

■ مبلغی که امروز بابت خرید این کتاب می پردازید،

در مقابل هزینه‌هایی که در آینده بابت

نخواندن آن پرداخت خواهید کرد،

بسیار ناچیز است ...

- ناشر: شرکت انتشارات کلاغ سپید
- رئیس هیأت مدیره: مهندس ابوالفضل جوکار
- معاونت علمی: مهندس محمد جوکار
- مدیران تألیف: مهندس محمد صحت‌کار، مهندس علی منصف شکری
- عنوان کتاب: لی لی پوت هندسه دوازدهم
- مؤلفین: علی منصف شکری، سیدمحمدرضا حسینی فرد
- ویراستاران علمی: زهره شعیباف مقدم، مهدی ستاری، معصومه غنی فرد، زهره رامشینی، مهسا زمانی
- ویراستاران فنی: راضیه انتخابی فرد، فرحناز عباسی، کبری مهدی خانی، زهرا عزیزی، زهره ذاکری
- مدیرکنترل پروژه: منصوره مردانی سرور
- امور اجرایی: محمدرضا الکتائی
- سرپرست واحد فنی: سامان شاهین پور
- صفحه‌آرهای: زهره توامری، سارا نوری اینانلو، سینا فری پور
- سرپرست گروه گرافیک: اسماعیل شریف‌کاظمی
- گرافیکست و طراح جلد: آزاده نوریان
- رسام: منصوره محمدی
- چاپ و صحافی: گاج
- مدیر چاپ: علی مزرعتی
- نوبت چاپ: اول (۱۳۹۷)
- شمارگان: ۵۰۰۰ نسخه
- قیمت: ۲۵۰۰۰ تومان
- تلفن: ۰۲۱ - ۶۴۲۰ - ۰۲۱
- صندوق پستی: ۳۷۷ - ۱۳۱۴۵
- دفتر مرکزی: تهران، خیابان انقلاب، بین چهارراه ولیعصر (عج) و فلسطین، شماره ۹۱۹

کلیه حقوق این کتاب برای انتشارات گاج محفوظ است. هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق چاپ و نشر تمام یا بخشی از این اثر را به هر صورت اعم از فتوکپی، چاپ کتاب و جزوه ندارد و متخلفین به موجب ماده ۵ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸/۱۱/۱۱ تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

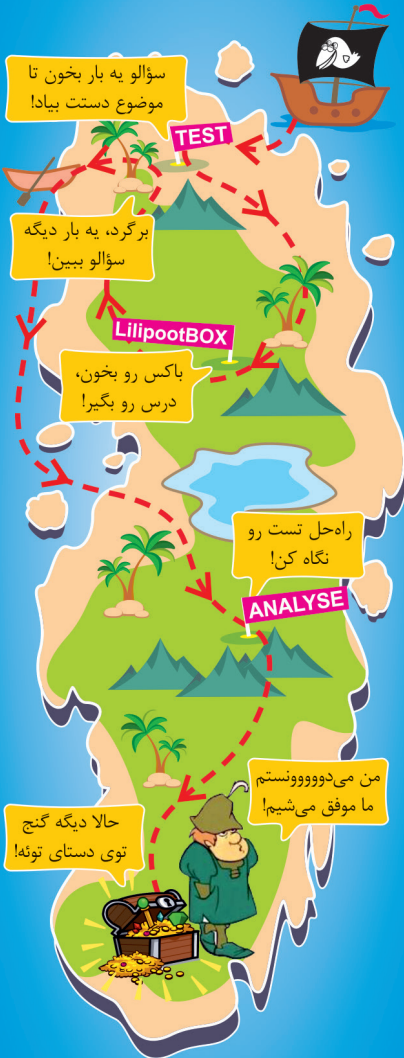
لی لی پوت

هندسه دوازدهم

شناسنامه

سرشناسه: منصف شکری، علی
عنوان: لی لی پوت هندسه دوازدهم
مشخصات نشر: تهران، شرکت انتشارات کلاغ سپید، ۱۳۹۷
مشخصات ظاهری: ۲۰۸ ص، مصور (رنگی)
فروست: مجموعه کتاب‌های لی لی پوت
شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۶۱۷۴-۰۷-۷
شناسه افزوده: حسینی فرد، سیدمحمدرضا
نوبت چاپ: اول (۱۳۹۷)
قیمت: ۲۵۰۰۰ تومان
وضعیت فهرست‌نویسی: فبیای مختصر
شماره کتابشناسی ملی: ۵۲۴۳۳۳۱

نقشه گنج



مقدمه مدیر تألیف

داستان «سفرهای گالیور» داستان سفر به یک شهر رؤیایی با آدم‌هایی کوچک و خیال‌گونه است؛ روایت زندگی آدم‌هایی پرشور و دوست‌داشتنی در سرزمین جادویی لی‌لی‌پوت!

در داستان شهر لی‌لی‌پوت، گالیور- قهرمان داستان که بر اثر حادثه‌ای پا بر این سرزمین گذاشته- همراه با آدم کوچولوهای قصه، دست ما را می‌گیرند و با خود به این شهر جادویی می‌برند تا در روایتی مابین واقعیت و رؤیا، از گنجی بزرگ که در این سرزمین کوچک نهان شده، پرده بردارند...

این داستان زیبا و بسیار جذاب، بنیان طراحی شد در ضمیر ما تا این بار نه در عالم خیال بلکه در واقعیت، مردانی بزرگ را در انتشارات کلاغ سپید گرد هم آوریم تا داستان شما را بگیرند و با خود به سرزمین خیال‌انگیز کتاب‌ها ببرند و داستانی جدیدتر و متفاوت از آن چه تاکنون در کلاس‌های مدرسه یاد گرفته‌اید را برای شما روایت کنند؛ داستانی شورانگیز از گنج‌های پنهان شده در کتاب‌ها و شگفتی‌های بر زبان نیامده در کلاس‌ها ...

پس همین امروز دستت را به ما بده

و با ما به **لی‌لی‌پوت** قدم بگذار!

در دست‌های ما نقشه گنجی بزرگ نهان است.

مقدمه مؤلفین

■ سال اول دبستان بود، کلاس بزرگ بود؛ یک اطلاق پنجدری. و روشن بود. آفتاب آمده بود تو. بیرون پاییز بود. دست ما به پاییز نمی‌رسید. شکوه بیرون کلاس بر ما حرام بود. سرهای ما تو کتاب بود. نمی‌شد سر بلند کرد. تماشای آفتاب تخلف بود. دیدن کاج حیاط جریمه داشت: از نمره گرفته، دو نمره کم می‌شد.

ما دور تا دور اطلاق روی نیمکت نشسته بودیم. میان اطلاق خالی بود. و چه پهنه‌ای برای چوب و فلک. تخته سیاه بدجایی بود: ضد نور بود. روی چند شیشه را گرفته بود، نصف یک درخت را حرام کرده بود. با تکه‌ای از آسمان. نوشته روی تخته سیاه خوب دیده نمی‌شد:

برگ، مرگ خوانده می‌شد. همان روز حسن «خوب» را «چوب» خوانده بود و چوب خوبی از دست معلم خورده بود. جای من نزدیک معلم بود. پشت میزش نشسته بود و ذکر می‌کرد. وجودش بطلان ذکر بود. آدمی بی‌رؤیا بود. پیدا بود زنجره را نمی‌فهمد. خطمی را نمی‌شناسد و قصه بلد نیست. در حضور او خیالات من چروک می‌خورد. وقتی وارد کلاس می‌شد، ما از اوج خیال می‌افتادیم. در تن خود حاضر می‌شدیم. پرهایمان ریخته بود. انگار سرنگون بودیم.

ترکه روی میز ادامه اخلاق او بود. بی‌ترکه شمایل او ناتمام می‌نمود و ترکه همیشه بود. حضور ابدی داشت. ترکه تنبیه، ترکه انار بود. در تعلیم و تربیت آن روزگار، درخت انار سهم داشت...

■ سهراب سپهری، اتاق آبی



A. Monsef Shokri

علی منصف شکری



M.R. Hosseinfard

سیدمحمد رضا حسینی فرد

تیم تألیف و ویراستاری

کتاب‌های ریاضی لی‌لی‌پوت



M. Sehatkar

محمد صحت‌کار

دانش‌آموخته
مهندسی مخابرات



Z. Sh. Moghaddam

زهرة شعراباف مقدم

دانش‌آموخته
ریاضیات کاربردی

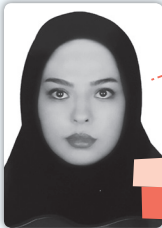


M. Sattari

مهدی ستاری

دانش‌آموخته
ریاضیات کاربردی

دانش‌آموخته
مهندسی مکانیک



Z. Ramshini

زهرة رامشینی

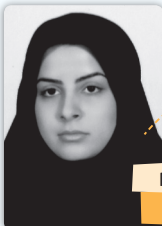


M. Zamani

مهسا زمانی

دانش‌آموخته
مهندسی مکانیک

دانش‌آموخته
ریاضی گرایش آنالیز



M. Ghanifard

معصومه غنی‌فرد

فهرست

فصل ۱ ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها ۸

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان ۳۲

فصل ۲ آشنایی با مقاطع مخروطی

درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی ۷۰

درس دوم: دایره ۷۸

درس سوم: بیضی و سهمی ۱۱۳

فصل ۳ بردارها

درس اول: معرفی فضای \mathbb{R}^2 ۱۵۰

درس دوم: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها ۱۶۸

ترنس تائو

متولد ۱۹۷۵

ریاضی‌دان استرالیایی

برنده مدال فیلدز سال ۲۰۰۶

1

CHAPTER

▪ ماتریس و کاربردها

- ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
- وارون ماتریس و دترمینان

درس اول
ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

TEST 001

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 5 \\ 3 & -1 & 4 & y \\ 7 & 8 & 9 & x-2 \end{bmatrix}$ اگر درایه سطر اول و ستون سوم از درایه سطر سوم و ستون

دوم ۵ واحد بزرگ‌تر باشد، مقدار x کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۱)

۳ (۳) ۱۳ (۴)

LILIPOOTBOX

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و تعدادی ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در این ماتریس، یک درایه نامیده می‌شود. ماتریس‌ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند A ، B ، C و ... نشان می‌دهند.

ستون سوم A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ \sqrt{7} & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

درایه

ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون

سطر دوم B

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون

سطر اول C

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون

اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، به صورت $A_{m \times n}$ یا $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نوشته می‌شود و A را ماتریسی از مرتبه $m \times n$ (یا به طور خلاصه m در n) می‌گویند.

سه ستون

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس ۲ در ۳

دو سطر

هر درایه ماتریس را با دو اندیس نشان می‌دهیم. اندیس اول شماره سطر و اندیس دوم شماره ستون را نشان می‌دهد، یعنی a_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام است.

درایه سطر اول و ستون دوم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

درایه سطر دوم و ستون دوم

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

درایه سطر اول و ستون سوم

$$D = [d_{11} \quad d_{12} \quad d_{13}]_{1 \times 3}$$

ANALYSE

درایه سطر اول و ستون سوم همان x و درایه سطر سوم و ستون دوم عدد 8 است، بنابراین:

$$x = 8 + 5 = 13$$

پاسخ گزینه ۴

E
T
O
N

انواع ماتریس

TEST 003

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-1 & a-2 \\ b+3 & b-2 \end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ - ۲) ۳ - ۳) ۴ - ۴) ۵

LILIPOOTBOX

اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه n (یا $n \times n$) می‌نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0/2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$C = [5]_{1 \times 1} = 5$$

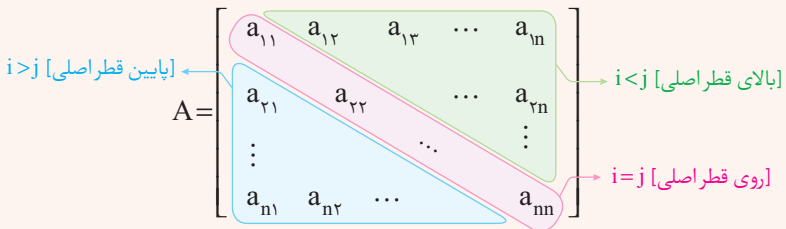
در ماتریس‌های مربعی بالا، درایه‌های قرمز رنگ را درایه‌های قطر اصلی می‌نامند.

در ماتریس‌های مربعی قطر دیگر ماتریس، قطر فرعی نام دارد.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

قطر فرعی

اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه بر اساس رابطه بین i و j می‌توان موقعیت درایه را نسبت به قطر اصلی تشخیص داد:



اگر ماتریسی فقط دارای یک سطر باشد، آن را ماتریس سطری می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 7 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

$$B = [2 \quad 1]_{1 \times 2}$$

$$C = [5]_{1 \times 1} = 5$$

اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد، آن را ماتریس ستونی می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0/5 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$C = [9]_{1 \times 1}$$

🍌 اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی صفر باشند، این ماتریس را **ماتریس قطری** می‌نامند.

$$\bullet A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

🍏 اگر تمام درایه‌های غیرواقعی بر قطر فرعی صفر شود، ماتریس را **شبه‌قطری** می‌نامند.

🍏 درایه‌های واقع بر قطر اصلی در ماتریس‌های قطری می‌تواند صفر هم باشد.

🍏 اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابر باشند، آن ماتریس را یک **ماتریس اسکالر** می‌نامند.

$$\bullet A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}_{۲ \times ۲} \quad B = \begin{bmatrix} -۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}_{۳ \times ۳} \quad C = [۴]_{۱ \times ۱}$$

🍏 اگر در یک ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های قطر اصلی برابر «۱» باشند، آن را **ماتریس واحد** (ماتریس همانی) می‌نامند و با **I** نشان می‌دهند.

$$\bullet I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳ \times ۳} \quad I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲ \times ۲} \quad I = [۱]_{۱ \times ۱}$$

🍏 ماتریسی که همه درایه‌های آن صفر باشد را **ماتریس صفر** می‌نامند و با **0** نشان می‌دهند.

$$\bullet A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲ \times ۲} \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳ \times ۳} \quad C = [۰ \ ۰ \ ۰]_{۱ \times ۳}$$

ANALYSE

📌 برای این‌که A یک ماتریس قطری باشد، باید تمام درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} a - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲ \\ b + ۳ = ۰ \Rightarrow b = -۳ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۱$$

پاسخ گزینه ۱

تساوی دو ماتریس

TEST 004

اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 5 \\ 2 & z-2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & x+y \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ کدام است؟

۸ (۲) ۹ (۱)

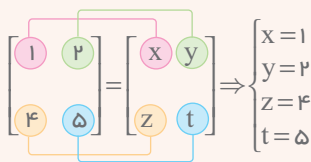
۱۱ (۴) ۱۰ (۳)

LILIPOOTBOX

🍏 دو ماتریس هم مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ را **مساوی** می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه نظیر با هم برابر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$

🍏 اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ برابر باشند، آن‌گاه داریم:



ANALYSE

📌 باید درایه‌های دو ماتریس نظیربه نظیر با هم برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

$$z - 2 = 3 \Rightarrow z = 5$$

بنابراین مجموع X و Y و Z برابر ۱۰ خواهد شد.

پاسخ گزینه ۳

E
T
O
N

اعمال روی ماتریس

TEST 005

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}]_{r \times r}$ و $b_{ij} = i^2 + j^2$ ، حاصل $2A - B + I$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

LILIPOOTBOX

🍏 برای محاسبه جمع یا تفریق دو ماتریس، کافی است درایه‌های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع یا تفریق کنیم:

🍏 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 2+4 & 1+2 \\ 3+6 & 5+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

📌 فقط دو ماتریس هم‌مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$

🍏 برای ضرب یک عدد در یک ماتریس، کافی است آن عدد را در تمام درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$

🍏 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

📌 در حالت خاصی که عدد -1 را در ماتریس A ضرب کنیم، ماتریس $-A$ به دست می‌آید که آن را **قرینه ماتریس A** می‌نامند و همواره داریم:

$A + (-A) = \bar{0}$

🍏 اگر A ، B و C ماتریس‌هایی $m \times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه **خواص زیر** همواره برقرار است:

$A + \bar{0} = \bar{0} + A = A$

📌 ماتریس صفر عضو بی‌اثر جمع در ماتریس‌ها است.

$A + (B + C) = (A + B) + C$

📌 جمع ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است.

$A + B = B + A$

📌 جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$(r \pm s)A = rA \pm sA$$

توزیع پذیری ماتریس روی جمع اعداد

$$r(A \pm B) = rA \pm rB$$

توزیع پذیری عدد روی جمع ماتریس ها

$$A + (-A) = (-A) + A = \bar{0}$$

وجود عضو قرینه

$$A = B \Rightarrow rA = rB$$

قابلیت ضرب عدد در طرفین تساوی ماتریسی

$$rA = rB \xrightarrow{r \neq 0} A = B$$

قابلیت حذف عدد غیر صفر از طرفین تساوی ماتریسی

$$(r)(A) = (A)(r)$$

جابجایی عدد و ماتریس

ANALYSE

ابتدا ماتریس B را با درایه ها مشخص می کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 1^2 + 1^2 & 1^2 + 2^2 \\ 2^2 + 1^2 & 2^2 + 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow 2A - B + I = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2+1 & 6-5+0 \\ 8-5+0 & 2-8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

پاسخ گزینه ۱

NOTE