دنبال پیاده‌سازی روش‌های جدید و مؤثر آموزش بوده‌اند و درنهایت تصمیم گرفتند تا نتیجه این تجربیات را در موسسه علامه‌حلی در اختیار دیگر فعالان در عرصه آموزش بگذارند.

مجموعه کتاب‌های انتشارات علامه‌حلی، یکی از محصولات این تلاش جمعی است. در این کتاب‌ها تلاش شده است تا علاوه‌بر تأمین محتوای مناسب برای دانش‌آموزان برتر کشور، روش‌های جدیدتر و مؤثرتر آموزشی هم در انتقال این محتوا به کار گرفته شده و پیاده‌سازی شود. در پس این کتاب‌ها، ساعت‌ها کار فکری برای انتخاب ساختار و شیوه تدوین صرف شده است. فعال کردن دانش‌آموز در روند آموزش و ارجاع او به انجام مشاهدات، فعالیت‌ها و آزمایش‌های مناسب برای انتقال مفاهیم آموزشی و همچنین ترغیب دانش‌آموز برای مراجعه به منابع گسترده‌تر چون سایت‌های علمی اینترنتی و نرم‌افزارهای آموزشی، از ویژگی‌های این سیستم آموزشی است. علاوه‌براین برای کمک به فرایند تدریس معلمان عزیز، محصولات جانبی چون متن راهنمای تدریس کتاب، محتوای الکترونیک و ... در کنار هر کتاب تولید شده است.

مجموعه کتاب‌های علامه‌حلی، با همکاری جمع زیادی از مؤلفین و معلمان باتجربه مدارس سمپاد ـ که به‌دقت انتخاب شده‌اند ـ تألیف و ویرایش گردیده است؛ اما آرزوی ما در این مؤسسه این است که از حضور تمامی معلمان دلسوز و باتجربه مدارس سمپاد و دیگر مراکز آموزشی برتر کشور عزیزمان، در تألیف کتاب‌ها و دیگر محصولات آموزشی، بهره ببریم؛ بنابراین از شما دبیران عزیز خواهشمندیم تجربه‌های خود را درزمینه استفاده از این کتاب و آموزش آن در کلاس، برای ما به آدرس الکترونیک: book@mhelli.ir ارسال فرمایید تا ما در چاپ‌های بعدی کتاب، از تجربیات، نظرات و حتی تصاویر ارسالی شما در انجام آزمایش‌ها، فعالیت‌ها، بازدیدها و ... در کتاب ـ و البته با ذکر نام ارسال‌کننده ـ استفاده کنیم. البته دانش‌آموزان خوب و پرتلاش هم می‌توانند در این کار همکاری کنند و با معلمان خود در اجرای این طرح همراه شوند.

عابدی جعفری

مدیر انتشارات علامه‌حلی

مقدمهٔ مؤلف

افلاطون: مطالعه ریاضیات، دستگاه ذهنی را توسعه می‌دهد و به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزاران چشم بهتر است زیرا درک حقیقت از طریق ریاضی میسر است.

از اولین نشانه‌های تمدن بشر در کنار رودخانه نیل (مصریان باستان) تا کنون، هر جا که نشانه‌ای از تفکر و هوشمندی آدمی به چشم می‌خورد، ردپایی از هندسه هم می‌توان پیدا کرد. هندسه به علمِ شکل‌ها و مطالعه آن‌ها شهرت دارد که در قالبِ استانداردهایی مثل منطق و اصول به بررسی رابطه اشکال و خواص آن‌ها می‌پردازد؛ تا بعدها، منجم‌ها در فهم و توصیف اجرام آسمانی یا فیزیکدان‌ها در ویژگی‌های حرکت یا مطالعه ساختارهای اجسام و هنرمندان در فهم و خلقِ آثار هنری و توصیف تفکراتشان و معماران در طراحی ساختمان‌ها و فضاها از علم هندسه بهره ببرند. چه آن موقع که ارشمیدس از آن در محاسبه هوشمندانه حجم و مساحت اجسام استفاده کرد یا دکارت دنیایی از ترکیب هندسه و جبر آفرید و منجر به پیدایش حساب بینهایت کوچک ها شد، یا نوابغی چون گوس، اویلر و ریمان به کمک هندسه، شاخه‌های جذابی از ریاضیات، مانند توپولوژی، هندسه دیفرانسیل و یا دنیای خمینه‌ها را برای ما خلق کردند؛ و اکنون‌که نظریه‌های مختلف علمی از نجوم تا فیزیک برای پاسخگویی به سؤالات چیستی و چرایی گیتی، ناگزیر به استفاده از هندسه هستند و مطمئناً در آینده نیز چنین خواهد بود.

این کتاب برای فهم مقدماتی هندسه در پایه دهم، برای دانش آموزان سخت‌کوش رشته ریاضی تألیف شده که دوست دارند از این قافله علم عقب نمانند.

با تغییر کتب آموزشی، در این کتاب سعی کرده‌ایم بیشترین کمک ممکن را برای فهم بهتر هندسه در پاسخ به نیاز و نگرانی‌های شما دانش آموزان ساعی و اولیای گرامی‌تان داشته باشیم.

در هر فصل سعی شده علاوه بر تدریس مفاهیم موجود در کتاب آموزشی، جای خالی مفاهیم، مسائل و قضایای مهم هندسی در کتاب را پرکنیم و بعدازآن تعدادی مسئله کلیدی را با حل آن‌ها برایتان آوردہ‌ایم. انتظار می‌رود پس از خواندن هر مسئله به خودتان وقت بدهید و سعی کنید بدون مراجعه به راه‌حلِ آن، ایده‌هایی از راه حل را پیداکرده و از لذت اثبات مسئله بی‌بهره نباشید. بدیهی است که با صرف زمان کافی ممکن است به راه‌حل‌های بهتری از راه‌حل‌های موجود در کتاب دست پیدا کنید. در آخر هر فصل هم تعدادی مسئله و تست وجود دارد که بهتر است برای حل آن‌ها به‌اندازه کافی دقت و حوصله به خرج دهید و در صورت حل نشدن به معلم خود مراجعه کنید.

علیرغم تلاش‌های ما ممکن است در این کتاب، به اشتباهات تایپی و نقایصی از این قبیل برخورد کنید که امیدواریم آن‌ها را به ما گوشزد کنید. در پایان از مجموعه همکارانم در مؤسسه علامه حلی؛ علی‌الخصوص آقای انصاری مدیرعامل مؤسسه و آقای عابدی مدیریت بخش کتاب تشکر ویژه می‌نمایم و همچنین از خانم‌ها فراهانیان، قلیچ خانی، مهری و دلوچی که زحمت صفحه‌آرایی، تایپ و هماهنگی و پیگیری را کشیده‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

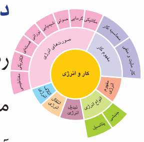
با سپاس فراوان

لیلا کاظمی

۱۳۹۵

قبل از شروع به مطالعهٔ کتاب این قسمت را بخوانید:

وقتی شروع به خواندن این کتاب کنید با بخش‌های مختلفی مواجه می‌شوید که غالباً یک لاک‌پشت متفاوت برای هرکدام وجود دارد. در هریک از این بخش‌ها از شما انتظار داریم کار متفاوتی انجام دهید. این قسمت‌ها براساس تئوری‌های نوین آموزش و تجارب موفق تدریس برای آموزش دانش‌آموزان مستعد طراحی شده است. این بخش‌ها شامل:



درخت دانش: در صفحه دوم هر فصل، نموداری رسم شده تا به شما کمک کند در کمترین حجم، مطالب علمی فصل و چگونگی تقسیم‌بندی و ارتباط آن‌ها را با هم درک کنید. درواقع این بخش نقشه‌ای است برای گم نشدن در موضوعات علمی.

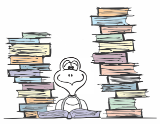
اهداف رفتاری: بعد از درخت دانش، چند جمله نوشته شده که از اول کار معلوم کند این فصل را می‌خوانیم که چه بشود. خوب است در آخر فصل هم برگردیم و ببینیم، آیا می‌توانم کارهایی را که در این بخش گفته انجام دهیم یا نه!

پاسخگو باش: در این قسمت باید پاسخگوی مطالبی که تا اینجا خوانده‌اید باشید. پاسخگوی سؤالاتی که انتظار می‌رود بعد از خواندن درس تا آن قسمت، بتوانید باکمی فکرکردن به آن‌ها جواب دهید.

فسفر بسوزان: شاید لازم باشد مقدار بیشتری از مغز خودمان استفاده کنیم و قدری فسفر ذخیره شده را بسوزانیم. البته اگر نتوانستید به سوالات این بخش جواب دهید افسرده نشوید؛ برخی از فسفر بسوزانیدها را خود مولفان هم بلد نیستند جواب دهند!

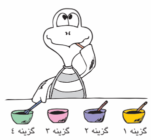
دست‌به‌کارشو: در موضوعات علمی مخصوصاً علوم تجربی، یادگیری باکیفیت بدون انجام آزمایش، مشاهده و ساخت وسایل علمی امکان‌پذیر نیست. در قسمت دست‌به‌کارشو نحوه انجام آزمایش، دستورالعمل ساخت وسیله و یا نوع مشاهده توضیح داده می‌شود.

جالب است بدانی: برای افرادی که دوست دارند بیشتر از سطح استاندارد با موضوعات آشنا شوند این قسمت توصیه می‌شود. در این قسمت مطالبی آورده شده که خواندن و یادگرفتن آن الزامی نیست ولی آن‌قدر جذاب است که نشود به‌راحتی بی‌خیال خواندن آن شد.



لغت‌نامه: ما دانش‌آموزان مستعد و متفاوت (!) دوست داریم بتوانیم علاوه بر مطالب درسی، جستجویی هم بکنیم و ببینیم در دنیا درباره موضع درسی ما چه چیزی وجود دارد. برای همین در پایان هر فصل لغات مهم با معادل انگلیسی آن آورده شده است.

تمرین‌ها: در آخر هر فصل تمرین‌های مرتبط با آن آورده شده است. تعداد تمرین‌ها، وقت لازم برای انجام آن‌ها، تعداد سؤالات سخت و آسان و نوع سؤالات کاملاً محاسبه شده، پس خیالتان راحت که همه را می‌توانید انجام دهید.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای: سؤالات چهارگزینه‌ای یا همان تست هم در آخر هر فصل طراحی شده است. این پرسش‌ها شامل سؤالات آزمون سراسری، آزمون‌های دوره‌ای تألیفی و سؤالات المپیاد می‌باشد.

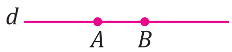
شهرفرنگ: از آنجایی که همه ما ساعت‌هایی از روز را در اینترنت سِیر می‌کنیم، می‌شود علاوه‌بر سایر کارها، به سایت‌های علمی و جذاب هم سر زد. در بخش شهرفرنگ سایتی مربوط به موضوع فصل معرفی می‌شود که توصیه مؤلفان بازدید از آن سایت است.

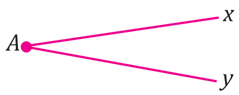
پیشگفتار

همان‌طور که می‌دانید، پایه‌های عظیم ساختمان رفیع «هندسه» بر «اصول» آن استوار است.
«اصل‌ها» گزاره‌های درستی هستند که فرض می‌کنیم درست هستند و به کمک آن‌ها و منطق، مرحله به مرحله و قدم به قدم، قضایا و مسئله‌ها اثبات می‌شوند.
بازی شطرنج را در نظر بگیرید. «اصول» در این بازی نحوه **حرکت مهره‌ها** و **قوانین بازی** هستند. برای کسی‌که می‌خواهد برای اولین‌بار شطرنج بازی کند. باید توضیح داد که حرکت مهره اسب و رخ و ... چه تفاوتی دارد و قوانین برد و باخت به چه صورت است.
اما اگر این فرد از ما بپرسد چرا حرکت این مهره‌ها و قوانین بازی این‌طور تدوین شده‌اند، چه پاسخی باید به او داد؟
تصور بر آن است که این «اصول» به خودی خود نه درست هستند و نه غلط؛ اما با رعایت و به کارگیری بی‌قید و شرط آن‌ها در حین مسئله (بازی)، یک ساختار کلی لذت بخش خواهیم داشت. «هندسه» نیز چنین است. موجوداتی نظیر نقطه، خط، صفحه و فضا با خواص و قوانین مخصوص آن‌ها را در نظر می‌گیریم و اصولی بین آن‌ها قرار می‌دهیم تا با تبعیت از این اصول و قوانین به مجموعه‌ای منطقی اما «توضیح‌ناپذیر» و لذت بخش اما «آزمایش ناپذیر» دست پیدا کنیم. «توضیح‌ناپذیر» از آن جهت که اصول آن (همانند اصول شطرنج) فاقد هر نوع منطق مستقلی هستند و «آزمایش ناپذیر» به آن دلیل که هر نقطه تجربه‌پذیری در دنیای اطراف ما به هر حال ابعادی خواهد داشت در حالی‌که در هندسه اقلیدسی اصول درباره نقاطی بیان می‌شوند که هیچ بعدی ندارند و هر خطی که در هر جایی غیر از هندسه اقلیدسی رسم شود، نوع مستطیلی خواهد بود؛ در حالی‌که در هندسه اقلیدسی خط طولی بدون عرض است.

برای فهم این کتاب لازم است اصول و تعریف ویژگی‌های زیر را بدانیم:

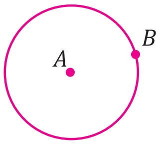
۱) نقطه هیچ بعدی ندارد. خط طول دارد و بی‌انتها است. روی هر خط همواره می‌توان نقطه جدیدی در نظر گرفت و از هر دو نقطه یک خط منحصربه فرد می‌گذرد. اگر دو نقطه روی یک خط در نظر بگیریم به قسمتی از خط که بین آن دو نقطه قرار می‌گیرد، پاره‌خط می‌گوئیم. اگر یک نقطه روی خطی اختیار کنیم به قسمتی از خط که در یک طرف این نقطه قرار می‌گیرد نیم‌خط می‌گوئیم.
نقطه را با حروف بزرگ و خط را با حروف کوچک علامت‌گذاری می‌کنیم. به اجتماع دو نیم‌خط با مبدأ مشترک **زاویه** می‌گوئیم.





(زاویهٔ $x\widehat{A}y$)

۲) هرگاه دو نقطه در صفحه‌ای قرار داشته باشند، دایره‌ای به مرکز یکی از این نقاط وجود دارد که از نقطه دیگری میگذرد.



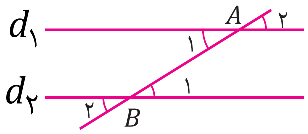
در تعریف تحلیلی دایره می‌گوئیم: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه ثابتی از صفحه (به اسم مرکز) به یک فاصله باشند. به این فاصله، **شعاع** دایره می‌گوئیم.
۳) روی هر خط، هر پاره‌خط به طول دلخواه می‌توان جدا کرد و هر پاره‌خط را به طول دلخواه می‌توان امتداد داد.
۴) وقتی از کلمه «هم‌نهشت» یا «برابر» برای دو شکل هندسی در این کتاب استفاده می‌کنیم، منظور آن است که یکی از آن دو شکل دیگری را می‌پوشاند. (این دو شکل درتمام ویژگی‌های قابل اندازه‌گیری همانند

یکدیگرند.)

پیش از این تعدادی قضیه و مسئله را در سال‌های قبل خوانده‌اید که در فصل‌های مختلف کتاب بنا به نیاز از آن‌ها استفاده خواهیم کرد و هر جا که لازم باشد، اثبات آن‌ها را یادآوری می‌کنیم:

۱) قضیه موازی مورب: هر خط که خطوط موازی را قطع کند، تعدادی زاویه به‌وجود می‌آورد که تمام زوایای حاده آن‌ها باهم و تمام زوایای منفرجه آن‌ها باهم برابر خواهند بود.

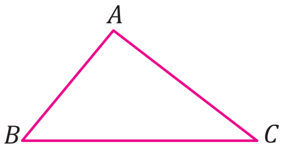
زوایای $A_{۱}\,,A_{۲}$ را متقابل به رأس می‌گوئیم.



$$d_{۱} \parallel d_{۲} \Rightarrow \hat{A}_{۲} = \hat{A}_{۱} = \hat{B}_{۱} = \hat{B}_{۲}$$

توجه: عکس قضیه موازی ـ مورب نیز درست است. (اگر خطی دو خط $d_{۱}$ و $d_{۲}$ را طوری قطع کند که $A_{۱}\,,A_{۲}$ باشد، در این صورت می‌توان گفت که $d_{۱}$ و $d_{۲}$ موازی هستند.)

۲) مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

۳) دو مثلث به یکی ازحالت‌های: سه ضلع نظیر به نظیر برابر (ض ض ض)، دو ضلع و زاویه بین نظیر به نظیر برابر (ض ز ض) و دو زاویه و ضلع بین نظیر به نظیر برابر (ز ض ز) هم‌نهشت خواهند بود.

تذکر: در مثلث‌های قائم‌الزاویه دو حالت وتر و یک ضلع قائمه نظیربه نظیر برابر و وتر و یک زاویه حاده نظیر به نظیر برابر نیز باعث هم‌نهشتی آن دو مثلث خواهد شد.

۴) مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول و عرض آن؛

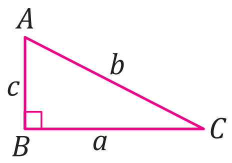
مساحت مثلث برابر با نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده نظیر آن؛

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده نظیر آن؛

مساحت ذوزنقه برابر است با نصف حاصل‌ضرب مجموع قاعده‌ها در ارتفاع ذوزنقه؛

مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن برهم عمود باشند، برابر است با نصف حاصل‌ضرب قطرهای آن.

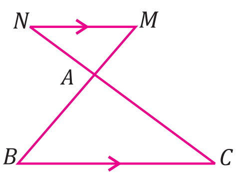
۵) قضیه فیثاغورث: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر برابر است با مجموع مربعات طول‌های اضلاع قائمه $c^{۲} + a^{۲} = b^{۲}$.

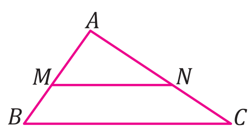


تذکر: عکس قضیه فیثاغورث نیز درست است؛ یعنی اگر اضلاع مثلثی در رابطه بالا صدق کردند آن مثلث قائم‌الزاویه در $\hat{B}$ خواهد بود.

۶) قضیه تالس: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر مثلث (امتداد آن‌ها) را قطع کند، روی آن دو ضلع چهار پاره‌خط متناسب ایجاد می‌شود.

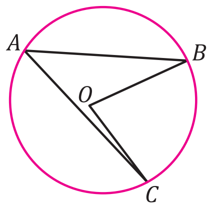
$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$





۷) اندازه زاویه محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است. اندازه زاویه مرکزی برابر کمان روبه‌روی آن است:

$\hat{A}=\frac{\widehat{BC}}{۲}, \hat{O}=\widehat{BC}$



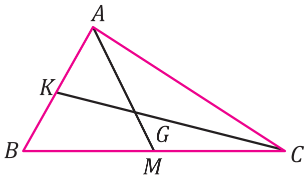
۸) در مثلث متساوی‌الساقین:

الف) زوایای مجاور به قاعده باهم برابرند.

ب) ارتفاع و میانه و نیم‌ساز رسم شده از رأس مثلث متساوی‌الساقین برهم منطبق هستند.

۹) در هر مثلث هر میانه، میانه دیگری را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند

$$AK=KB, BM=MC$$
$$\Rightarrow AG=۲GM, CG=۲\times GK$$



◄ رهنمودها

ورزیده شدن در حل مسئله هندسی، با در دست داشتن روش‌های گوناگون حل مسائل مختلف به‌دست نمی‌آید.

ممکن است تغییر یک کلمه در صورت یک مسئله، آن را از مسئله‌ای ساده به مسئله‌ای پیچیده چه بسا لاینحل تبدیل کند. پیشنهاد می‌کنیم برای حل مسئله‌های جدید، در روش‌های حل مسئله‌های قبلی تعمق کنید و نقاط مشترک و تفاوت در راه‌حل‌ها را پیدا کنید. این کار وسعت دیدی به شما می‌دهد که در حل مسئله جدید کمک می‌کند تا به بیراهه نروید.

صورت مسئله را با دقت بخوانید و اگر لازم است برای فهم بهتر آن دوباره و یا سه باره این کار را تکرار کنید.

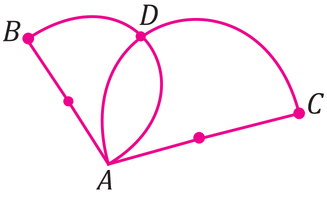
به کمک صورت مسئله سعی کنید شکل مربوط به آن را تا آن‌جا که ممکن است دقیق رسم کنید.

سعی کنید با فرض مسئله پیش بروید یعنی اگر قرار است چهار ضلعی‌ای رسم کنید، آن را در حالت خاص (متوازی‌الاضلاع یا بدتر از آن مستطیل) رسم نکنید.

اگر قرار است در مثلثی میانه رسم کنید، سعی کنید با استفاده از خط‌کش تا آن‌جا که ممکن است وسط ضلع را دقیق‌تر انتخاب کنید و اگر قرار است نیم‌ساز رسم کنید پیشنهاد می‌کنیم از نقاله استفاده کنید تا شکل درست‌تر رسم شود.

شاید این مثال، لزوم رسم شکل دقیق را به شما یادآور شود.

در شکل زیر نیم‌دایره‌ای به قطر AB و نیم‌دایره دیگری به قطر AC رسم کرده‌ایم تا همدیگر را در D قطع کنند. پاره‌خط BC را رسم کنید تا نیم‌دایره به قطر AB را در E و نیم‌دایره به قطر AC را در F قطع کند.



چون E روی نیم‌دایره به قطر AB است پس زاویه AEB محاطی مقابل به قطر است. پس $A\hat{E}B=۹۰^\circ$ از طرفی F نیز روی نیم‌دایره به قطر AC است، پس $A\hat{F}C=۹۰^\circ$

حال به مثلث AEF دقت کنید. مجموع زوایای داخلی این مثلث چقدر است؟

زاویه‌های $A\hat{D}B$ و $A\hat{D}C$ نیز زوایای محاطی مقابل به قطر هستند و هر کدام یک قائمه می‌شوند پس زاویه $B\hat{D}C$ چقدر است؟

و این یعنی از دو نقطه B و C دو خط می‌گذرد! چرا این نتایج عجیب به‌دست آمده‌اند؟

سعی کنید شکلی که برای مسئله رسم می‌کنید به اندازه کافی بزرگ باشد و فرض مسئله را روی شکل نیز نشان دهید. مثلاً اگر قرار است زاویه‌ای با زاویه دیگری برابر باشند این برابری را روی شکل نیز نشان دهید.

گاهی لازم است برای حل مسئله و رسیدن به حکم، از رسم خط یا پاره‌خط‌های جدیدی در شکل استفاده کنیم. برای فهمیدن اینکه در رویارویی با مسئله جدید، چه خط یا خط‌هایی را باید رسم کنیم، لازم است در روش حل مسئله‌های پیشین به اندازه کافی تعمق و تفکر کرده باشیم. معمولاً در اثبات آنکه دو پاره‌خط باهم برابرند، سعی می‌کنیم مثلث‌هایی شامل آن دو پاره‌خط پیدا کنیم که بتوانیم هم‌نهشتی آن‌ها را اثبات کنیم و یا از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین و یا متوازی‌الاضلاع استفاده کنیم.

به‌نظر شما چرا در حل مسائل شامل میانه در مثلث، آن میانه را به اندازه خود امتداد می‌دهیم اما کمتر پیش می‌آید که در ارتفاع یا نیم‌ساز مثلث این کار را انجام می‌دهیم؟ با کمی تفکر می‌فهمیم که اگر در مثلثی، میانه‌ای را به اندازه خودش امتداد دهیم، نقطه جدید به‌دست آمده که با سه رأس مثلث چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهند (چرا؟) و متوازی‌الاضلاع خواص کمک کننده زیادی دارد و این دستکاری در شکل، ما را به آن‌ها مسلح می‌کند.

دیدن راه‌حل‌های مختلف برای یک مسئله و تفکر در آنکه چه نوع دستکاری‌های دیگری در شکل راه‌گشا هستند، قطعاً شما را در حل مسائل هندسی ورزیده‌تر خواهد کرد.

فصل ۱

ترسیم و استدلال

در سردر اولین دانشگاه بشر (آکادمی) نوشتند: «هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود»

اگر این فصل را به خوبی مطالعه کنی و کارهای خواسته‌شده را به دقت انجام دهی:

- با ابزارهای ترسیم هندسی آشنا خواهی شد.
- خواص عمودمنصف یک پاره‌خط را خواهی دانست.
- با خواص نیمساز آشنا خواهی شد.
- خواص میانه‌های یک مثلث را خواهی دانست.
- با شرایط رسم‌پذیر، می‌توانی برخی از مسائل ترسیم را رسم کنی.

◄ ترسیم‌های هندسی

یکی از راه‌های اولیهٔ انتقال مفاهیم و افکار در سیر تکامل بشر، رسم شکل‌هایی بوده که به کمک آن‌ها انسان‌ها می‌توانستند باهم ارتباط برقرار کنند. به نظر می‌رسد این راه ارتباطی پیش از اختراع خط و نوشتن، در جوامع بشری کاربرد داشته و مشکلات به وجود آمده را حل می‌کرده است. پس از شکل‌گیری زبان و گفتار نیز انسان از ترسیم غافل نشده و آن را به‌عنوان وسیله‌ای برای بیان افکار و تجسم بخشیدن به آن‌ها استفاده می‌کند.

در هندسهٔ اقلیدسی، ما با موجودات غیرواقعی نقطه، خط، صفحه و مانند آن‌ها سروکار داریم که ابعاد آن‌ها به ترتیب صفر، یک و دو هستند و همان‌طور که می‌دانید، در دنیای اطراف ما تاکنون قابل‌مشاهده و تجربه نبوده‌اند. از طرفی به نظر می‌رسد موجودات هندسی می‌توانند در حل مسائل، انتقال ایده‌ها، خلق آثار هنری، افزایش قدرت تجسم و مرتب‌کردن افکار، کاربردهای گوناگون و فراوانی داشته باشند. در این فصل از کتاب می‌خواهیم از قوانین و زبان هندسی برای تجسم و ترسیم اشکال استفاده کنیم.

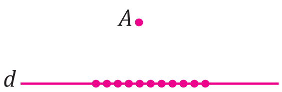
در حل مسائل هندسی لازم است با تعاریف و ویژگی‌ها و گرامر بین موجودات هندسی آشنا باشیم. به یاد داشته باشید که در مسائل ترسیم:

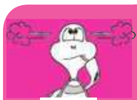
۱) در صورت‌مسئله سعی می‌کنیم به کمک چیزهایی که معلوم هستند و به ما داده شده‌اند، چیز یا چیزهایی را پیدا کنیم که به آن‌ها مجهول می‌گوییم.

۲) چیزهایی که معلوم‌اند، نقاط یا پاره‌خط‌ها و یا زوایا و یا ... هستند که در صورت‌مسئله مشخص می‌شوند.
همان‌طور که می‌دانید، واحدهای اندازه‌گیری و وسایل اندازه‌گیری در دستگاه‌های مختلف متفاوت است و همواره خطاها در اندازه‌گیری باعث می‌شوند که هرگز نتوانیم به مقدار دقیق دسترسی داشته باشیم. در مسائل هندسی، طول پاره‌خط و یا اندازهٔ زاویه داده‌شده را اندازه‌گیری نمی‌کنیم؛ بلکه می‌پذیریم پاره‌خط، زاویه و یا... در صفحه وجود دارد و سعی می‌کنیم به کمک پرگار و خط‌کش ازآنچه در دسترس ماست، مجهول (ها) را که در دسترس ما نیستند رسم کنیم.

مثلاً فرض کنیم، می‌خواهیم از نقطهٔ A خارج از خط d عمودی بر آن رسم کنیم. اگر کسی پیشنهاد کند که نقطهٔ B جایی روی خط d قرار دارد که با رسم پاره‌خط AB در نقطهٔ B زاویهٔ قائم ساخته می‌شود؛ اما روش معینی برای پیدا کردن نقطهٔ B به ما ندهد، ما می‌توانیم به‌اندازهٔ زاویهٔ B مشکوک باشیم و حق داریم که عمود بودن AB بر d را نپذیریم.

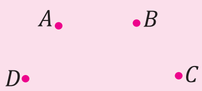
کدام‌یک از این نقاط نقطهٔ B هستند؟





فسفر بسوزان

فرض کنید شما به همراه سه نفر دیگر از دوستانتان، در حیاط مدرسه، در نقاط مشخصی ایستاده‌اید و قرار است همگی به سمت توپی که روی زمین قرار دارد بدوید و کسی برنده است که زودتر به توپ برسد. جای توپ را طوری مشخص کنید؛ که هیچ‌کس اعتراضی نداشته باشد.



(آیا مسئله همیشه جواب دارد؟ آیا فقط یک جواب دارد؟)

این بازی را حداکثر با چند نفر می‌توان انجام داد؟

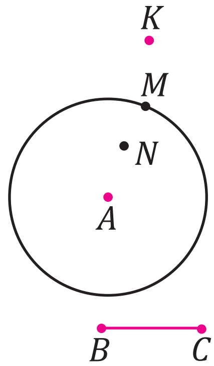
این افراد چگونه باید بایستند تا مسئله جواب داشته باشد؟

در ترسیم قبول می‌کنیم که:

الف) برای رسم یک خط دو نقطه از آن کافی است. (حتماً دقت کرده‌اید که در هندسه «خط» و «خط راست» یکی هستند). پاره‌خط به قسمتی از خط که بین دو نقطهٔ روی آن قرار گرفته گفته می‌شود. برای پیدا کردن نقطه‌ای روی خط گاهی از خواص آن نقطه استفاده می‌کنیم. نقطه از برخورد دو خط یا خط و دایره و یا دو دایره به دست می‌آید.

ب) برای رسم دایره لازم است نقطه‌ای به نام مرکز و پاره‌خطی به نام شعاع داشته باشیم.

با رسم دایره به مرکز A و شعاع BC، تمام نقاطی از صفحه را پیدا می‌کنیم که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ A برابر با طول پاره‌خط BC باشد. فاصلهٔ نقاط بیرون دایره از نقطهٔ A، بیشتر از طول BC و نقاط درون کمتر از BC است.



$AM = BC$

$AN < BC$

$AK > BC$

بنابراین اگر در این کتاب گفته شود دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ سانتی‌متر رسم کنید، منظور آن است که نقطه‌ای به نام A و پاره‌خطی به طول ۴ سانتی‌متر داده شده‌اند: همهٔ نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه A برابر پاره‌خطی با طول ۴ باشد، با یک دایره نمایش داده می‌شود.

جالب است بدانی

حل مسائل ترسیم با ابزارهای هندسی به‌صورت غیررسمی، در طول تاریخ شکل یک مسابقهٔ تاریخی بین ریاضی‌دوستان به خود گرفت.

این مسابقه که کسی بتواند با ابزارهای کمتر، اما با همان دقت کافی در هندسه مسئله ترسیم را حل کند، باعث شهرت بعضی از مسائل شده است. در بعضی از ترسیم شکل‌های بنیادی هندسی، سعی بر آن بوده که تنها با استفاده از پرگار شکل را مشخص کنند که از بین این مسئله‌ها، پیدا کردن مرکز دایرهٔ معلوم فقط با پرگار، مسئلهٔ حل شده و جالبی است. (سعی کنید!) همچنین بعضی از مسائل فقط با خط‌کش غیرمدرج حل می‌شوند که رسم خطی موازی با دو خط دیگر از نقطهٔ معلومی بیرون این دو خط یکی از آن‌ها است. (سعی کنید از نقطهٔ A خارج از دو خط موازی d و d' خطی موازی با آن‌ها فقط به کمک خط‌کش رسم کنید)

ثابت شده است بعضی از مسائل ترسیم که مدت‌های طولانی فکر ریاضی دوستان را به خود مشغول کرده بودند، قابل‌حل با خط‌کش و پرگار نیستند. ازجمله این مسائل معروف تضعیف مکعب (رسم مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب معلوم دیگری باشد.) تثلیث زاویه (تقسیم یک زاویه دلخواه به سه قسمت مساوی) و تربیع دایره (رسم مربع هم‌مساحت با دایره معلوم) است. حالا می‌دانیم که با خط‌کش و پرگار نمی‌توانیم مربعی هم‌مساحت با دایرهٔ به شعاع معلوم رسم کنیم.

جالب است بدانی

مسئله ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروضی باشد، مسئله دلیان ($Delian$) نام دارد.

در کتاب‌های تاریخ ریاضی می‌خوانیم: مردم آتن در سال ۴۳۰ پیش از میلاد به پیشگوی معبد دلوس مراجعه کردند و خواستند بدانند که چگونه می‌توانند جلوی بیماری طاعون را که به شهر آن‌ها حمله کرده و مردم را قتل‌عام می‌کند بگیرند. پیشگوی معبد به آن‌ها می‌گوید که برای متوقف کردن طاعون باید اندازهٔ محراب «آپولو» را که به شکل مکعب بود، دو برابر کنند.

حالا می‌دانیم که مسئله دو برابر کردن حجم مکعب که هر یال آن یک واحد باشد منجر به حل معادلهٔ $x^3 = 2$ می‌شود که با کمک خط‌کش و پرگار حل‌شدنی نیست.

تفاوت دو جملهٔ روبه‌رو چیست؟

جمله روبه‌رو را ثابت کن.

برای ترسیم شکل‌های هندسی و حل مسائل مربوط به آن لازم است ویژگی‌ها و خواص بعضی از خط‌ها و پاره‌خط‌های خاص را بدانیم:

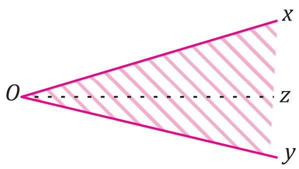
۱) عمودمنصف یک پاره‌خط خطی است که بر وسط آن پاره‌خط عمود است.

با این تعریف، عمودمنصف اولاً شامل تمام نقاطی است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشند و ثانیاً هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد:

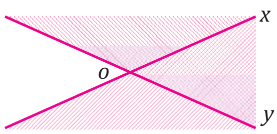
الف) اگر نقطهٔ M در صفحه‌ای که پاره‌خط AB در آن است طوری قرار بگیرد که $MA=MB$ باشد، می‌توان ثابت کرد که M روی عمودمنصف پاره‌خط AB در آن صفحه است.

ب) اگر نقطهٔ T طوری در صفحه قرار بگیرد که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، می‌توان ثابت کرد که $TA=TB$

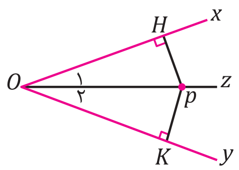


۲) نیمساز زاویهٔ xoy نیم‌خط OZ است با مبدأ O که $x\hat{o}z=z\hat{o}y$

(دقت کنید که زاویه از اجتماع دو نیم‌خط با مبدأ مشترک به دست می‌آید.) به قسمتی که در شکل مشخص شده است درون زاویه می‌گوییم.



برای پیدا کردن درون زاویه $x\hat{o}y$، کافی است خط xx' را در نظر بگیریم و قسمتی از صفحه را که oy در آن قرار دارد هاشور بزنیم. سپس خط yy' را در نظر بگیریم و قسمتی از صفحه را که ox در آن قرار دارد هاشور بزنیم. قسمتی از صفحه که دوبار هاشور می‌خورد درون زاویه گفته می‌شود.)



جمله روبه‌رو را ثابت کن.

اگر oz نیمساز زاویهٔ $x\hat{o}y$ باشد:

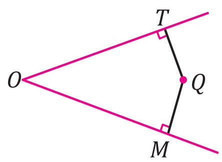
الف) اگر نقطهٔ P روی oz باشد، P از اضلاع زاویه به یک فاصله است.

$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \Rightarrow PH=PK$

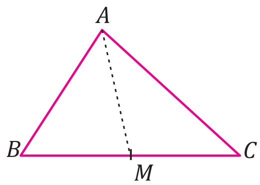
(یادآوری: فاصله P از خط xx' یعنی طول عمودی که از P بر xx' رسم می‌شود.)

جمله روبه‌رو را ثابت کن.

ب) اگر نقطهٔ Q از دو نیم‌خط ox و oy به یک فاصله باشد، Q روی نیمساز (oz) است. (چرا؟)



$QT=QM \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$



۳) میانه پاره‌خطی است که رأس مثلث را به وسط ضلع روبرو وصل می‌کند.

$BM=MC \Rightarrow$ AM میانه وارد بر ضلع BC است.

تذکر: اگر اضلاع BC، AC و AB را به ترتیب با a، b و c نمایش دهیم، به‌جای میانه وارد بر ضلع a (BC) از m_a و به‌جای ارتفاع وارد بر ضلع a از h_a استفاده می‌کنیم.

اگر نیمساز زاویهٔ داخلی A در مثلث ABC ضلع BC را در D قطع کند، به D پای نیمساز می‌گوییم و پاره‌خط AD را با d_a نمایش می‌دهیم.

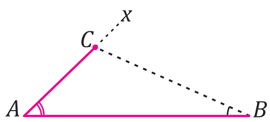
ترسیم

در گذشته دیده‌ایم که مثلث‌هایی که **دو ضلع و زاویه بین** و یا **دو زاویه و ضلع بین** و یا **سه ضلع** نظیر به نظیر برابر داشته باشند برابر (هم‌نهشت) هستند؛ یعنی با داشتن یکی از سه حالت فوق، فقط یک مثلث ترسیم‌پذیر است.

مثال ۱. اگر دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع از مثلثی معلوم باشد، چطور آن را رسم می‌کنید؟

(در این کتاب به‌جای اینکه گفته شود مثلثی با دو ضلع $AB=۵$, $AC=۴$ و زاویه بین $\hat{A}=۴۰^\circ$ رسم کنید، می‌گوییم مثلثی با معلوم بودن ضلع AC، AB و $\hat{A}$ رسم کنید؛ و منظورمان از رسم کردن، استفاده از خط‌کش و پرگار و معلومات مسئله یعنی AB و AC و $\hat{A}$ است.)

پاسخ: برای رسم کافی است پاره‌خط AB را رسم کنیم

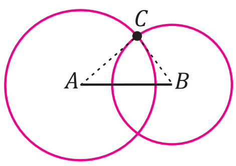


(دقت کنید که AB چون جزء معلومات مسئله است، قابل ترسیم است و مثلاً BC را چون جزء معلومات مسئله نیست نمی‌توانیم رسم کنیم.) از سمت نقطهٔ A زاویهٔ معلوم $\hat{A}$ را جدا کنیم یعنی نیم‌خط AX را طوری رسم کنیم که $B\hat{A}X=\hat{A}$. روی نیم‌خط Ax به اندازهٔ AC جدا کنیم و نقاط B و C را به یکدیگر وصل کنیم.

> **دست‌به‌کار شو**
>
> مثلثی با معلوم بودن $\hat{A}$, $\hat{B}$ ، AB رسم کن.

مثال ۲. مثلثی با معلوم بودن سه ضلع BC، AC، AB رسم کنید.(تذکر: در مثلث ABC، ضلع AC روبه‌رو به زاویه B است، به همین دلیل به‌جای AC می‌توانید از b استفاده کنید. به همین ترتیب: $BC=a$, $AB=c$)

پاسخ: پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. به مرکز A دایره‌ای به شعاع AC و به مرکز B دایره‌ای به شعاع BC رسم می‌کنیم. اگر این دایره‌ها همدیگر را در دو نقطه قطع کنند، یکی از نقاط را نقطه C می‌نامیم و نقطهٔ C را به A و B وصل می‌کنیم. مثلث ABC مثلث مطلوب است.



تذکر: در این حالت (شکل (۱)) $AB < AC+BC$ یعنی مثلث فقط وقتی به وجود می‌آید که مجموع طول هر دو ضلع آن، از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد که به آن شرط وجود مثلث می‌گوییم.

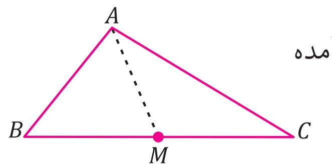
در حل مسائل ترسیم سعی می‌کنیم که با توجه به معلومات مسئله، مثلثی در شکل پیدا کنیم که توسط یکی از حالت‌های بالا و یا حالت‌های اصلی دیگر (وتر و یک ضلع و یا وتر و یک زاویه حاده) قابل رسم باشد. پس از رسم این مثلث که ما آن را **مثلث حل‌کننده** می‌گوییم، به رسم شکل اصلی می‌پردازیم.

> **دست‌به‌کار شو**
>
> مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کن که:
>
> الف) وتر و یک ضلع آن معلوم باشد.
>
> ب) وتر و یک زاویه حاده آن معلوم باشد.

مثال ۳. مثلثی با معلوم بودن a، b و m_a رسم کنید.

پاسخ: فرض کنیم مسئله را حل کرده‌ایم و مثلث خواسته‌شده معلوم است. با توجه به صورت‌مسئله $BC = a$, $AC = b$, $Am = m_a$ معلوم‌اند. چون میانه، ضلع مقابل را نصف می‌کند پس $BM = MC = \frac{a}{۲}$ هم معلوم هستند، پس هر سه ضلع مثلث AMC معلوم‌اند و این مثلث به حالت سه ضلع قابل رسم است و مثلث حل کننده، مثلث AMC است. پس مراحل ترسیم به شکل زیر خواهد بود:

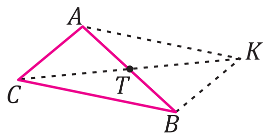
الف) مثلث AMC را با معلوم بودن سه ضلع $AM = m_a$, $MC = \frac{a}{۲}$, $AC = b$ رسم می‌کنیم.



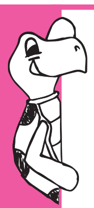
ب) CM را از سمت M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم و نقطهٔ به‌دست‌آمده را B می‌نامیم.

ج) از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC مثلث مطلوب است.

مثال ۴. مثلثی با معلوم بودن a و b و m_c رسم کنید.



پاسخ: (بازهم) فرض می‌کنیم مسئله حل شده است؛
پس در شکل روبه‌رو $BC = a$, $AC = b$, $CT = m_c$ معلوم‌اند،
اما AB معلوم نیست؛ یعنی $AT = \frac{AB}{۲}$ را نداریم و فعلاً مثلث حل‌کننده مشخص نیست. برای پیدا کردن مثلث حل‌کننده، میانه CT را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ K برسیم.



علاوه بر خاصیت‌های خوب دیگری که میانه دارد، معمولاً در حل مسائل، در نظر داشته باشید که اگر میانهٔ مثلث را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم چهارضلعی‌ای به وجود می‌آید (در شکل بالا $AKBC$) که قطرهای آن (AB و CK قطر هستند) همدیگر را نصف کرده‌اند. می‌دانیم که این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع خواهد بود و به ما این امکان را می‌دهد که از خواص زیادی که متوازی‌الاضلاع دارد استفاده کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AT = TB\ (\text{میانه است } CT) \\ CT = TK \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{همدیگر را نصف کرده‌اند}]{\text{قطرهای چهار ضلعی } AKBC} \text{متوازی الاضلاع } AKBC$$

در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند: $AK = BC$:

مثلث حل‌کننده مسئله ظاهر شد. $\overset{\Delta}{ACK}$ با سه ضلع معلوم قابل رسم است.

$$CK = ۲ \times m_c\ , AK = BC = a\ , AC = b$$

پس مراحل ترسیم به‌صورت زیر خواهد بود:

الف) مثلث ACK را با اضلاع $CK = ۲m_c$, $AK = a$, $AC = b$ رسم می‌کنیم.

ب) نقطهٔ T وسط ضلع CK را پیدا می‌کنیم و AT را رسم می‌کنیم.

ج) پاره‌خط AT را از سمت T به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم.

د) مثلث ABC را رسم می‌کنیم. این مثلث، مثلث مطلوب است.

تمرین‌ها

عمودمنصف

۱. یک پاره‌خط در یک صفحه چند عمودمنصف دارد؟ در فضا چطور؟

۲. چطور وسط یک پاره‌خط را پیدا کنیم؟

۳. در مثلث ABC، عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC یکدیگر را در I قطع کرده‌اند.

الف) آیا دایرهٔ به مرکز I که از رأس A بگذرد، از رأس‌های B و C نیز می‌گذرد؟

ب) ثابت کنید، عمودمنصف ضلع BC نیز از I می‌گذرند.

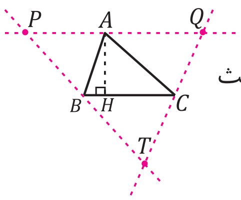
ج) در چه صورتی نقطهٔ I حتماً در درون مثلث ABC است؟

د) در چه صورتی نقطهٔ I وسط ضلع BC قرار می‌گیرد؟

تذکر: در تمرین قبل ثابت کردیم، عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند و این نقطه مرکز دایره‌ای است که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد. (چرا؟)

۴. در چهارضلعی $ABCD$ نقطهٔ M محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AB و BC است و نقطهٔ P محل برخورد عمودمنصف‌های CD، AD است. ثابت کنید MP قسمتی از عمودمنصف قطر AC است.

۵. در مثلث ABC، مطابق شکل از رأس‌های مثلث موازی اضلاع روبه‌روی آن‌ها خط‌هایی رسم کرده‌ایم تا مثلث PQT تشکیل شود.



الف) سه متوازی‌الاضلاع در شکل نام ببرید.

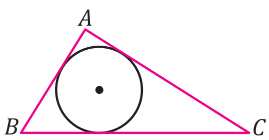
ب) با توجه با اینکه میدانیم در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند؛ ثابت کنید رأس‌های مثلث ABC وسط‌های اضلاع $\overset{\Delta}{PQT}$ هستند.

ج) عمودمنصف پاره‌خط PQ را رسم کنید و ثابت کنید قسمتی از این عمودمنصف ارتفاع $\overset{\Delta}{ABC}$ است.

د) ثابت کنید ارتفاع‌های هر مثلث همرس‌اند.

نیمساز

۶. در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A، نیمساز زاویهٔ B را در O قطع کرده است.



الف) آیا O از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است؟

ب) ثابت کنید نیمساز زاویهٔ C نیز از O می‌گذرد.

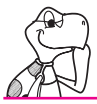
تذکر: در سؤال بالا ثابت کرده‌اید که نیمسازهای داخلی هر مثلث همرس‌اند؛ به دایره‌ای به مرکز O که به هر ضلع مثلث ABC مماس باشد دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC می‌گوییم.

ج) مساحت مثلث‌های OAB، OAC، OBC را برحسب شعاع دایره محاطی داخلی و اضلاع مثلث بنویسید و باهم جمع کنید. رابطهٔ به‌دست‌آمده را برحسب محیط و مساحت و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC بنویسید.

۷. در مثلث ABC، نیمسازهای خارجی زوایای A و B همدیگر را در T قطع کرده‌اند.

الف) ثابت کنید نیمساز داخلی زاویهٔ C نیز از T می‌گذرند.

ب) با توجه به قسمت الف جای خالی را پر کنید: در هر مثلث هر نیمساز داخلی یک زاویه با .... همرس‌اند.



پاسخ تمرین‌های فصل اول

۱. هر پاره‌خط در صفحه یک عمودمنصف دارد و در فضا بی‌شمار.

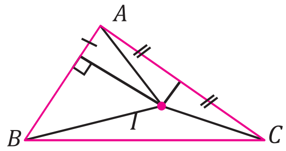
۲. روش پیداکردن وسط یک پاره‌خط: به کمک روش رسم عمودمنصف

دو دایره هم شعاع به مرکز دوسر پاره خط رسم میکنیم به‌طوریکه همدیگر را در دونقطه قطع کنند. خط گذرنده از آن دو نقطه عمود منصف پاره هط است. پاره‌خط موردنظر، وسط پاره‌خط موردنظر است.

۳. الف) بله (دایره محیطی)

ب) می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس پس:

$$\left.\begin{matrix} AI = BI \\ AI = IC \end{matrix}\right\} \Rightarrow IC = BI$$



نتیجه I روی عمودمنصف BC است.

ج) در صورتی که تمام زوایای مثلث حاده باشند .

د) مثلث قائم‌الزاویه باشد.

تذکر: چون می‌دانیم دایره مکان هندسی نقاطیست که از یک نقطه (مرکز) به یک فاصله شعاع باشد، و فاصله I (نقطه همرسی عمودمنصف‌ها) از تمام رئوس مثلث برابر است)

۴. نقطه M محل برخورد عمودمنصف‌های AB و BC است درنتیجه فاصله‌اش از نقطه‌های A، B و C یکسان است:

$$AM = MB = MC$$

به همین ترتیب فاصله نقطه P از D و C و A برابر است:

$$PA = PC = PD$$

از دو تساوی $\{AP = PC\ ,\ MA = MC\}$ نتیجه می‌گیریم که هر دو نقطه M و P روی عمودمنصف قطر AC قرار دارند پس MP بخشی از عمودمنصف AC است.

۵. الف) $AQBC$، $PABC$، $CABT$

ب)

$$AQ = AP \Leftarrow \begin{cases} AQ = BC\} : \text{در متوازی‌الاضلاع } CAQB \text{ داریم} \\ AP = BC\} : \text{در متوازی‌الاضلاع } PABC \text{ داریم} \end{cases}$$

درنتیجه نقطه A وسط PQ است و به همین ترتیب برای رأس مثلث نقاط اثبات می‌شود.

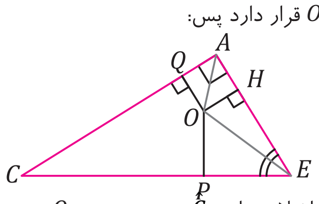
ج) طبق فرض داریم: $BC \parallel PQ$ و در قسمت «ب» ثابت کردیم A وسط پاره‌خط PQ است درنتیجه عمودمنصف پاره‌خط QP از A گذشته و چون PQ در A بر آن عمود است و $PQ \parallel BC$ بر BC هم در H عمود است و ارتفاع AH را به وجود می‌آورد.

د) ارتفاع‌های هر مثلث عمودمنصف‌های مثلث دیگری هستند و چون عمود منصف‌های هر مثلث همرسند پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز پس همرسند.

۶. الف) بله

ب) طبق قضیه: فاصله هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس

نقطه O روی نیمسازهای OB و OA قرار دارد پس:



$$OH = QO\ ,\ OH = OP$$

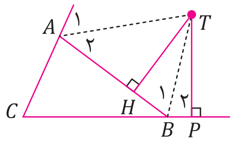
درنتیجه $OP = OQ$؛ CP و CQ اضلاع زاویه $\hat{C}$ هستند پس O روی نیمساز زاویه $\hat{C}$ قرار دارد.

ج) شعاع دایره محاطی مثلث: (r)

$$\left.\begin{matrix} \text{مساحت مثلث } AOB : \dfrac{r(AB)}{۲} \\ \text{مساحت مثلث } COB : \dfrac{r(BC)}{۲} \\ \text{مساحت مثلث } AOC : \dfrac{r(AC)}{۲} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} r(AB + BC + AC)$$

$$S_{ABC} = r\left(\frac{AB + BC + AC}{۲}\right)$$

۷.



T روی نیمساز $\hat{B} \Leftarrow TP = TH$

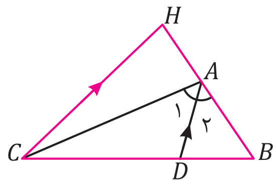
T روی نیمساز $\hat{A} \Leftarrow TQ = TH$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت تعدی}} TP = TQ$$

Q و P روی اضلاع زاویه C هستند $\Leftarrow$ T روی نیمساز C قرار دارد.

فرض: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$

حکم: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$



از نقطه C موازی AD خطی رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در H قطع کند. حالا طبق قضیه تالس $[AD \parallel CH]$ داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AH}$$

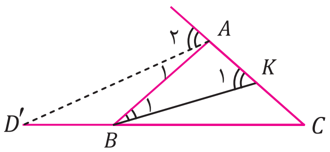
و چون طبق فرض داشتیم: $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$ پس $AH = AC$

و مثلث ACH متساوی‌الساقین است پس $\hat{C} = \hat{H}$ از طرفی طبق موازی مورب داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{C} \\ \hat{A}_۲ = \hat{H} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$

و AD نیمساز $\hat{A}$ است.

۱۰. از رأس B موازی نیمساز AD خطی رسم می‌کنیم تا AC را در k قطع کند. طبق قضیه تالس $(KB \parallel AD')$



$$\frac{CK}{AK} = \frac{BC}{BD'} \quad (I)$$

طبق موازی مورب: $\begin{Bmatrix} \hat{K}_۱ = \hat{A}_۲ \\ \hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ \end{Bmatrix}$ طبق فرض $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ درنتیجه $\hat{K}_۱ = \hat{B}_۱$

و درنتیجه مثلث AKB متساوی‌الساقین است و:

$$AB = AK \quad (II)$$

رابطه I را ترکیب در صورت می‌کنیم:

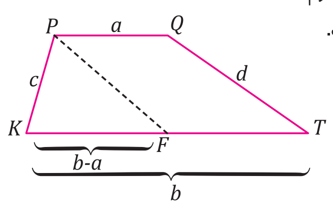
$$\frac{CK + AK}{AK} = \frac{BC + BD'}{BD'} \quad (III)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{AC}{AB} = \frac{CD'}{BD'}$$

۲۵. برای رسم ذوزنقه با قاعده‌های با طول‌های a و b و ساق‌هایی با طول‌های c و d مطابق شکل خطی موازی ساق d رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاعی با ابعاد a و d به وجود آید.

مثلث با ابعاد c و d و $b - a$ با معلوم بودن سه ضلع آن قابل رسم است.

$$PF = QT = d$$



سؤال المپیاد

۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AB = AC$ نقاط X و Y روی پاره‌خط AC طوری قرار گرفته‌اند که X بین A و Y قرار دارد و به‌علاوه $BY = AX = BX$ اگر $\angle YBC = 10^\circ$ زاویه $\angle BAC$ چند درجه است؟ *(مرحله اول المپیاد ـ ۹۳)*

۱) $\frac{95}{3}$

۲) ۳۸

۳) ۴۰

۴) ۴۱

۵) $\frac{185}{4}$

پاسخ سؤال المپیاد

۱. گزینه (۳) صحیح است

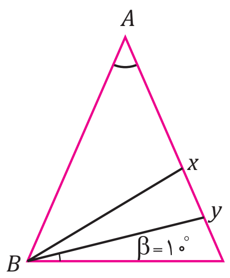
همانند شکل زیر فرض کنید $\angle BAX = \alpha$ می‌دانیم $AX = BX$ پس زاویه $\angle ABX = \alpha$ می‌شود از طرفی زاویه BXC زاویه خارجی مثلث ABX است، پس $\angle BXC = ۲\alpha$ طبق فرض مسئله می‌دانیم $BX = BY$ پس زاویه $\angle BYA = ۲\alpha$ است.

در مثلث ABC می‌دانیم:

$$\angle BAX = \alpha AB = AC \Rightarrow \angle ACB = \angle ABC = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$$

در مثلث BYC زاویه BYA زاویه خارجی است، پس خواهیم داشت:

$$\angle YBC + \angle YCB = \angle BYA = ۱۰^\circ \Rightarrow \angle YBC = ۲\alpha - (۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}) \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$



آزمون دوره‌ای فصل

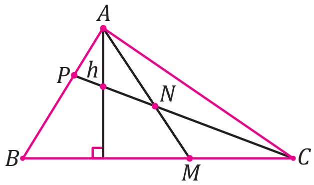
۱. مثلثی رسم کنید که m_c , h_a , m_a در آن معلوم باشد.

۲. ثابت کنید در مثلث ABC نیمساز زاویه A، نیمساز زاویه B را قطع می‌کند. (از برهان خلف استفاده کنید.)

۳. نیمسازهای خارجی زوایای یک متوازی‌الاضلاع را رسم کرده‌ایم. چهار ضلعی حاصل از برخورد این نیمسازها چه شکلی خواهد بود؟ چرا؟

۴. در یک n ضلعی محدب، مجموع زوایا، به‌جز یکی از زوایا برابر ۲۱۴۵° است. این n ضلعی چند قطر دارد؟

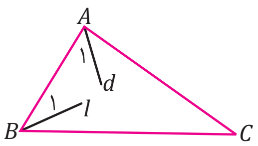
پاسخ آزمون دوره‌ای فصل



۱. ابتدا یک خط افقی رسم می‌کنیم (d) سپس خط عمودی بر d کشیده و به اندازه h_a از آن جدا می‌کنیم و این نقطه را A می‌نامیم. از نقطه A دایره‌ای به مرکز A و شعاع m_a می‌زنیم تا خط d را در M قطع کند. سپس نقطه N را طوری روی AM انتخاب می‌کنیم که، $\frac{AN}{AM}=\frac{۲}{۳}$ پس از نقطه N دایره‌ای به مرکز N و شعاع $\frac{۲}{۳}\times m_C$ می‌زنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، سپس خط NC را به اندازه $\frac{m_C}{۳}$ از سمت N ادامه می‌دهیم تا به نقطه P برسیک. A را به P وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا خط d را در نقطه B قطع کند. مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ همان مثلث مطلوب است.

۲. خط d نیمساز $\hat{A}$ و خط L نیمساز $\hat{A}$ است.

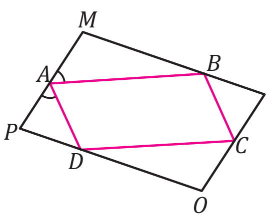
برهان خلف: $d \parallel L$



$$\begin{cases} \frac{\hat{A}}{۲}=AB\ ,d \text{زاویه ی بین خط} \\ \frac{\hat{B}}{۲}=AB\ ,L \text{زاویه ی بین خط} \end{cases}$$

این دو زاویه باتوجه به این‌که یک سمت خط AB قرار دارند و $d \parallel L$ است، پس باید مکمل باشند ولی در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث بیش از ۱۸۰° خواهد شد، تناقض حاصل مبنی بر اشتباه بودن فرض اولیه می‌باشد، پس $d \nparallel L$ و یکدیگر را قطع می‌کند.

۳. مستطیل



$$\left.\begin{aligned} D\hat{A}B+A\hat{B}C&=۱۸۰ \\ M\hat{B}A&=\frac{۱۸۰-A\hat{B}C}{۲} \\ M\hat{A}B&=\frac{۱۸۰-D\hat{A}B}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} M\hat{B}A=\frac{D\hat{A}B}{۲} \\ M\hat{A}B=\frac{B\hat{A}C}{۲} \end{cases} \overset{\text{جمع}}{\Rightarrow} M\hat{B}A+A\hat{M}B=۹۰^\circ$$

به همین ترتیب $\hat{M}\ ,\hat{N}\ ,\hat{O}\ ,\hat{P}=۹۰^\circ$

۴. چون n ضلعی محدب است، پس $\hat{x},۱۸۰^\circ$: $۲۱۴۵+\hat{x}=(n-۲)\times۱۸۰$

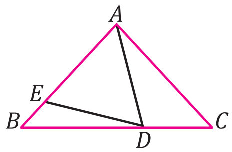
$۲۵۰۵+\hat{x}=۱۸۰n$

مجموع زوایای داخلی : $(n-۲)۱۸۰$

تعداد اقطار : $\frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{۱۴(۱۱)}{۲}=۷۷$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. در شکل روبه‌رو $AB = AC$ و $C\hat{A}D = ۲۰^\circ$, $AE = AD$ اندازهٔ زاویه $B\hat{D}E$ چقدر است؟ *(المپیاد بلژیک)*



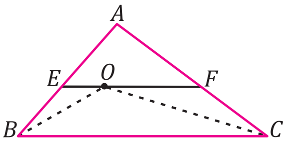
۱) ۸°

۲) ۹°

۳) ۱۰°

۴) ۱۲۰°

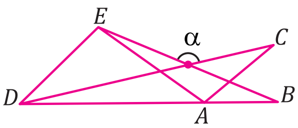
۲. در مثلث ABC شکل روبه‌رو، نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای داخلی است و EF موازی BC رسم شده است. اگر $EB = ۵$, $FC = ۸$ باشد، طول EF کدام است؟



۱) ۱۰   ۲) ۱۳

۳) ۱۴   ۴) می‌توان تغییر کرد.

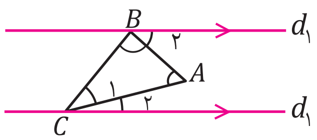
۳. در شکل مقابل $AB = AC$, $AD = AE$, $C\hat{A}B = ۵۰^\circ$, $A\hat{E}D = ۶۵^\circ$ می‌باشد. زاویه α چقدر است؟



۱) ۱۱۵   ۲) ۱۲۰

۳) ۱۲۵   ۴) ۱۳۰

۴. در شکل روبه‌رو $d_۱ \parallel d_۲, B_۲ = \frac{۱}{۳}B_۱, C_۲ = \frac{۱}{۳}C_۱$ می‌باشد. $\hat{A}$ کدام است؟



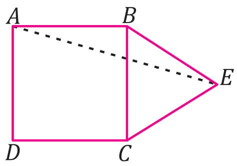
۱) ۱۳۵° ۲) ۱۲۵°

۳) ۱۰۰° ۴) ۹۰°

۵. تعداد قطرهای یک چندضلعی ۲۰ است. از هر رأس این چندضلعی چند قطر می‌گذرد؟ *(سراسری تجربی ـ ۶۸)*

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۶. مربع $ABCD$ و مثلث متساوی‌الاضلاع BEC مطابق شکل واقع شده‌اند. زاویه $D\hat{A}E$ چقدر است؟



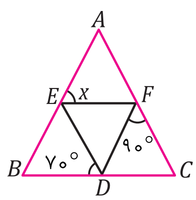
۱) ۷۵°

۲) ۶۰°

۳) ۴۵°

۴) ۷۰°

۷. در شکل مقابل $AB = AC$, $\overset{\Delta}{EDF}$ متساوی‌الاضلاع است. زاویه x کدام است؟



۱) ۵۰°

۲) ۶۰°

۳) ۷۰°

۴) ۴۰°