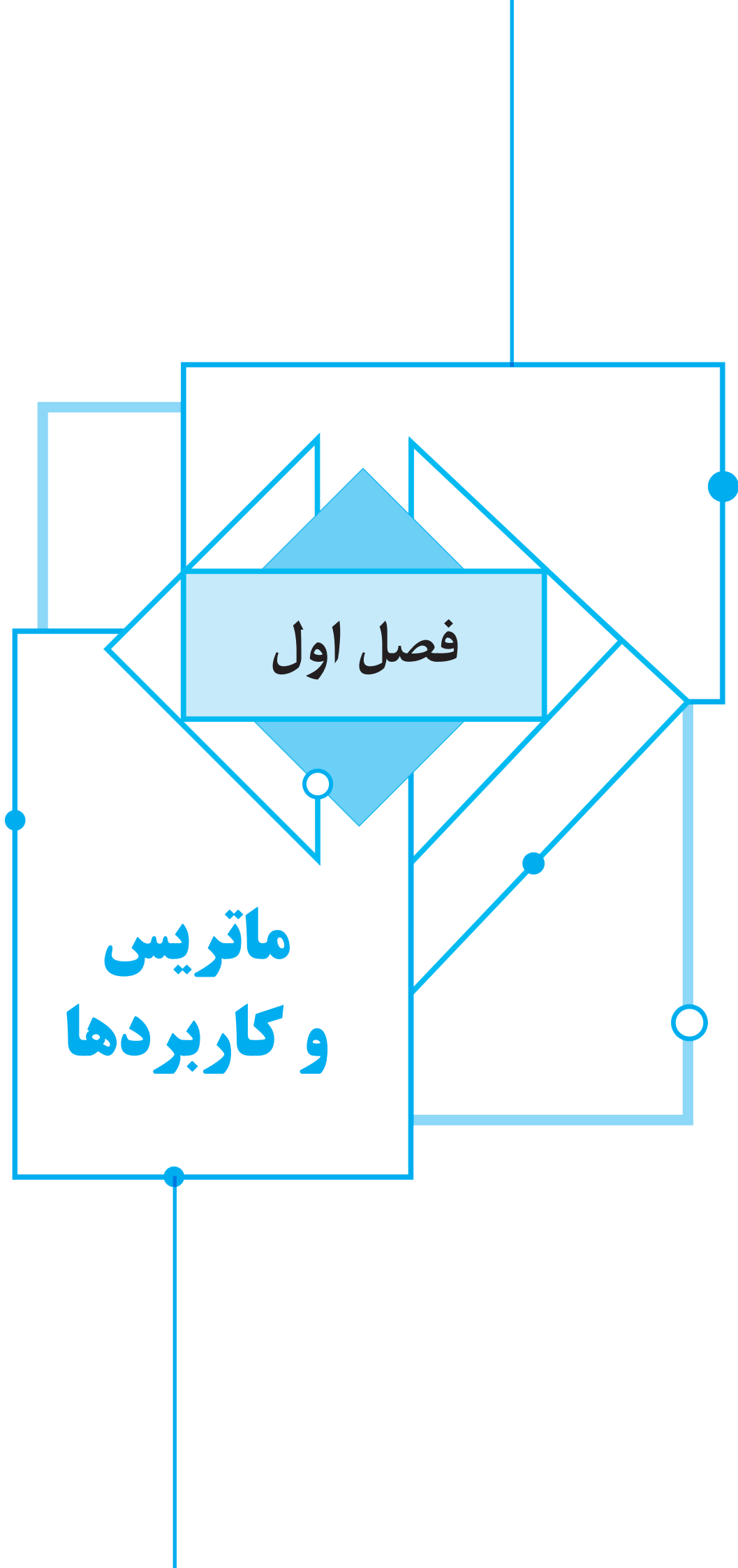


فصل اول

ماتریس
و کاربردها



درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

هر آرایش مستطیلی از عددهای حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک **ماتریس** است. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را **درایه** آن ماتریس می‌نامیم. درایه‌های ماتریس را با دو کروشه محصور و معمولاً ماتریس را با حروف بزرگ لاتین نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1 \quad 2]$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = [4] = 4$$

(برای ماتریس‌هایی که فقط یک درایه دارند می‌توانیم کروشه نگذاریم.)

مرتبه ماتریس

ماتریس زیر را ببینید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ سطر اول و $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ سطر دوم است.

همچنین $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ستون اول، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ستون دوم و $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ستون سوم این ماتریس است.

در نتیجه این ماتریس دو سطر و سه ستون دارد.

طبق قرارداد می‌گوییم این ماتریس از مرتبه 2×3 است.

در حالت کلی، ماتریسی که دارای m سطر و n ستون است ماتریس از مرتبه $m \times n$ (بخوانید m در n) است.

نمایش کلی یک درایه

به ماتریس زیر توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & -۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

عدد ۲ درایه روی سطر اول و ستون اول است و درایه -۶ روی سطر دوم و ستون دوم است، همچنین صفر درایه روی سطر دوم و ستون سوم است.

در حالت کلی، درایه واقع در تقاطع سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را با a_{ij} نشان می‌دهیم.

یعنی در ماتریس بالا،

$$a_{۱۱} = ۲, \quad a_{۱۲} = -۱, \quad a_{۱۳} = ۳$$

$$a_{۲۱} = ۴, \quad a_{۲۲} = -۶, \quad a_{۲۳} = ۰$$

واضح است که در حالت کلی، یک ماتریس $m \times n$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

نتیجه

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \dots & a_{۲n} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \dots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق را اغلب به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم ($۱ \leq i \leq m, ۱ \leq j \leq n$). به درایه عمومی

ماتریس A می‌گوییم.

ماتریس $A = [i^2 - j]_{۲ \times ۳}$ را با درایه‌های مشخص کنید.

مسئله ۱

صورت کلی ماتریس ۲×۳ را در نظر می‌گیریم:

راه‌حل

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

اکنون تک‌تک درایه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱} = ۱ - ۱ = ۰, \quad a_{۱۲} = ۱ - ۲ = -۱, \quad a_{۱۳} = ۱ - ۳ = -۲$$

$$a_{۲۱} = ۴ - ۱ = ۳, \quad a_{۲۲} = ۴ - ۲ = ۲, \quad a_{۲۳} = ۴ - ۳ = ۱$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس

تست



ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{2 \times 3}$ با درایه‌های $i > j$ ، $i = j$ و $i < j$ به ترتیب $a_{ij} = i^2 - j$ ، $a_{ij} = i + j$ و $a_{ij} = j^2 - i$ و $B=[b_{ij}]_{3 \times 2}$ با درایه‌های $b_{ij} = ij$

مفروض‌اند. حاصل $\sum_{k=1}^3 a_{1k} b_{k2}$ چقدر است؟

۴۶ (۴)

۴۸ (۳)

۵۲ (۲)

۴۶ (۱)

با توجه به تعریف سیگما می‌نویسیم:

$$\sum_{k=1}^3 a_{1k} b_{k2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}$$

اکنون درایه‌هایی را که در رابطه بالا لازم داریم به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = 1 + 1 = 2, \quad a_{12} = 2^2 - 1 = 3, \quad a_{13} = 3^2 - 1 = 8$$

$$b_{12} = 1 \times 2 = 2, \quad b_{22} = 2 \times 2 = 4, \quad b_{32} = 3 \times 2 = 6$$

سپس این درایه‌ها را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$\sum_{k=1}^3 a_{1k} b_{k2} = 2 \times 2 + 3 \times 4 + 8 \times 6 = 64$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

معرفی چند ماتریس خاص

(۱) **ماتریس صفر** ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر است. ماتریس صفر را با \bar{O} نشان می‌دهیم.

$$\bar{O} = [\bar{o}]_{1 \times 1} = \bar{o}, \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} \bar{o} & \bar{o} \\ \bar{o} & \bar{o} \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} \bar{o} & \bar{o} & \bar{o} \\ \bar{o} & \bar{o} & \bar{o} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

(۲) **ماتریس سطری** ماتریسی که یک سطر دارد، ماتریس سطری است، مانند

$$A = [2]_{1 \times 1} = 2, \quad B = [-1 \quad 3]_{1 \times 2}, \quad C = \begin{bmatrix} \bar{o} & -1 & \pi \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

صورت کلی ماتریس سطری به صورت $A = [a_{ij}]_{1 \times n}$ است.

(۳) **ماتریس ستونی** ماتریسی که یک ستون دارد، ماتریس ستونی است، مانند

$$A = [-3]_{1 \times 1} = -3, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \pi \\ \bar{o} \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

صورت کلی ماتریس‌های ستونی به شکل $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ است.

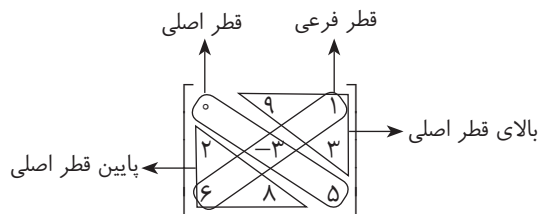
(۴) **ماتریس مربعی** ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند، ماتریس مربعی است، مانند

$$A = [5]_{1 \times 1} = 5, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & \bar{o} \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \pi \\ \bar{o} & 1 & \bar{o} \\ \bar{o} & -1 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

توجه

اگر یک ماتریس مربعی از مرتبه $n \times n$ باشد، به جای اینکه بگوییم ماتریس از مرتبه $n \times n$ است، می‌گوییم ماتریسی مربعی از مرتبه n است. مثلاً در ماتریس‌های قبلی، A مربعی از مرتبه ۱، B مربعی از مرتبه ۲ و C مربعی از مرتبه ۳ است.

تذکر



به ماتریس مربعی مقابل توجه کنید:

به درایه‌های ۰، -۳ و ۵، درایه‌های روی قطر اصلی و به درایه‌های ۱، -۳ و ۶، درایه‌های روی قطر فرعی می‌گوییم. واضح است که در این ماتریس درایه‌های ۱، ۳ و ۹ درایه‌های بالای قطر اصلی و درایه‌های ۲، ۸ و ۶ درایه‌های پایین قطر اصلی هستند.

در حالت کلی، می‌توان این درایه‌ها را به صورت زیر نشان داد:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} : \begin{cases} i = j & a_{ij} \text{ روی قطر اصلی قرار دارد} \\ i < j & a_{ij} \text{ بالای قطر اصلی قرار دارد} \\ i > j & a_{ij} \text{ پایین قطر اصلی قرار دارد} \\ i + j = n + 1 & a_{ij} \text{ روی قطر فرعی قرار دارد} \end{cases}$$

دقت کنید که قطر اصلی و قطر فرعی فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شوند.

(۵) ماتریس قطری ماتریس مربعی که همه درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر است، ماتریس قطری است. به زبان ریاضی،

$$A \Leftrightarrow A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$$

ماتریس‌های زیر نمونه‌هایی از ماتریس قطری هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های قطری، درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

توجه

(۶) ماتریس اسکالر ماتریسی قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند، ماتریس اسکالر است، مانند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(۷) ماتریس همانی (واحد) ماتریس اسکالری که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ است، ماتریس

همانی است. ماتریس همانی از مرتبه n را با I_n نشان می‌دهیم.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{که در آن } I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$$

مثلاً،

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس A و B را **مساوی** می‌گوییم هرگاه دارای دو شرط زیر باشند:

(۱) هم‌مرتبه باشند.

(۲) درایه‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

به عبارتی دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p \times q}$ مساوی هستند اگر $m=p$ و $n=q$ و به ازای هر i و j ، $a_{ij}=b_{ij}$. در این حالت می‌نویسیم $A=B$.

تست ۲ اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1+2x & y+x \\ 3 & k \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x-y & 3y-1 \\ 1-z & x^2+y \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $z+k$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳

چون دو ماتریس از مرتبه ۲ هستند می‌توان نتیجه گرفت که شرط اول تساوی دو ماتریس را دارند.

اکنون باید تساوی درایه‌های نظیر به نظیر را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} a_{11}=b_{11} \Rightarrow x-y=1+2x \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \\ a_{12}=b_{12} \Rightarrow 3y-1=y+x \\ a_{13}=b_{13} \Rightarrow 1-z=3 \Rightarrow z=-2 \\ a_{14}=b_{14} \Rightarrow x^2+y=k \xrightarrow{x=-1, y=0} k=1 \end{cases}$$

در نتیجه $z+k=-2+1=-1$. بنابراین گزینه (۱) درست است.

جمع ماتریس‌ها

برای جمع کردن یا کم کردن دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع یا تفریق کنیم.

مثال:

$$۱) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+2 & 3-1 \\ 1+7 & 0+6 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

$$۲) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-(-7) & -1-5 \\ 3-9 & 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که فقط ماتریس‌های هم‌مرتبه قابل جمع و تفریق هستند و در حالت کلی

اگر $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ ، آن‌گاه

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]_{m \times n}$$

$$A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]_{m \times n}$$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

برای ضرب کردن یک عدد حقیقی در یک ماتریس کافی است آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب کنیم. به عبارت دیگر،

$$\left. \begin{array}{l} A = [a_{ij}]_{m \times n} \\ r \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad -3A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -6 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad 0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

قرینه یک ماتریس

اگر ماتریس A را در عدد -1 ضرب کنیم، ماتریس $-A$ به دست می‌آید که به آن **قرینه** ماتریس A می‌گوییم. به عبارت دیگر،

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow \text{قرینه ماتریس } A = -A = [-a_{ij}]_{m \times n}$$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A ، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند. در این صورت خواص زیر برقرارند.

$$(1) \quad A + B = B + A \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی جمع})$$

$$(2) \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری جمع})$$

$$(3) \quad A + \bar{O} = \bar{O} + A = A \quad (\text{عضو خنثی برای عمل جمع})$$

$$(4) \quad A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$$

$$(5) \quad r(A \pm B) = rA \pm rB$$

$$(6) \quad (r \pm s)A = rA \pm sA$$

$$(7) \quad (rs)A = r(sA)$$

$$(8) \quad 1A = A$$

$$(9) \quad r\bar{O} = \bar{O} \quad \text{و} \quad 0A = \bar{O}$$

$$(10) \quad \text{اگر } rA = rB \text{ و } r \neq 0, \text{ آن‌گاه } A = B.$$

$$(11) \quad \text{اگر } A = B, \text{ آن‌گاه } rA = rB.$$

مسئله ۲

اگر برای دو ماتریس A و B داشته باشیم $2A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس‌های A

و B را بیابید.

راه حل

مانند یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، به سادگی می‌توان A و B را به دست آورد:

$$\begin{cases} 2A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ A+B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی‌ها را}} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A را در معادله دوم قرار می‌دهیم و B را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

قبل از بیان ضرب دو ماتریس و روش به دست آوردن حاصل ضرب دو ماتریس، باید بدانیم که در حالت کلی شرط اینکه دو ماتریس را بتوان در یکدیگر ضرب کرد چیست؟

شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس

در حالت کلی، ضرب ماتریس A در ماتریس B را به صورت AB نشان می‌دهیم و این ضرب زمانی انجام‌پذیر است که تعداد ستون‌های ماتریس اول (یعنی ماتریس A) با تعداد سطرهای ماتریس دوم (یعنی ماتریس B) برابر باشد. به عبارتی اگر ماتریس A از مرتبه $m \times n$ باشد، ماتریس B باید از مرتبه $n \times p$ باشد، و حاصل این ضرب یک ماتریس از مرتبه $m \times p$ است. به عبارتی:

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

اکنون سؤالی که وجود دارد این است که درایه‌های ماتریس C را چگونه باید به دست آوریم؟ قبل از بیان این مطلب برای ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی را مورد بررسی قرار دهیم.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

ماتریس سطری $A_{1 \times n}$ و ماتریس ستونی $B_{n \times 1}$ را در نظر بگیرید:

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}], \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

با توجه به مطالب قبل، حاصل این ضرب یک ماتریس 1×1 است که در حقیقت یک عدد است و این عدد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

$$AB = (A \text{ درایه } n \text{ ام } B) + (A \text{ درایه } (n-1) \text{ ام } B) + \dots + (A \text{ درایه } 2 \text{ ام } B) + (A \text{ درایه } 1 \text{ ام } B)$$

و در نهایت طبق خواص سیگما می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$AB = \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1}$$

مثال: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ماتریس AB را

به دست آوریم. با توجه به تعریف ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی می‌نویسیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (1)(5) + (-3)(0) + (2)(1) = 7$$

مسئله ۳

دو ماتریس سطری و ستونی مثال بزنید به طوری که حاصل ضرب آنها برابر -7 باشد؟

راه حل: مثال‌های متفاوتی می‌توان ارائه کرد، به عنوان نمونه $A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

در این صورت خواهیم داشت

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (0)(5) + (-7)(1) + (2)(0) = -7$$

ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی

اکنون که ضرب ماتریس‌های سطری در ماتریس‌های ستونی را به شرط ضرب شدن یاد گرفتیم، می‌توانیم ضرب دو ماتریس را در حالت کلی مورد بررسی قرار دهیم.

ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ را در نظر بگیرید. دیدیم که ضرب ماتریس A در ماتریس

B ، ماتریسی مانند C از مرتبه $m \times p$ است. به عبارتی

$$AB = C = [c_{ij}]_{m \times p}$$

که در آن هر درایه از ماتریس C را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$c_{ij} = (\text{سطر } i \text{ ام } A) \times (\text{ستون } j \text{ ام } B)$$

$$= [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

و در نهایت طبق خواص سیگما داریم:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

در مثال زیر به درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس حاصل ضرب دقت کنید:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -2 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$\rightarrow 2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times (-2) = 2 + 2 - 6 = -2$

مثال: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم حاصل

AB را به دست آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} -3-5 & 6-2 & 12-1 \\ -7+5 & 14+2 & 28+1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 11 \\ -2 & 16 & 29 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

مثال: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. می‌خواهیم دو

ماتریس AB و BA را محاسبه کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+2+1 & 0+0-2 & 1+0+3 \\ 0+2+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 3+4+0 & 0+0+0 & -1+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0-1 & 3+0-2 & 3+0+0 \\ -2+0+0 & 2+0+0 & 2+0+0 \\ -1+0+3 & 1-2+6 & 1+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

با بررسی این دو مثال می‌توان به سادگی فهمید که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، یعنی در حالت کلی نمی‌توان گفت:

توجه

$$AB=BA$$

اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آن‌گاه منظور از A^2 ، یعنی $A \times A$ و A^3 ، یعنی $A^2 \times A$ و الی آخر. در ضمن دقت کنید فقط ماتریس‌های مربعی را می‌توان به توان رساند. به عنوان مثال ماتریس A از مرتبه 2×3 را نمی‌توان به توان رساند زیرا $A_{2 \times 3} \times A_{2 \times 3}$ در تعریف ضرب ماتریس صدق نمی‌کند.

تذکر

مسئله ۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & a \\ b & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

راه‌حل ماتریس $A \times B$ را به دست می‌آوریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5 & a \\ b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+4a & -5-2a \\ 2b-8 & -b+4 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند، بنابراین

$$\begin{cases} -5-2a=0 \Rightarrow a=-\frac{5}{2} \\ 2b-8=0 \Rightarrow b=4 \end{cases}$$

مسئله ۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^2 را به دست آورید.

راه‌حل چون $A^2 = A \times A$ می‌توان نوشت

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & c_{12} & \dots \\ \dots & c_{22} & \dots \\ \dots & c_{32} & \dots \end{bmatrix}$$

درایه‌های ستون دوم به صورت زیر به دست می‌آیند

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3+0+0=3, \quad c_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2+0-1=1$$

$$c_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1+0+1=2$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^2 برابر ۶ است.

مسئله ۲۴

اگر A ماتریسی مربعی باشد، $A^2 = A$ و $B = 2A - I$ ، ثابت کنید

$$A^3 + B^3 = A + B$$

با توجه به اینکه $A^2 = A$ ، می‌توان گفت $A^3 = A$. اکنون باید ثابت کنیم $B^3 = B$.

$$B = 2A - I \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان دو}} B^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I$$

$$\xrightarrow{A^2 = A} B^2 = 4A - 4A + I = I \xrightarrow{B \times} B^3 = B$$

پس $A^3 + B^3 = A + B$.

راه‌حل

تست ۵ اگر $(A - I)^2 = \bar{O}$ ، حاصل A^4 برابر کدام است؟

۴) $8A - 7I$

۳) $4A - 3I$

۲) $3A - 2I$

۱) I

به کمک اتحاد مربع می‌نویسیم:

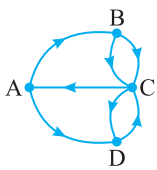
$$(A - I)^2 = \bar{O} \Rightarrow A^2 - 2A + I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = 2A - I \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^4 = (2A - I)^2$$

$$A^4 = 4A^2 + I - 4A \xrightarrow{A^2 = 2A - I} A^4 = 4(2A - I) + I - 4A \Rightarrow A^4 = 4A - 3I$$

پس گزینه (۳) درست است.

راه‌حل

تمرین



۱- بین چهار تیم فوتبال A ، B ، C و D مسابقاتی برگزار شده است و نتایج در نمودار زیر رسم شده است. ماتریسی بنویسید که نمایشگر این نمودار باشد.

۲- درایه‌های ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ را که در آن $a_{ij} = \begin{cases} 2j - i & i < j \\ 2i + j & i \geq j \end{cases}$ مشخص کنید.

۳- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ مفروض است. اگر برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ ، برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + 2j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2 - 1$ ، ماتریس A را با درایه‌های مشخص کنید.

۴- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ می‌دانیم $a_{ij} = 2ij - 5i$. مجموع درایه‌های قطر اصلی A را به دست آورید.

۵- اگر در ماتریس $A_{2 \times 5}$ درایه‌ها به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -i + 1 & i > j \\ 2i - j & i = j \\ 1 - j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A را تعیین کنید.

۶- دو ماتریس $\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در چه صورتی مساوی هستند؟

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، مقدار $x-y+3z$ را بیابید.

۸- حاصل عبارات زیر را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
 ب) $-\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

۹- ماتریس $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ با تعریف $b_{ij} = \begin{cases} 2i+j & i \geq j \\ 3i-2j & i < j \end{cases}$ مفروض است. ماتریس $3B-2I$ را به دست آورید.

۱۰- از تساوی $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 3A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به دست آورید.

۱۱- از تساوی $\begin{bmatrix} m & 2 \\ -1 & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & -1 \\ 3 & 2m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & m \end{bmatrix}$ ، مقدار $2m-4n$ را به دست آورید.

۱۲- ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} 2 & b \\ -1 & c \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 3a & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ در تساوی $B = 2(A-I)$ صدق می‌کنند. حاصل $2a-b+c$ را به دست آورید.

۱۳- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. یک ماتریس 3×2 مانند ماتریس C را طوری پیدا کنید که در تساوی

$$3A - B - 2C = \bar{O}$$
 صدق کند.

۱۴- اگر بدانیم $A = \begin{bmatrix} m-1 & n^2 \\ 3 & -1 \\ 2 & n \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -m-1 & n+2 \\ m+2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ، $C = 2A - B$ ، $c_{11} = -c_{22}$ و $c_{21} = 3c_{32}$ ، مقدار $2m+n$ را

به دست آورید.

۱۵- در دستگاه ماتریسی زیر درایه‌های ماتریس A را به دست آورید.

$$\begin{cases} 2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ 3A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

۱۶- کارخانه‌ای سه محصول a ، b و c را در دو بازار m و n می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین

با ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & a & b & c \\ 5000 & 2000 & 15000 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix}$ مشخص شده است. ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$ به ترتیب قیمت فروش و

قیمت تمام شده هر واحد از a ، b و c را نشان می‌دهند. درایه‌های هر یک از ماتریس‌های AB ، AC و $AB-AC$ را تعیین و تعبیر کنید.

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس‌های AB و BA را به دست آورید.

۱۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 + 2x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 2x \\ 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۱۹- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ مفروض‌اند. اگر حاصل ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی داشته باشد،

نشان دهید مجموع درایه‌های روی قطر فرعی B برابر صفر است.

۲۰- اگر ضرب دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & a \\ 2 & b \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، مقدار $ab + a + b$ را به دست آورید.

۲۱- در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+5 \\ -3x \end{bmatrix}$ ، مقدار $3x + y$ را به دست آورید.

۲۲- ماتریس $A_{2 \times 2}$ را به گونه‌ای پیدا کنید که در تساوی $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ صدق کند.

۲۳- درایه‌های ماتریس A اعدادی طبیعی هستند. اگر $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، کمترین مقدار مجموع درایه‌های A را به دست آورید.

۲۴- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس AB ماتریس قطری باشد، مقدار $a + b$ را

به دست آورید.

۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -5 & 4 \end{bmatrix}$ ، ماتریس ACB را به دست آورید.

۲۶- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ماتریس BAB را

به دست آورید.

۲۷- با یک مثال نشان دهید نتیجه‌گیری زیر نادرست است.

$$AB = BA = \bar{O} \Rightarrow A = \bar{O} \text{ یا } B = \bar{O}$$

۲۸- ماتریس‌های A ، B و C را به گونه‌ای مثال بزنید که $B \neq C$ ولی $AB = AC$.

۲۹- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. به کمک آنها نشان دهید نتیجه‌گیری زیر نادرست است.

$$AB = A \Rightarrow B = I$$

۱- ماتریس‌های A و B تعداد قبولی و مردودی در درس هندسه و گسسته در دو مدرسه را نشان می‌دهند. چند درصد از دانش‌آموزان

این دو دبیرستان در درس هندسه قبول شده‌اند؟

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{مردود} & \text{قبول} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{هندسه} \\ \text{گسسته} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 90 & 10 \\ 89 & 11 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{مردود} & \text{قبول} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{هندسه} \\ \text{گسسته} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 42 & 8 \\ 40 & 10 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- (۱) ۱۴٪ (۲) ۸۶٪ (۳) ۸۸٪ (۴) ۱۲/۴٪

۲- در ماتریس $A = [2i - j^2]_{2 \times 2}$ مجموع درایه‌ها برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳- اگر $A = [ij - 1]_{3 \times 2}$ و $B = [(i - j)^2]_{3 \times 3}$ مقدار $2a_{11}b_{12} - 3a_{32}b_{31}$ کدام است؟

- (۱) -۵۸ (۲) -۱۰ (۳) -۶۲ (۴) -۲۰

۴- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با تعریف $a_{ij} = 2j - i$ و ماتریس $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ با تعریف $b_{ij} = \begin{cases} 2j - 3i & i < j \\ i - 2j & i \geq j \end{cases}$ مفروض‌اند. مجموع

درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A - 2B$ چقدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) -۱

۵- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ در تساوی $mA - nB = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ صدق می‌کنند. زوج مرتب (m, n) برابر

کدام است؟

- (۱) $(2, 1)$ (۲) $(\frac{1}{2}, -1)$ (۳) $(1, -\frac{1}{2})$ (۴) این تساوی ممکن نیست.

۶- اگر $A = [2^{i-j}]_{2 \times 2}$ و $B = [(-1)^{i+j}]_{2 \times 2}$ ماتریس $2A + B$ کدام است؟

- (۱) $3I_2$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) I_2

۷- با توجه به دستگاه ماتریسی زیر، درایه‌ی واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) -۱ (۳) $\frac{11}{5}$ (۴) -۲

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 2 & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و ضرب این دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۹- اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند، $AB = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-1 \\ 0 & \beta+1 \end{bmatrix}$ و $B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ مقدار $A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ مقدار

$2\alpha + \beta$ برابر کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) -۲

۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس $(AB - BA)^2$ کدام است؟

(۱) I (۲) $A + I$ (۳) \bar{O} (۴) $B + I$

۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ و حاصل ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد، مقدار $a - 2b$ برابر کدام است؟

(۱) $-\frac{15}{2}$ (۲) -۶ (۳) -۹ (۴) $\frac{15}{2}$

۱۲- مجموع درایه‌های قطر اصلی حاصل ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۱۳- ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i < j \\ i+j & i = j \\ i-2j & i > j \end{cases}$ و ماتریس $B = [i^2 - 2j]_{3 \times 2}$ مفروض هستند. مجموع درایه‌های ماتریس

AB کدام است؟

(۱) ۳۸ (۲) -۳۸ (۳) ۲۷ (۴) -۲۷

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $D = ABC$ ، درایه سطر دوم و ستون اول

ماتریس D برابر کدام است؟

(۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۷ (۴) ۲۶

۱۵- اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند به طوری که $AB + BA = \bar{O}$ ، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $A^2 B^2 = AB$

(۲) $A^2 B^2 = -BA$

(۳) $BA^2 = A^2 B$

(۴) $A^2 B = -BA^2$

۱۶- اگر $A + B = 7I$ ، ماتریس $A^2 + 7B + AB$ برابر کدام است؟

(۱) $7I$ (۲) $14I$ (۳) I (۴) $49I$

۱۷- A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه هستند و $AB + 2BA = \bar{O}$ ، ماتریس $A^2 B$ حتماً کدام است؟

(۱) $-2B^2 A$ (۲) $2BA^2$ (۳) $-4B^2 A$ (۴) $4BA^2$

۱۸- اگر $2AB + BA = \bar{O}$ و $\lambda B^3 A = AB^3$ ، مقدار λ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

۱۹- اگر A ماتریسی مربعی باشد و $A^2 - A = \bar{O}$ ، حاصل $(2A - I)^{25}$ حتماً کدام است؟

- (۱) I (۲) $A - I$ (۳) $2A - I$ (۴) $2A + I$

۲۰- اگر $A^2 = 3A - 2I$ و $A^5 - A^4 = k(A - I)$ ، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۲۱- اگر $A^2 = 4A - 3I$ ، A^3 برابر کدام است؟

- (۱) $16A + 8I$ (۲) $13A - 12I$ (۳) $16A - 12I$ (۴) $13A + 12I$

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = 2mA - nI$ ، مقدار mn کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $2/5$ (۳) -5 (۴) $-2/5$

۲۳- اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک چهارم مجموع درایه‌های ماتریس A^2 باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟ ($a \neq -2b$)

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۲۴- چند ماتریس به شکل $A = \begin{bmatrix} a & b & ab \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ وجود دارد به طوری که $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 12 \\ 1/4 & 1 & 6 & 8 \\ 1/3 & 1/6 & 1 & 2 \\ 1/12 & 1/8 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^2 برابر کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۶

۲۶- اگر $A^2 + 2A = \bar{O}$ ، حاصل $(A + I)(-3A - 2I)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) $A - 2I$ (۳) $A + 2I$ (۴) $A - I$

۲۷- اگر $A^2 - 2A + I = \bar{O}$ ، ماتریس $A^4 + I$ برابر کدام است؟

- (۱) $8A - 3I$ (۲) $2I$ (۳) $4A - 2I$ (۴) $8A - 2I$

۲۸- اگر A ماتریسی مربعی باشد به طوری که $A^3 + 2A = I$ ، حاصل $(A^2 + I)^2$ کدام است؟

- (۱) $A^2 - I$ (۲) $A - I$ (۳) $A^2 + I$ (۴) $A + I$

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{20} برابر کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 40 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 40 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} کدام است؟

(۱) $1 + \sin 2\alpha$

(۲) $1 + \cos 2\alpha$

(۳) $1 + \sin^2 \alpha$

(۴) $1 + \cos^2 \alpha$

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ و $A^{1387} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A^6 کدام است؟

(۱) 3^5

(۲) 3^6

(۳) 3^7

(۴) 3^8

۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، در ماتریس A^6 مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۲۷

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت $A^4 - A^3 + A^2 - A + I$ کدام است؟

(۱) \bar{O}

(۲) $A+I$

(۳) I

(۴) $A-I$

۳۵- ماتریس $A = [i-1]_{3 \times 3}$ مفروض است. مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A^5 کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۲۴۳

(۳) ۸۱

(۴) ۱۸

۳۶- اگر در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ داشته باشیم $a_{ij} = \begin{cases} i^2 + j^2 & i < j \\ 0 & i \geq j \end{cases}$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $(A^3 + I_3)(A^4 - I_3)$ کدام است؟

(۱) $A - I_3$

(۲) $A^2 - A$

(۳) $A^4 - A$

(۴) $A^5 - I_3$

۳۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A^{1395} کدام است؟

(۱) ۳

(۲) -۱

(۳) صفر

(۴) -۳

۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^4 کدام است؟

(۱) اسکالر

(۲) ماتریس صفر

(۳) قطری غیرهمانی

(۴) همانی

۳۹- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 4A$ کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴)

(تجربی - ۹۷)

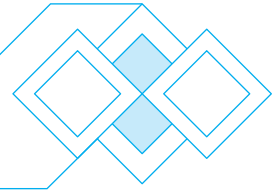
۴۰- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A \times A$ کدام است؟

۳۶ (۱) ۴۰ (۲) ۴۲ (۳) ۴۴ (۴)

۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

(ریاضی - ۹۷)

۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)



۱ جهت پیکان روی هر خط یا منحنی واصل بین دو تیم از طرف تیم برنده به سمت تیم بازنده است. بنابراین ماتریس این شبکه اطلاع‌رسانی به صورت زیر است.

$$\begin{matrix} & A & B & C & D \\ A & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ C & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۲ ماتریس A ، ۶ درایه به صورت زیر دارد.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2(1) + 1 = 3, & a_{12} &= 2(2) - 1 = 3 \\ a_{13} &= 2(3) - 1 = 5, & a_{21} &= 2(2) + 1 = 5 \\ a_{22} &= 2(2) + 2 = 6, & a_{23} &= 2(3) - 2 = 4 \end{aligned}$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

۳ بنابر تعریف A درایه‌های ماتریس A برابرند با

$$\begin{aligned} a_{11} &= 7, & a_{12} &= 1^2 - 1 = 0, & a_{13} &= 1^2 - 1 = 0 \\ a_{14} &= 1^2 - 1 = 0, & a_{21} &= 2 + 2 = 4, & a_{22} &= 7 \\ a_{23} &= 2^2 - 1 = 3, & a_{24} &= 2^2 - 1 = 3, & a_{31} &= 3 + 2 = 5 \\ a_{32} &= 3 + 4 = 7, & a_{33} &= 7, & a_{34} &= 3^2 - 1 = 8 \end{aligned}$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

۴ چون مجموع درایه‌های قطر اصلی A را می‌خواهیم، پس فقط همین درایه‌ها را با تعریف داده شده پیدا می‌کنیم. a_{11} ، a_{22} و a_{33} درایه‌های قطر اصلی ماتریس A هستند:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2(1)(1) - 5(1) = -3 \\ a_{22} &= 2(2)(2) - 5(2) = -2 \\ a_{33} &= 2(3)(3) - 5(3) = 3 \end{aligned}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر است با

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = -3 - 2 + 3 = -2$$

۵ درایه‌های ماتریس $A_{5 \times 5}$ را با تعریف داده شده

به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2(1) - 1 = 1, & a_{12} &= 1 - 2 = -1 \\ a_{13} &= 1 - 3 = -2, & a_{14} &= 1 - 4 = -3 \\ a_{15} &= 1 - 5 = -4, & a_{21} &= -2 + 1 = -1 \\ a_{22} &= 2(2) - 2 = 2, & a_{23} &= 1 - 3 = -2 \\ a_{24} &= 1 - 4 = -3, & a_{25} &= 1 - 5 = -4 \end{aligned}$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر -17 است.

۶ این دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند، اولی از مرتبه 2×3

و دومی از مرتبه 3×2 است، پس در هیچ صورتی نمی‌توانند مساوی باشند. توجه داشته باشید که شرط برابری دو ماتریس هم مرتبه بودن آنها و برابری درایه‌های نظیر به نظیر آنها است.

۷ در دو ماتریس مساوی درایه‌های نظیر دو به دو

مساوی‌اند. پس

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2x - y \\ 2x + y = 5 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 4x = 8 \Rightarrow x = 2, y = 1$$

بنابراین $x - y + 3z = 2 - 1 + 3(-2) = -5$.

۱۱ دو طرف تساوی را حساب می‌کنیم، سپس درایه‌های

نظیر را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} m & 2 \\ -1 & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & -1 \\ 3 & 2m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m-2 & 2 \\ 1 & n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 & 2 \\ 1 & 3m \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} m-2=n+1 \\ n+1=3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ 3m-n=1 \end{cases}$$

کم می‌کنیم $\rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$

در نتیجه $n = -4$ پس

$$2m - 4n = 2(-1) - 4(-4) = -2 + 16 = 14$$

۱۲ ماتریس‌های A و B را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$B = 2(A - I) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & b \\ -1 & c \end{bmatrix} = 2 \left(\begin{bmatrix} 3a & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & b \\ -1 & c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3a-1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & b \\ -1 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a-2 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

اکنون درایه‌های نظیر این دو ماتریس را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$6a - 2 = 2 \Rightarrow a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$b = -4, c = 6$$

بنابراین

$$2a - b + c = \frac{4}{3} + 4 + 6 = \frac{34}{3}$$

۱۳ ماتریس‌های A و B را در تساوی داده شده قرار

می‌دهیم تا ماتریس C را پیدا کنیم:

$$3A - B - 2C = \bar{0} \Rightarrow 3 \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - 2C = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -3 & 15 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 2C \Rightarrow \begin{bmatrix} -14 & -9 \\ 1 & 10 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} = 2C$$

$$C = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & 5 \\ -\frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

۸ می‌دانیم ماتریس‌های هم‌مرتبه قابل جمع و تفریق

هستند، بنابراین

(الف)

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$- \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \\ 2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

۹ ابتدا با تعریف داده شده درایه‌های ماتریس B را

به دست می‌آوریم:

$$b_{11} = 2 + 1 = 3, \quad b_{12} = 3 - 4 = -1$$

$$b_{21} = 4 + 1 = 5, \quad b_{22} = 4 + 2 = 6$$

پس

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$3B - 2I = 3 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$$

۱۰ تساوی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم تا

ماتریس A را پیدا کنیم:

$$3A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

۱۷ ماتریس AB از مرتبه ۳×۳ و ماتریس BA از مرتبه ۲×۲ است:

$$AB = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۱۵ & -۶ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۰ \\ -۲ & ۰ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۶ & ۲۰ \\ ۳ & -۷ \end{bmatrix}$$

۱۸ ابتدا ضرب ماتریس‌های طرف اول تساوی داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2x & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 + 2x \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x^2 - 2x + ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 + 2x \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$= (-x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x) + ۳$$

$$\text{بنابراین } (-x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x) + ۳ = ۰$$

برای حل این معادله فرض می‌کنیم $x^2 + 2x = t$.

$$(-t + 2)(t) + ۳ = ۰ \Rightarrow -t^2 + 2t + ۳ = ۰ \Rightarrow t^2 - 2t - ۳ = ۰$$

$$(t - ۳)(t + ۱) = ۰ \Rightarrow t = ۳ \text{ یا } t = -۱$$

در نتیجه

$$x^2 + 2x = ۳ \Rightarrow x^2 + 2x - ۳ = ۰$$

$$(x + ۳)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = -۳, x = ۱$$

یا

$$x^2 + 2x = -۱ \Rightarrow x^2 + 2x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x + ۱)^2 = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

بنابراین جواب‌های این معادله ماتریسی برابر $x = -۳$ ، $x = ۱$ و $x = -۱$ هستند، در نتیجه مجموع جواب‌ها برابر -۳ است.

۱۹ فرض می‌کنیم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. در این صورت بنابر

فرض سؤال،

$$AB = BA$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a + 2c & b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + b & -a + 2b \\ 2c + d & -c + 2d \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های نظیر این دو ماتریس برابرند، در نتیجه $2a - c = 2a + b$ پس $-c = b$ یعنی $b + c = ۰$. بنابراین مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس B صفر است.

۱۴ ابتدا درایه‌های ماتریس C را پیدا می‌کنیم:

$$C = 2A - B = 2 \begin{bmatrix} m-1 & n^2 \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -m-1 & n+2 \\ m+2 & ۳ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3m-1 & 2n^2 - n - 2 \\ 4-m & -5 \\ ۰ & 2n+2 \end{bmatrix}$$

اکنون بنابر فرض سؤال،

$$c_{11} = -c_{22} \Rightarrow 3m - 1 = -(-5) \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

$$c_{21} = 3c_{32} \Rightarrow 4 - m = 3(2n + 2)$$

$$\xrightarrow{m=2} 2 = 6n + 6 \Rightarrow n = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین

$$2m + n = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

۱۵ تساوی اول را در ۲ و تساوی دوم را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین آنها را با هم جمع می‌کنیم تا ماتریس A به دست آید:

$$\begin{cases} 4A + 6B = 2 \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} \\ 9A - 6B = 3 \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 13A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱۰ \\ -۲ & ۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۶ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$13A = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{۷}{۱۳} & \frac{۱۰}{۱۳} \\ \frac{۴}{۱۳} & \frac{۲}{۱۳} \end{bmatrix}$$

۱۶ ماتریس AB قیمت فروش در هر بازار را نشان می‌دهد:

$$AB = \begin{bmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۲۵۰۰ \\ ۱۵۰۰۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس AC قیمت تمام شده در هر بازار را مشخص می‌کند:

$$AC = \begin{bmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۸ \\ ۳/۵ \\ ۲/۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۹۷۵۰ \\ ۱۳۱۰۰ \end{bmatrix}$$

پس ماتریس $AB - AC$ میزان سود در هر بازار را نشان می‌دهد:

$$AB - AC = \begin{bmatrix} ۲۲۵۰۰ \\ ۱۵۰۰۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱۹۷۵۰ \\ ۱۳۱۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۷۵۰ \\ ۱۹۰۰ \end{bmatrix}$$

۵- گزینه ۴) ماتریس‌های A و B را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$mA - nB = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} -n = -4 \Rightarrow n = 4 \\ -3m = 5 \Rightarrow m = -\frac{5}{3} \\ 2m + 2n = 3 \\ m - 3n = 1 \end{cases}$$

چون مقادیر به دست آمده برای m و n در دو معادله دیگر صدق نمی‌کنند، پس چنین m و n ای وجود ندارند.

۶- گزینه ۲) با توجه به تعریف ماتریس‌های A و B، درایه‌های این دو ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_{11} = 2^0 = 1, & a_{12} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ a_{21} = 2^1 = 2, & a_{22} = 2^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_{11} = (-1)^2 = 1, & b_{12} = (-1)^3 = -1 \\ b_{21} = (-1)^3 = -1, & b_{22} = (-1)^4 = 1 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توانیم ماتریس $2A + B$ را به دست آوریم:

$$2A + B = 2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

۷- گزینه ۲) از دستگاه داده شده ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$3 \times \begin{cases} A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A + 3B = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ 2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 5A = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس A برابر -۱ است.

۱- گزینه ۳) در ماتریس A، تعداد دانش‌آموزان $90 + 10 = 100$ و در ماتریس B تعداد دانش‌آموزان $42 + 8 = 50$ است. همچنین،

تعداد کل دانش‌آموزان $100 + 50 = 150$

$90 + 42 = 132$ = تعداد دانش‌آموزان قبول شده در درس هندسه
بنابراین درصد دانش‌آموزان قبول شده در درس هندسه در دو مدرسه برابر است با

$$\frac{132}{150} \times 100 = 88\%$$

۲- گزینه ۳) درایه‌های ماتریس $A = [2i - j^2]_{2 \times 2}$ تعیین می‌کنیم:

$$A = [2i - j^2]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر $1 - 2 + 3 + 0 = 2$ است.

۳- گزینه ۱) با توجه به تعریف دو ماتریس A و B،

$$a_{21} = 2 - 1 = 1, \quad a_{32} = 6 - 1 = 5, \quad b_{12} = 1, \quad b_{31} = 4$$

بنابراین

$$2a_{21}b_{12} - 3a_{32}b_{31} = 2(1)(1) - 3(5)(4) = 2 - 60 = -58$$

۴- گزینه ۱) درایه‌های ماتریس‌های A و B را با

تعریف‌های داده شده به دست می‌آوریم:

$$A = [2j - i]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A - 2B$ برابر است با $1 - 1 + 4 = 4$.

۱۱- گزینه ۳ ابتدا حاصل ضرب $A \times B$ را پیدا می‌کنیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 16+3a & -12-2a \\ 4b-6 & -2b+4 \end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی همیشه صفر هستند، پس برای اینکه AB ماتریس قطری باشد، باید

$$\begin{cases} 4b-6=0 \Rightarrow b=\frac{3}{2} \\ -12-2a=0 \Rightarrow a=-6 \end{cases}$$

بنابراین

$$a-2b = -6-3 = -9$$

۱۲- گزینه ۴ مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس

حاصل ضرب مورد نظر است. پس فقط درایه‌های روی قطر

اصلی ماتریس ضرب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -3-2+0 & ? & ? \\ ? & 0+4+12 & ? \\ ? & ? & 0+0+14 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی این ماتریس برابر است با

$$-5+16+14=25$$

۱۳- گزینه ۲ درایه‌های ماتریس‌های A و B را به دست

می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توانیم ماتریس AB را به دست آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -18 & -16 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر است با

$$-18-16+1-5 = -38$$

۸- گزینه ۳ می‌دانیم ضرب دو ماتریس در حالت کلی

خاصیت جابه‌جایی ندارد. در این مسئله فرض بر این است که $AB=BA$. بنابراین

$$AB=BA$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 2 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1+b & 3-b \\ -2+a & 6-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -b+3a \\ -1 & b-a \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -1+b=5 \Rightarrow b=6 \\ -2+a=-1 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

توجه کنید که $a=1$ و $b=6$ در دو معادله دیگر نیز صدق می‌کنند، پس این مقادیر قابل قبول هستند. بنابراین $a+b=7$.

۹- گزینه ۲ از تساوی داده شده از سمت چپ ماتریس

A و از سمت راست ماتریس B را فاکتورگیری می‌کنیم:

$$A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \right) B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AIB = AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر طبق فرض $AB = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-1 \\ 0 & \beta+1 \end{bmatrix}$. در نتیجه

$$\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=1, \quad \beta+1=3 \Rightarrow \beta=2$$

بنابراین $2\alpha+\beta=2+2=4$.

۱۰- گزینه ۱ ابتدا ماتریس‌های AB و BA را به دست

می‌آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس

$$AB-BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$(AB-BA)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۹- گزینه ۳ از فرض $A^2 - A = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم

$A^2 = A$. پس A ماتریس خودتوان است، یعنی هر توان A

برابر A است. برای محاسبه $(2A - I)^{25}$ ابتدا ماتریس

$(2A - I)^2$ را به دست می‌آوریم:

$$(2A - I)^2 = 4A^2 + I - 4A = 4A + I - 4A = I$$

$$(2A - I)^{25} = \underbrace{[(2A - I)^2]^{12}}_I (2A - I)$$

$$= I^{12} (2A - I) = 2A - I$$

۲۰- گزینه ۳ از رابطه $A^2 = 3A - 2I$ ماتریس A^4 را

به دست می‌آوریم:

$$A^2 = 3A - 2I \xrightarrow{\text{توان } 2} A^4 = 9A^2 + 4I - 12A$$

$$\xrightarrow{A^2 = 3A - 2I} A^4 = 9(3A - 2I) + 4I - 12A$$

$$A^4 = 27A - 18I + 4I - 12A \Rightarrow A^4 = 15A - 14I$$

اکنون ماتریس A^5 را به دست می‌آوریم:

$$A^4 = 15A - 14I \xrightarrow{\text{در } A \text{ ضرب می‌کنیم}} A^5 = 15A^2 - 14A$$

$$\xrightarrow{A^2 = 3A - 2I} A^5 = 15(3A - 2I) - 14A$$

$$A^5 = 45A - 30I - 14A \Rightarrow A^5 = 31A - 30I$$

بنابراین ماتریس $A^5 - A^4$ برابر است با

$$A^5 - A^4 = (31A - 30I) - (15A - 14I)$$

$$= 16A - 16I = 16(A - I)$$

با مقایسه تساوی به دست آمده و رابطه $A^5 - A^4 = k(A - I)$

نتیجه می‌گیریم $k = 16$.

۲۱- گزینه ۲ طرفین فرض $A^2 = 4A - 3I$ را در A

ضرب می‌کنیم:

$$A^2 = 4A - 3I \xrightarrow{\times A} A^3 = 4A^2 - 3A$$

$$\xrightarrow{A^2 = 4A - 3I} A^3 = 4(4A - 3I) - 3A$$

$$A^3 = 16A - 12I - 3A \Rightarrow A^3 = 13A - 12I$$

۱۴- گزینه ۱ برای به دست آوردن درایه سطر دوم، ستون

اول ماتریس D باید سطر دوم A را در ماتریس B ضرب

و سپس حاصل را در ستون اول C ضرب کنیم (به سایر

درایه‌های ماتریس D احتیاجی نداریم):

ستون اول $C \times$ ماتریس $B \times$ سطر دوم $d_{21} = A$

$$d_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 10 - 16 = -6$$

۱۵- گزینه ۳ از فرض $AB + BA = \bar{O}$ به صورت زیر

استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} AB + BA = \bar{O} &\xrightarrow{\text{را از چپ ضرب می‌کنیم}} A^2B + ABA = \bar{O} \\ AB + BA = \bar{O} &\xrightarrow{\text{را از راست ضرب می‌کنیم}} ABA + BA^2 = \bar{O} \end{aligned} \right\}$$

$$A^2B - BA^2 = \bar{O} \Rightarrow A^2B = BA^2$$

۱۶- گزینه ۴ با استفاده از خاصیت بخشی ضرب ماتریس

در جمع، ماتریس $A^2 + AB$ را به صورت $A(A + B)$

می‌نویسیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} A^2 + \gamma B + AB &= A(\underbrace{A+B}_{\gamma I}) + \gamma B \\ &= \gamma A + \gamma B = \gamma(\underbrace{A+B}_{\gamma I}) = 49I \end{aligned}$$

۱۷- گزینه ۴ از فرض $AB + 2BA = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم

پس $AB = -2BA$

$$A^2B = A(AB) = A(-2BA) = -2(AB)A$$

$$= -2(-2BA)A = 4BA^2$$

بنابراین A^2B برابر $4BA^2$ است.

۱۸- گزینه ۴ از فرض $2AB + BA = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم

$AB = -\frac{1}{2}BA$. با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری ضرب

ماتریس‌ها می‌نویسیم:

$$AB^3 = (AB)B^2 = \left(-\frac{1}{2}BA\right)B^2 = -\frac{1}{2}B(AB)B$$

$$= -\frac{1}{2}B\left(-\frac{1}{2}BA\right)B = \frac{1}{4}B^2(AB)$$

$$= \frac{1}{4}B^2\left(-\frac{1}{2}BA\right) = -\frac{1}{8}B^3A$$

پس $AB^3 = -\frac{1}{8}B^3A$ در نتیجه $\lambda = -\frac{1}{8}$