هندسه ۱

دورهٔ دوم متوسطه

پایه دهم

حسین انصاری

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه

به نام خداوندی که انسان را آفرید و او را به زیور علم آراست.

خداوند منان را سپاس می گویم که بضاعتی اندک عطا فرمود تا با نگارش کتاب های پر بار ریاضی، قدمی کوچک در اعتلای علمی دانش آموزان تیزهوش ایران اسلامی بردارم.

پایه‌ی دهم اولین سال آموزشی دوره دوم متوسطه می باشد با تغییر مقطع تحصیلی و نظام آموزشی دانش‌آموزان با چالشهای گوناگونی مواجه می شوند کتاب های راهبردی و هدفمند می‌توانند چراغ راه عزیزان دانش‌آموز باشند. کتاب هندسه (۱) در همین راستا تألیف شده است. در این کتاب مفاهیم درس هندسه به تفصیل آموزش داده شده و با ارائه مثال های گوناگون به تفهیم عمیق این درس کمک بسزایی می کند. در پایان هر فصل متناسب با ظرفیت دانش آموزان تمرین هایی گذاشته شده که نوجوانان عزیز با حل آن ها قدرت خلاقیت و بنیه ی علمی خود را ارتقاء می دهند. در پایان کتاب پرسش های چهارگزینه ای قرار داده شده که دانش آموزان را برای مسابقات علمی آماده می کند. امیدوارم جویندگان علم ریاضی با استفاده بهینه از این کتاب به اهداف آموزشی خود نائل شوند.

در پایان از مدیریت محترم انتشارات مبتکران آقای دهقانی و دیگر کارکنان آن موسسه وزین که کار آماده سازی کتاب را بر عهده داشته‌اند علی الخصوص آقایان مبین، انصاری و خانم ها صمدی، صفریان، خدامی و مرادی مقدم تشکر می کنم.

حسین انصاری

تابستان ۹۵

فهرست مطالب

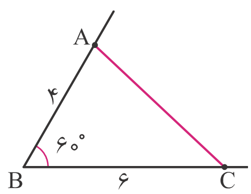
فصل ۱

مقدماتی از هندسه و استدلال

۱ مقدماتی از هندسه و استدلال

ترسیمات هندسی

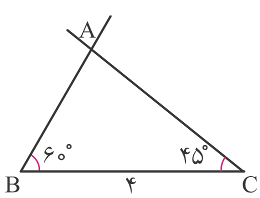
رسم مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)



مثال ۱: از مثلث ABC، $AB = ۴cm$، $\hat{B} = ۶۰°$ و $BC = ۶cm$ معلوم است مثلث را رسم کنید.

حل: ابتدا زاویه B را به اندازه $۶۰°$ رسم می کنیم روی اضلاع این زاویه پاره‌خطهای BA و BC را به ترتیب به اندازه ۴ و ۶ سانتی‌متر رسم کرده و نقاط A و C را به هم وصل می‌کنیم.

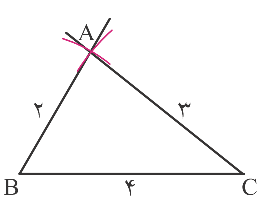
رسم مثلث با داشتن دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)



مثال ۲: در مثلث ABC، $\hat{B} = ۶۰°$، $BC = ۴cm$ و $\hat{C} = ۴۵°$ می‌باشد مثلث را رسم کنید.

حل: ابتدا پاره‌خط $BC = ۴$ را رسم می‌کنیم سپس در نقطه B زاویه‌ای $۶۰°$ و در نقطه C زاویه‌ای $۴۵°$ رسم می‌کنیم و ضلع‌های غیرمشترک آنها را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را قطع کنند. نقطه برخورد را A می‌نامیم.

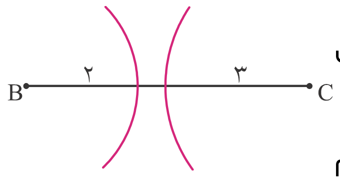
رسم مثلث با داشتن سه ضلع (ض ض ض)



مثال ۳: در مثلث ABC، $AB = ۲cm$، $AC = ۳cm$ و $BC = ۴cm$ می‌باشند مثلث را رسم کنید.

حل: ابتدا پاره خطی ۴ سانتی‌متری رسم کرده و آن را BC می نامیم سسپس یک بار به مرکز B و به شعاع ۲ سانتی‌متر و بار دیگر به مرکز C و به شعاع ۳ سانتی متر دو کمان می زنیم نقطه برخورد کمان ها را A می نامیم و آن را به نقاط B و C وصل می‌کنیم.

مثال ۴ : مثلثی رسم کنید که اضلاع ان ۲ و ۳ و ۶ سانتی‌متر باشند.

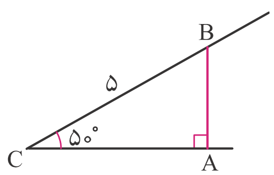


حل: ابتدا پاره‌خطی شش سانتی‌متری رسم کرده و آن را BC می‌نامیم یک بار به مرکز B به شعاع ۲ سانتی‌متر و بار دیگر به مرکز C و به شعاع ۳ سانتی‌متر دو کمان می زنیم این دو کمان یکدیگر را قطع نمی کنند تا رأس سوم مثلث مشخص شود.

سه عدد در صورتی می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند که مجموع هر دو عدد از عدد سوم بزرگ‌تر باشد. $۲+۳=۵<۶$

رسم مثلث قائم‌الزاویه با داشتن وتر و یک زاویه تند

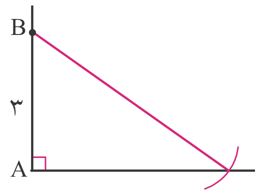
مثال ۵: در مثلث ABC، $\hat{A}=۹۰^\circ$، $BC=۵cm$ و $\hat{C}=۵۰^\circ$ می‌باشد مثلث را رسم کنید.



حل: ابتدا زاویه‌ای ۵۰° رسم کرده و آن را C می‌نامیم، روی یک ضلع این زاویه پاره‌خط CB را به اندازه ۵ سانتی‌متر جدا کرده و از نقطه B بر ضلع دیگر زاویه عمود می‌کنیم.

رسم مثلث قائم‌الزاویه با داشتن وتر و یک ضلع دیگر

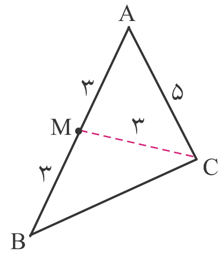
مثال ۶: در مثلث ABC، $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $BC=۵cm$ و $AB=۳cm$ می‌باشد مثلث را رسم کنید؟



حل: ابتدا زاویه‌ای قائمه رسم کرده و آن را A می‌نامیم روی یک ضلع زاویه پاره‌خط AB را به اندازه ۳ سانتی‌متر جدا می‌کنیم سپس به مرکز B و به شعاع ۵ سانتی‌متر کمانی می‌زنیم تا ضلع دیگر زاویه را در نقطه C قطع کند، از B به C وصل می‌کنیم.

مثال ۷: از مثلثی دو ضلع و میانه نظیر یکی از آن دو ضلع داده شده است مثلث را رسم کنید.

$AB=۶$ $\quad AC=۵$ $\quad CM=۳$



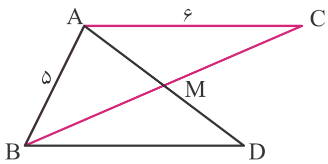
حل: مسئله را حل شده فرض می‌کنیم و یک مثلث فرضی مانند شکل مقابل رسم می‌کنیم. از شکل مرسوم می‌توانیم مثلث AMC را با داشتن سه ضلع رسم کنیم.

بنابراین ابتدا مثلث AMC را که اضلاع آن ۵ و ۳ و ۳ می‌باشند را رسم می‌کنیم سپس ضلع AM را به اندازه خودش امتداد داده و نقطه حاصل یعنی B را به C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC پدید آید.

مثال ۸: از مثلثی دو ضلع و میانه نظیر ضلع سوم معلوم است مثلث را رسم کنید.

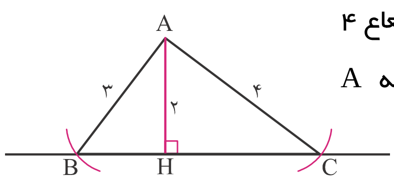
$AB = ۵$ $\quad AC = ۶$ $\quad AM = ۴$

حل: مسئله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلثی دلخواه رسم می‌کنیم. میانه AM را رسم کرده و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم و نقطه حاصل یعنی D را به B وصل می‌کنیم دو مثلث AMC و BMD به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند پس $BD = AC = ۶$ و $AD = ۲AM = ۸$ بنابراین مثلث ABD با معلوم بودن سه ضلع قابل رسم است بنابراین ابتدا مثلث ABD را رسم می‌کنیم و از B به وسط AD وصل کرده و آنرا به اندازه خودش امتداد داده و نقطه حاصل یعنی C را به A وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود.



مثال ۹: دو ضلع یک مثلث ۳ و ۴ سانتی‌متر و ارتفاع نظیر ضلع سوم ۲ سانتی‌متر است مثلث را رسم کنید.

حل: خط دلخواهی رسم کرده و عمودی به اندازه ۲ سانتی‌متر بر این خط می‌کشیم و آن را AH می‌نامیم یک بار به مرکز A به شعاع ۳ سانتی‌متر و بار دیگر به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر دو کمان می‌زنیم تا خط مرسوم را در نقطه B و C قطع کند این دو نقطه را به A وصل می‌کنیم مثلث ABC جواب مسئله است.



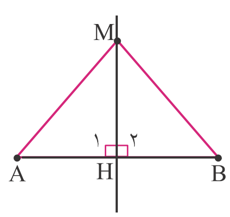
عمود منصف یک پاره‌خط: عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که از وسط پاره‌خط بگذرد و بر آن عمود شود.

قضیه ۱: ثابت کنید هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. (خاصیت عمودمنصف)

فرض: M نقطه‌ای روی عمودمنصف AB است.

حکم: $MA = MB$

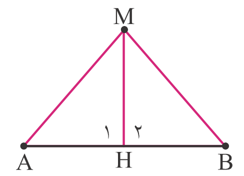
برهان:



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰ \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\triangle}{A}H \cong M\overset{\triangle}{B}H \Rightarrow MA = MB$$

در اثبات این قضیه، از اطلاعات مسئله و دانسته‌های قبلی، حکم را نتیجه گرفتیم این روش اثبات را استدلال استنتاجی می‌نامند.

قضیه ۲: ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد (عکس قضیه ۱ یا عکس خاصیت عمودمنصف)



فرض: $MA = MB$

حکم: **M روی عمودمنصف AB است.**

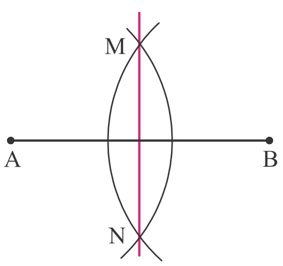
برهان: از M به وسط AB وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} MA &= MB \\ MH &= MH \\ AH &= HB \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{M\hat{A}H} \cong \overset{\triangle}{M\hat{B}H} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}_1 + \hat{H}_2 &= 180 \\ \hat{H}_1 &= \hat{H}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{H}_1 + \hat{H}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{H}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{H}_1 = 90^\circ$$

بنابراین MH بر AB عمود است و آن را نصف کرده است، لذا MH عمود منصف AB است.

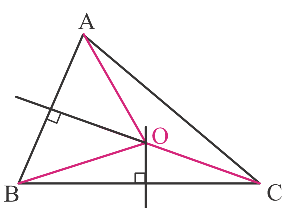
طریقه رسم عمود منصف یک پاره‌خط به کمک پرگار



پرگار را به اندازه‌ی دلخواه (بیش از نصف پاره‌خط) باز کرده، یک بار به مرکز A و یک بار به مرکز B دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند.

با توجه به اینکه نقاط M و N از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله می‌باشند می‌توان گفت خطی که از M و N می‌گذرد عمود منصف AB است.

قضیه ۳: ثابت کنید عمود منصف‌های اضلاع مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند (همرسند).



برهان: عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند.

نقطه O روی عمودمنصف AB قرار دارد پس $OA = OB$

نقطه O روی عمود منصف BC قرار دارد پس $OB = OC$

$$\left.\begin{aligned} OA &= OB \\ OB &= OC \end{aligned}\right\} \Rightarrow OA = OC$$

نقطه O از دو سر ضلع AC به یک فاصله است. بنابراین عمودمنصف AC از O می‌گذرد، لذا عمودمنصف‌های اضلاع مثلث همرسند.

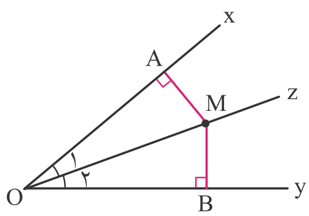
نیمساز زاویه: نیم خطی که از رأس زاویه رسم می‌شود و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند نیمساز نامیده می‌شود.

قضیه ۴: ثابت کنید هر نقطه‌ی واقع بر نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. (خاصیت نیمساز)

فرض: M روی نیمساز $x\hat{O}y$ قرار دارد.

حکم: $MA = MB$

برهان:



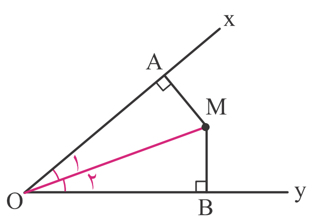
$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{و ز}} \overset{\triangle}{OMA} \cong \overset{\triangle}{OMB} \Rightarrow MA = MB$$

قضیه ۵: ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار می‌گیرد. (عکس قضیه ۴-عکس قضیه نیمساز)

فرض: $MA = MB$

حکم: M روی نیمساز $x\hat{O}y$ قرار دارد.

برهان: از M به O وصل می‌کنیم.



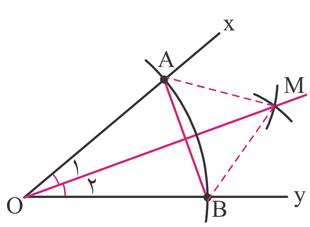
$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ MA = MB \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{و ض}} \overset{\triangle}{OMA} \cong \overset{\triangle}{OMB} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

بنابراین OM نیمساز $x\hat{O}y$ است.

طریقه رسم نیمساز یک زاویه به وسیله پرگار

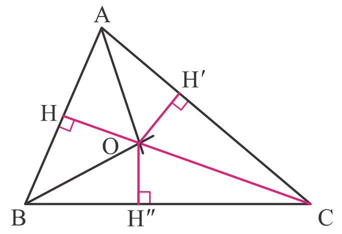
برای رسم نیمساز به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. با توجه به اینکه $OA = OB$ می‌باشد، می‌توان گفت عمود منصف AB از O می‌گذرد.

پرگار را به اندازه دلخواه (بیش از نصف AB) باز کرده، یک بار به مرکز A و یک بار به مرکز B دو کمان می‌زنیم، نقطه‌ی برخورد دو کمان یعنی M را به O وصل می‌کنیم OM نیمساز زاویه است زیرا:



$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ OA = OB \\ OM = OM \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{OMA} \cong \overset{\triangle}{OMB} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

قضیه ۶: ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌های هر مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند (همرسند).



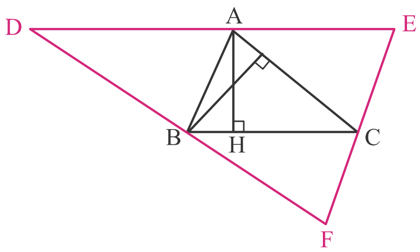
برهان: نیمسازهای دو زاویه A و B را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند.

نقطه O روی نیمساز $\hat{A}$ قرار دارد، پس $OH=OH'$ همچنین نقطه O روی نیمساز $\hat{B}$ قرار دارد، پس $OH=OH''$.

$$\left.\begin{array}{l}OH=OH'\\ OH=OH''\end{array}\right\}\Rightarrow OH'=OH''$$

بنابراین نقطه O از دو ضلع $\hat{C}$ به یک فاصله است، پس نیمساز $\hat{C}$ نیز از O می‌گذرد.

قضیه ۷: ثابت کنید ارتفاع‌های هر مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند (همرسند).

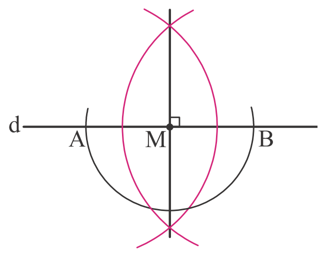


برهان: از هر رأس مثلث خطی موازی ضلع مقابل آن رسم می‌کنیم از برخورد این خطوط مثلث DEF پدید می‌آید. چهارضلعی AECB متوازی‌الاضلاع است، پس $AE=BC$ (۱). همچنین چهارضلعی ACBD متوازی‌الاضلاع است، پس $AD=BC$ (۲).

با مقایسه دو رابطه (۱) و (۲) ملاحظه می‌کنیم $AE=AD$. از طرفی می‌دانیم اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود بر دیگری نیز عمود می‌شود. بنابراین ارتفاع AH بر DE عمود شده و آن را نصف کرده است. لذا AH عمودمنصف ضلع DE است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که دو ارتفاع دیگر مثلث ABC عمود منصف‌های اضلاع دیگر مثلث DEF می‌باشند. پس همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

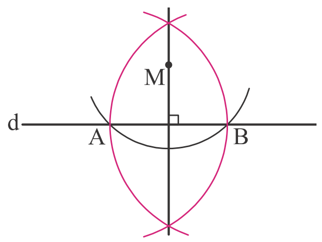
رسم عمود بر یک خط به کمک پرگار از یک نقطه

الف) نقطه روی خط باشد



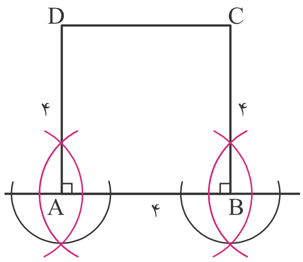
می‌خواهیم از نقطه M واقع بر خط d عمودی رسم کنیم، برای این منظور به مرکز M و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند، عمود منصف AB را رسم می‌کنیم که از M می‌گذرد و بر d عمود می‌شود.

ب) نقطه خارج خط باشد



به مرکز M و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. با توجه به اینکه نقطه M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله می‌باشد، عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم که از M می‌گذرد و بر d عمود است.

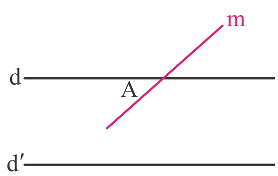
مثال ۱۰: **به کمک خط‌کش و پرگار مربعی به ضلع ۴ سانتی‌متر رسم کنید.**



حل: ابتدا پاره‌خط AB را به اندازه ۴ سانتی‌متر رسم کرده، از دو طرف ادامه می‌دهیم و به روشی که گفتیم دو عمود در نقاط A و B بر AB به اندازه‌ی ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و نقاط حاصل یعنی C و D را به هم وصل می‌کنیم.

اصل توازی اقلیدس: از نقطه‌ی واقع در خارج یک خط، فقط یک خط می‌توان به موازات آن رسم کرد.

مثال ۱۱: **ثابت کنید اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند.**



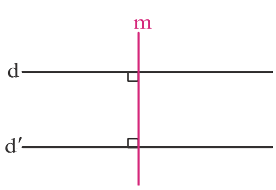
فرض: $d \| d'$ و m خط را در A قطع کرده است.

حکم: خط m خط d' را نیز قطع می‌کند.

برهان: فرض می‌کنیم خط m خط d' را قطع نکند، پس باید با آن موازی باشد که در این صورت از نقطه A دو خط m و d موازی d' رسم شده‌اند که خلاف اصل توازی اقلیدس است.

این روش اثبات را روش برهان خلف می‌نامند. در این روش فرض می‌کنیم خلاف حکم (نقیض حکم) درست باشد، سپس بر اساس دانسته‌های قبلی و استدلال ریاضی به یک تناقض (نتیجه غلط) می‌رسیم و این مطلب نشانگر این است که خلاف حکم نادرست و خود حکم درست است.

مثال ۱۲: **ثابت کنید دو خط عمود بر یک خط خودشان با هم موازیند.**

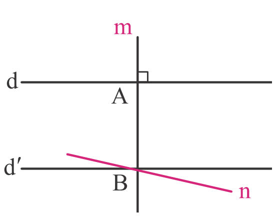


فرض: $d \perp m$ و $d' \perp m$

حکم: $d \| d'$

برهان: فرض می‌کنیم d و d' موازی نباشند پس باید همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، در این صورت از آن نقطه دو عمود بر m رسم شده که ممکن نیست بنابراین فرض $d \nparallel d'$ باطل و حکم ثابت است یعنی $d \| d'$.

مثال ۱۳: **به روش برهان خلف ثابت کنید اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود، بر دیگری نیز عمود است.**



فرض: $d \| d'$ و $m \perp d$

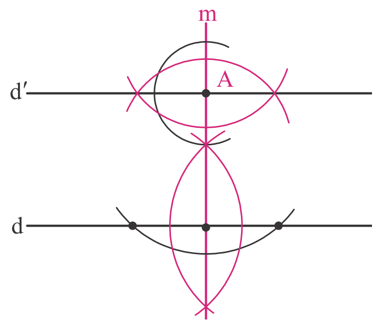
حکم: $m \perp d'$

برهان: می‌خواهیم ثابت کنیم d' بر m عمود است، فرض می‌کنیم d' بر m عمود نباشد و در نقطه B عمود دیگری بر m رسم می‌کنیم و آن را n می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{l} d \perp m \\ n \perp m \end{array}\right\} \Rightarrow d \| n$$

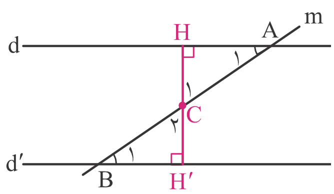
در این صورت از نقطه‌ی B در خط n و d' موازی d رسم شده‌اند که خلاف اصل توازی اقلیدس است. بنابراین فرض d' بر m عمود نیست باطل و حکم ثابت است، لذا $m \perp d'$.

رسم خطی موازی با یک خط



می‌خواهیم از نقطه A خطی موازی d رسم کنیم برای این منظور ابتدا از نقطه‌ی A خط m را بر d عمود می‌کنیم سپس در نقطه‌ی A خط d' را بر m عمود می‌کنیم، با توجه به اینکه دو خط عمود بر یک خط موازیند می‌توان گفت $d \| d'$.

قضیه ۸: ثابت کنید اگر خط مورب دو خط موازی را قطع کند زاویه‌های تند پدید آمده با هم برابرند. (خاصیت خط مورب)



فرض: $d \| d'$

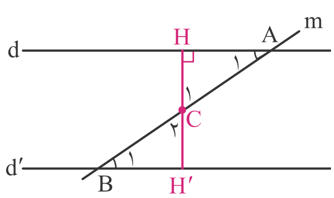
حکم: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

برهان: از نقطه‌ی C وسط AB عمودی بر خط d رسم کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا بر d' نیز عمود شود.

$$\left.\begin{array}{l} AC = CB \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{و ز}} \overset{\triangle}{ACH} \cong \overset{\triangle}{CH'B} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

در شکل فوق می‌توان گفت زاویه‌های تند و باز مکمل یکدیگرند.

قضیه ۹: ثابت کنید اگر دو خط را خط سومی قطع کرده و زاویه‌های تند مساوی با آن دو خط بسازد آن دو خط موازیند. (عکس خاصیت خط مورب)



فرض: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

حکم: $d \| d'$

برهان: از نقطه‌ی C وسط AB بر d عمود کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا d' را قطع کند.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AC = BC \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{ACH} \cong \overset{\triangle}{BCH'} \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}' = 90 \Rightarrow d' \perp HH'$$

$$\left.\begin{array}{l} d' \perp HH' \\ d \perp HH' \end{array}\right\} \Rightarrow d \| d'$$

یادآوری: در این قسمت چند قضیه مهم را که در دوره اول متوسطه فرا گرفته‌ایم بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰: در مثلث متساوی الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با هم برابرند و بالعکس.

قضیه ۱۱: در مثلث متساوی الساقین نیمساز زاویه رأس و ارتفاع و میانه و عمودمنصف قاعده بر هم منطبق‌اند و بالعکس.

قضیه ۱۲ در مثلث متساوی‌الاضلاع سه زاویه برابرند و بالعکس.

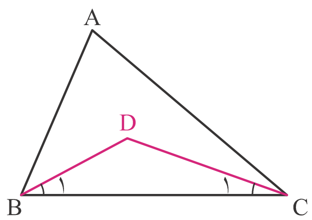
قضیه ۱۳: در مثلث متساوی‌الاضلاع نیمساز هر زاویه ارتفاع و میانه و عمودمنصف ضلع مقابل آن زاویه نیز می‌باشد.

قضیه ۱۴: در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است.

قضیه ۱۵: مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی برابر $(n-۲)\times ۱۸۰$ است.

قضیه ۱۶: اندازه زاویه‌ی خارجی هر مثلث در هر رأس با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور به آن رأس مساوی است.

مثال ۱۴: در شکل زیر BD و CD نیمسازند، ثابت کنید $\hat{D}=۹۰+\frac{\hat{A}}{۲}$.



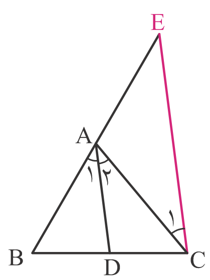
حل:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۹۰$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۹۰-\frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\hat{D}=۱۸۰-(\hat{B}_۱+\hat{C}_۱)=۱۸۰-(۹۰-\frac{\hat{A}}{۲})=۱۸۰-۹۰+\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰+\frac{\hat{A}}{۲}$$

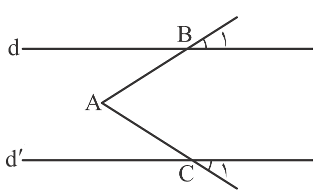
مثال ۱۵: در مثلث ABC از رأس C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BA را در E قطع کند ثابت کنید مثلث ACE متساوی الساقین است.



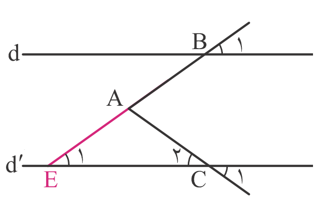
حل:

$$\left.\begin{array}{r} (\text{AD}\parallel\text{CE} \text{ و } \text{AC} \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}_۱ \\ (\text{AD}\parallel\text{CE} \text{ و } \text{BE} \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{E} \\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_۱=\hat{E} \Rightarrow AE=AC$$

مثال ۱۶: در شکل زیر $d\parallel d'$ ثابت کنید $\hat{A}=\hat{B}_۱+\hat{C}_۱$



برهان: BA را امتداد می‌دهیم تا d' را در E قطع کند.

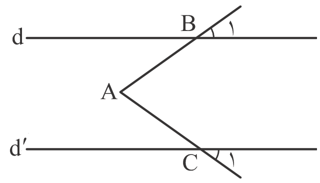


$$(d\parallel d' \text{ و } \text{BE} \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{B}_۱$$

$$B\hat{A}C=\hat{E}_۱+\hat{C}_۲$$

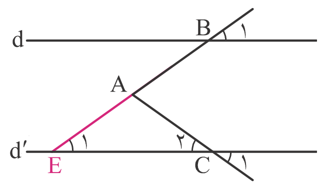
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$B\hat{A}C=\hat{B}_۱+\hat{C}_۱$$



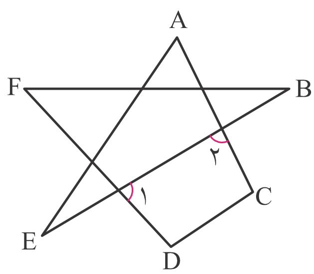
مثال ۱۷: در شکل زیر $B\hat{A}C = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$ ثابت کنید $d \parallel d'$.

برهان: BA را امتداد می‌دهیم تا d' را در E قطع کند.



$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 \\ B\hat{A}C = \hat{E}_1 + \hat{C}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \hat{E}_1 + \hat{C}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow d \parallel d'$$

مثال ۱۸: در شکل زیر مجموع زاویه‌های $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$، $\hat{E}$ و $\hat{F}$ چقدر است؟



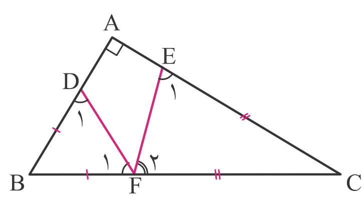
حل:

$$\hat{1} = \hat{B} + \hat{F} \qquad \hat{2} = \hat{A} + \hat{E}$$

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{F} + \hat{A} + \hat{E} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

مثال ۱۹: در شکل زیر $BD = BF$ و $CE = CF$ اندازه‌ی $D\hat{F}E$ چقدر است؟



حل:

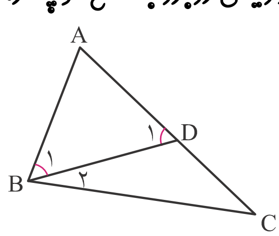
$$BD = BF \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{F}_1 \qquad CE = CF \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{F}_2$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90$$

$$180 - 2\hat{F}_1 + 180 - 2\hat{F}_2 = 90 \Rightarrow 270 = 2\hat{F}_1 + 2\hat{F}_2 \Rightarrow 135 = \hat{F}_1 + \hat{F}_2$$

$$D\hat{F}E = 180 - (\hat{F}_1 + \hat{F}_2) = 180 - 135 = 45^\circ$$

قضیه ۱۷: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند در آن مثلث زاویه‌ی روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه‌ی روبرو به ضلع کوچکتر.



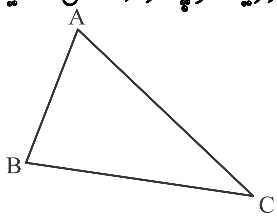
فرض: $AC > AB$

حکم: $\hat{B} > \hat{C}$

برهان: پاره‌خط AD را بر ضلع AC مساوی AB جدا کرده و از B به D وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_1 > C \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{C} \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 > C \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

قضیه ۱۸: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبرو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبرو به زاویه کوچکتر. (عکس قضیه قبل)



فرض: $\hat{B} > \hat{C}$

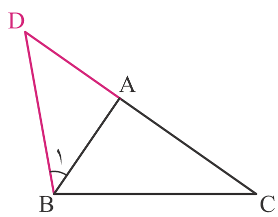
حکم: $AC > AB$

برهان: فرض می‌کنیم AC از AB بزرگتر نباشد، بنابراین دو حالت پیش می‌آید. $AC = AB$ که در این صورت باید $\hat{B} = \hat{C}$ که خلاف فرض است یا $AC < AB$. که در این صورت طبق قضیه‌ی قبل باید $\hat{B} < \hat{C}$ که باز هم خلاف فرض است. لذا می‌توان گفت $AC > AB$.

قضیه ۱۹: در هر مثلث مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

حکم: $AC + BC > AB \,,\quad AB + BC > AC \quad , \quad AB + AC > BC$

برهان: به عنوان نمونه نامساوی اول را اثبات می‌کنیم. برای این منظور CA را از طرف A به اندازه AB امتداد داده و نقطه حاصل یعنی D را به B وصل می‌کنیم.



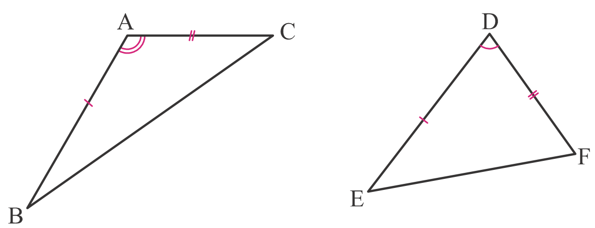
$$AD = AB \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_1$$

$$D\hat{B}C > \hat{B}_1 \Rightarrow D\hat{B}C > \hat{D} \Rightarrow DC > BC \Rightarrow DA + AC > BC$$

$$\left.\begin{array}{l} DA + AC > BC \\ DA = AB \end{array}\right\} \Rightarrow AB + AC > BC$$

این قضیه، **قضیه نامساوی مثلثی** یا **قضیه حمار** نیز نامیده می‌شود. از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر کوچکتر است. عکس قضیه بالا نیز درست است، یعنی اگر سه عدد حقیقی مثبت چنان باشند که مجموع هر دو عدد از عدد سوم بزرگتر باشد آن سه عدد می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

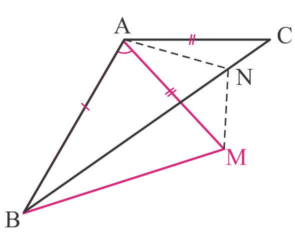
قضیه ۲۰: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر دو به دو مساوی بوده و زاویه‌ی بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگتر از زاویه بین دو ضلع متناظر در مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع سوم مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم مثلث دوم است. (**قضیه لولا** یا **قضیه قیچی**)



فرض: $B\hat{A}C > E\hat{D}F \,,\ AB = DE \ \ , \ \ AC = DF$

حکم: $BC > EF$

برهان: با توجه به اینکه $B\hat{A}C > E\hat{D}F$ زاویه‌ی $B\hat{A}M$ را مساوی $E\hat{D}F$ طوری جدا می‌کنیم که $AM = DF$ و از B به M وصل می کنیم.

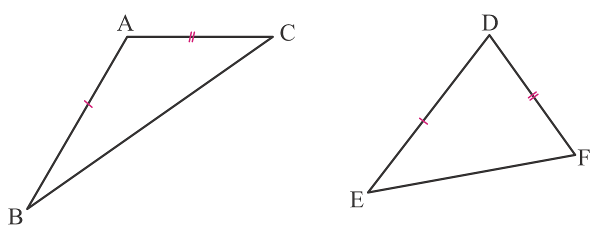


$$\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ B\hat{A}M = E\hat{D}F \\ AM = DF \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{DEF} \Rightarrow BM = EF$$

از طرفی $AM=DF$ و $DF=AC$ بنابراین $AM=AC$. حال نیمساز $M\hat{A}C$ را رسم می‌کنیم تا BC را در N قطع کند و از N به M وصل می‌کنیم. دو مثلث ANM و ANC به حالت (ض ز ض) هم نهشت می‌شوند، پس می‌توان گفت $MN=NC$.

$$\overset{\triangle}{BNM}: BN+NM>BM$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$BN+NC>EF \Rightarrow BC>EF$$

قضیه (۲): اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر دو به دو مساوی بوده و ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم از مثلث دوم باشد آنگاه زاویه‌ی بین دو ضلع از مثلث اول بزرگتر است از زاویه‌ی بین دو ضلع از مثلث دوم. (عکس قضیه لولا)



فرض: $BC>EF,\ AB=DE\ ,\ AC=DF$

حکم: $\hat{A}>\hat{D}$

برهان: فرض می‌کنیم $\hat{A}$ بزرگتر از $\hat{D}$ نباشد دو حالت پیش می‌آید.

حالت اول: $\hat{A}=\hat{D}$ که در این صورت خواهیم داشت:

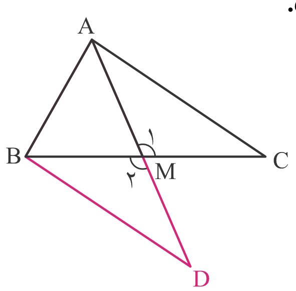
$$\left.\begin{array}{l} AC=DF \\ \hat{A}=\hat{D} \\ AB=DE \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF} \Rightarrow BC=EF$$

نتیجه حاصل خلاف فرض است پس $\hat{A}\neq\hat{D}$

حالت دوم: $\hat{A}<\hat{D}$ در این حالت طبق قضیه لولا باید $BC<EF$ باشد که باز هم خلاف فرض است پس $\hat{A}\not<\hat{D}$.

بنابراین می‌توان گفت $\hat{A}>\hat{D}$.

مثال ۲۰: ثابت کنید در هر مثلث، میانه‌ی نظیر هر ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است.



فرض: AM میانه است.

حکم: $AM<\dfrac{AB+AC}{۲}$

حل: میانه AM را به اندازه‌ی خودش امتداد داده و نقطه‌ی حاصل یعنی D را به B وصل می‌کنیم.

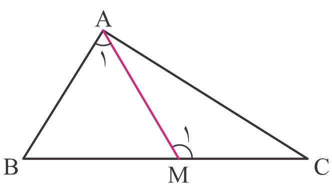
$$\left.\begin{array}{l} AM = MD \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ BM = MC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{M}C \cong B\overset{\triangle}{M}D \Rightarrow AC = BD$$

$$A\overset{\triangle}{B}D : AD < AB + BD$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$۲AM < AB + AC \Rightarrow AM < \frac{AB + AC}{۲}$$

مثال ۲۱: در شکل زیر $AB = MC$ ثابت کنید $AC > BM$.



حل:

$$\hat{M}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B} \Rightarrow \hat{M}_۱ > \hat{A}_۱$$

در دو مثلث AMC و ABM می‌دانیم $AM = AM$ و $AB = MC$ و $\hat{M}_۱ > \hat{A}_۱$. بنابراین طبق قضیه لولا می‌توان گفت $AC > BM$.