Rene Descartes

1596-1650

Geometric Drawings

CHAPTER 1

درس اول — ترسیم‌های هندسی

ص ۱۰ تا ۱۶ هندسه دهم

مکان هندسی

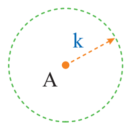
در این درس با انواع ترسیم‌های هندسی سروکار داریم و منظور از ترسیم‌های هندسی رسم سه دستهٔ مهم از اشکال هندسه است:

1. اشکالی مانند پاره‌خط، نیم‌خط و خط راست
2. اشکالی مانند دایره یا کمانی از یک دایره
3. اشکالی مانند مثلث، چهارضلعی و... که با ترکیبی از دو ترسیم قبلی حاصل می‌شوند.

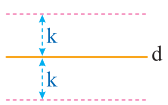
برای رسم این اشکال از دو وسیلهٔ مهم به نام خط‌کش و پرگار استفاده می‌شود که خط‌کش فقط برای ترسیم خط راست مورد استفاده قرار می‌گیرد [نه برای اندازه‌گیری] و پرگار وسیله‌ای است که با آن می‌توان دایره یا کمانی از دایره را رسم کرد و دهانهٔ آن به اندازهٔ دلخواه باز می‌شود.

بسیاری از اشکالی که رسم می‌کنیم مجموعهٔ نقاطی هستند که ویژگی مشترکی دارند، این مجموعهٔ نقاط را مکان هندسی می‌نامیم. [گاهی به آن، مکان نقطه نیز گفته می‌شود]. از طرفی مهم‌ترین اشکال هندسی نقطه، خط و صفحه هستند، بنابراین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصلهٔ ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:

۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از نقطهٔ A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.

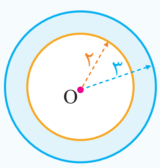


۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات خط d و به فاصلهٔ k واحد از آن هستند.



Test **همهٔ نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت O در این صفحه بیشتر از ۲ و کمتر از ۳ واحد است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند. مساحت این شکل چقدر است؟**

۱) 5π ۲) 9π ۳) 4π ۴) 7π



۱ نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از O بیشتر از ۲ واحد باشد، بیرون دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد هستند، همچنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از O کمتر از ۳ واحد باشد، داخل دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ واحد قرار می‌گیرند. پس شکل هندسی مورد نظر ناحیهٔ بین دو دایره (قسمت رنگی) است و مساحت آن برابر است با:

مساحت ناحیهٔ رنگی = مساحت دایرهٔ بزرگ − مساحت دایرهٔ کوچک $=\pi(3)^2-\pi(2)^2=9\pi-4\pi=5\pi$

۱. خط d در صفحه مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از خط d برابر ۳ واحد باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۲. سکه‌ای به شعاع ۲ را روی یک صفحهٔ مستطیلی به اضلاع ۶ و ۸ پرتاب می‌کنیم. در صورتی‌که مرکز سکه داخل مستطیل باشد، مساحت محدود به مکان هندسی مرکز سکه برای این‌که سکه کاملاً داخل مستطیل قرار بگیرد، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

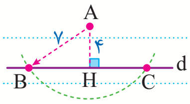
۳. مربع ABCD به ضلع ۲ مفروض است، مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن از تمام رئوس بزرگ‌تر از ۱ است، دارای کدام مساحت است؟

۱) π ۲) $4-\pi$ ۳) $4-\frac{\pi}{2}$ ۴) $4-2\pi$

در برخی از سؤالات هندسه از ما می‌پرسند «چند نقطه روی یک شکل وجود دارد که دارای ویژگی به‌خصوصی باشد» در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی به‌خصوص دارند را پیدا می‌کنیم و سپس به بررسی تعداد نقاط تقاطع آن مکان هندسی و شکل گفته شده می‌پردازیم.

نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟

نقاطی که به فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۷ قرار دارند و چون $7 > 4$ است، پس این دایره [به عنوان یک مکان هندسی] خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و همین نقاط، جواب‌های مورد نظر هستند.



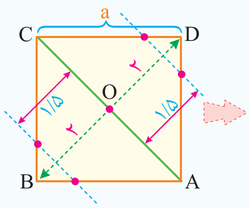
Test در مربع ABCD به ضلع $۲\sqrt{۲}$ ، چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از قطر AC برابر $۱/۵$ واحد باشد؟

۱) هیچ
۲) ۲
۳) ۴
۴) بیشمار

۳ نقاطی که به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از قطر AC قرار دارند، روی دو خط به موازات AC و به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از آن واقع‌اند. حال باید بررسی کنیم که آیا این دو خط نقطهٔ تقاطعی با اضلاع مربع دارند یا نه؟

این نقاط در صورت وجود جواب‌های تست هستند:

$$a = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow BD = a\sqrt{۲} = \sqrt{۲} \times (۲\sqrt{۲}) = ۴ \Rightarrow OB = OD = ۲$$

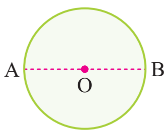


چون $OD > ۱/۵$ ، پس این دو خط، اضلاع مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

۴. در لوزی به اقطار ۶ و ۸ چند نقطه روی محیط لوزی وجود دارد که به فاصلهٔ $۲/۵$ واحد از مرکز لوزی باشد؟

۱) هیچ
۲) ۴
۳) ۸
۴) بیشمار

۵. در دایرهٔ $C(O,R)$ اگر اندازهٔ قطر AB برابر ۸ باشد، چند نقطه روی محیط دایره به فاصلهٔ ۵ واحد از قطر AB وجود دارد؟

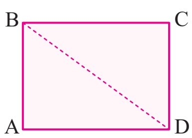


۱) هیچ
۲) ۲
۳) ۴
۴) بیشمار

۶. در مثلث ABC اگر $BC = ۸$ و مساحت مثلث ۳۶ باشد، چند نقطه روی دو ضلع دیگر مثلث وجود دارد که فاصلهٔ آن ها از قاعدهٔ BC برابر ۶ باشد؟

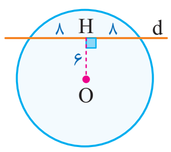
۱) ۱
۲) هیچ
۳) ۲
۴) ۱ یا ۲

۷. در مستطیل ABCD به اضلاع $AB = ۳$ و $BC = ۴$ چند نقطه روی اضلاع مستطیل وجود دارد که فاصلهٔ آنها از قطر BD برابر $۲/۴$ باشد؟



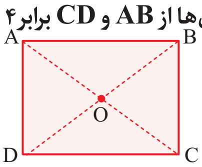
۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۸. در شکل زیر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d برابر ۶ است، چند نقطه روی محیط دایره به فاصلهٔ ۱۰ واحد از خط d وجود دارد؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

۹. مستطیل ABCD به اضلاع $AB = ۸$ و $AD = ۶$ مفروض است. چند نقطه روی قطرهای مستطیل وجود دارد که اختلاف فاصلهٔ آن‌ها از AB و CD برابر ۴ واحد باشد؟

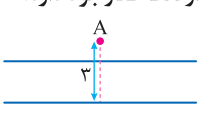


۱) هیچ
۲) ۲
۳) ۴
۴) بیشمار

۱۰. نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصلهٔ $۶/۵$ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) هیچ
۴) ۴

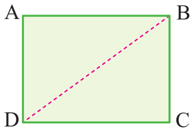
۱۱. سه خط موازی با فاصلهٔ ۲ واحد از هم واقع‌اند. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط وسط برابر ۳ واحد باشد، چند نقطه روی این خطوط به فاصلهٔ ۵ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۵

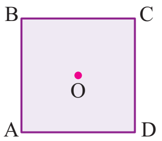
۱۲. در مثلث ABC اگر $BC=۶$ و مساحت برابر ۱۲ باشد. چند نقطه روی قاعدهٔ BC به فاصلهٔ ۳ واحد از رأس A وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) یک
۳) دو ۴) چهار



۱۳. در مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۳ و ۴ چند نقطه روی قطر BD وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از رأس A کمتر از ۲/۵ باشد؟

۱) هیچ ۲) یک
۳) دو ۴) بیشمار



۱۴. در مربع $ABCD$ به ضلع ۴ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز مربع $\sqrt{۲}$ واحد باشد؟

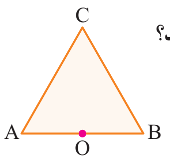
۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۸ ۴) هیچ

۱۵. در مربع $ABCD$ به ضلع ۸ چند نقطه روی محیط آن یافت می‌شود که به فاصلهٔ ۵ واحد از مرکز مربع باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴
۳) هیچ ۴) ۸

۱۶. در مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۶ و ۸ چند نقطه روی اضلاع وجود دارد که به فاصلهٔ ۴ واحد از محل تلاقی قطرهای مستطیل باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸



۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۴ واحد چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از وسط ضلع AB برابر ۲ باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۶

۱۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC اندازهٔ ضلع قائم $۲\sqrt{۲}$ است. چند نقطه روی محیط مثلث وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از وسط وتر مثلث برابر ۲ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

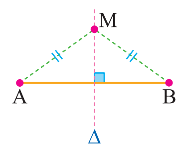
۱۹. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ به مساحت ۹۰ و اندازهٔ قاعده‌ها ۱۸ و ۱۲ است چند نقطه روی قاعده‌های ذوزنقه یافت می‌شود که به فاصلهٔ ۳ واحد از محل تلاقی قطرهای ذوزنقه باشد؟

۱) هیچ ۲) ۳
۳) ۲ ۴) ۴

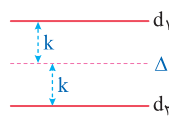
مکان‌های هم فاصله از دو چیز

یکی از مهم‌ترین مکان‌های هندسی در صفحه، مکان هندسی نقاط هم فاصله از دو چیز است که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

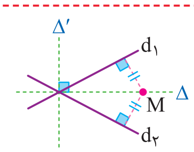
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ به یک فاصله هستند، خطی موازی آن دو خط و بین آن‌هاست.

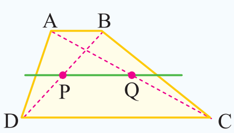


۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است [این نیمسازها همواره برهم عمودند].



Test چند نقطه روی قطرهای ذوزنقهٔ $ABCD$ وجود دارد که فاصلهٔ آن از دو قاعده یکسان باشد؟

۱) نامشخص ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار



۲ نقاطی که به فاصلهٔ یکسان از دو قاعدهٔ ذوزنقه قرار دارند، روی خطی موازی دو قاعده هستند که فاصلهٔ آن از هرکدام از قاعده‌ها نصف ارتفاع ذوزنقه است. این خط قطعاً قطرهای ذوزنقه را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند. [این خط را خط میانگین ذوزنقه می‌نامند].

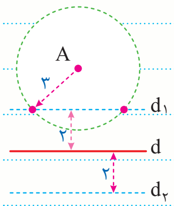
۲۰. چند نقطه روی محیط یک مستطیل وجود دارد، که از قطرهای آن به یک فاصله باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) بیشمار

اشتراک دو مکان هندسی

در بعضی سؤال‌ها از ما می‌پرسند «چند نقطه وجود دارد که هم این ویژگی را داشته باشد و هم آن ویژگی را»، در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که این ویژگی و نیز مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی را دارند پیدا می‌کنیم، سپس به بررسی تعداد نقاط اشتراک (تقاطع) این دو مکان هندسی می‌پردازیم.

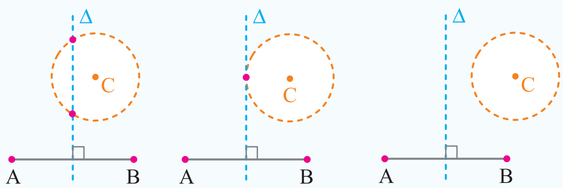
نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d باشد؟



نقاطی که به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ A قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A واقع‌اند [این ویژگی]. همچنین نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن قرار دارند [آن ویژگی]. حال باید تعداد نقاط اشتراک این دو مکان هندسی را بررسی کنیم. همان‌طور که در شکل مشخص است این دو مکان هندسی همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین ۲ نقطه با شرایط گفته‌شده وجود دارد.

Test نقاط $A\,,B,C$ در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه وجود دارد که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟

۱) حداکثر یک نقطه ۲) حداکثر ۲ نقطه
۳) دقیقاً ۲ نقطه ۴) هیچ‌نقطه‌ای وجود ندارد.



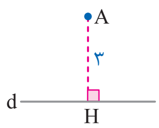
۲ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است. مکان هندسی نقاطی که از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۳ است. نقاط تلاقی عمود منصف AB با این دایره، جواب این مسئله است. با توجه به شکل‌های مقابل مسئله دو جواب یا یک جواب یا بدون جواب است. پس حداکثر ۲ نقطه وجود دارد.

(Δ عمود منصف پاره‌خط AB است.)

۲۱. چند نقطه در صفحهٔ ذوزنقهٔ ABCD وجود دارد که از دو رأس مقابل A و C و همچنین از دو قاعده به یک فاصله باشد؟

۱) هیچ ۲) دقیقاً یک
۳) حداکثر دو ۴) نامشخص

۲۲. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از d به فاصلهٔ ۱/۵ سانتی‌متر باشد؟



۱) هیچ ۲) یک
۳) دو ۴) بیشمار

۲۳. نقاط $A\,,B\,,C\,,D$ رئوس ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD به قاعده‌های AB و CD هستند، چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از نقاط B و A و همچنین از نقاط D و C به یک فاصله باشند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بیشمار

۲۴. نقاط $A\,,B\,,C$ در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاط هم فاصله از B و که به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از C باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۲۵. دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک از نقاط نیست در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) هیچ ۲) بیشمار ۳) دو ۴) یک

۲۶. دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقطه A در صفحهٔ آن‌ها مفروض است، حداکثر چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از d_1 و d_2 به یک فاصله و از A به فاصلهٔ ۲ باشد؟

۱) یک ۲) دو ۳) چهار ۴) هشت

۲۷. دو خط d_1 و d_2 در نقطهٔ A متقاطع‌اند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۳ و از d_1 و d_2 به یک فاصله باشد؟

۱) دو ۲) چهار ۳) بیشمار ۴) هیچ

۲۸. در چهارضلعی ABCD اضلاع AB و CD غیرموازی‌اند، چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از رئوس B و A و همچنین از رئوس D و C به یک فاصله باشند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بیشمار

۲۹. چند نقطه در صفحهٔ مختصات وجود دارد که از محور x ها و محور y ها هم فاصله بوده و در ضمن فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ $A(3,0)$ و $B(0,-1)$ با هم برابر باشد؟

۱) یک ۲) هیچ ۳) دو ۴) بیشمار

۳۰. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از محور x ها و محور y ها هم فاصله بوده و به فاصلهٔ ۲ واحد از محور x ها باشند؟

۱) دو ۲) چهار

۳) هیچ ۴) بیشمار

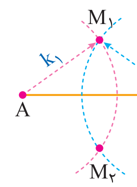
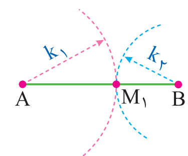
۳۱. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط $A(۳,۰)$ و $B(۰,-۱)$ به یک فاصله بوده و فاصلهٔ آن‌ها از نیمساز ربع اول و سوم برابر ۲ باشد؟

۱) یک ۲) دو

۳) هیچ ۴) چهار

اشتراک دو مکان هندسی مشهور

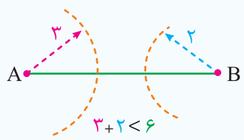
یکی از مشهورترین حالاتی که مربوط به تقاطع دو مکان هندسی است، حالتی است که پرسیده می‌شود «چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ k_1 از نقطهٔ A و به فاصلهٔ k_2 از نقطهٔ B باشد»، در این حالت باید وضعیت دایرهٔ به مرکز A و به شعاع k_1 و دایرهٔ به مرکز B و به شعاع k_2 را بررسی کنیم که سه حالت عمده رخ می‌دهد:

۱ اگر این دو دایره متقاطع باشند، دو نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقاط M_1 و M_2]	
۲ اگر این دو دایره مماس باشند، فقط یک نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقطهٔ M_1]	
۳ اگر این دو دایره همدیگر را قطع نکنند، هیچ نقطه‌ای با شرایط فوق وجود ندارد.	چون دو دایره همدیگر را قطع نکرده‌اند، نقطه‌ای دیده نمی‌شود.

Test دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از A و به فاصلهٔ ۲ واحد از B باشد؟

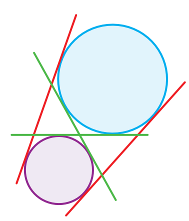
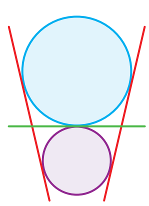
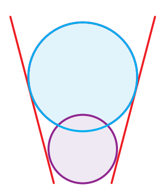
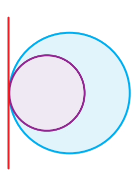
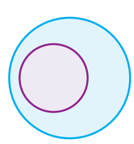
۱) یک ۲) دو

۳) چهار ۴) هیچ



۴ با توجه به این‌که فاصلهٔ A و B از هم ۶ واحد است، دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۳ و دایرهٔ به مرکز B و به شعاع ۲ همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

برای تشخیص وضعیت دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 و طول خط‌المرکزین d نسبت به هم، d را با R_1+R_2 و $|R_1-R_2|$ مقایسه می‌کنیم:

وضعیت	متخارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل
رابطه	$d>R_1+R_2$	$d=R_1+R_2$	$\|R_1-R_2\|<d<R_1+R_2$	$d=\|R_1-R_2\|$	$d<\|R_1-R_2\|$
شکل					

۳۲. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۷/۵ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۵/۱ واحد از A و به فاصلهٔ ۲/۶ واحد از B باشد؟

۱) یک ۲) دو

۳) چهار ۴) هیچ

۳۳. مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است، چند نقطه در صفحهٔ مربع وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از رأس‌های متقابل A و C برابر ۲ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۳

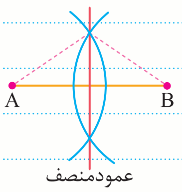
ترسیم‌های مورد بحث در کتاب درسی را می‌توان به ۴ دستهٔ عمده تقسیم کرد که هرکدام دارای نتایج خاص خود هستند:

انواع ترسیم‌ها

- رسم عمود منصف
- رسم نیمساز
- رسم مثلث
- رسم چهار ضلعی

اولین و مهم‌ترین ترسیم مورد بحث در کتاب درسی، رسم عمودمنصف است.

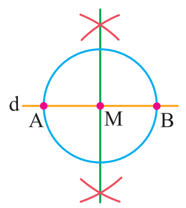
برای رسم خط عمودمنصف پاره‌خط AB، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ مناسب (بیش از نصف طول AB) باز می‌کنیم و یک بار به مرکز A و یک بار به مرکز B کمان‌هایی رسم می‌کنیم. سپس به کمک خط‌کش خطی رسم می‌کنیم که از محل تقاطع دوکمان بگذرد، این خط همان عمودمنصف AB است [در این ترسیم ۲بار از پرگار و یک بار از خط کش استفاده می‌شود].



از رسم عمودمنصف، در سه ترسیم بسیار مهم دیگر نیز استفاده می‌شود:

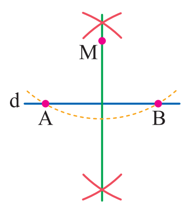
۱ برای رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M واقع بر آن، ابتدا به کمک پرگار دو نقطه مانند A و B روی خط d طوری پیدا می‌کنیم که $MA = MB$. [یعنی به مرکز M و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در A و B قطع کند]، سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم [در این ترسیم ۳ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود].

STOP از یک نقطه مانند A روی خط d فقط یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد.



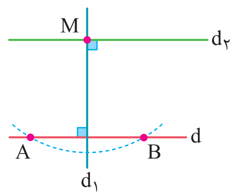
۲ برای رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M غیر واقع بر خط d، ابتدا به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d طوری پیدا می‌کنیم که $MA = MB$ باشد [برای این کار به مرکز M و شعاع دلخواه کمان می‌زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند]، سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. [در این ترسیم ۳ بار از پرگار و یک بار از خط‌کش استفاده می‌شود].

STOP از یک نقطه مانند A خارج خط d فقط یک عمود می‌توان بر خط d رسم کرد.



۳ برای رسم خط موازی خط d از نقطهٔ M خارج آن، ابتدا خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد، سپس خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که از M بگذرد و بر d_1 عمود باشد [در این ترسیم ۶ بار از پرگار و ۲ بار از خط‌کش استفاده می‌شود].

STOP دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.



Test در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۶ و ۲ عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸

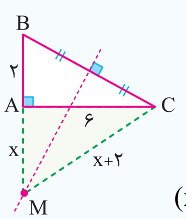
۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\frac{25}{3}$

۲ می‌دانیم هرنقطه روی عمود منصف از دو سرپاره‌خط به یک فاصله است.

بنابراین ازنقطهٔ M به سردیگرپاره‌خط یعنی C وصل می‌کنیم. دراین صورت $MB=MC=x+2$ خواهد بود.

حال در مثلث AMC به‌کمک فیثاغورس x به‌دست می‌آید:

$$(x+2)^2=x^2+6^2 \xrightarrow[6,8,10]{\text{حدس}} x=8$$



۳۴. پاره‌خط AB به طول ۸ واحد مفروض است. برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB طبق روش بیان شده در کتاب درسی نیاز به رسم چند کمان با مراکز مختلف است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

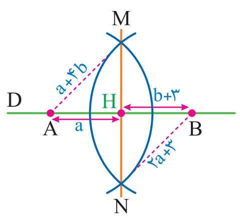
۳۵. پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. در رسم عمودمنصف AB دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $3a-1$ باز کرده‌ایم تا به مراکز A و B کمان‌هایی رسم کنیم. برای این‌که ترسیم به درستی انجام گیرد، حدود a کدام باید باشد؟

۱) $0<a<2$
۲) $\frac{1}{3}<a<2$
۳) $a>2$
۴) $a>\frac{11}{3}$

۳۶. اگر خط d و پاره‌خط AB غیرموازی و غیرعمود باشند، تعداد نقاط واقع بر d که از نقطه‌های A و B به یک فاصله باشند، کدام است؟

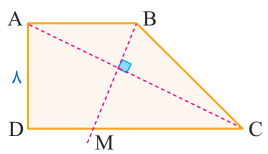
۱) دقیقاً دو نقطه
۲) حداقل دو نقطه
۳) دقیقاً یک نقطه
۴) بیشمار نقطه

۳۷. دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی خط D مفروض‌اند. شکل زیر ترسیم عمودمنصف پاره‌خط AB را نشان می‌دهد که در رسم آن، به مراکز A و B کمان‌هایی رسم شده، در صورتی که $AH=a$ و $BH=b+3$ باشد، فاصلهٔ دو نقطهٔ M و N از هم کدام است؟



۱) ۲۶
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۴

۳۸. در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل $CD=16$ و $AD=8$ است. عمودمنصف قطر AC قاعدهٔ CD را در M قطع می‌کند، فاصلهٔ M از رأس C کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۷

۳۹. نقطهٔ M روی خط d قرار دارد، برای رسم خط عمود بر d و گذرا از M کدام روش درست است؟

۱) پیدا کردن دو نقطهٔ A و B با فاصلهٔ مساوی از M و سپس رسم عمودمنصف AB
۲) رسم دایره‌ای گذرا از M و مماس بر d و سپس رسم شعاع گذرا از M
۳) در نظر گرفتن دو نقطهٔ دلخواه مانند A و B و رسم منصف AB
۴) از نقطهٔ دلخواه A روی خط d دایره‌ای به شعاع AM رسم کرده، سپس مماس بر دایره در M را رسم می‌کنیم.

۴۰. در رسم خط عمود بر خط d از نقطهٔ M خارج خط d طبق روش بیان شده در کتاب درسی اولین گام کدام است؟

۱) رسم دو خط غیرعمود بر خط d
۲) در نظر گرفتن دو نقطهٔ دلخواه روی خط d
۳) رسم دایره‌ای به مرکز M که خط را در دو نقطه قطع کند.
۴) پیدا کردن پای عمود روی خط d

۴۱. در رسم کدام‌یک از موارد زیر طبق روش‌های کتاب درسی نیاز به ترسیم کمان‌های بیشتری داریم؟

۱) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن
۲) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن
۳) رسم خط موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن
۴) هر سه یکسان هستند.

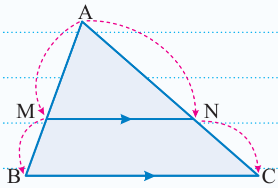
۴۲. در ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط از کدام ترسیم استفاده می‌شود؟

۱) ترسیم خطی موازی یک خط
۲) ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن
۳) ترسیم عمودمنصف یک پاره‌خط
۴) ترسیم خطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله است.

۴۳. در ترسیم ارتفاع AH از مثلث ABC طبق روش بیان شده در کتاب درسی کدام ترسیم در صورت نیاز متقدم بر سایرین است؟

۱) ترسیم عمودمنصف ضلع BC
۲) ترسیم کمانی به مرکز A و متقاطع با BC
۳) ترسیم خط گذرا از A و عمود بر BC
۴) رسم کمان‌هایی به مراکز B و C و به شعاع بزرگتر از نصف BC

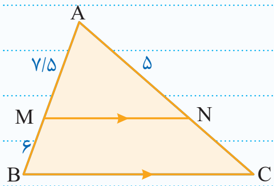
قضیهٔ تالس [جزء به جزء]



هرگاه در یک مثلث، خطی راست موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، ۴ پاره‌خط جدا می‌کند که اندازهٔ آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهد [این قضیه را تالس جزء‌به‌جزء می‌نامند].

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

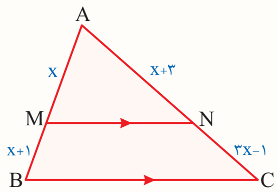
در شکل مقابل MN و BC موازی‌اند. طول پاره‌خط NC کدام است؟



$$\frac{7/5}{6}=\frac{5}{NC}\Rightarrow NC=\frac{6\times 5}{7/5}=4$$

معمولاً در مواردی که اندازهٔ پاره‌خط MN نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، بهتر است از تالس جزء‌به‌جزء استفاده کنیم.

Test **در شکل مقابل MN موازی قاعدهٔ BC است، مقدار x کدام است؟**

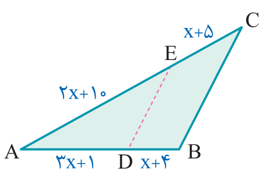


۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲ چون در این تست اندازهٔ پاره‌خط MN نه داده شده و نه خواسته شده، بهتر است از تالس جزء‌به‌جزء استفاده کنیم:

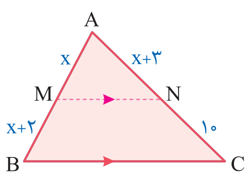
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{x}{x+1}=\frac{x+3}{3x-1}\Rightarrow 3x^2-x=x^2+4x+3 \Rightarrow 2x^2-5x-3=0\Rightarrow(x-3)(2x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=-\frac{1}{2} & \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

۱۶۸. در شکل مقابل $BC \parallel DE$ است. مقدار x کدام است؟



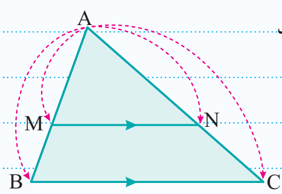
۱) ۵
۲) ۷
۳) ۳
۴) ۵−

۱۶۹. در شکل مقابل MN و BC موازی‌اند. بزرگ‌ترین مقدار x کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱/۵

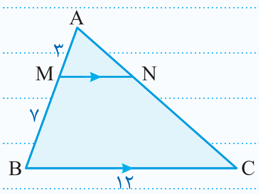
قضیهٔ تالس [جزء به کل]



اگر خطی دو ضلع از اضلاع مثلثی را قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی را از مثلث اصلی جدا می‌کند که اندازهٔ ضلع‌های آن، با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است این قضیه را [تالس جزء به کل] می‌نامند.

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

در شکل زیر اندازهٔ پاره‌خط MN کدام است؟



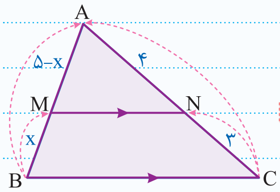
$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{3}{10}=\frac{MN}{12}\Rightarrow MN=3/6$$

به‌طورکلی زمانی از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم که پاره‌خط NM داده یا خواسته شده باشد.

تالس جزء به کل را از سمت قاعده به‌سمت رأس‌ها نیز می‌توان نوشت، اما در این حالت MN را نمی‌توان در نسبت دخالت داد.

مقدار x در شکل مقابل کدام است؟

تالس جزء به کل را از قاعده به سمت رأس می‌نویسیم:

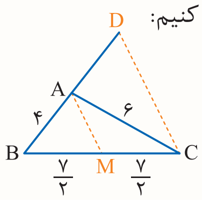


$$\frac{x}{x+(5-x)}=\frac{3}{3+4}\Rightarrow\frac{x}{5}=\frac{3}{7}\Rightarrow 7x=15\Rightarrow x=\frac{15}{7}$$

Test **در مثلث ABC ، اضلاع AB=۴ و AC=۶ و BC=۷ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اندازهٔ BD کدام است؟** (خارج ـ ۹۸)

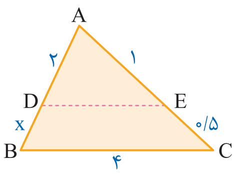
۱) ۷/۵
۲) ۸
۳) ۸/۵
۴) ۹

۲ چون صحبت از دو خط موازی است به سراغ تالس می‌رویم و چون BD را می‌خواهد باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:



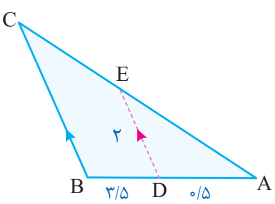
$$\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow\frac{4}{BD}=\frac{\frac{7}{2}}{7}\Rightarrow BD=8$$

۱۷۰. در شکل مقابل DE || BC است. اندازهٔ پاره‌خط DE کدام است؟



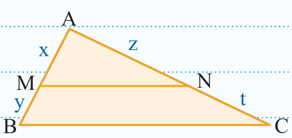
۱) $\frac{7}{3}$
۲) ۳
۳) ۱/۵
۴) $\frac{8}{3}$

۱۷۱. در شکل مقابل اندازهٔ BC کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۴
۳) ۱۲
۴) ۱۸

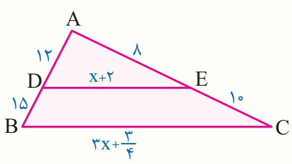
اگر خطی روی دو ضلع مثلثی چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است. [عکس قضیهٔ تالس]



$$\frac{x}{y}=\frac{z}{t}\Rightarrow MN\parallel BC$$

Compote
در سؤال‌هایی که به‌کمک عکس تالس حل می‌شوند، معمولاً اشاره‌ای به خط موازی قاعده نمی‌شود و یا حتی گاهی اصلاً چنین خطی وجود ندارد؛ اما در این حالت طول هر ۴ قطعه روی ساق‌های مثلث معلوم است و اعداد طوری هستند که نسبت آن‌ها یک تناسب تشکیل می‌دهد.

Test **با توجه به شکل مقابل، x کدام است؟**

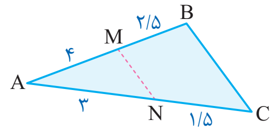


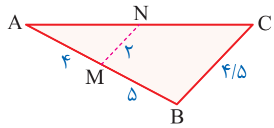
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷/۵
۴) ۶/۵

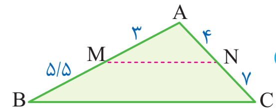
۱ در این مسئله، اشاره‌ای به موازی بودن DE و BC نشده است، پس ابتدا نسبت اندازه‌های پاره‌خط‌های ایجادشده بر اضلاع AB و AC را با هم مقایسه می‌کنیم:

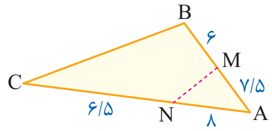
$$\frac{12}{15}=\frac{8}{10}\Rightarrow DE\parallel BC \qquad \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{12}{27}=\frac{x+2}{3x+\frac{3}{4}}\Rightarrow 36x+9=27x+54\Rightarrow 9x=45\Rightarrow x=5$$

۱۷۲. در کدام‌یک از شکل‌های زیر، پاره‌خط MN موازی قاعدهٔ BC است؟

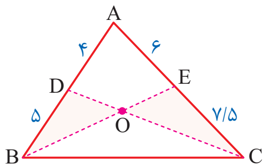
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

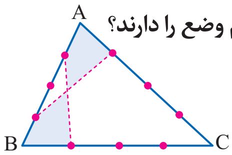
۱۷۳. در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱

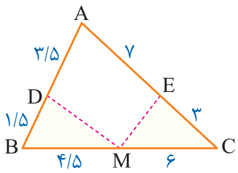
۱۷۴. در شکل مقابل هرضلع مثلث ABC به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی سایه زده شده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



۱) هم‌مساحت ۲) هم‌محیط

۳) هم‌نهشت ۴) متشابه

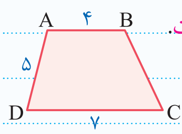
۱۷۵. در شکل داده شده مساحت مثلث BDM چند درصد مساحت مثلث EMC است؟



۱) ۵۰ ۲) ۷۵

۳) ۶۰ ۴) ۴۸

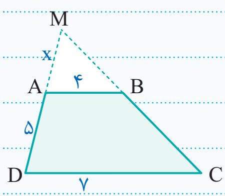
گاهی اوقات به‌جای این‌که به‌طور مستقیم بگویند دو خط d و d′ موازی‌اند، می‌گویند فلان چهارضلعی، ذوزنقه است.



در ذوزنقهٔ مقابل، اضلاع AD و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. فاصلهٔ M از D چقدر است؟

چون AB||CD است می‌توانیم از تالس استفاده کنیم؛ از طرف دیگر چون AB جزء داده‌های مسئله است باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{x}{x+۵}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow ۷x=۴x+۲۰\Rightarrow ۳x=۲۰\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۳}$$



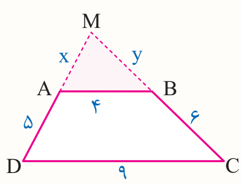
حال با معلوم شدن x فاصلهٔ M از D قابل محاسبه است:

$$MD=MA+AD=\frac{۲۰}{۳}+۵=\frac{۳۵}{۳}$$

گاهی اوقات نه از کلمهٔ موازی استفاده می‌شود و نه نامی از ذوزنقه است، بلکه از عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب استفاده می‌کنند و به این وسیله، به بیان موازی بودن دو خط می‌پردازند.

Test در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۴ و ۹ و طول ساق‌ها ۶ و ۵ است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می‌شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۴ ۲) ۱۱/۶ ۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸

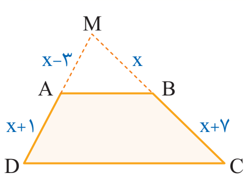


۴ چون AB جزء داده‌هاست باید به سراغ تالس جزء به کل برویم:

$$\overset{\Delta}{MDC}:AB||DC\Rightarrow\frac{x}{x+۵}=\frac{y}{y+۶}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{x}{۵}=\frac{y}{۶}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow x=۴\,,\ y=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با: $x+y+۴=۱۲/۸$

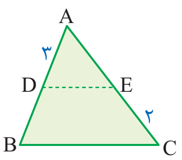
۱۷۶. در ذوزنقهٔ ABCD امتداد ساق‌های آن در نقطهٔ M متقاطع‌اند. مقدار x کدام است؟



۱) ۵/۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۶/۵

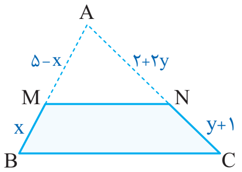
۱۷۷. در شکل زیر DECB ذوزنقه است و ساق BD یک واحد کوچک‌تر از AE است. اندازهٔ AC کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

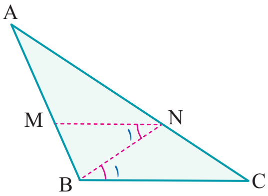
۱۷۸. در شکل مقابل MNCB ذوزنقه است. مقدار x کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

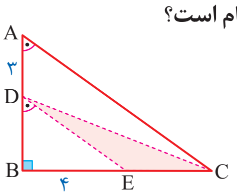
۱۷۹. در شکل مقابل $AM = ۳MB$ و $\widehat{N}_۱ = \widehat{B}_۱$ می‌باشد. حاصل $\frac{CN}{AC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

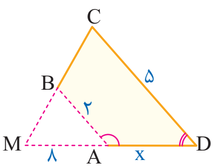
۱۸۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مطابق شکل $\widehat{A} = \widehat{D}$ می‌باشد. اگر $AD = ۳$ و $BE = ۴$ باشد، مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۸۱. در چهارضلعی ABCD اگر زوایای $\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ مکمل هم باشند و امتداد اضلاع BC و AD در نقطهٔ M به فاصلهٔ ۸ واحد از رأس A متقاطع باشند. اندازهٔ ضلع AD کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۱۸ ۴) ۱۲

تالس جزء به کل کاربردی

منظور از تالس کاربردی مجموعهٔ مسائلی است که طول سایه، بلندی یک درخت یا ارتفاع یک سازه و نظایر آن را از ما می‌خواهند و به‌طور مستقیم، صحبت از یک مثلث در هندسه نیست!

1 تیپ اول این مسائل حالتی است که اطلاعات داده‌شده و خواسته‌شده در مسئله، درون یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد. در این حالت باید به پاره‌خطی که موازی ضلع عمودی قرار دارد توجه و با استفاده از تالس جزء به کل خواستهٔ مسئله را پیدا کنیم.

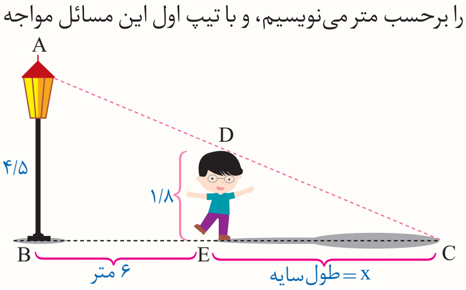
2 در تیپ دوم اطلاعات داده‌شده در مسئله روی اضلاع یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه قرار دارد که ساق قائم آن سطح زمین است. در این حالت با رسم یک خط به موازات ساق قائم، یک مثلث قائم‌الزاویه درون ذوزنقه ایجاد و اطلاعات مسئله را به این مثلث منتقل می‌کنیم و در انتها قضیهٔ تالس را روی این مثلث می‌نویسیم.

Test شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر در فاصلهٔ ۶ متری از تیر چراغ‌برق به ارتفاع ۴/۵ متر ایستاده است. طول سایهٔ این شخص روی زمین چند متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴

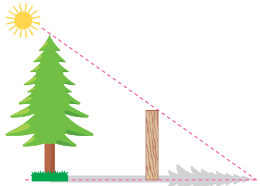
۳) ۳/۵ ۴) ۵/۵

۲ چون هیچ شکلی داده نشده است، باید شکل فرض خودمان را رسم کنیم. حال همهٔ اندازه‌ها را برحسب متر می‌نویسیم، و با تیپ اول این مسائل مواجه هستیم:



$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{۱/۸}{۴/۵} = \frac{x}{x+۶} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{x}{x+۶} \xrightarrow{\text{تفضیل درمخرج}} \frac{۲}{۳} = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۴$$

۱۸۲. در شکل زیر اگر نوک سایهٔ چوب ۱/۵ متری بر نوک سایهٔ درخت منطبق باشد و طول سایهٔ چوب و درخت ۶ و ۱۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



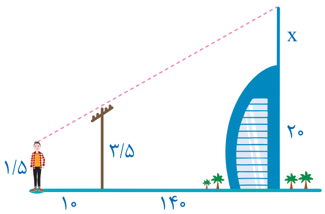
۱) ۳۶

۲) ۲۴

۳) ۳۰

۴) ۲۵

۱۸۳. در شکل زیر، دکلی روی یک ساختمان به ارتفاع ۲۰ متر نصب شده است. دید چشم ناظری با قد ۱/۵ متر از نوک دکل و تیرک ۳/۵ متری بین آن‌ها، در یک راستا است. ارتفاع دکل چقدر است؟



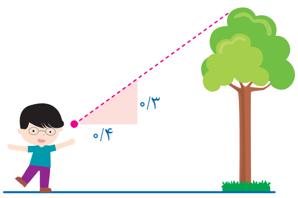
۱) ۱۱/۸

۲) ۱۲/۲

۳) ۱۲/۸

۴) ۱۱/۵

۱۸۴. شخصی برای پیدا کردن ارتفاع یک درخت، یک تکه مقوا به شکل زیر ساخت. اگر او در فاصلهٔ ۸/۸ متری از درخت بایستد، می‌تواند با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث نوک درخت را ببیند. فاصلهٔ تقریبی چشم او از زمین ۱/۶ متر است. ارتفاع تقریبی درخت کدام است؟



۱) ۷/۸

۲) ۸

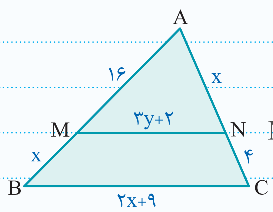
۳) ۸/۲

۴) ۸/۴

ترکیب تالس جزء به جزء و تالس جزء به کل

اگر در مسائل مربوط به تالس، هم اعداد روی ساق‌های مثلث و هم اعداد مربوط به قاعده‌ها [لااقل یکی از دو قاعده] مجهول بودند، اما برحسب یک متغیر نبودند مجبوریم دو بار از تالس استفاده کنیم. یک بار جزء‌به‌جزء روی ساق‌ها و دیگری جزء به کل روی قاعده و خط موازی آن.

در شکل زیر MN موازی BC است. x و y را بیابید.



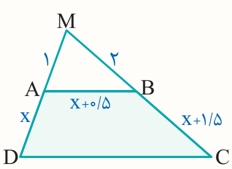
ابتدا مقدار x را به کمک تالس جزء به جزء به‌دست می‌آوریم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جزء‌به‌جزء}} \frac{۱۶}{x}=\frac{x}{۴} \Rightarrow x^۲=۶۴ \Rightarrow x=۸ \Rightarrow \begin{cases} AB=۱۶+۸=۲۴ \\ BC=(۲\times۸)+۹=۲۵ \end{cases}$$

حال می‌توانیم y را به کمک تالس جزء به کل به‌دست آوریم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جزء‌به‌کل}} \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۴}=\frac{۳y+۲}{۲۵} \Rightarrow ۷۲y+۴۸=۴۰۰ \Rightarrow y=\frac{۳۵۲}{۷۲} \Rightarrow y=\frac{۴۴}{۹}$$

Test از امتداد ساق‌های ذوزنقه ABCD، مثلثی با اضلاع ۱ و ۲ پدید آمده است. اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه چقدر است؟



۱) ۷/۵

۲) ۸

۳) ۷

۴) ۶/۵

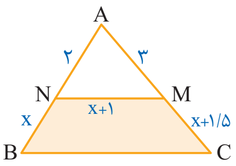
۱ ابتدا به کمک تالس جزء‌به‌جزء، x را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{MA}{AD}=\frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۲}{x+۲} \Rightarrow x+۲=۲x \Rightarrow x=۲$$

حال با استفاده از تالس جزء به کل، ضلع DC را به‌دست می‌آوریم:

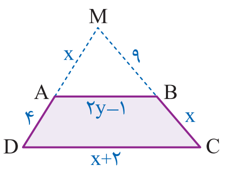
$$\frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{۱}{x+۱}=\frac{x+۰/۵}{DC} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۲/۵}{DC} \Rightarrow DC=۷/۵$$

۱۸۵. در شکل زیر NMCB ذوزنقه است. اندازه پاره‌خط BC کدام است؟



۱) ۸/۵
۲) ۷/۵
۳) ۹
۴) ۱۰

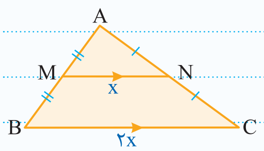
۱۸۶. در شکل زیر ذوزنقهٔ ABCD مفروض است و امتداد ساق‌های آن در M متقاطع‌اند. محیط ذوزنقه کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



۱) ۲۰/۴
۲) ۲۰/۸
۳) ۲۲/۶
۴) ۲۲/۸

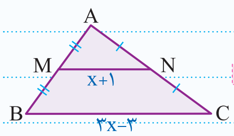
حالت خاص قضیهٔ تالس

پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، طبق قضیهٔ تالس، نصف ضلع سوم و طبق عکس قضیهٔ تالس، موازی ضلع سوم است.



مطابق شکل، مقدار x کدام است؟

نقاط M و N وسط اضلاع AB و AC هستند، پس باید $x+۱$ نصف $۳x-۳$ باشد، یعنی:

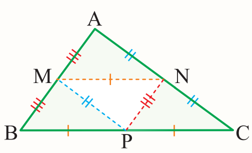


$$x+۱=\frac{۳x-۳}{۲}\Rightarrow ۳x-۳=۲(x+۱)\Rightarrow ۳x-۳=۲x+۲\Rightarrow x=۵$$

Test اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، محیط هرکدام از ۴ مثلث به‌دست آمده چه کسری از محیط مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

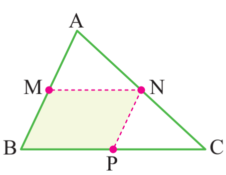
۱ اگر اضلاع مثلث را a , b , c فرض کنیم، در این صورت بنا بر حالت خاص قضیهٔ تالس $MN=\frac{a}{۲}, MP=\frac{b}{۲}, NP=\frac{c}{۲}$ خواهد بود. بنابراین اضلاع هریک از ۴ مثلث کوچک $\frac{a}{۲}, \frac{b}{۲}, \frac{c}{۲}$ است و در نتیجه محیط هرکدام، نصف محیط مثلث اصلی خواهد شد.



۱۸۷. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ اضلاع قائم ۱/۵ و ۲ می‌باشد. از رأس‌های مثلث خطی به موازات اضلاع می‌گذرانیم تا همدیگر را قطع کنند. محیط مثلث به دست آمده کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۲۴

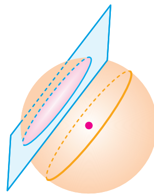
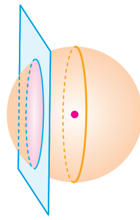
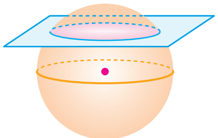
۱۸۸. در شکل داده شده نقطهٔ M وسط ضلع AB از مثلث ABC می‌باشد. اگر ضلع $AC=۷$ و محیط متوازی‌الاضلاع MNPB برابر ۱۳ می‌باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۱۳/۵
۲) ۲۰
۳) ۲۸
۴) ۲۰/۵

منظور از برش، تقاطع دادن یک صفحه با یک جسم هندسی توپُر مانند کرهٔ توپُر، مخروط توپُر، استوانهٔ توپُر و ... است و شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی توپُر حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره، همواره یک دایره است.

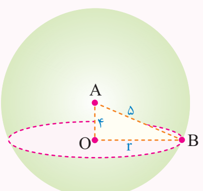
نوع برش	برش مایل	برش قائم	برش افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	دایره	دایره	دایره

هرچه صفحه به مرکز نزدیکتر شود، دایرهٔ ایجاد شده نیز بزرگتر می‌شود. در حالتی‌که صفحه از مرکز کره بگذرد، دایره‌ای با بیش‌ترین مساحت ایجاد می‌شود که آن را دایرهٔ عظیمهٔ کره می‌نامند.

Test **یک کرهٔ چوبی تو پُر به شعاع ۵ واحد را با یک صفحه، به فاصلهٔ ۴ واحد از مرکز برش زده‌ایم. سطح مقطع حاصل چقدر است؟**

۱) ۴π ۲) ۶π

۳) ۷π ۴) ۹π



۴ در مثلث قائم الزاویهٔ مشخص‌شده، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$۵^۲ = ۴^۲ + r^۲ \Rightarrow r^۲ = ۹ \Rightarrow r = ۳$$

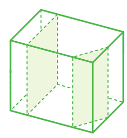
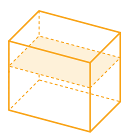
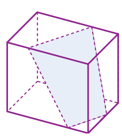
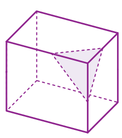
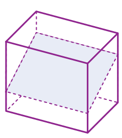
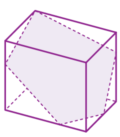
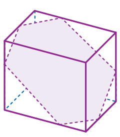
بنابراین مساحت دایرهٔ ایجاد شده برابر است با: $S = \pi r^۲ = ۹\pi$

۶۳۵. یک کرهٔ‌چوبی تو پُر به شعاع ۱۳ را با یک صفحه برش زده‌ایم، سطح مقطع حاصل ۲۵π است، فاصلهٔ مرکز کره از صفحهٔ بُرش کدام است؟

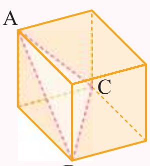
۱) ۶ ۲) ۱۲

۳) ۸ ۴) ۱۰

نمونه‌هایی از برش افقی، قائم و مایل یک مکعب مستطیل به قاعدهٔ مربع که در کتاب درسی بحث‌شده به‌صورت جدول زیر است:

نوع برش	برش قائم	برش افقی	برش مایل				
نمایش برش							
شکل حاصل از برش	مستطیل	مستطیل	ذوزنقه	مثلث	مستطیل	پنج‌ضلعی	شش‌ضلعی

Test **مکعب شکل مقابل توسط صفحه ABC برش خورده است. اگر ضلع مکعب ۲ باشد، سطح مثلث برش خورده کدام است؟**



۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲ هر کدام از اضلاع مثلث ایجاد شده. قطر وجه‌های مکعب هستند که قطر مربع هم $\sqrt{۲}$ برابر ضلع است، بنابراین:

قطر مربع $a = \sqrt{۲} \times ۲ \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲\sqrt{۲})^۲ = ۲\sqrt{۳}$

۶۳۶. از برش افقی یک مکعب مستطیل به قاعدهٔ ۴,۲ و ارتفاع ۳ کدام شکل حاصل می‌شود؟

۱) مربع به مساحت ۱۶
۲) مستطیل به مساحت ۸
۳) مستطیل به محیط ۱۰
۴) مربع به محیط ۱۶

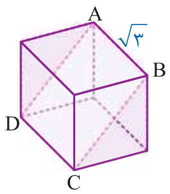
۶۳۷. از برش قائم یک مکعب مستطیل به ابعاد ۲,۳,۵ کدام شکل حاصل می‌شود؟

۱) مربع
۲) مستطیل
۳) ذوزنقه
۴) مثلث

۶۳۸. از برخورد یک صفحه با یک مکعب کدام شکل ممکن نیست حاصل شود؟

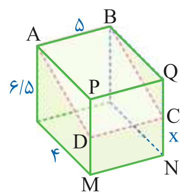
۱) ذوزنقه
۲) مستطیل
۳) شش ضلعی
۴) کایت

۶۳۹. مکعب شکل مقابل به ضلع $\sqrt{۳}$ توسط صفحهٔ ABCD برش خورده است. مساحت صفحهٔ حاصل از برش کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۳

۶۴۰. در مکعب مستطیلی به ابعاد ۶/۵ , ۵ , ۴ صفحهٔ ABCD طوری یال‌های PM و QN را برش زده است که سطح مقطع حاصل مربع شده است. فاصلهٔ نقاط C و D از صفحهٔ قاعده پایین مکعب مستطیل کدام است؟



۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳/۵

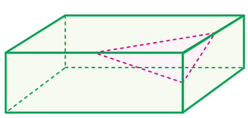
۶۴۱. در یک مکعب، صفحه گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه، کدام است؟ (داخل ـ ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۶۴۲. در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگرگذشته است. مساحت مقطع حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟ (خارج ـ ۹۸)

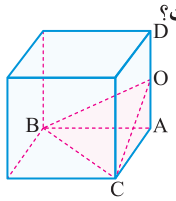
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

۶۴۳. در یک مکعب مستطیل به ابعاد ۲,۴,۶ صفحات گذرا بر وسط یال‌های مکعب، هشت هرم را از مکعب جدا می‌کند که رأس هر یک از هرم‌ها بر رأس مکعب مستطیل واقع است، حجم چندوجهی باقی‌مانده کدام است؟



۱) ۳۶
۲) ۴۲
۳) ۴۰
۴) ۳۳

۶۴۴. در شکل زیر، صفحهٔ گذرا برقطر BC و نقطهٔ O وسط یال AD حجم OACB را از مکعب جدا می‌کند، این حجم چند برابر حجم مکعب است؟

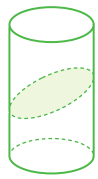
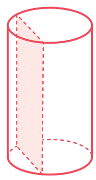
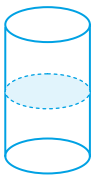


۱) $\frac{۱}{۱۶}$
۲) $\frac{۱}{۱۲}$
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

۶۴۵. صفحهٔ گذرنده بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس از مکعب، آن را به دو جزء تقسیم می‌کند. حجم جزء بزرگتر چند برابر حجم جزء کوچکتر است؟ (خارج ـ ۹۱)

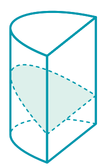
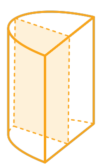
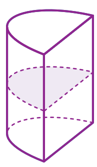
۱) ۵
۲) $۳\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۶

سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه‌های افقی، قائم و مایل به‌صورت زیر است:

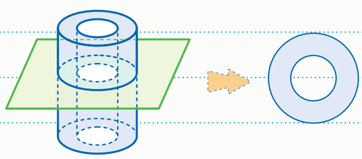
نوع برش	مایل [هردو قاعده را قطع نکند]	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	بیضی	مستطیل	دایره

در برش قائم، در حالتی که صفحه از وسط استوانه بگذرد، مستطیلی با بیش‌ترین مساحت ایجاد می‌شود.

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک نیم استوانه، به‌صورت شکل‌های زیر است:

نوع برش	مایل [هردو قاعده را قطع نکند.]	قائم	افقی
نمایش برش			
شکل حاصل از برش	نیم‌بیضی	مستطیل	نیم‌دایره

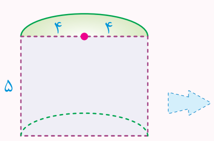
در اثر برخورد صفحه‌ای موازی با استوانهٔ توخالی [لوله] شکل مقابل، یک دایرهٔ توخالی [رینگ] پدید می‌آید.



Test یک استوانهٔ چوبی به ارتفاع ۵ و شعاع قاعدهٔ ۴ واحد را توسط صفحه‌ای عمود بر سطح قاعده و گذرا از مرکز دایرهٔ قاعده، برش می‌زنیم. مساحت سطح مقطع حاصل از بُرش کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰

۳) ۴۰ ۴) ۸۰



۳ سطح مقطع حاصل از برش، یک مستطیل به طول ۸ و عرض ۵ است و مساحت آن برابر است با:

$S=۵\times۸=۴۰$

۶۴۶. از برش قائم یک استوانه قائم کدام شکل حاصل می‌شود؟

۱) مربع ۲) مستطیل

۳) لوزی ۴) بیضی

۶۴۷. از برش افقی یک استوانه به ارتفاع ۳ و حجم ۴۸π یک .... به مساحت .... حاصل می‌شود.

۱) دایره - ۴π ۲) بیضی - ۱۶π

۳) مستطیل - ۱۶ ۴) دایره - ۱۶π

۶۴۸. از برش یک استوانه، یک بیضی حاصل شده است، نوع برش کدام است؟

۱) افقی ۲) قائم

۳) مایل ۴) نامشخص

۶۴۹. از برش قائم یک نیم استوانه همواره کدام شکل حاصل می‌شود؟

۱) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ۲) مستطیل

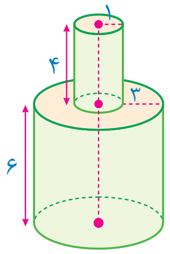
۳) مربع ۴) لوزی

۶۵۰. از برش افقی یک نیم استوانه به حجم 64π و ارتفاع ۲ یک .... به مساحت .... حاصل می‌شود.

۱) دایره - 16π ۲) نیم‌دایره - 16π

۳) دایره - 8π ۴) نیم‌دایره - 32π

۶۵۱. دو استوانه چوبی توپُر به ارتفاع های ۶ و ۴ روی هم قرار گرفته‌اند. اگر فاصله نقاط محیط سطح تماس قاعدهٔ دو استوانه ۳ و شعاع قاعدهٔ استوانه کوچک ۱ باشد، سطح حاصل از برش صفحهٔ عمود و گذرا از مرکز دایره سطح مقطع [محورهای استوانه‌ها] چقدر است؟



۱) ۳۴

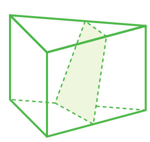
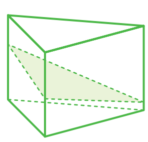
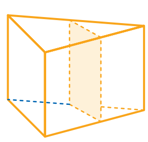
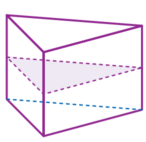
۲) ۶۴

۳) ۳۸

۴) ۵۶

I ❤ gaj

سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک منشور مثلث القاعده، به صورت شکل‌های زیر است:

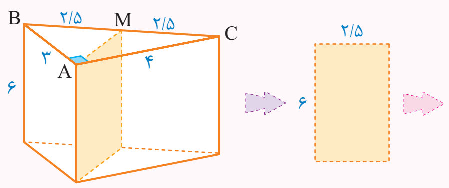
نوع برش	مایل		قائم	افقی
نمایش برش				
شکل حاصل از برش	ذوزنقه	مثلث	مستطیل	مثلث

Test در یک منشور مثلث القاعدهٔ چوبی توپر، قاعده یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۳،۴،۵ و ارتفاع منشور ۶ است، صفحهٔ برش شامل یکی از یال‌های منشور است و از وسط ضلع بزرگ قاعده عبور می‌کند. مساحت سطح مقطع برش کدام است؟

۱) ۱۶/۵ ۲) ۱۳/۵

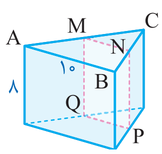
۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۴ طول مستطیل حاصل شده همان ارتفاع منشور یعنی ۶ است و عرض مستطیل حاصل، میانهٔ وارد بر وتر در مثلث ABC است که اندازهٔ آن ۲/۵ است [نصف وتر]، بنابراین مساحت مستطیل حاصل برابر است با:



$S=6\times 2/5=15$

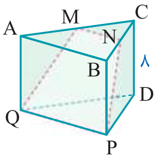
۶۵۲. در یک منشور مثلث القاعدهٔ توپر، مطابق شکل $AB=10$ و ارتفاع منشور ۸ است. صفحه برش قائم بر سطح قاعدهٔ منشور از وسط اضلاع AC و BC گذشته است. مساحت سطح مقطع حاصل شده کدام است؟



۱) ۴۰ ۲) ۳۶

۳) ۲۰ ۴) ۳۲

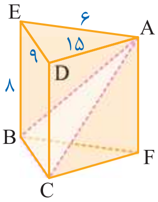
۶۵۳. در یک منشور مثلث القاعده توپر، اضلاع قاعده $AC=۳۰$ ، $AB=۲۰$ و $BC=۱۲$ است. اگر ارتفاع منشور ۸ باشد و مطابق شکل، صفحهٔ برش از وسط اضلاع BC و AC گذشته باشد و یک سطح مقطع چهارضلعی روی منشور ایجاد کرده باشد، محیط این چهارضلعی چقدر خواهد بود؟



۱) ۴۸ ۲) ۶۷

۳) ۵۷ ۴) ۵۶

۶۵۴. در یک منشور مثلث القاعدهٔ توپر، اضلاع قاعده مطابق شکل ۹، ۶ و ۱۵ و ارتفاع منشور ۸ است. صفحهٔ برش مایل، یک سطح مقطع مثلثی از منشور ایجاد کرده است. مساحت این سطح مقطع چقدر است؟

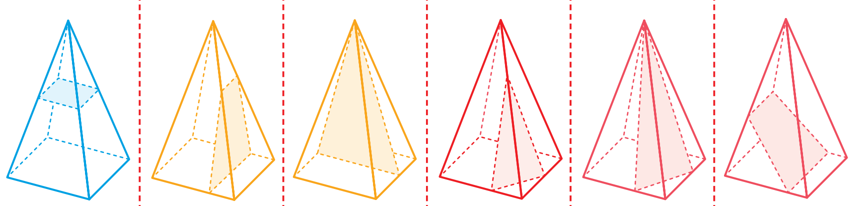


۱) ۴۰ ۲) ۱۸

۳) ۳۲ ۴) ۳۶

برش هرم مربع‌القاعده

اگر یک هرم قائم با قاعدهٔ مستطیل داشته باشیم، از برش افقی آن یک مستطیل و از برش‌های قائم، مثلث متساوی‌الساقین یا ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حاصل می‌شود [صفحهٔ برش ممکن است از رأس هرم عبور کند یا عبور نکند] و از برش مایل نیز باز هم مثلث یا ذوزنقه حاصل می‌شود و آن هم بستگی دارد به این که صفحه از رأس هرم عبور کند یا نکند.

نوع برش	مایل			قائم		افقی
نمایش برش						
شکل حاصل از برش	ذوزنقه	مثلث	مثلث	مثلث	ذوزنقه	مستطیل

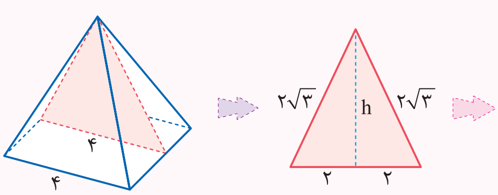
هرم‌های مربع‌القاعده نیز دقیقاً همین وضعیت را دارند، با این تفاوت که از برش افقی آن‌ها مربع حاصل می‌شود.

Test همهٔ وجوه یک هرم چوبی مربع القاعده، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ هستند. این هرم توسط یک صفحهٔ قائم و گذرا از رأس هرم برش خورده است. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۴

۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) ۸

۱ سطح مقطع حاصل، یک مثلث متساوی‌الساقین است که ساق‌های آن ارتفاع وجه‌های هرم، یعنی برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴=۲\sqrt{۳}$ هستند، بنابراین داریم:



$$h=\sqrt{۱۲-۴}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۲\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$$

۶۵۵. اگر یک هرم با قاعدهٔ مربع توسط صفحه‌ای غیرگذرا بر رأس برش بخورد، سطح مقطع حاصل کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) مثلث ۲) ذوزنقه

۳) مربع ۴) پنج ضلعی منتظم

من در رقابت با هیچ کس جز خودم نیستم. هدف من مغلوب نمودن آخرین کاریست که انجام داده‌ام !!!

بیل گیتس

پاسخنامه
تمام تشریحی
و تمام رنگی

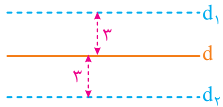
ANSWERS

Password سُوگَند بِه قَلَم وَ آن چِه می نِویسَند

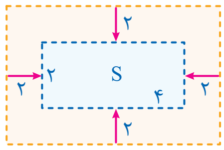
Other user

ENG

1 ۴ نقاط مورد نظر روی خطوط d_1, d_2 قرار دارند و از آن‌جایی که هر خط شامل بی‌شمار نقطه است، بنابراین گزینهٔ ۴ جواب است.



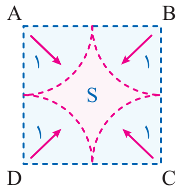
2 ۱ برای این‌که یک سکه کاملاً درون یک منحنی بسته قرار بگیرد باید فاصلهٔ مرکز سکه از تمام نقاط منحنی از شعاع سکه بزرگ‌تر باشد، بنابراین باید فاصلهٔ مرکز سکه از تمام اضلاع مستطیل بیشتر از ۲ باشد:



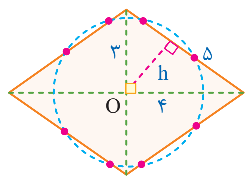
$S = ۴ \times ۲ = ۸$

3 ۲ مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از رأس A بزرگ‌تر از ۱ است، بیرون دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۱ است و به طریق مشابه در سایر رئوس نیز این داستان برقرار است. بنابراین مکان هندسی موردنظر مطابق شکل است و مساحت آن برابر است با:

$S = ۲^۲ - ۴(\frac{۱}{۴}\pi \times ۱^۲) = ۴ - \pi$



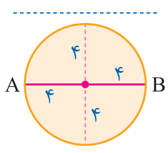
4 ۳ در این لوزی فاصلهٔ مرکز تا هرکدام از اضلاع را پیدا می‌کنیم:



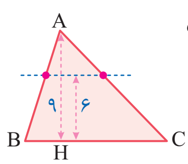
$h \times ۵ = ۳ \times ۴ \Rightarrow h = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$

از آنجایی که $۳ < ۲/۵ < ۲/۴$ است، دایرهٔ به مرکز O و به شعاع ۲/۵ هر ضلع لوزی را در دو نقطه قطع می‌کند، یعنی کُلاً ۸ نقطه وجود دارد.

5 ۱ نقاطی که به فاصلهٔ ۵ واحد از قطر AB قرار دارند روی دو خط به موازات AB و به فاصلهٔ ۵ واحد از آن قرار دارند که این دو خط دایره را قطع نمی‌کنند.



6 ۳ ابتدا از روی قاعده و مساحت مثلث ارتفاع آن را به دست می‌آوریم.

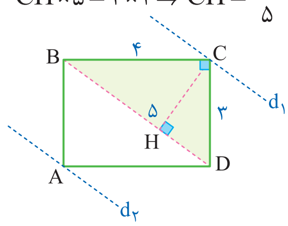


$\underbrace{S}_{۳۶} = \frac{۱}{۲}AH \times \underbrace{BC}_{۸} \Rightarrow AH = ۹$

چون $۹ > ۶$ است، مطابق شکل دو نقطه وجود دارد.

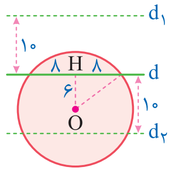
7 ۳ نقاطی که به فاصلهٔ ۲/۴ از قطر BD قرار دارند، روی دو خط به موازات BD و به فاصلهٔ ۲/۴ از آن قرار دارند، حال ارتفاع CH از مثلث BCD را پیدا می‌کنیم:

$CH \times ۵ = ۳ \times ۴ \Rightarrow CH = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$



چون CH=۲/۴ است، بنابراین دو خط d_1 و d_2 دقیقاً از نقاط A و C می‌گذرند، یعنی دو نقطه روی محیط مستطیل وجود دارد.

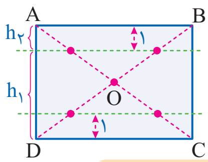
8 ۱ نقاطی که به فاصلهٔ ۱۰ واحد از خط d قرار دارند روی دو خط d_1 و d_2 به فاصلهٔ ۱۰ واحد از d واقعند، حال به کمک فیثاغورس شعاع دایره هم ۱۰ به دست می‌آید؛ بنابراین یکی از این دو خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.



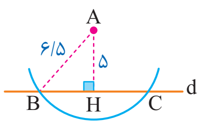
9 ۳ می‌دانیم هر نقطه درون مستطیل مجموع فاصله‌هایش از AB و CD برابر عرض مستطیل است. حال قرار است که اختلاف فاصله‌هایش نیز ۴ باشد، بنابراین:

$\begin{cases} h_1 + h_2 = ۶ \\ h_1 - h_2 = ۴ \end{cases} \Rightarrow h_1 = ۵ , h_2 = ۱$

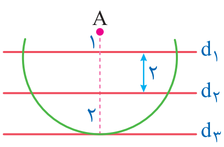
همان‌طورکه می‌بینید دو خط با شرایط فوق وجود دارد که در مجموع ۴ نقطه قطرها را قطع می‌کنند.



10 ۲ نقاطی که به فاصلهٔ ۶/۵ از نقطهٔ A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۶/۵ قرار دارند که چون $۶/۵ > ۵$ است این دایره خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و همین نقاط جواب‌های تست هستند.



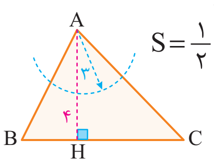
11 ۴ نقاطی که به فاصلهٔ ۵ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ واحد قرار دارند که این دایره در ۵ نقطه با این خطوط برخورد می‌کند.



12 ۱ نقاطی که به فاصلهٔ ۳ واحد از رأس A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ واحد قرار دارند. حال برای این که ببینیم آیا این دایره قاعده BC را قطع می‌کند یا نه باید ارتفاع مثلث را بدانیم:

$S = \frac{۱}{۲}AH \times BC \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱}{۲} \times AH \times ۶ \Rightarrow AH = ۴$

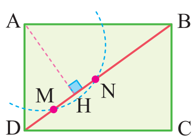
بنابراین دایرهٔ فوق قاعدهٔ BC را قطع نمی‌کند، یعنی هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.



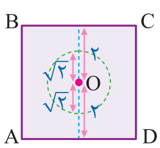
13 ۴ نقاطی که فاصلهٔ آن از نقطهٔ A کمتر از ۲/۵ است درون دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲/۵ قرار دارند، حالا باید ببینیم که وضع این دایره نسبت به قطر BD چگونه است؟

$AH \times ۵ = ۳ \times ۴ \Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$

بنابراین این دایره قطر را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند و تمام نقاط روی MN فاصلهٔ آن‌ها از A کمتر از ۲/۵ است، یعنی بی‌شمار نقطه وجود دارد.



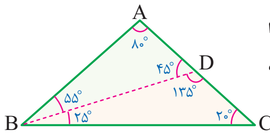
14 ۴ نقاطی که به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ واحد از مرکز مربع قرار دارند، روی دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $\sqrt{۲}$ واحد قرار دارند. حال باید دید این دایره در چند نقطه محیط را قطع می‌کند که مطابق شکل مقابل این دایره هرگز با اضلاع مربع نقطهٔ تقاطعی ندارد.



132 ۲ براساس نامساوی مثلثی باید $۹-۶<BC<۹+۶$ باشد. در ضمن چون $\hat{A}>\hat{C}$ است؛ پس باید $BC>۹$ باشد و در نتیجه:

$$۹<BC<۱۵ \Rightarrow BC=\underbrace{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴}_{\text{۵ مقدار}}$$

133 ۱ از زاویه‌های داده شده به راحتی بقیهٔ زاویه‌ها معلوم است، حال سه مثلث داریم با زاویه‌های معلوم در هر کدام می‌توانیم اضلاع را با هم مقایسه کنیم، بنابراین به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

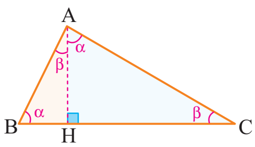


$\overset{\Delta}{ABD}:۵۵°>۴۵° \Rightarrow AD>AB$ ۳

$\overset{\Delta}{BDC}:\begin{cases} ۱۳۵°>۲۰° \Rightarrow BC>BD & ۴ \\ ۲۵°>۲۰° \Rightarrow DC>BD & ۱ \end{cases}$

$\overset{\Delta}{ABC}:۸۰°>۲۰° \Rightarrow BC>AB$ ۲

134 ۴ چون $\hat{B}>\hat{C}$ است، بنابراین $\alpha>\beta$ است و در نتیجه خواهیم داشت:



۱ $\overset{\Delta}{ABH}:\alpha>\beta \Rightarrow AH>BH$

۲ $\overset{\Delta}{AHC}:\alpha>\beta \Rightarrow HC>AH$

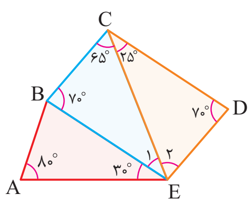
$\overset{\Delta}{AHC}:۹۰°>\alpha \Rightarrow AC>HC$

حال باتوجه به ۱ ، ۲ داریم:

$AC>HC>AH>BH \Rightarrow AC>BH$

بنابراین گزینهٔ ۴ الزاماً درست نیست.

135 ۲ ابتدا زاویه‌های نامعلوم را مشخص می‌کنیم:



$\overset{\Delta}{ABE}:\hat{B}+۸۰°+۳۰°=۱۸۰° \Rightarrow \hat{B}=۷۰°$

$\overset{\Delta}{BCE}:\hat{E}_۱+۷۰°+۶۵°=۱۸۰° \Rightarrow \hat{E}_۱=۴۵°$

$\overset{\Delta}{CDE}:\hat{E}_۲+۲۵°+۷۰°=۱۸۰° \Rightarrow \hat{E}_۲=۸۵°$

حال در هرکدام از مثلث‌ها می‌توان اضلاع را مقایسه کنیم:

$\overset{\Delta}{ABE}:۸۰°>۷۰°>۳۰° \Rightarrow BE>AE>AB$

$\overset{\Delta}{BCE}:۷۰°>۶۵°>۴۵° \Rightarrow CE>BE>BC$

$\overset{\Delta}{CDE}:۸۵°>۷۰°>۲۵° \Rightarrow CD>CE>DE$

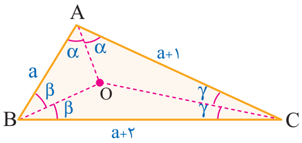
حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ $\begin{cases} CE>BE \\ BE>AE \end{cases} \Rightarrow CE>AE$

۳ $\begin{cases} CD>CE \\ CE>BE \end{cases} \Rightarrow CD>BE$ گزینهٔ ۲ نادرست است

۴ $\begin{cases} CD>CE \\ CE>BE>BC \end{cases} \Rightarrow CD>BC$

136 ۲ چون $BC>AC>AB$ است، بنابراین $۲\alpha>۲\beta>۲\gamma$ و در نتیجه $\alpha>\beta>\gamma$ می‌باشد، حال:



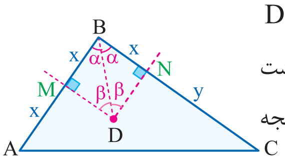
$\overset{\Delta}{OAB}:\alpha>\beta \Rightarrow OB>OA$

$\overset{\Delta}{OBC}:\beta>\gamma \Rightarrow OC>OB$

$OC>OB>OA$

137 ۱ MD عمود منصف AB است، پس: $MA=MB=x$ همچنین BD نیمساز است، پس: $D\hat{B}N=M\hat{B}D=\alpha$

بنابراین دو مثلث MBD و BDN هم‌نهشت هستند، بنابراین $BN=x$ می‌باشد، در نتیجه اگرفرض کنیم $NC=y$ باشد، خواهیم داشت:



$\hat{A}>\hat{C} \Rightarrow x+y>x+x \Rightarrow y>x \Rightarrow NC>NB$

Th قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردها

Thales Theorem

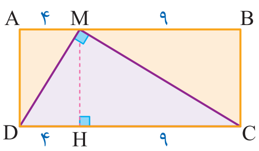
138 ۳ $۱۲^۲=۸\times a \Rightarrow a=\dfrac{۱۲\times۱۲}{۸}=۱۸$

139 ۲ باید مربع عدد ۶ با حاصل‌ضرب اعداد x و $۱۳-x$ برابر باشد:

$۶^۲=x(۱۳-x) \Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x-۹)(x-۴)=۰$

بنابراین برای x دو مقدار ۴ و ۹ به‌دست می‌آید در نتیجه طول پاره‌خط بزرگتر برابر ۹ است.

140 ۴ در مثلث MDC ارتفاع MH را رسم می‌کنیم در نتیجه $HD=۴$ و $HC=۹$ خواهد شد، حال ارتفاع مثلث بنفش واسطهٔ هندسی بین ۴ و ۹ است بنابراین داریم:



$MH^۲=۴\times۹ \Rightarrow MH=۲\times۳ \Rightarrow$ عرض مستطیل $=۶$

بنابراین محیط مستطیل برابر است با: محیط $=۲(۶+۱۳)=۳۸$

141 ۲ فرض کنیم وتر a و اضلاع دیگر b و c باشند در این صورت خواهیم داشت:

$a^۲=(۲b)(c) \Rightarrow a^۲=۲bc \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} b^۲+c^۲=۲bc$

$b^۲+c^۲-۲bc=۰ \Rightarrow (b-c)^۲=۰ \Rightarrow b=c$

بنابراین مثلث مورد نظر قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، در نتیجه زاویه‌های آن $۹۰°, ۴۵°, ۴۵°$ است. بنابراین زاویه‌ها متناسب با اعداد ۱, ۱, ۲ هستند.

142 ۱ ابتدا ارتفاع ذوزنقه را به کمک دو قاعده پیدا می‌کنیم و سپس به سراغ محاسبهٔ مساحت می‌رویم:

$AD^۲=۸\times۱۸=۲^۴\times۳^۲ \Rightarrow AD=۱۲ \Rightarrow S=\dfrac{۱}{۲}(۸+۱۸)\times۱۲=۱۵۶$

143 ۱ فعلاً که راه‌های حرفه‌ای‌تر را نخوانده‌ایم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{۳}{۵} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{۵}{۳} \Rightarrow \dfrac{۳a}{۳b}=\dfrac{۴\times۵}{۴\times۳} \Rightarrow \dfrac{۳a}{۳b}=\dfrac{۲۰}{۱۲} \Rightarrow \dfrac{۳a+۲۰}{۳b+۱۲}=\dfrac{۵}{۳}$

144 ۱ زوایا را ۸x , ۵x , ۲x فرض می‌کنیم و در نتیجه داریم:

$$۲x+۵x+۸x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۵x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۱۲^\circ$$

حال تفاضل دو زاویهٔ نابزرگتر [یعنی ۵x , ۲x] برابر است با:

$$۵x-۲x=۳x=۳\times ۱۲^\circ=۳۶^\circ$$

145 ۴ تناسب داده شده را برابر k قرار می‌دهیم و x , y , z را بر حسب k پیدا کرده و در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{x}{۳}=y=z+۱=k \Rightarrow x=۳k\ ,\ y=k\ ,\ z=k-۱$$

حال به جای x,y,z در رابطهٔ $x+۳y+z=۲۰$ مقادیرشان را جایگذاری می‌کنیم:

$$(۳k)+۳(k)+(k-۱)=۲۰ \Rightarrow ۷k=۲۱ \Rightarrow k=۳ \Rightarrow z=k-۱=۲$$

146 ۳ باید نسبت‌ها را برابر k قرار دهیم:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۵}=\frac{z}{۳}=k \Rightarrow x=۲k , y=۵k , z=۳k$$

حال به جای x , y , z در رابطهٔ $x+y-۲z=۷$ مقادیرشان را جایگذاری می‌کنیم:

$$(۲k)+(۵k)-۲(۳k)=۷ \Rightarrow k=۷ \Rightarrow \frac{y+۱}{x+۱}=\frac{۵k+۱}{۲k+۱}=\frac{۳۶}{۱۵}=۲/۴$$

147 ۳ چون یک نسبت برحسب a و b داده شده و یک نسبت دیگر برحسب همان a و b را می‌خواهد، می‌توان فرض کرد a = ۲ و b = ۳ و حال حاصل عبارت خواسته شده به راحتی به دست می‌آید:

$$\frac{a^۲+۲b^۲}{b^۲-a^۲}=\frac{۴+۱۸}{۹-۴}=\frac{۲۲}{۵}$$

148 ۴ فرض کنیم x = ۳ و ۲x + y = ۷ یعنی y = ۱ آنگاه:

$$\frac{x-۲y}{x+y}=\frac{۳-۲}{۳+۱}=\frac{۱}{۴}$$

149 ۴ چون نسبتی داده و نسبتی را می‌خواهد فرض کنیم x = ۳ و y = ۴ باشد، در این‌صورت داریم:

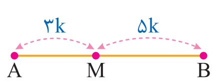
$$\frac{۵xy}{x^۲+y^۲}=\frac{۵\times ۴\times ۳}{۱۶+۹}=\frac{۱۲\times ۵}{۲۵}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

150 ۲ ابتدا تناسب داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+۳}=\frac{y}{y+۲} \xrightarrow{\text{تفضیل درمخرج}} \frac{x}{۳}=\frac{y}{۲} \xrightarrow{\text{فرض}} x=۳ , y=۲$$

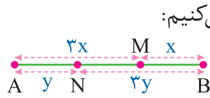
$$\frac{۲x-y}{x+۳y}=\frac{۶-۲}{۳+۶}=\frac{۴}{۹}$$

151 ۱ فرض کنیم AM = ۳k و MB = ۵k باشد، در این صورت داریم:



$$۵k+۳k=۲۴ \Rightarrow k=۳ \Rightarrow MB-MA=۲k=۶$$

152 ۲ فرض می‌کنیم MB = x و MA = ۳x و همچنین AN = y و BN = ۳y باشد در این صورت یک شکل رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases}۳x+x=۱۲ \Rightarrow x=۳\\ ۳y+y=۱۲ \Rightarrow y=۳\end{cases} \Rightarrow MN=AB-x-y=۶$$

153 ۲ می‌دانیم که کوتاه‌ترین ارتفاع بر بلندترین ضلع فرود می‌آید، بنابراین ارتفاع ۸ بر ضلع ۲۱ و بلندترین ارتفاع بر ضلع ۱۰ فرود می‌آید، بنابراین:

$$ah_a=bh_b \Rightarrow ۲۱\times ۸=۱۰\times h_b \Rightarrow h_b=۱۶/۸$$

154 ۳ ارتفاع‌ها به نسبت $\frac{۲}{۳} , ۱ , \frac{۱}{۲}$ هستند، پس اضلاع به نسبت $\frac{۳}{۲} , ۱ , ۲$ هستند بنابراین اضلاع را ۲x , x , ۱/۵x فرض می‌کنیم و در نتیجه داریم:

$$۲x+۱/۵x+x=۱۸ \Rightarrow ۴/۵x=۱۸ \Rightarrow x=\frac{۱۸}{۴/۵}=۴$$

بنابراین اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع برابر است با: ۲x=۸

155 ۱ بزرگ‌ترین ارتفاع‌ها به کوچک‌ترین اضلاع فرود می‌آید؛ یعنی ارتفاع به طول ۸ بر ضلع a و ارتفاع به طول ۷/۲ بر ضلع a + ۱ فرود می‌آید، در نتیجه:

$$۸\times a=۷/۲\times (a+۱) \Rightarrow \underbrace{۸a=۷/۲a+۷/۲}_{۰/۸a=۷/۲} \Rightarrow a=\frac{۷۲}{۸}=۹$$

حال کوتاه‌ترین ارتفاع بر بلندترین ضلع فرود می‌آید؛ یعنی بر ضلع a + ۸ ، بنابراین:

$$h\times (a+۸)=۸\times a \Rightarrow h\times (۹+۸)=۸\times ۹ \Rightarrow h=\frac{۷۲}{۱۷}$$

156 ۳ چون $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}$ است پس $\frac{h_b}{h_a}=\frac{۳}{۴}$ خواهد شد و حال چون نسبتی را داریم و نسبتی را می‌خواهیم، می‌توان فرض کرد $h_b=۳$ و $h_a=۴$ و در نتیجه:

$$\frac{h_b+h_a}{h_a-h_b}=\frac{۴+۳}{۴-۳}=۷$$

157 ۲ می‌دانیم نسبت ارتفاع‌ها متناسب با عکس نسبت اضلاع است. بنابراین:

$$\frac{h_a}{h_c}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{a}{c} \Rightarrow a^۲=c^۲ \Rightarrow a=c \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین}$$

158 ۱ فرض کنیم a = ۱۰ و b = ۱۵ باشد، در این صورت:

$$h_a+h_b=h_c \Rightarrow \frac{\cancel{۲S}}{a}+\frac{\cancel{۲S}}{b}=\frac{\cancel{۲S}}{c} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{c}$$

$$c=\frac{۱۰\times ۱۵}{۱۰+۱۵}=\frac{۱۵۰}{۲۵}=۶$$

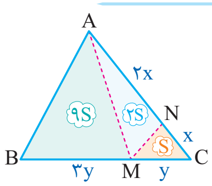
159 ۳ اگر رابطه‌ای هم درجه بین اضلاع برقرار باشد، همان رابطه بین عکس ارتفاع‌ها برقرار است:

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow \frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{h_b^۲}+\frac{۱}{h_c^۲}$$

160 ۱ مثلث‌های AMB و ABC، هم ارتفاع هستند، بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های آن‌ها برابر است، یعنی:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{۱/۵}{۵}=\frac{۱۵}{۵۰}=۰/۳۰$$

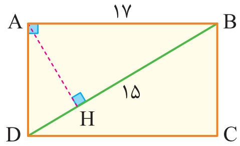
161 ۲ فرض کنیم $S_{MNC}=S$ باشد، در این صورت چون AN = ۲NC است، پس $S_{AMN}=۲S$ و از طرفی در قیاس دو مثلث AMC و AMB داریم:



$$\frac{MC}{MB}=\frac{y}{۳y} \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{AMB}}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow S_{AMB}=۳(۳S)=۹S$$

حال مساحت مثلث رنگ شده $\frac{۲S}{۱۲S}=\frac{۱}{۶}$ کل است.

299 ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:



$$AB^۲=BH\times BD\Rightarrow ۱۷^۲=۱۵\times BD\Rightarrow BD=\frac{۲۸۹}{۱۵}$$

بنابراین اختلاف طول قطر مستطیل با عدد ۱۹ برابر است با: $\frac{۲۸۹}{۱۵}-۱۹=\frac{۴}{۱۵}$

روش دوم:

$$\overset{\triangle}{AHB}: AH=\sqrt{۱۷^۲-۱۵^۲}=۸$$

$$\overset{\triangle}{ABD}: AH^۲=DH\times HB\Rightarrow ۸^۲=DH\times ۱۵\Rightarrow DH=\frac{۶۴}{۱۵}$$

$$DB=۱۵+\frac{۶۴}{۱۵}=\frac{۲۸۹}{۱۵}\Rightarrow \frac{۲۸۹}{۱۵}-۱۹=\frac{۴}{۱۵}$$

چند ضلعی‌ها Polygons

300 ۳ می‌دانیم تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است و از هر رأس $n-۳$ قطر می‌گذرد؛ بنابراین:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۲۰\Rightarrow n(n-۳)=۴۰\Rightarrow n(n-۳)=۸\times۵\Rightarrow n=۸$$

بنابراین از هر رأس ۵ = ۳ − ۸ قطر می‌گذرد.

301 ۱ کافیست فرمول تعداد قطرها را برابر با تعداد اضلاع قرار دهیم تا ببینیم معادله چند ریشه دارد:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=n-۳=۲\Rightarrow n=۵$$

همان‌طور که معلوم شد، معادلهٔ فوق تنها یک ریشه دارد، بنابراین تنها n ضلعی با این ویژگی ۵ ضلعی است.

302 ۲ ابتدا باید از رابطهٔ داده شده تعداد اضلاع را به‌دست آوریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۳}-n=۳۳\Rightarrow \frac{n^۲-۵n}{۲}=۳۳\Rightarrow n(n-۵)=\underbrace{\boxed{۶۶}}_{۱۱\times۶}\Rightarrow n=۱۱$$

بنابراین از هر رأس این ۱۱ ضلعی ۸=۳−۱۱ قطر می‌گذرد.

303 ۲ ابتدا باید از رابطهٔ داده شده تعداد اضلاع را به‌دست آوریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}+n=۹۱\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۹۱\Rightarrow \underbrace{n(n-۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}}=\underbrace{\boxed{۱۸۲}}_{۱۴\times۱۳}\Rightarrow n=۱۴$$

بنابراین از هر رأس ۱۴ ضلعی ۱۱=۳−۱۴ قطر می‌گذرد.

304 ۲ اگر یک رأس از یک n ضلعی کم کنید، تبدیل به $n-۱$ ضلعی خواهد شد، بنابراین داریم:

$$\frac{(n-۱)(n-۴)}{۲}=\frac{n(n-۳)}{۲}-۷\Rightarrow (n-۱)(n-۴)=n(n-۳)-۱۴$$

$$n^۲-۵n+۴=n^۲-۳n-۱۴\Rightarrow ۲n-۴=۱۴\Rightarrow ۲n=۱۸\Rightarrow n=۹$$

305 ۳ باید از روش تجزیه برای پیداکردن n استفاده کنیم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}\times n=۱۶۰\Rightarrow n^۲(n-۳)=۳۲۰=۲^۶\times۵=۸^۲\times۵\Rightarrow n=۸$$

باید ۳۲۰ را به شکل طرف اول درآوریم

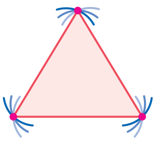
بنابراین مجموع تعداد اضلاع و اقطار برابر است با:

$$\frac{۸(۸-۳)}{۲}+۸=۲۰+۸=۲۸$$

306 ۱ ابتدا تعداد اضلاع n ضلعی را پیدا می‌کنیم تا ببینیم از هر رأس چند قطر می‌گذرد:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۴۴\Rightarrow n(n-۳)=\underbrace{\boxed{۸۸}}_{۸\times۱۱}\Rightarrow n=۱۱$$

بنابراین از هر رأس ۸ = ۳ − ۱۱ قطر می‌گذرد و از سه رأس ۲۴ = ۳ × ۸ قطر می‌گذرد. اما چون این رأس‌ها دوبه‌دو غیرمجاورند، ۳ تا از این قطرها دو سر مشترک دارند و تکراری هستند؛ یعنی دوبار شمرده شده‌اند. پس در مجموع ۲۱ = ۳ − ۲۴ قطر از میان آن‌ها می‌گذرد.



307 ۴ وقتی گفته می‌شود $n+۱$ ضلعی در فرمول $\frac{n(n-۳)}{۲}$ باید به جای n از $n+۱$ استفاده کنیم:

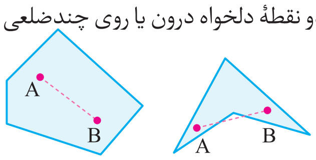
$$\frac{(n+۱)(n-۲)}{۲}+(n+۱)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲n(۲n-۳)}{۲}\right)$$

حال طرفین معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{۲n^۲-۲n-۴+۴(n+۱)}_{۲n^۲+۲n}=\underbrace{۲n(۲n-۳)}_{۴n^۲-۶n}\Rightarrow ۲n^۲-۸n=۰\Rightarrow ۲n^۲=۸n\Rightarrow n=۴$$

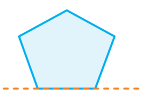
308 ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ در چندضلعی‌های محدب اگر هر دو نقطهٔ دلخواه درون یا روی چندضلعی را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل به تمامی درون چندضلعی قرار می‌گیرد، در حالی که در چندضلعی‌های مقعر این‌طور نیست.

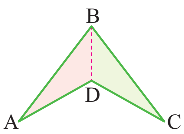


۲ در چندضلعی‌های محدب، هر زاویهٔ داخلی کمتر از ۱۸۰° است.

۳ در چندضلعی‌های محدب، سایر رأس‌ها در یک طرف خطی قرار دارند که بر ضلع آن منطبق است.



۴ اگر یک قطر، چندضلعی را به دو چندضلعی محدب تقسیم کند، چندضلعی می‌تواند مقعر باشد.



309 ۱ تعداد اضلاع را دو برابر می‌کنیم یعنی به جای n باید از ۲n در فرمول تعداد قطرها استفاده کنیم:

$$\frac{۲n(۲n-۳)}{۲}=\frac{n(n-۳)}{۲}+۱۸\Rightarrow ۴n^۲-۶n=n^۲-۳n+۳۶$$

$$۳n^۲-۳n=۳۶\Rightarrow n^۲-n=۱۲\Rightarrow n(n-۱)=۴\times۳\Rightarrow n=۴$$

بنابراین مجموع زوایای داخلی ۴ ضلعی ۳۶۰° است.

310 ۲ ابتدا تعداد اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$n\times\frac{n(n-۳)}{۲}=۵۴\Rightarrow n^۲(n-۳)=۱۰۸=۶^۲\times۳\Rightarrow n=۶$$

یک عدد مربع کامل از ۱۰۸ بیرون می‌کشیم

بنابراین مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی برابر ۷۲۰° = ۴×۱۸۰° است.

311 ۴ می‌دانیم که مجموع زوایای n ضلعی باید مضرب صحیحی از ۱۸۰° باشد، حال عدد ۲۵۷۰ را بر ۱۸۰ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده ۵۰ می‌شود، بنابراین می‌گوییم برای این که باقی‌مانده صفر شود، باید ۱۳۰° به مجموع زاویه‌ها اضافه شود، یعنی آن زاویهٔ گم شده ۱۳۰° است. بنابراین مجموع کل زاویه‌های ۲۷۰۰° است، در نتیجه:

$$۲۷۰۰°=(n-۲)\times۱۸۰°\Rightarrow n=۱۷\Rightarrow \text{تعداد قطرها}=\frac{۱۷\times۱۴}{۲}=۱۱۹$$

312 ۳ ابتدا داده‌ها را به زبان ریاضی می‌نویسیم و معادله را تشکیل می دهیم تا n به دست آید:

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ + (n-۱)\times ۱۸۰^\circ = ۱۲۶۰^\circ \Rightarrow ۲n-۳=۷ \Rightarrow n=۵$$

حال $n+۱$ ضلعی یعنی ۶ ضلعی، در نتیجه مجموع اضلاع و اقطار آن برابر است با:

$$\frac{۶\times۳}{۲}+۶=۱۵$$

313 ۱ یک چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی دارد، می تواند ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین باشد.

314 ٤ این چهارضلعی قطعاً متوازی‌الاضلاع است اما می‌تواند لوزی، مستطیل یا مربع نباشد. یعنی الزامی نیست مربع یا مستطیل یا لوزی باشد.

315 ۱ هر متوازی‌الاضلاع با دو قطر برابر یک مستطیل است.

316 ۱ بررسی گزینه‌ها:

۱ یک چهارضلعی که قطرهای برابر دارد، می‌تواند به عنوان مثال ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد. آوردن نام چهارضلعی در این گزینه درست نبود؛ باید گفته می‌شد «متوازی‌الاضلاعی که ...»

۲ متوازی‌الاضلاعی که یک زاویهٔ قائمه دارد، هر ۴ زاویهٔ آن قائمه خواهد شد و مستطیل خواهد شد. [چون در هر متوازی‌الاضلاع زوایای مجاور مکمل هستند.]

۳ یک چهارضلعی که ۳ زاویهٔ قائمه دارد [چون مجموع زاویه‌ها ۳۶۰° است]، زاویهٔ چهارم هم ۹۰° می‌شود و در تعریف مستطیل صدق می‌کند.

۴ متوازی‌الاضلاعی که قطرهای برابر دارد قطعاً مستطیل است.

317 ۳ اگر قطرهای یک چهار ضلعی منصّف هم باشند، آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است و اگر قطرها برابر هم باشند آن متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل خواهد شد.بنابراین گزینهٔ ۳ الزاماً یک مستطیل است.

318 ۳ چهارضلعی که قطرهایش منصّف هم باشند قطعاً متوازی‌الاضلاع است و در یک متوازی‌الاضلاع، اگر دو ضلع مجاور با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع تبدیل به یک لوزی خواهد شد.

319 ۳ بررسی گزینه‌ها:

۱ یک چهارضلعی که اضلاع عمود دارد، می‌تواند مستطیل هم باشد.

۲ می‌توان کایت را به عنوان مثال نقض ارائه کرد.

۳ لوزی که قطرهای برابر داشته باشد [ژن مستطیل را دارد] الزاماً مربع است.

۴ مستطیلی که قطرهایش همدیگر را نصف کنند، هیچ صفتی بر مستطیل اضافه نکرده، چون نصف کردن قطرها در همهٔ مستطیل‌ها برقرار است [و آن هم ژن متوازی‌الاضلاع است که به آن‌ها رسیده].

320 ۳ بررسی گزینه‌ها:

۱ تعریف داده شده، تعریف مستطیل است.

۲ چهار ضلعی که قطرها منصّف هم هستند، متوازی‌الاضلاع است. حال اگر اضلاع متوازی‌الاضلاع بر هم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود و الزاماً مربع نخواهد شد.

۳ مستطیلی که قطرهای آن نیمساز زوایا هستند [ژن لوزی را دارد]، قطعاً مربع است.

۴ در همهٔ لوزی‌ها هر قطر لوزی را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند، [این ژن از پدر لوزی یعنی متوازی‌الاضلاع به آن ارث رسیده است]. بنابراین تعریف ارائه شده هیچ صفتی بر لوزی بودن اضافه نمی‌کند.

321 ۳ بررسی گزینه‌ها:

۱ متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن عمود منصّف هم باشند، لوزی است.

۲ متوازی‌الاضلاعی که اضلاعی آن برهم عمود باشند، مستطیل است.

۳ متوازی‌الاضلاعی که قطرهای برابر [ژن مستطیل] و عمود بر هم [ژن لوزی] دارد، الزاماً مربع است.

۴ فقط صفت برابربودن قطرها را به متوازی‌الاضلاع اضافه کرده که آن را تبدیل به مستطیل می‌کند.

322 ٤ بررسی گزینه‌ها:

۱ می‌تواند متوازی‌الاضلاع هم باشد.

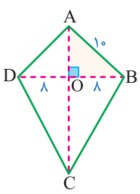
۲ می‌تواند مستطیل هم باشد.

۳ هم می‌تواند مستطیل باشد.

۴ چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی است ذوزنقه است، حال اگر دو ضلع دیگر مساوی و غیر موازی باشد، الزاماً ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خواهد بود.

323 ۳ در ذوزنقه قطرها می‌توانند برابر هم باشند، مانند ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین.

324 ۳ می‌دانیم قطر بزرگ [یعنی قطر AC] قطر کوچک کایت را نصف می‌کند، بنابراین:

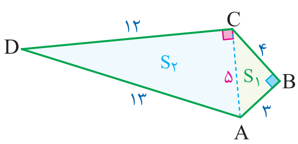


$$\overset{\Delta}{OAB}: OA^۲=۱۰^۲-۸^۲=۳۶ \Rightarrow OA=۶$$

بنابراین $OC=۲۱-۶=۱۵$ خواهد بود و حال داریم:

$$\overset{\Delta}{OBC}: BC^۲=۸^۲+۱۵^۲=۱۷^۲ \Rightarrow BC=۱۷$$

325 ۳ برای یافتن مساحت متوازی‌الاضلاع مورد نظر باید مساحت چهارضلعی ABCD را به‌دست آوریم. برای این کار ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم. مثلث ABC مثلثی قائم‌الزاویه است پس اندازهٔ قطر AC برابر با ۵ است، در ضمن از آن جا که $۱۳^۲=۵^۲+۱۲^۲$ پس مثلث ADC نیز قائم‌الزاویه است و در نتیجه خواهیم داشت:



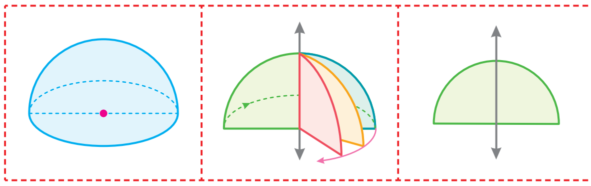
$$\begin{cases} S_۱=\frac{۱}{۲}\times۴\times۳=۶ \\ S_۲=\frac{۱}{۲}\times۵\times۱۲=۳۰ \end{cases} \Rightarrow S=۶+۳۰=۳۶$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاعی که از وصل‌کردن وسط‌های هر چهارضلعی محدب به‌دست می‌آید، نصف مساحت چهارضلعی ABCD است پس:

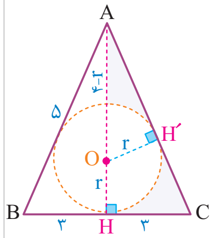
$$S'=\frac{S}{۲}=\frac{۳۶}{۲}=۱۸$$

676 ٤ حجم حاصل یک نیم‌کره به شعاع ۳ است. بنابراین:

$$V=\frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳})=\frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^{۳})=۱۸\pi$$



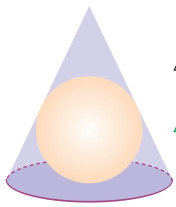
677 ٤ ابتدا شعاع دایره را با استفاده از تشابه به دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{OAH'}\sim\overset{\Delta}{AHC}\Rightarrow\frac{r}{۳}=\frac{۴-r}{۵}$$

$$۵r=۱۲-۳r\Rightarrow r=\frac{۳}{۲}$$

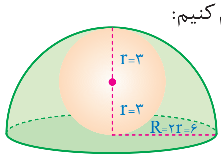
حال باید حجم کره را از حجم مخروط کم کنیم.



$$\Delta V=V_{۱}-V_{۲}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h-\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

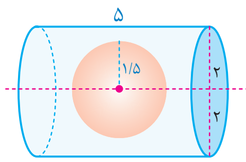
$$\Delta V=\underbrace{\frac{۱}{۳}(\pi\times ۳^{۲})\times ۴}_{۱۲\pi}-\underbrace{\frac{۴}{۳}\times\pi\times(\frac{۳}{۲})^{۳}}_{\frac{۹\pi}{۲}}=\frac{۱۵\pi}{۲}$$

678 ٤ باید حجم کرهٔ میانی را از حجم نیم کره کم کنیم:



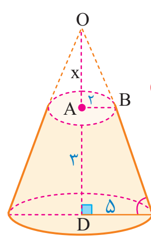
$$\Delta V=\underbrace{\frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi\times ۶^{۳})}_{۱۴۴\pi}-\underbrace{\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^{۳}}_{۳۶\pi}=۱۰۸\pi$$

679 ٢ حجم حاصل یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۲ و به ارتفاع ۵ است که از داخل آن کره‌ای به شعاع ۱/۵ برداشته شده است بنابراین:



$$\Delta V=\underbrace{\pi\times ۲^{۲}\times ۵}_{۲۰\pi}-\underbrace{\frac{۴}{۳}\times\pi\times(\frac{۳}{۲})^{۳}}_{\frac{۹\pi}{۲}}=\frac{۳۱\pi}{۲}=۱۵/۵\pi$$

680 ٣ ابتدا به کمک تالس ارتفاع مخروط را پیدا می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ODC}:\frac{x}{x+۳}=\frac{۲}{۵}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{x}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۲$$

بنابراین ارتفاع مخروط اصلی برابر $OD=۵$ است. حال حجم مخروط ناقص ایجاد شده برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi\times ۵^{۲}\times ۵-\frac{۱}{۳}\pi\times ۲^{۲}\times ۲=\frac{۱۲۵\pi}{۳}-\frac{۸\pi}{۳}=۳۹\pi$$

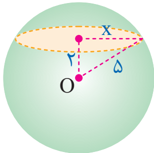
681 ١ ابتدا به کمک حجم استوانه شعاع قاعدهٔ آن را پیدا می‌کنیم:

$$V=\pi R^{۲}h=۳۶\pi\xrightarrow{h=۴}\pi\times R^{۲}\times ۴=۳۶\pi\Rightarrow R^{۲}=۹\Rightarrow R=۳$$

حال از دوران دایرهٔ به شعاع ۳ حول بزرگ‌ترین وتر یک کره به شعاع ۳ پدید می‌آید که حجم آن برابر است با:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^{۳}=۳۶\pi$$

682 ١ از دوران دایره حول یکی از قطرها کره حاصل می‌شود، حال از برش این کره مجدداً یک دایره به دست می‌آید که با رنگ نارنجی در شکل مشخص شده است:



$$x=\sqrt{۲۵-۴}=\sqrt{۲۱}\Rightarrow S=۲۱\pi$$

NOTE

کودک گرسنه بود، شیر می‌خواست.
اما مادر خودش هم گرسنه بود.
شیر نبود و نوزاد گریه می‌کرد.
دشمن نزدیک بود با سگ‌ها
اگر سگ‌ها صدایی می‌شنیدن همه میمردیم
گروهمان حدوداً ۳۰ نفر بود، می‌فهمید؟
بالاخره تصمیم گرفتیم.
هیچ‌کس جرأت نکرد دستور فرمانده را منتقل کند.
اما مادر خودش قضیه را حدس زد!
قنداق نوزاد را در آب فرو برد و مدت زیادی همانجا نگه داشت.
هیچ صدایی نمی‌آمد.
از شرمساری نمی‌توانستیم سرمان را بالا بگیریم.
نمی‌توانستیم در چشمان مادر نگاه کنیم.
نه می‌توانستیم به چشمان همدیگر نگاه کنیم ...

«سوتلانا آلکساندرونا آلکسیویچ»

جنگ چهرهٔ زنانه ندارد.