Bertrand Russell

1872-1970

Matrix$_{m\times n}$

CHAPTER 1

درس اول ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

صفحه ۱۰ تا ۲۱ کتاب درسی

تعریف ماتریس و مفاهیم اولیهٔ آن

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و تعدادی ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در این ماتریس، یک درایه یا عنصر نامیده می‌شود. ماتریس‌ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند A ، B ، C و ... نشان می‌دهند.

ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون	ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون	ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون
سطر اول C $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ سطر دوم B	ستون سوم A $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ ۷ & \sqrt{۲} & -۲ \end{bmatrix}$ درایه

اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، به‌صورت $A_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نوشته می‌شود و A را ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (یا به‌طور خلاصه m در n) می‌گویند.

ماتریس ۱ در ۳ $B=[\,۳ \;\; ۲ \;\; ۴\,]_{۱\times ۳}$ ماتریس ۲ در ۳ ۲ سطر و ۳ ستون $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$

هر درایهٔ ماتریس را با دو اندیس نشان می‌دهیم. اندیس اول شمارهٔ سطر و اندیس دوم شمارهٔ ستون را نشان می‌دهد، یعنی a_{ij} درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم است.

درایهٔ سطر اول و ستون سوم

$D=[\,d_{۱۱} \;\; d_{۱۲} \;\; d_{۱۳}\,]_{۱\times ۳}$

درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$

درایهٔ سطر اول و ستون دوم

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$

Test تعداد درایه‌های کدام ماتریس از بقیه بیشتر است؟

۱) $[a_{ij}]_{۳\times ۴}$ ۲) $[a_{ij}]_{۲\times ۶}$

۳) $[a_{ij}]_{۶\times ۲}$ ۴) هر سه گزینه برابر است.

۴ تعداد درایه‌ها در یک ماتریس $m\times n$ برابر با $m\times n$ است، بنابراین همهٔ ماتریس‌های داده شده در گزینه‌ها ۱۲ درایه دارند.

۱. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) در هر سطر ۳ درایه وجود دارد. ۲) تعداد ستون‌ها برابر ۳ است.

۳) تعداد سطرها برابر ۲ است. ۴) در هر ستون ۳ درایه وجود دارد.

۲. اگر تعداد سطرها و ستون‌ها در ماتریس $A=[a_{ij}]_{(n-۱)\times ۳}$ با هم برابر باشد، تعداد درایه‌های کدام ماتریس از سایرین کمتر است؟

۱) $[a_{ij}]_{n\times ۳}$ ۲) $[a_{ij}]_{(n+۱)\times ۲}$

۳) $[a_{ij}]_{۶\times (n-۲)}$ ۴) $[a_{ij}]_{۵\times (n-۱)}$

۳. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام گزینه درست **نیست**؟

۱) $a_{ii}=۱$
۲) $a_{۲۱}=۲$
۳) $a_{۳۱}=۲$
۴) $a_{۲۳}=۱$

۴. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ درایه‌های به‌صورت $a_{۲j}$ معرف درایه‌های .... است و دامنهٔ j به‌صورت .... می‌باشد.

۱) درایه‌های سطر دوم - $۱\le j\le ۳$
۲) درایه‌های ستون دوم - $۱\le j\le ۳$
۳) درایه‌های ستون دوم - $۱\le j\le ۲$
۴) درایه‌های سطر دوم - $۱\le j\le ۲$

۵. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۵ & x & ۲ & ۱ \\ y & ۴ & -۱ & ۳ \\ x-۲ & ۹ & ۸ & ۷ \end{bmatrix}$ اگر درایهٔ سطر اول و ستون سوم از درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگ‌تر باشد، حاصل $\sum_{j=۱}^{۴} a_{۳j}$ کدام است؟

۱) ۳۶
۲) ۳۷
۳) ۳۴
۴) ۳۵

۶. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $\sum_{j=۱}^{۳} a_{۲j}$ چقدر از $\sum_{j=۱}^{۳}\sum_{i=۱}^{۲} a_{ij}$ کمتر است؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

بیان درایه‌ها بر حسب i و j

در بعضی از ماتریس‌ها، درایه‌ها را به‌طور مستقیم معرفی نمی‌کنند و آن‌ها را برحسب تابعی از اندیس‌های سمت چپ و سمت راست درایه بیان می‌کنند. در این موارد ممکن است تابع چندضابطه‌ای نیز باشد که برای پیدا کردن درایه‌ها باید به شرط‌های گفته شده دقت کنید.

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ اگر به‌ازای هر $۱\le i\le ۲$ و هر $۱\le j\le ۲$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ ⟸ جمع درایه‌ها $=۲۰$

در ماتریس $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ اگر به‌ازای هر $۱\le i\le ۲$ و هر $۱\le j\le ۳$ داشته باشیم: $b_{ij}=i+j$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

$B=\begin{bmatrix} \underset{b_{۱۱}}{۱+۱} & \underset{b_{۱۲}}{۱+۲} & \underset{b_{۱۳}}{۱+۳} \\ \underset{b_{۲۱}}{۲+۱} & \underset{b_{۲۲}}{۲+۲} & \underset{b_{۲۳}}{۲+۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$ ⟸ جمع درایه‌ها $=۲۱$

در ماتریس $C=[c_{ij}]_{۲\times۲}$ اگر $c_{ij}=\begin{cases} i\times j & ; i\ge j \\ ۷ & ; i<j \end{cases}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

$i\ge j$ ، $i<j$

$C=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱\times۱ & ۷ \\ ۲\times۱ & ۲\times۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ⟸ جمع درایه‌ها $=۱۴$

Test در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۲j & ; i\ne j \\ i+j & ; i=j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A کدام است؟

۱) -۲
۲) ۱
۳) -۳
۴) ۲

۲

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱^۲-۲\times۲ \\ ۲^۲-۲\times۱ & ۲+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ⟸ جمع درایه‌های ستون دوم $=-۳+۴=۱$

۷. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times3}$ اگر درایهٔ واقع در سطر i ام و ستون j ام از رابطهٔ $a_{ij}=i^2-j$ به دست آید، مجموع درایه‌های ماتریس کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸. در ماتریس $A=[2i-j^2]_{3\times3}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های واقع بر سطر دوم چقدر است؟

۱) ۱ ۲) −۲ ۳) ۳ ۴) −۴

۹. ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ با کدام گزینه برابر است؟ [i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون]

۱) $[i^2+j]_{2\times2}$ ۲) $[i+j]_{2\times2}$ ۳) $[2i-j]_{2\times2}$ ۴) $[ij]_{2\times2}$

اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n (یا $n\times n$) می‌نامیم.

a_{ij} روی قطر اصلی $\Leftrightarrow i=j$	a_{ij} روی قطر فرعی $\Leftrightarrow i+j=n+1$
$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0/2 & 0 & 4\end{bmatrix}_{3\times3}$	$C=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 4\\ 7 & 5 & 2\end{bmatrix}_{3\times3}$

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه بر اساس رابطهٔ بین i و j می‌توان موقعیت درایه را نسبت به قطر اصلی تشخیص داد:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

[بالای قطر اصلی] $i<j$

[پایین قطر اصلی] $i>j$

[روی قطر اصلی] $i=j$

Test در ماتریس $A=[3i+j]_{3\times3}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲ لازم نیست همهٔ درایه‌های A را پیدا کنید یافتن درایه‌های زیر قطر اصلی کافیست [در ضمن $a_{ij}=2i+j$]:

$A=\begin{bmatrix} & & \\ a_{21} & & \\ a_{31} & a_{32} & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ 7 & & \\ 10 & 11 & \end{bmatrix}\Rightarrow$ جمع درایه‌های زیر قطر اصلی $=7+10+11=28$

۱۰. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ کدام درایه بالای قطر اصلی قرار دارد؟

۱) a_{11} ۲) a_{22} ۳) a_{31} ۴) a_{13}

۱۱. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ با فرض $a_{ij}=\begin{cases}i-j & ;\ i<j\\ i+j & ;\ i=j\\ ij & ;\ i>j\end{cases}$ مجموع درایه‌های ستون سوم چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲. در ماتریس $A=[4i-j]_{3\times3}$ اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۳. در ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i-jx & ;\ i>j\\ ij & ;\ i=j\\ 2ix+j & ;\ i<j\end{cases}$ اگر مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی با مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی برابر باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) صفر ۴) ۲

گاهی اوقات یک ماتریس از ماتریس‌های کوچکتر [زیر ماتریس] تشکیل شده است، که چندین بار در کنکور مورد سؤال قرار گرفته است. نمونه‌ای از این ماتریس‌ها به صورت زیر است:

$M_۱=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ $\quad M_۲=[A \,\vdots\, B]$ $\quad M_۳=\left[\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{A} & d \\ & & e \end{array}\right]$ $\quad M_۴=\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right]$

در چنین مواردی یا موارد مشابه آن‌ها باید، درایه‌های هر زیر ماتریس را مطابق نظمی که در ماتریس اصلی قرار گرفته، در آن قرار دهیم. مخصوصاً اگر زیرماتریس‌ها بر حسب تابعی از i و j داده شوند، ابتدا باید هر زیر ماتریس را تشکیل دهیم و سپس آن را در ماتریس اصلی قرار دهیم.

اگر $A=[۱ \;\; ۲ \;\; ۳]$ ، $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس C را بنویسید. جمع درایه‌های قطر اصلی C کدام است؟

$C=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ جمع درایه‌های قطر اصلی $=۲+۰+۳=۵$

در مثال فوق، اگر ماتریس C را به صورت $C=\left[\begin{array}{c:cc} ۲ & ۱ & ۴ \\ \hdashline ۵ & & \\ ۱ & \multicolumn{2}{c}{D} \end{array}\right]$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس D کدام است؟

با توجه به ماتریس C، خواهیم داشت: $D=\begin{bmatrix} ۰ & ۷ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ جمع درایه‌های قطر فرعی $=۲+۷=۹$

اگر $A=[i+j]_{۱\times۳}$ ، $B=[i\times j]_{۱\times۳}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، ماتریس $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ را بنویسید.

ابتدا باید ماتریس‌های A و B را تشکیل دهیم و سپس زیر هم بنویسیم:

$A=[۱+۱ \;\; ۱+۲ \;\; ۱+۳]$
$B=[۱\times۱ \;\; ۱\times۲ \;\; ۱\times۳]$ $\Rightarrow C=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

بعضی‌ها ممکن است ماتریس C را به صورت $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱+۲ & ۱+۳ \\ ۲\times۱ & ۲\times۲ & ۲\times۳ \end{bmatrix}$ تشکیل دهند که کاملاً اشتباه است و اشتباه آن در درایه‌های سطر دوم است.

Test اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشد و ماتریس C را به صورت $C=\left[\begin{array}{c:c} & ۳ \\ \hdashline E & \end{array}\right]$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر اصلی E کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۱

$C=\left[\begin{array}{ccc:c} ۱ & ۲ & ۰ & ۳ \\ \hdashline ۱ & ۴ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۱ & ۴ \end{array}\right] \Rightarrow E=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۵ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$ جمع درایه‌های قطر اصلی $=۳$

۱۴. اگر $A=[i+j]_{۱\times۳}$ و $B=[i^۲+j^۲]_{۲\times۳}$ و ماتریس C به‌صورت $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس C کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۵
۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۵. اگرماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$, $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & ; i>j \\ i+j & ; i=j \\ ۳ & ; i<j \end{cases}$ را به‌صورت $A=\left[\begin{array}{cc:c} ۲ & ۳ & ۳ \\ \hdashline & & ۳ \\ \multicolumn{2}{c:}{B} & ۶ \end{array}\right]$ نشان دهیم، در ماتریس B مجموع درایه‌های قطرفرعی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

Tweet

Euclid
@Euclid Mid-4 century BC

در هندسه هیچ راه شاهانه‌ای وجود ندارد.

There is no royal way in geometry

Translate Tweet

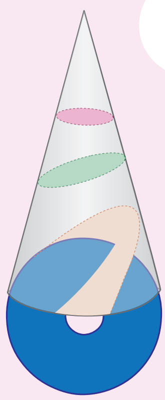
07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

1,337 2,416 8,150,910,208

Chapter 2

Conic Sections

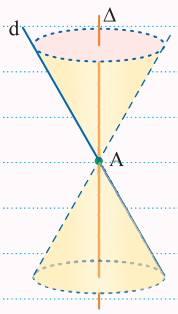


Add another Tweet

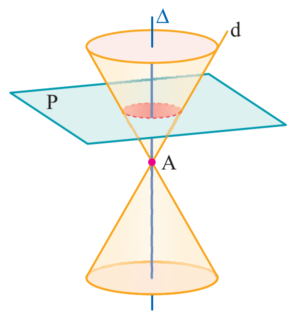
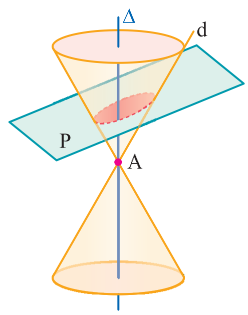
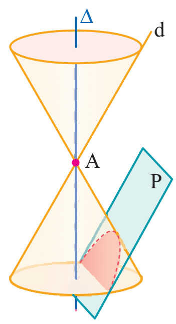
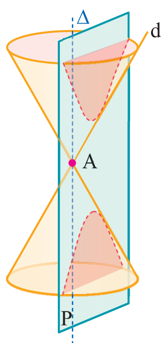
IR-MCI LTE 00:02 AM 100 %

Conic Sections

CHAPTER 2



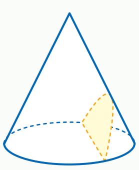
دو خط d و Δ را که در نقطهٔ A مانند شکل متقاطع (غیرعمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط Δ ثابت باشد و خط d را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را رویهٔ مخروطی [سطح مخروطی] می‌نامیم. در این حالت خط Δ را محور، خط d را مولد و نقطهٔ A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم. فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی، مقطع مخروطی نامیده می‌شود و انواع مختلفی دارد که عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی که البته در حالت‌های خاص ممکن است نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع باشند، نوع مقطع ایجاد شده بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و Δ دارد که در جدول زیر این حالات بررسی شده است:

دایره	بیضی	سهمی	هذلولی
صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P بر محور Δ عمود نبوده و غیر موازی با مولد d است.	صفحهٔ P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند.
			
حالات خاص			
در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط یک خط خواهد بود.	در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کرده و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.

اگر دو صفحهٔ موازی یک رویهٔ مخروطی را قطع کنند، سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سهمی، دو هذلولی می‌تواند سهمی و خط، یا دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع نیز باشد.

Test مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟

۱) موازی یک مولد
۲) موازی محور
۳) عمود بر یک مولد
۴) گذرا از نقطهٔ تلاقی محور و مولد



۱ اگر صفحهٔ موازی با مولد مخروط، رویهٔ مخروطی را قطع کند، سهمی به‌وجود می‌آید.

۳۸۵. دو خط Δ و d در نقطهٔ A متقاطع‌اند، اگر d حول Δ دوران کند، سطح حاصل از دوران را .... و فصل مشترک هر صفحه با آن را .... می‌نامند.

۱) رویهٔ مخروطی - مقطع مخروطی
۲) مقطع مخروطی - رویهٔ مخروطی
۳) رویهٔ مخروطی - سطح مخروطی
۴) سطح مخروطی - رویهٔ مخروطی

۳۸۶. اگر صفحه ای غیر عمود بر محور وغیر موازی با مولد یکی از دامنه‌های رویهٔ مخروطی را قطع کند، سطح مقطع به وجود آمده کدام است؟

۱) بیضی ۲) هذلولی ۳) سهمی ۴) یک خط

۳۸۷. فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) دو خط متقاطع ۲) سهمی ۳) دایره ۴) دو خط موازی

۳۸۸. اگر صفحه‌ای به موازات مولد رویه مخروطی آن را قطع کند، مقطع حاصل کدام می‌تواند باشد؟

۱) بیضی ۲) سهمی ۳) هذلولی ۴) دایره

۳۸۹. اگر صفحه‌ای عمود بر محور سهمی آن را قطع کند، مقطع به وجود آمده کدام می‌تواند باشد؟

۱) بیضی ۲) دایره ۳) سهمی ۴) هذلولی

۳۹۰. اگر صفحه‌ای به موازات محور رویهٔ مخروطی آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل کدام می‌تواند باشد؟

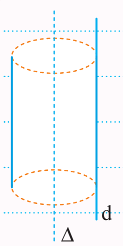
۱) دایره ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) سهمی

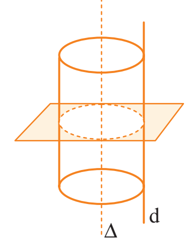
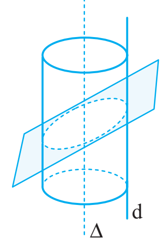
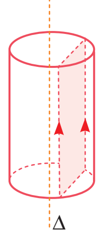
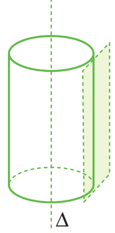
۳۹۱. اگر دو صفحهٔ موازی یک سطح مخروطی را قطع کنند، کدام گزینه می‌تواند فصل مشترک‌های ایجاد شده توسط این دو صفحه باشد؟

۱) دایره و بیضی ۲) دایره و خط ۳) خط و سهمی ۴) نقطه و سهمی

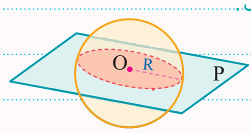
مقطع استوانه‌ای و کروی

هرگاه دو خط d و Δ موازی باشند و فاصلهٔ آن‌ها برابر r باشد، از دوران d حول Δ سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال اگر یک صفحه مانند P سطح استوانه‌ای را قطع کند، سطح مقطع پدید آمده مقطع استوانه‌ای نامیده می‌شود که به یکی از چهار حالت زیر است :



دایره	بیضی	دو خط موازی	یک خط
صفحهٔ P عمود بر Δ	صفحهٔ P غیرعمود و غیرموازی با Δ	صفحهٔ P موازی Δ و به فاصله کمتر از r از Δ	صفحهٔ P موازی Δ و به فاصلهٔ r از Δ
			

اگر یک کره به مرکز O و شعاع R داشته باشیم، سطح مقطع صفحهٔ P با سطح این کره همواره و در تمام حالات یک دایره است.



اگر از تقاطع صفحهٔ P و یک سطح استوانه‌ای یک بیضی ایجاد شده باشد، وضعیت صفحه نسبت به محور سطح استوانه‌ای چیست؟

صفحه باید غیر موازی با محور سطح استوانه‌ای و همچنین غیر عمود بر آن باشد، چون در صورت عمود شدن سطح مقطع به صورت دایره‌ای خواهد بود و در صورت موازی شدن با محور سطح استوانه‌ای به صورت دو خط موازی یا یک خط خواهد بود.

۶۵۳. در یک بیضی نقاط $A'(-5,0)$ و $A(5,0)$ دو سرقطربزرگ بیضی و $B(0,3)$ بالاترین نقطهٔ بیضی است، در این بیضی دایره‌ای که دو سرقطرآن کانون‌های بیضی باشد،بیضی را در چند نقطه قطع می‌کند؟

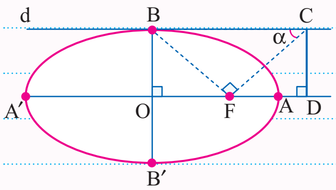
۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۵۴. یک بیضی به کانون‌های F و F' با دایرهٔ به قطر FF' نقطهٔ مشترک ندارد. کدام گزینه می‌تواند خروج از مرکزاین بیضی باشد؟

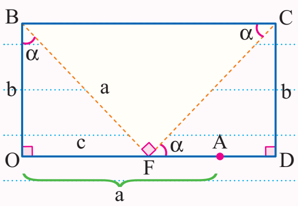
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

بررسی تمرین ۴ صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی

در بیضی زیر AA' و BB' دو قطر بیضی هستند، خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، اگر $B\hat{C}F=\alpha$ باشد، می‌توان نشان داد:



$$\boxed{\frac{AD}{AF}=\frac{1}{e}}$$



درمثلث OBF و BFC متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{a}{BC}=\frac{c}{a}=\frac{b}{CF}\Rightarrow BC=\frac{a^2}{c}$$

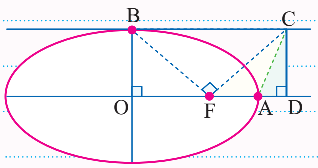
با توجه به این‌که $AD=OD-OA$ و همچنین $AF=OA-OF$ است، خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AF}=\frac{OD-OA}{OA-OF}=\frac{BC-OA}{OA-OF}=\frac{\frac{a^2}{c}-a}{a-c}=\frac{a^2-ac}{c(a-c)}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$$

یک نتیجهٔ جالب و مهم از رابطهٔ فوق رابطهٔ خروج از مرکز و زاویهٔ α است؛ اگر به مثلث OBF نگاه کنیم خواهیم داشت:

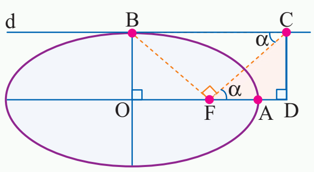
$$\boxed{\frac{AD}{AF}=\frac{1}{\sin\alpha}} \quad \boxed{\sin\alpha=\frac{c}{a}=e}$$

نسبت مساحت دو مثلث ACD و ACF نیز برابر با نسبت قاعده‌های دو مثلث است،بنابراین:



$$\boxed{\frac{S_{ACD}}{S_{ACF}}=\frac{AD}{AF}=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{e}}$$

Test در شکل زیر خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است، اگر $\frac{FD}{FC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، خروج از مرکزبیضی کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$

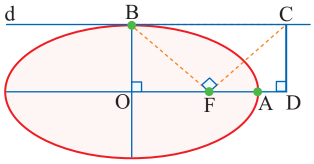
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲ با توجه به شکل داده شده داریم:

$$\cos\alpha=\frac{FD}{FC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

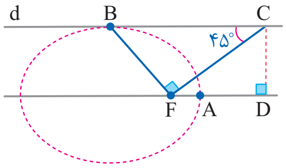
بنابراین $e=\sin\alpha=\frac{1}{2}$ است.

۶۵۵. در شکل زیر خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است، اگر F کانون بیضی و $\frac{AD}{AF}=3$ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{1}{4}$

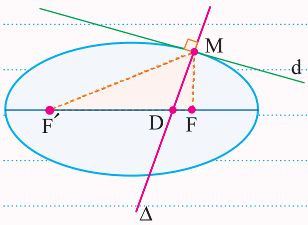
۶۵۶. در بیضی شکل زیر نقطهٔ F کانون بیضی است و خط d در رأس ناکانونی بیضی بر بیضی مماس است، حاصل $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



۱) $\sqrt{2}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) $2\sqrt{2}$

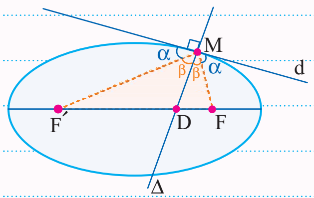
بررسی یک تمرین مهم از کتاب راهنمای معلم

در نقطهٔ M واقع بر بیضی E به کانون‌های F و F' مماس d را بر آن رسم کرده‌ایم، اگر خط Δ در نقطهٔ M عمود بر d بوده و قطر بزرگ بیضی را در D قطع کند، می‌توان نشان داد:



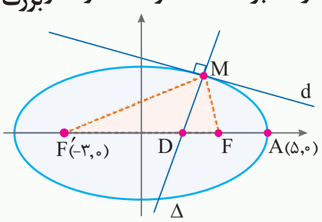
$$\boxed{e=\frac{DF}{MF}}$$

در صفحات بعد خواهیم دید **زاویهٔ شعاع های حامل با خط مماس با هم برابر است**، بنابراین متمم‌های آن‌ها نیز با هم برابر است $[\beta=\beta]$ در نتیجه Δ در مثلث MFF' نیمساز محسوب می‌شود، بنابراین ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کند:



$$\frac{MF}{MF'}=\frac{DF}{DF'}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{MF}{MF+MF'}=\frac{DF}{DF+DF'}\Rightarrow\frac{MF}{2a}=\frac{DF}{2c}\Rightarrow\frac{DF}{MF}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=e$$

Test در شکل زیر نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند و خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است و خط Δ در M بر خط d عمود شده و قطر بزرگ بیضی را در D قطع کرده است، $\frac{DF}{MF}$ کدام است؟

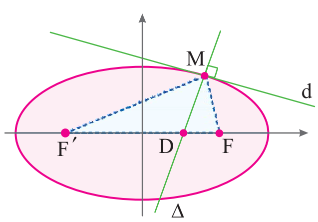


۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{2}{5}$
۴) $\frac{4}{5}$

۲ می‌دانیم $\frac{DF}{MF}=e$ است، بنابراین باید خروج از مرکز بیضی را پیدا کنیم، مطابق شکل داریم:

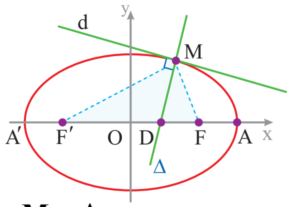
$$\begin{cases}a=5\\c=3\end{cases}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{DF}{MF}=\frac{3}{5}$$

۶۵۷. در شکل زیر نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند و خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است و خط Δ در M بر خط d عمود شده است. اگر خط Δ قطر بزرگ را در D قطع کند و $\frac{DF}{MF}=\frac{1}{3}$ و اندازهٔ قطر کوچک بیضی $2\sqrt{2}$ باشد، اندازهٔ قطر بزرگ بیضی کدام است؟



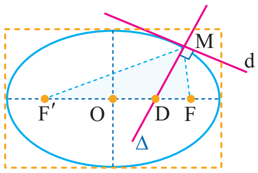
۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲/۵
۴) ۳

۶۵۸. در بیضی شکل زیر خط **d** در نقطهٔ **M** واقع بر بیضی بر آن مماس بوده و خط **Δ** در همان نقطه بر **d** عمود است و محور **x** ها را در **D** قطع کرده است. اگر $\frac{DF}{MF}=\frac{۱}{۳}$ بوده و محیط مثلث MFF' برابر ۲۴ باشد، بیضی محور **x** ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟



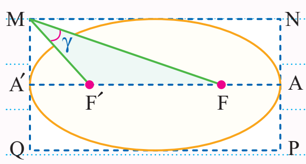
۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) ۶
۳) ۹ ۴) $۶\sqrt{۳}$

۶۵۹. در مستطیل به اضلاع ۱۰ و ۸ بزرگ‌ترین بیضی ممکن به کانون‌های **F** و **F′** را قرار داده‌ایم. در نقطهٔ **M** خط **d** را بر بیضی مماس کرده‌ایم و خط **Δ** در **M** بر **d** عمود شده و محور بیضی را در **D** قطع کرده حاصل $\frac{DF}{MF}$ کدام است؟



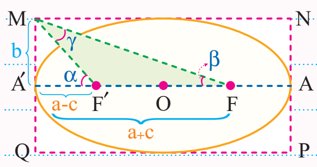
۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴
۳) ۰/۸ ۴) ۰/۶

اگر بیضی E مطابق شکل درون مستطیل MNPQ قرار گرفته باشد و از رأس M به کانون‌های بیضی یعنی نقاط F, F' وصل کنیم، می‌توان نشان داد:



$$\boxed{\tan\gamma=\frac{c}{b}}$$

با توجه به این‌که در مثلث MFF' زاویهٔ α زاویهٔ خارجی محسوب می‌شود، بنابراین با جمع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور برابر است:



$$M\overset{\Delta}{A'}F':\tan\alpha=\frac{b}{a-c}$$

$$M\overset{\Delta}{A'}F:\tan\beta=\frac{b}{a+c}$$

$$\tan\gamma=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{b}{a-c}-\frac{b}{a+c}}{۱+\frac{b}{a-c}\times\frac{b}{a+c}}$$

با ساده کردن عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\tan\gamma=\frac{\frac{b(a+c)-b(a-c)}{a^{۲}-c^{۲}}}{۱+\frac{b^{۲}}{a^{۲}-c^{۲}}}=\frac{\frac{۲bc}{b^{۲}}}{۱+\frac{b^{۲}}{b^{۲}}}=\frac{۲bc}{۲b^{۲}}=\frac{c}{b}$$

می‌توان زاویهٔ γ [زاویهٔ رویت پاره خط FF' از رأس‌های مستطیل محیط بر بیضی] را بر حسب خروج از مرکز نیز محاسبه کرد:

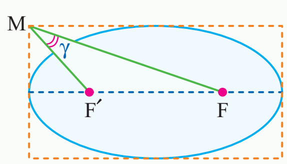
$$\boxed{\tan\gamma=\frac{e}{\sqrt{۱-e^{۲}}}}$$

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow\begin{cases}(\frac{c}{a})^{۲}+(\frac{b}{a})^{۲}=۱\Rightarrow\frac{b^{۲}}{a^{۲}}=۱-e^{۲}\Rightarrow\frac{a^{۲}}{b^{۲}}=\frac{۱}{۱-e^{۲}}\\ \frac{a^{۲}}{b^{۲}}=۱+\frac{c^{۲}}{b^{۲}}\Rightarrow\frac{۱}{۱-e^{۲}}=۱+\frac{c^{۲}}{b^{۲}}\Rightarrow\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{۱}{۱-e^{۲}}-۱}=\frac{e}{\sqrt{۱-e^{۲}}}\end{cases}\Rightarrow\tan\gamma=\frac{c}{b}=\frac{e}{\sqrt{۱-e^{۲}}}$$

Test درون مستطیل به اضلاع ۶ و $۴\sqrt{۳}$ بزرگ‌ترین بیضی ممکن به کانون‌های **F** و **F′** را قرار داده‌ایم، پاره خط **FF′** از یکی از رأس‌های مستطیل با کدام زاویه رویت می‌شود؟

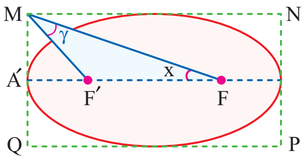
۱) °۳۰ ۲) °۴۵ ۳) °۶۰ ۴) °۱۲۰

۱ شکل مسئله به صورت مقابل است:



$$\begin{cases}۲b=۶\Rightarrow b=۳\\ ۲a=۴\sqrt{۳}\Rightarrow a=۲\sqrt{۳}\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}=\sqrt{۱۲-۹}=\sqrt{۳}\Rightarrow\tan\gamma=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\gamma=۳۰^\circ$$

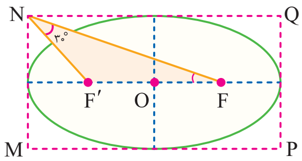
۶۶۰. در بیضی مقابل خروج از مرکز برابر $\frac{۱}{۲}$ و اندازهٔ قطر بزرگ برابر ۴ است، زاویهٔ $M\hat{F}A'$ کدام است؟



۱) ۳۰°　　۲) ۶۰°

۳) ۴۵°　　۴) ۷۵°

۶۶۱. در شکل مقابل نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

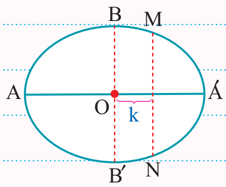


۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۴}$

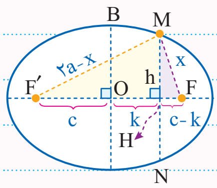
اندازهٔ وترهای عمود بر قطر بزرگ و محدود به بیضی [براساس کار در کلاس صفحهٔ ۱۲۸ کتاب درسی]

اگر یک خط به فاصلهٔ k واحد از مرکز بیضی و عمود بر قطر بزرگ بیضی [موازی قطر کوچک] مطابق شکل بیضی را قطع کند، اندازهٔ پاره‌خط ایجاد شده با سه بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$MN=\frac{۲b}{a}\sqrt{a^۲-k^۲}$$

برای اثبات کافیست از M به F و F' وصل کنیم، بنابراین داریم:



$\boxed{1}\ \overset{\Delta}{MHF}: h^۲=x^۲-(c-k)^۲$

$\boxed{2}\ \overset{\Delta}{MF'H}: h^۲=(۲a-x)^۲-(c+k)^۲$

$$\Rightarrow x^۲-(c-k)^۲=(۲a-x)^۲-(c+k)^۲$$

$$\Rightarrow (۲a-x)^۲-x^۲=(c+k)^۲-(c-k)^۲ \Rightarrow (۲a-x-x)(۲a-x+x)=(۲c)(۲k) \Rightarrow ۴(a-x)(a)=۴ck \Rightarrow x=a-\frac{ck}{a}$$

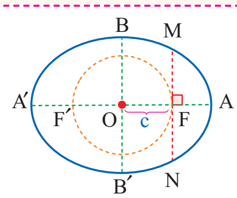
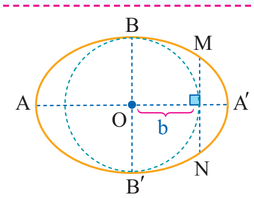
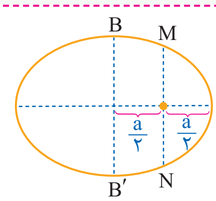
بنابراین با جایگذاری x در $\boxed{1}$ خواهیم داشت:

$$h^۲=(a-\frac{ck}{a})^۲-(c-k)^۲=a^۲+\frac{c^۲k^۲}{a^۲}-۲ck-(c^۲+k^۲-۲ck)=a^۲-c^۲+\frac{c^۲k^۲}{a^۲}-k^۲$$

$$=b^۲-k^۲(۱-\frac{c^۲}{a^۲})=b^۲-k^۲(\frac{b^۲}{a^۲})=\frac{b^۲}{a^۲}(a^۲-k^۲)\Rightarrow h=\frac{b}{a}\sqrt{a^۲-k^۲}\Rightarrow MN=۲h=\frac{۲b}{a}\sqrt{a^۲-k^۲}$$

یکی از نتایج جالب اثبات فوق یافتن اندازهٔ شعاع‌های حامل بیضی است، که برابر است با: $MF, MF'=a\pm ek$

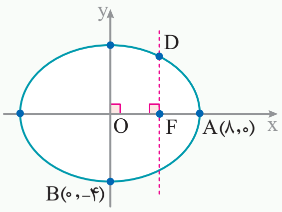
حالات خاص

$k=c$	$k=b$	$k=\frac{a}{۲}$
		
وتر مماس بر دایرهٔ کانونی	وتر مماس بر دایرهٔ فرعی	
$MN=\frac{۲b^۲}{a}$	$MN=\frac{۲bc}{a}$	$MN=\sqrt{۳}\,b$

... ادامه

I ♥ gaj

Test در بیضی شکل زیر F یکی از کانون‌های بیضی است، مختصات نقطهٔ D کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

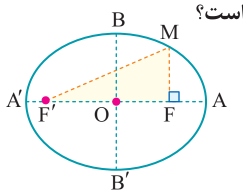


۱) $(۴\sqrt{۳},۴)$
۲) $(۲,۴\sqrt{۳})$
۳) $(۴\sqrt{۳},۲)$
۴) $(۴,۴\sqrt{۳})$

۳ در این بیضی $a=۸$ و $b=۴$ است، بنابراین:

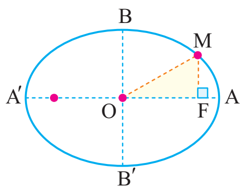
$$c=\sqrt{a^۲-b^۲}=\sqrt{۶۴-۱۶}=۴\sqrt{۳} \Rightarrow FD=\frac{b^۲}{a}=\frac{۴^۲}{۸}=۲ \Rightarrow D(۴\sqrt{۳},۲)$$

۶۶۲. در شکل زیر F و F' کانون‌های بیضی هستند. اگر قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی برابر ۶ و $۲\sqrt{۵}$ باشند، مساحت مثلث رنگ شده چقدر است؟



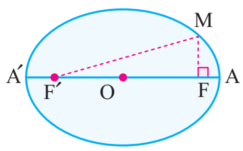
۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$
۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۵}$

۶۶۳. در بیضی شکل زیر F کانون است. اگر قطر بزرگ برابر ۵ و قطر کوچک برابر $\sqrt{۲۱}$ باشد، مساحت مثلث رنگ شده چقدر است؟



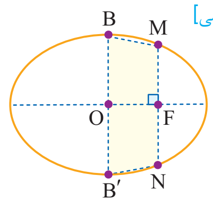
۱) ۲/۱ ۲) ۴/۲
۳) ۱/۰۵ ۴) ۳/۵

۶۶۴. در شکل مقابل طول قطر بزرگ و فاصلهٔ کانونی بیضی به ترتیب برابر ۸ و ۴ است، طول MF' چقدر است؟



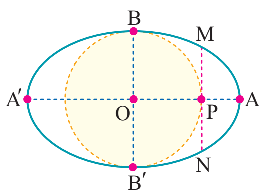
۱) ۶ ۲) ۵
۳) ۴ ۴) ۷

۶۶۵. در بیضی شکل مقابل اندازهٔ وتر MN برابر ۳/۶ و اندازهٔ قطر بزرگ بیضی ۱۰ است، مساحت چهار ضلعی رنگ شده کدام است؟ [F کانون بیضی]



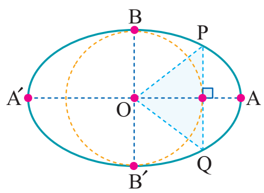
۱) ۱۴/۶ ۲) ۱۴/۸
۳) ۱۹/۲ ۴) ۱۶/۸

۶۶۶. در بیضی شکل زیر MN بر دایرهٔ فرعی (دایره به قطر BB') مماس است. اگر قطر بزرگ و فاصلهٔ کانونی بیضی برابر ۱۰ و ۸ باشد، طول MN چقدر است؟



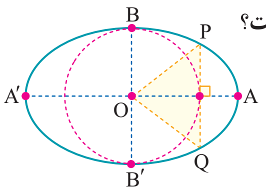
۱) ۴/۸
۲) ۳
۳) ۳/۶
۴) ۴

۶۶۷. در بیضی شکل مقابل قطر بزرگ برابر ۸ و فاصلهٔ کانونی برابر ۴ است. مساحت مثلث رنگی کدام است؟



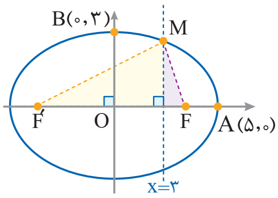
۱) ۱۰ ۲) ۱۲
۳) ۶ ۴) ۸

۶۶۸. در شکل مقابل PQ بر دایرهٔ به قطر BB' مماس است، اگر مثلث OPQ متساوی‌الاضلاع باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۶۶۹. در بیضی شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط MF کدام است؟



۱) ۲/۴

۲) ۲/۶

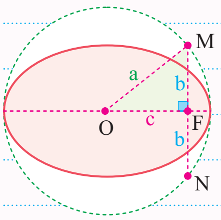
۳) ۲/۸

۴) ۲/۵

اندازهٔ وتر گذرا از کانون و محدود به دایرهٔ اصلی

I ♥ gaj

اگر از کانون F در یک بیضی، عمودی بر قطر بزرگ رسم کنیم تا دایرهٔ اصلی را در M و N قطع کند، اندازهٔ پاره‌خط MN با قطر کوچک بیضی برابر است:

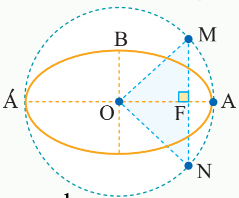


$$\boxed{MN = 2b}$$

کافیست از M به مرکز بیضی وصل کنیم، مثلث OMF قائم‌الزاویه است و داریم:

$$MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

Test در شکل زیر F کانون بیضی است. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، پاره‌خط MN از مرکز بیضی با کدام زاویه رویت می‌شود؟



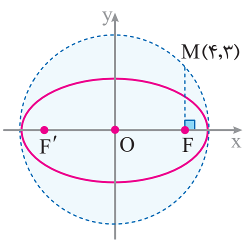
۱) 30° ۲) 60°

۳) 120° ۴) 45°

۲ می‌دانیم $MF=b$ است، حال اگر فرض کنیم $M\hat{O}F=\alpha$ باشد $\tan\alpha=\frac{b}{c}$ خواهد بود، اما جواب مسئله 2α است، بنابراین ابتدا باید $\frac{b}{c}$ را پیدا کنیم:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{c^2}+1 \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}+1 \Rightarrow \frac{b^2}{c^2}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha=30^\circ \Rightarrow 2\alpha=60^\circ$$

۶۷۰. در شکل مقابل F کانون بیضی است و M روی دایرهٔ اصلی بیضی قرار دارد. کم‌ترین فاصله نقطهٔ F از دایره چقدر است؟



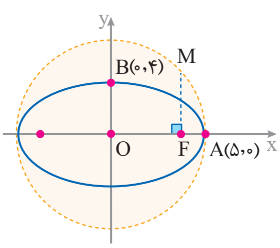
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۶۷۱. در بیضی شکل مقابل نقطهٔ F یکی از کانون‌های بیضی است، مختصات نقطهٔ M کدام است؟



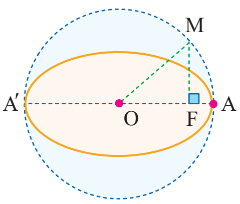
۱) $(3,6)$

۲) $(3,5)$

۳) $(4,4)$

۴) $(3,4)$

۶۷۲. در شکل زیر قطر دایره بر قطر بزرگ بیضی منطبق است و F کانون بیضی است. اگر طول قطر بزرگ برابر ۱۰ و فاصلهٔ کانونی بیضی برابر ۶ باشد، فاصلهٔ کانون F از شعاع OM چقدر است؟



۱) ۱/۲

۲) ۳/۶

۳) ۴/۸

۴) ۲/۴

IR-MCI LTE 00:00 AM 100 %

Tweet

Maryam Mirzakhani
@Maryam1977

ریاضیات زیبایی خود را تنها به افراد صبور نشان می‌دهد.

Mathematics reveals its beauty only to those who are patient

درس اول : .... معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

درس دوم : .... ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

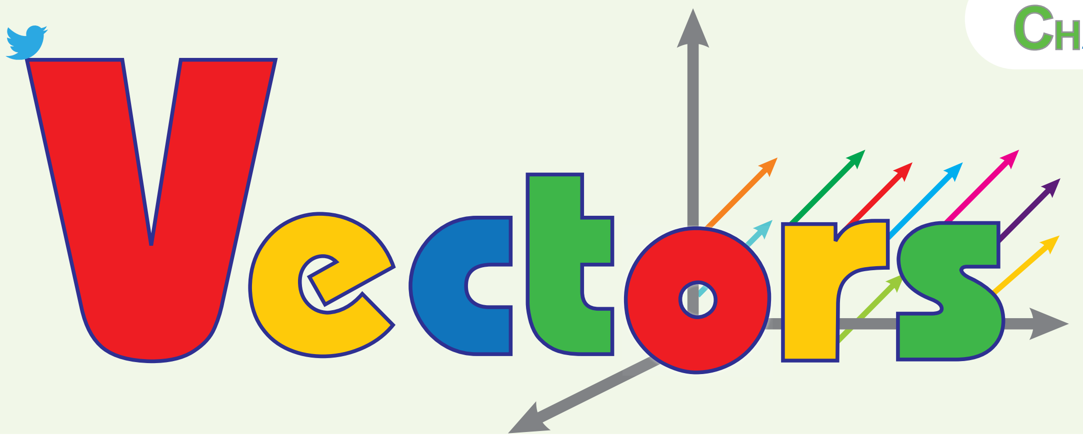
Translate Tweet

07:30 . 5/31/20

View Tweet activity

91,337 5,847 8,150,910,208

CHAPTER 3



Add another Tweet

Maryam Mirzakhani

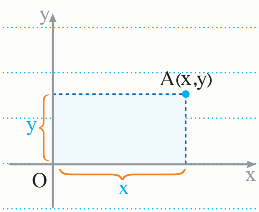
1977-2017

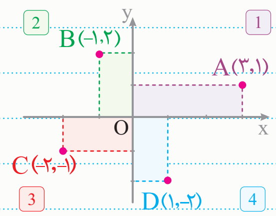
Vectors

CHAPTER 3

هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (x, y) مشخص می‌شود و برعکس هر زوج مرتب مانند (x, y) معرف یک نقطه از صفحه است و علامت مؤلفه‌های x و y مطابق جدول زیر است:

شمارهٔ ناحیه	x	y
1	+	+
2	−	+
3	−	−
4	+	−





اگر نقطهٔ $A(m-1, m-2)$ در ربع چهارم دستگاه مختصات واقع باشد، حدود m کدام است؟

در ربع چهارم باید $x>0$ و $y<0$ باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} m-1>0 \Rightarrow m>1 \\ m-2<0 \Rightarrow m<2 \end{cases} \Rightarrow 1<m<2$$

مجموعهٔ $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ شامل همهٔ نقاط صفحه می‌باشد و آن را با $\mathbb{R}^2$ نمایش می‌دهند، یعنی: $\mathbb{R}^2=\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

هر نقطه به صورت $M(0, y)$ روی محور yها و هر نقطه به صورت $N(x, 0)$ روی محور xها واقع است. یعنی هر نقطه‌ای که روی یکی از محورهای مختصات واقع باشد، مؤلفهٔ دیگر آن صفر است. [روی محور xها، عرض نقطه‌ها برابر صفر است و روی محور yها، طول نقطه‌ها برابر صفر است.]

اگر نقطهٔ $A(m-1, m-2)$ روی محور yها واقع باشد، فاصلهٔ آن از محور xها چقدر است؟

روی محور yها باید طول نقطه (یعنی x آن) صفر باشد:

$m-1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow A(0, -1) \Rightarrow$ فاصله از محور xها $=|y|=1$

Test اگر نقطهٔ $A(m-3, m+1)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات قرار داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>3$ ۲) $-1<m<3$

۳) $m<-1$ ۴) $m<3$

۲ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات دو بعدی باید $x<0$ و $y>0$ باشد:

$$\begin{cases} m-3<0 \Rightarrow m<3 \\ m+1>0 \Rightarrow m>-1 \end{cases} \Rightarrow -1<m<3$$

۷۹۴. به ازای کدام مقدار m نقطهٔ $A(m+3, m-1)$ بر محور xها واقع است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -3

۷۹۵. اگر نقطهٔ $A(m+3, m-1)$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار داشته باشد، حدود m کدام است؟

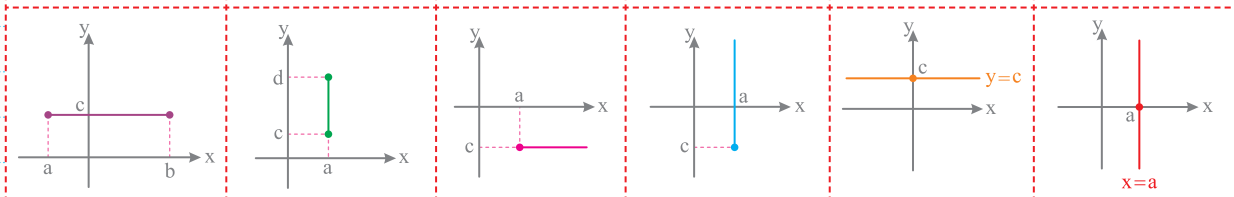
۱) $m>-3$ ۲) $-3<m<1$ ۳) $m<-3$ ۴) $m<3$

۷۹۶. اگر یکی از دو نقطهٔ $A(n-1, m^2+1)$ و $B(n^2+2, m+2)$ بر محور xها و دیگری بر محور yها واقع باشد، فاصلهٔ آن‌ها از هم چقدر است؟

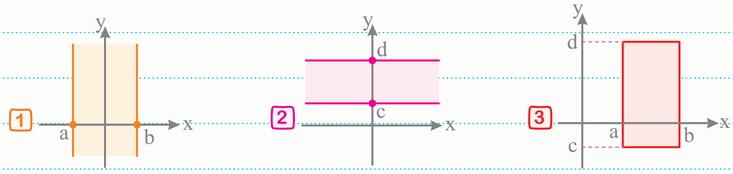
۱) $\sqrt{31}$ ۲) $\sqrt{29}$ ۳) $\sqrt{34}$ ۴) $\sqrt{33}$

نمودار یک رابطه شامل تمام نقاطی است که مختصات آن‌ها در آن رابطه صدق می‌کند، در حالت کلی نمودار رابطه‌های مقدماتی شامل مدل‌های زیر است:

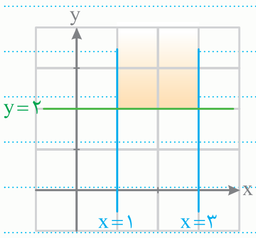
خط قائم	خط افقی	نیم‌خط قائم	نیم‌خط افقی	پاره‌خط قائم	پاره‌خط افقی
$x=a$	$y=c$	$x=a$ و $y\geq c$	$y=c$ و $x\geq a$	$x=a$ و $c\leq y\leq d$	$y=c$ و $a\leq x\leq b$



رابطهٔ $a\leq x\leq b$ تمام ناحیهٔ بین دو خط قائم $x=a$ و $x=b$ [شکل 1] و رابطهٔ $c\leq y\leq d$ تمام ناحیهٔ بین دو خط افقی $y=c$ و $y=d$ است [شکل 2] و همچنین رابطهٔ $a\leq x\leq b$ و $c\leq y\leq d$ یک مستطیل است [شکل 3] که ابعاد آن $|b-a|$ و $|d-c|$ است.



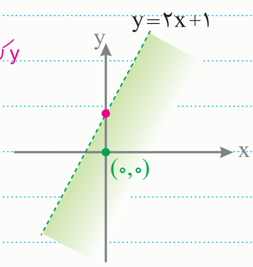
نمودار رابطهٔ $۱\leq x\leq ۳$ و $y\geq ۲$ به‌صورت مقابل است:



به‌طور کلی برای رسم نمودار یک رابطه که به‌صورت نامساوی داده شده است، ابتدا آن رابطه را در حالت تساوی رسم می‌کنیم، سپس یک نقطهٔ مشخص از صفحه را درون آن رابطه قرار می‌دهیم. اگر نقطه درون رابطه صدق کرد همان سمتی از نمودار که شامل آن نقطه است را هاشور می‌زنیم (جواب است.) و اگر صدق نکرد سمت دیگر نمودار، جواب است.

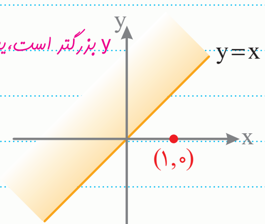
y کوچکتر است، یعنی پایین خط را هاشور می‌زنیم.

$y<۲x+۱ \Rightarrow y=۲x+۱$ رسم



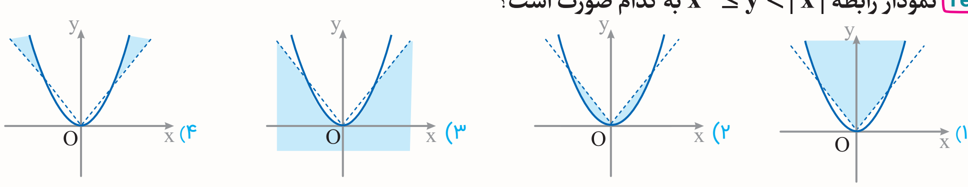
y بزرگتر است، یعنی بالای خط را هاشور می‌زنیم.

$y\geq x \Rightarrow y=x$ رسم

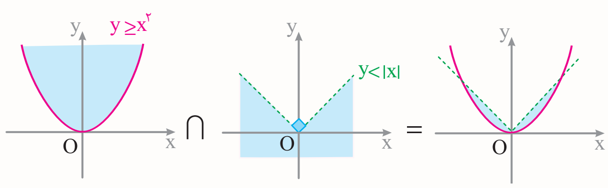


در حالتی که نامساوی به‌صورت «$\geq$» یا «$\leq$» باشد، نقاط مرزی به شکل خط ممتد و اگر به‌صورت «$>$» یا «$<$» باشد، به شکل خط‌چین است.

Test نمودار رابطهٔ $x^۲\leq y<|x|$ به کدام صورت است؟



۲ نمودار دو رابطهٔ $y<|x|$ و همچنین $y\geq x^۲$ را رسم کرده و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم:



۱۰۱۹. اگر $a_1^2+a_2^2+a_3^2=12$ باشد، حداکثر عبارت $\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۱۶

۱۰۲۰. اگر $a=(x,y,z)$ و $b=(2,1,2)$ و حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها برابر ۶ باشد، کم‌ترین مقدار برای $x^2+y^2+z^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

کوشی - شوارتز ویژهٔ رتبه‌های زیر ۱۰۰

اگر در مسائل مربوط به نامساوی کوشی - شوارتز مقداری از x یا y یا z را بخواهیم پیدا کنیم که به‌ازای آن مجموع مربعات عبارت داده شده مینیمم یا ترکیب خطی ماکزیمم می‌شود، باید دو بردار را موازی قرار دهیم و همهٔ متغیرها را بر حسب یک پارامتر مانند t پیدا کرده و در عبارت معلوم داده شده قرار دهیم تا مقدار پارامتر معلوم شود، به ازای پارامتر معلوم شده همهٔ متغیرها قابل به دست آوردن هستند.

Test اگر $4x+2y-z=18$ باشد، به ازای کدام مقدار x عبارت $4x^2+y^2+z^2$ حداقل می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۶

۲ با فرض $u=(2x,y,z)$ و $v=(2,2,-1)$ و با توجه به نامساوی کوشی - شوارتز می‌توان گفت که باید دو بردار موازی شوند، تا عبارت $4x^2+y^2+z^2$ حداقل شود، بنابراین داریم:

$$\frac{2x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=-t \end{cases}$$

حال می‌دانیم $4x+2y-z=18$ است. بنابراین مقادیر x,y,z را برحسب t درآن جایگذاری می‌کنیم: $4(t)+2(2t)-(-t)=18 \Rightarrow 9t=18 \Rightarrow t=2$

بنابراین به ازای $x=2$ عبارت داده شده حداقل می‌شود.

۱۰۲۱. اگر $2x-y+3z=12$ باشد، به ازای کدام مقدار y عبارت $x^2+y^2+9z^2$ حداقل می‌شود؟

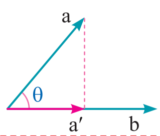
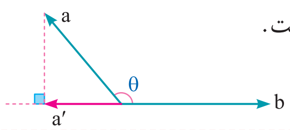
۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳-

تصویر بُردار بر بُردار

اگر a و b دو بردار باشند، در این صورت تصویر قائم بردار a بر بردار b را با a' یا $proj(\frac{a}{b})$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$proj(\frac{a}{b})=a'=(\frac{a.b}{b.b})b=(\frac{a.b}{|b|^2})b$$

تصویر قائم a بر b همواره مضربی از بردار b است

$a.b>0$	a' مضرب مثبت b است.	a' مضرب منفی b است.	$a.b<0$
			

Test تصویر قائم بردار $a=(0,3,-6)$ روی امتداد بردار $b=(1,2,-2)$ کدام است؟

۱) $(2,-1,-2)$ ۲) $(2,4,-4)$
۳) $(-2,-4,4)$ ۴) $(2,3,-1)$

۲ همیشه ابتدا عبارت داخل پرانتز را حساب می‌کنیم:

$$a'=(\frac{a.b}{b.b})b=(\frac{0+6+12}{4+1+4})=2b=(2,4,-4)$$

۱۰۲۲. تصویر قائم بردار $a=(0,-3,6)$ روی امتداد بردار $b=(2,-1,-2)$ کدام است؟

۱) $(2,-1,-2)$ ۲) $(-2,1,2)$
۳) $(4,-2,-4)$ ۴) $(2,3,-1)$

1 ٤ در ماتریسی که به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نشان داده می‌شود، m معرف تعداد سطرها و n معرف تعداد ستون‌هاست؛ بنابراین در این ماتریس ۲ سطر و ۳ ستون وجود دارد، یعنی در هر سطر ۳ درایه و در هر ستون ۲ درایه وجود دارد.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$$

2 ۲ باید ۳=n−۱ باشد، در نتیجه n=۴ است، بنابراین:

۱ $[a_{ij}]_{4\times 3}$ ۱۲ درایه — ۲ $[a_{ij}]_{5\times 2}$ ۱۰ درایه

۳ $[a_{ij}]_{6\times 2}$ ۱۲ درایه — ۴ $[a_{ij}]_{5\times 3}$ ۱۵ درایه

3 ۳ در این ماتریس $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$ است، بنابراین $a_{ii}=1$ است در ضمن در سایر گزینه‌ها، گزینهٔ ۳ نادرست است چون a_{31} یعنی درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون اول که برابر ۱ است.

$$\begin{bmatrix}\bigcirc&\bigcirc&\bigcirc\\ 2&\bigcirc&1\\ 1&\bigcirc&\bigcirc\end{bmatrix}\qquad a_{21},\ a_{31},\ a_{23}$$

4 ٤ چون شمارهٔ سطر ثابت و برابر ۲ است این درایه‌ها در سطر دوم واقع‌اند:

$$A=\begin{bmatrix}\bigcirc&\bigcirc\\ a_{21}&a_{22}\\ \bigcirc&\bigcirc\end{bmatrix}_{3\times 2}\to a_{2j}\ ,\ 1\le j\le 2$$

5 ٤ درایهٔ سطر اول و ستون سوم همان x و درایهٔ سطر سوم و ستون دوم عدد ۸ است، بنابراین $x=8+5=13$ است، حال منظور از $\sum_{j=1}^{4} a_{3j}$ مجموع درایه‌های سطر سوم است، زیرا اگر j از ۱ تا ۴ تغییر کند، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{4} a_{3j}=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=7+8+9+11=35$$

6 ۲ عبارت $\sum_{j=1}^{3} a_{2j}$ معرف مجموع درایه‌های سطر دوم و عبارت $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$ معرف جمع کل درایه‌های ماتریس است، بنابراین اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}-\sum_{j=1}^{3} a_{2j}=8-2=6$$

7 ۲ به‌جای هر کدام از درایه‌ها با توجه به تابع داده شده برحسب i و j مقدار عددی آن‌ها را قرار می‌دهیم، مثلاً در محاسبهٔ a_{12} به‌جای i=۱ و به‌جای j=۲ قرار می‌دهیم در نتیجه درایه‌ها به‌صورت زیر خواهند بود:

$$A=\begin{bmatrix}1^2-1&1^2-2&1^2-3\\ 2^2-1&2^2-2&2^2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\ 3&2&1\end{bmatrix}$$ جمع درایه‌ها = ۳

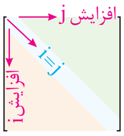
8 ۲ کافیست فقط درایه‌های سطر دوم را پیدا کنیم، یعنی i=۲ است:

$$A=\begin{bmatrix}\bigcirc&\bigcirc&\bigcirc\\ 3&0&-5\\ \bigcirc&\bigcirc&\bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow$$ جمع درایه‌ها $=3+0+(-5)=-2$

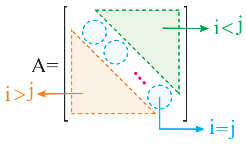
$\begin{cases} i=2\\ j=1\end{cases}$

9 ٤ در ماتریس داده شده $a_{11}=1$ است که تنها گزینه‌های ۳ و ۴ به ازای i=۱ و j=۱ برابر ۱ می‌شوند، در ضمن $a_{22}=4$ است که تنها گزینهٔ ۴ به ازای i=۲ و j=۲ برابر ۴ می‌شود، بنابراین $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ که $a_{ij}=i\times j$ باشد به‌صورت $A=\begin{bmatrix}1&2\\ 2&4\end{bmatrix}$ است.

10 ٤ در درایه‌های بالای قطر اصلی باید شمارهٔ ستون بزرگ‌تر از شمارهٔ سطر باشد، یعنی گزینهٔ ۴ تنها درایهٔ بالای قطر اصلی است و گزینه‌های ۱ و ۲ روی قطر اصلی و گزینهٔ ۳ زیر قطر اصلی واقع است.



11 ۲ می‌دانیم در ماتریس‌های مربعی اگر درایه‌ها را با a_{ij} نشان دهیم روی قطر اصلی i=j و بالای قطر اصلی $i<j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است:



$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&1-2&1-3\\ 2\times 1&2+2&2-3\\ 3\times 1&3\times 2&3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bigcirc&\bigcirc&-2\\ \bigcirc&\bigcirc&-1\\ \bigcirc&\bigcirc&6\end{bmatrix}$$

مجموع = ۳

12 ۲ درایه‌های زیر قطر اصلی به شکل زیر هستند:

$$A=\begin{bmatrix}\bigcirc&\bigcirc&\bigcirc\\ a_{21}&\bigcirc&\bigcirc\\ a_{31}&a_{32}&\bigcirc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bigcirc&\bigcirc&\bigcirc\\ 7&\bigcirc&\bigcirc\\ 11&10&\bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow$$ جمع درایه‌های زیر قطر اصلی = ۲۸

13 ۳

$$A=\begin{bmatrix}\bigcirc&2x+2\\ 2-x&\bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow 2x+2=2-x\Rightarrow x=0$$

14 ۳ ابتدا باید ماتریس‌های A و B را تشکیل می‌دهیم وسپس آن‌ها را در یک ماتریس زیر هم بنویسیم (یعنی A بالا و B پایین)

$$A=\begin{bmatrix}1+1&1+2&1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1+1&1+4&1+9\\ 4+1&4+4&4+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&10\\ 5&8&13\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2&3&4\\ 2&5&10\\ 5&8&13\end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های ستون دوم برابر است با: ۳+۵+۸=۱۶

15 ۳

$$A=\begin{bmatrix}1+1&3&3\\ 1&2+2&3\\ 1&1&3+3\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1&4\\ 1&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$ جمع‌درایه‌های‌قطرفرعی =۱+۴=۵

16 ۲ این ماتریس به‌صورت $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\ 0&3&0\\ 0&0&3\end{bmatrix}$ است که اسکالر غیرهمانی است.

372 ۱ ماتریس A یک ماتریس افقی و ماتریس B یک ماتریس قائم است بنابراین دترمینان ماتریس BA برابر صفر است اما دترمینان AB را باید محاسبه کرد:

$$|AB|=\left|\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&2\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}1&-2\\2&3\end{bmatrix}\right|=3+4=7$$

373 ۳

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{-6}$$

374 ۴

$$(3A)(2A^{-1})=6(AA^{-1})=6I\Rightarrow|6I|=6^2|I|=36$$

375 ۴

$$|2A^{-1}|\times\begin{vmatrix}-3&-4\\1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}\Rightarrow 2^2|A^{-1}|\times(-2)=1$$

$$\frac{-8}{|A|}=1\Rightarrow|A|=-8$$

376 ۳

$$|A^{-1}|=\frac{1}{2}\Rightarrow|A|=2$$

$$||-2A|A|=|(-2)^2|A|A|=|4\times2\times A|$$

$$=8^2|A|=64\times2=128$$

377 ۱ از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$|-A^2|=\begin{vmatrix}-3&4&-4\\0&1&0\\2&-2&3\end{vmatrix}\Rightarrow(-1)^3|A|^2=1(-9+8)$$

$$|A|^2=1\Rightarrow|(A^{-1})^4|=|A^{-1}|^4=\frac{1}{|A|^4}=1$$

378 ۱

$$|(P^{-1}AP)^6|=|P^{-1}A^6P|=|P^{-1}||A^6||P|=|A|^6=(-1)^6=1$$

379 ۱ ابتدا $A-I$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A-I=\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&-1&3\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow|A-I|=2$$

$$|B(A-I)^{-1}|=|B|\times\frac{1}{|A-I|}=(-6)\left(\frac{1}{2}\right)=-3$$

380 ۴ ماتریس $2I$ را به طرف دوم می‌بریم و از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$A^{-1}BA-2I=A\Rightarrow A^{-1}BA=A+2I$$

$$|A^{-1}BA|=|A+2I|\Rightarrow|A^{-1}||B||A|=|A+2I|\Rightarrow|B|=|A+2I|$$

$$A+2I=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\2&3\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=11$$

381 ۲

$$|A^{-1}B+I|=|A^{-1}B+A^{-1}A|$$

$$=|A^{-1}(B+A)|=|A^{-1}||B+A|=\frac{|A+B|}{|A|}=\frac{-2}{3}$$

382 ۱

$$|A^{-1}BA+3I|=|A^{-1}BA+3A^{-1}A|$$

$$=|A^{-1}(B+3I)A|=|A^{-1}||B+3I||A|=|B+3I|=3$$

383 ۲ ابتدا دترمینان خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$|A^{-1}+A|=|A^{-1}(I+A^2)|=|A^{-1}||I+A^2|$$

حال ماتریس A^2+I را تشکیل می‌دهیم و دترمینان آن را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2+I=\begin{bmatrix}4&2\\1&2\end{bmatrix}\Rightarrow|A^2+I|=6$$

بنابراین دترمینان خواسته شده برابر است با:

$$|A^{-1}+A|=\frac{|I+A^2|}{|A|}=\frac{6}{2}=3$$

384 ۲ ماتریس A^{-1} به صورت $A^{-1}I=A^{-1}BB^{-1}$ و ماتریس B^{-1} را به صورت $IB^{-1}=A^{-1}AB^{-1}$ می‌نویسیم:

$$|A^{-1}+B^{-1}|=|A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}|$$

$$=|A^{-1}(A+B)B^{-1}|=|A^{-1}||A+B||B^{-1}|$$

$$=\frac{|A+B|}{|A||B|}=\frac{6}{|AB|}=\frac{6}{-2}=-3$$

Conic Sections — مقاطع مخروطی

385 ۱ سطح حاصل از دوران رویه مخروطی یا سطح مخروطی نامیده می‌شود و فصل مشترک هر صفحه با یک رویهٔ مخروطی مقطع مخروطی نامیده می‌شود.

386 ۱ صفحه‌ای که به‌طور مایل (و غیر موازی با مولد) رویه مخروطی را قطع می‌کند بیضی و در حالت خاصی که از رأس عبور کند نقطه به وجود می‌آورد.

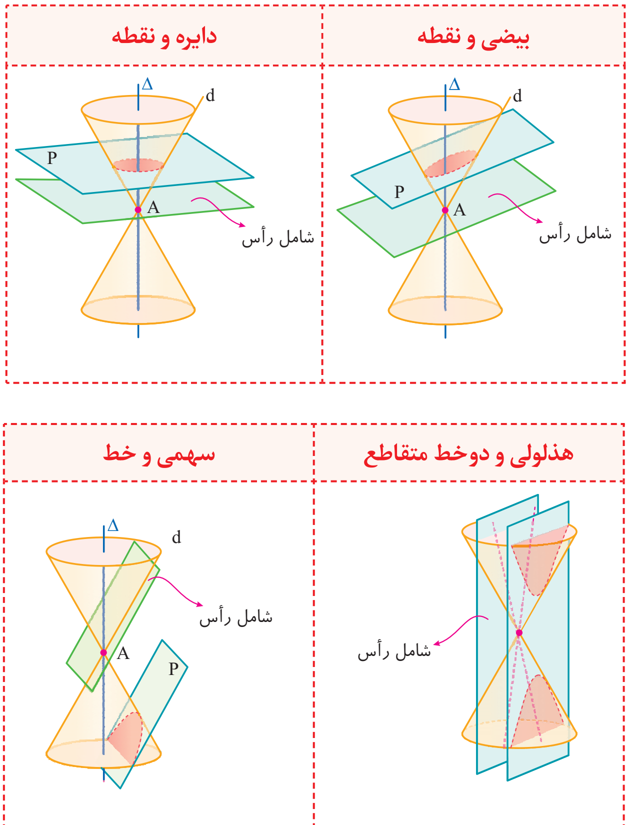
387 ۴ فصل مشترک یک صفحه و رویهٔ مخروطی تحت هیچ شرایطی دو خط موازی نخواهد شد اما در حالت‌های خاص که دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی نباشد، دو خط متقاطع، یک خط یا یک نقطه می‌تواند باشد.

388 ۲ صفحه‌ای که به موازات مولد رویه مخروطی آن را قطع می‌کند سهمی و در حالت خاص که صفحه شامل رأس باشد، یک خط می‌تواند باشد.

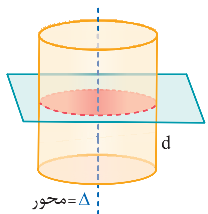
389 ۲ صفحه‌ای که عمود بر محور رویهٔ مخروطی آن را قطع کند دایره و در حالت خاص که صفحه از رأس عبور کند نقطه به وجود می‌آورد.

390 ۳ صفحه‌ای که به موازات محور رویه مخروطی آن را قطع می‌کند هذلولی و در حالت خاص دو خط متقاطع به وجود می‌آورد.

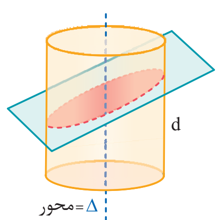
391 ۳ اگر دو صفحهٔ موازی یک رویهٔ مخروطی را قطع کنند سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سهمی و دو هذلولی می‌تواند سهمی و خط یا دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع نیز باشد:



392 ۲ اگر صفحه عمود بر محور سطح استوانه‌ای آن را قطع کند،سطح مقطع به وجود آمده یک دایره است.



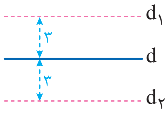
393 ۴ از دوران خط d حول Δ یک سطح استوانه‌ای به وجود می‌آید که اگر صفحهٔ P غیرعمود بر Δ و غیرموازی با آن سطح استوانه‌ای را قطع کند، سطح مقطع به وجودآمده یک بیضی است.



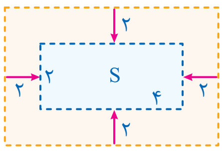
394 ۲ از تقاطع یک صفحه با همهٔ رویه‌های کروی، استوانه‌ای و مخروطی امکان ایجاد مقطع دایره‌ای وجود دارد.

395 ۲ از تقاطع یک صفحه با رویهٔ کروی هرگز یک بیضی ایجاد نمی‌شود و سطح مقطع حاصل همواره یک دایره و در حالت خاص که صفحه مماس بر رویهٔ کروی باشد، یک نقطه خواهد بود.

396 ۴ نقاط مورد نظر روی خطوط d_1 و d_2 هستند و از آن‌جایی که هر خط شامل بی‌شمار نقطه است، بنابراین گزینهٔ ۴ جواب است.

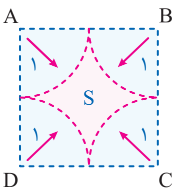


397 ۱ برای این‌که یک سکه کاملاً درون یک منحنی بسته قرار بگیرد باید فاصلهٔ مرکز سکه از تمام نقاط منحنی از شعاع سکه بزرگ‌تر باشد، بنابراین باید فاصلهٔ مرکز سکه از تمام اضلاع مستطیل بیش از ۲ باشد:



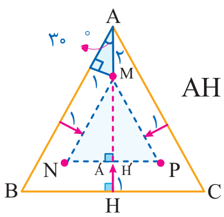
$$S=۴\times۲=۸$$

398 ۲ مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از رأس A بزرگ‌تر از ۱ است، بیرون دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۱ است و به طریق مشابه در سایر رئوس نیز این داستان برقرار است. بنابراین مکان هندسی موردنظر مطابق شکل است و مساحت آن برابر است با:



$$S=۲^۲-۴(\frac{۱}{۴}\pi\times۱^۲)=۴-\pi$$

399 ۲ مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از هر سه ضلع بزرگ‌تر از ۱ است مثلث رنگ شده است و مساحت آن برابر است با:



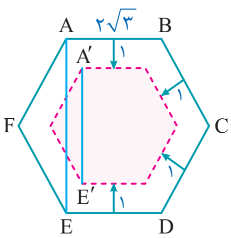
$$AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۴\sqrt{۳})=۶\Rightarrow MH'=۶-۲-۱=۳$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a'=۳\Rightarrow a'=\frac{۶}{\sqrt{۳}}$$

بنابراین مساحت خواسته شده برابر است با:

$$S'=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۶}{\sqrt{۳}})^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱۲=۳\sqrt{۳}$$

400 ۴ مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از همهٔ اضلاع بزرگ‌تر از ۱ است، شش‌ضلعی رنگ‌شده است و مساحت آن برابر است با:



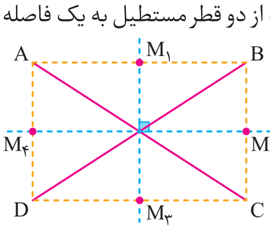
$$AE=\sqrt{۳}\times(۲\sqrt{۳})=۶$$

$$A'E'=۶-۱-۱=۴$$

حال قطر کوچک شش‌ضلعی رنگ شده برابر ۴ است، بنابراین ضلع آن قابل به دست آوردن است:

$$۴=a\sqrt{۳}\Rightarrow a=\frac{۴}{\sqrt{۳}}\Rightarrow S=۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)=۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{۱۶}{۳})=۸\sqrt{۳}$$

401 ۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو قطر مستطیل به یک فاصله هستند، محورهای تقارن مستطیل هستند، و این خطوط محیط مستطیل را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.



794 ۱ باید عرض نقطه برابر صفر باشد: $m-۱=۰ \Rightarrow m=۱$

795 ۲ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات دوبعدی باید $x>۰$ و $y<۰$ باشد:

$$\begin{cases} m+۳>۰ \Rightarrow m>-۳ \\ m-۱<۰ \Rightarrow m<۱ \end{cases} \Rightarrow -۳<m<۱$$

796 ۳ نقطهٔ A نمی‌تواند روی محور x ها واقع شود چون عرض آن همواره مثبت است، همچنین نقطهٔ B نمی‌تواند روی محور y ها واقع شود چون طول آن همواره مثبت است، بنابراین A روی محور y ها و B روی محور x ها قرار دارد، یعنی:

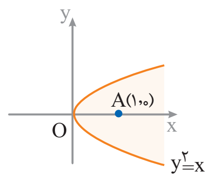
$$\begin{cases} n-۱=۰ \Rightarrow n=۱ \\ m+۲=۰ \Rightarrow m=-۲ \end{cases}$$

از طرفی فاصلهٔ دو نقطه از رابطهٔ $|AB|=\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

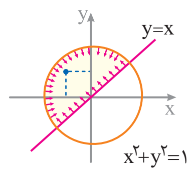
$$\begin{cases} A(۰,۵) \\ B(۳,۰) \end{cases} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۵)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

797 ۱ باید نمودار سهمی $y=x^۲$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ در نظر بگیریم که گزینهٔ ۱ شکل درست این نمودار را نشان می‌دهد.

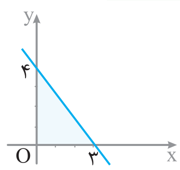
798 ۲ ابتدا نمودار $y^۲=x$ را رسم می‌کنیم، حال چون نقطهٔ $A(۱,۰)$ در نامعادله صدق می‌کند، گزینهٔ ۲ جواب است.



799 ۱ نمودارهای $x^۲+y^۲=۱$ و $y=x$ را رسم می‌کنیم، سپس نقطه‌ای مانند $A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ در هر دو نامعادله صدق می‌کند، بنابراین گزینهٔ ۱ جواب است.

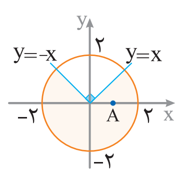


800 ۲ نمودار خط $\frac{x}{۳}+\frac{y}{۴}=۱$ را رسم می‌کنیم و با نقطه گذاری به سطح مقابل می‌رسیم:



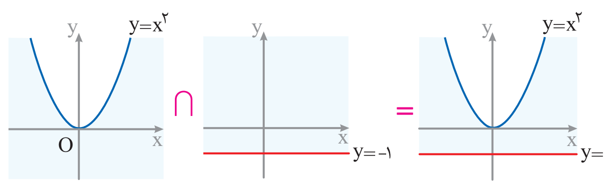
$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳=۶$$

801 ۳ نقطهٔ $A(۱,۰)$ در هر دو رابطه صدق می‌کند، بنابراین سطح رنگ شده جواب موردنظر است که $\frac{۳}{۴}$ مساحت دایره است:



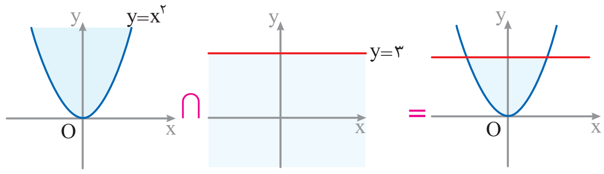
$$S=\frac{۳}{۴}(\pi\times ۲^۲)=۳\pi$$

802 ۱ نمودار رابطه‌های $y\le x^۲$ و $y\ge -۱$ را رسم کرده و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

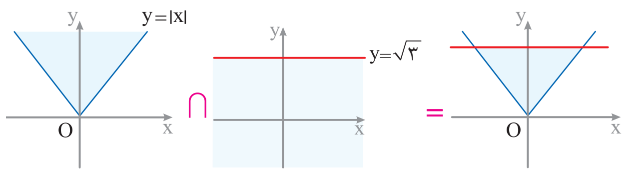


بنابراین گزینهٔ ۱ جواب است.

803 ۱ نمودار رابطه‌های $y\ge x^۲$ و $y\le ۳$ را رسم کرده و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم:



804 ۱ نمودار رابطه‌های $y\ge |x|$ و $y\le\sqrt{۳}$ را رسم کرده و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم:



805 ۱ قسمت هاشور خورده درون دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳$ و بیرون سهمی $y^۲=x$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲\le ۳ \\ y^۲\ge x \end{cases} \Rightarrow x\le y^۲\le ۳-x^۲$$

806 ۲ در ناحیهٔ سوم دستگاه $\mathbb{R}^۳$ همانند ناحیهٔ سوم دستگاه $\mathbb{R}^۲$ باید علامت x,y منفی باشد و علامت z نیز مثبت است. بنابراین تنها گزینهٔ ۲ در ناحیهٔ سوم واقع است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ ناحیهٔ ششم ۳ ناحیهٔ چهارم ۴ ناحیهٔ پنجم.

807 ۱ در ناحیهٔ پنجم دستگاه $\mathbb{R}^۳$ علامت x,y همانند علامت x,y در ناحیهٔ اول است ولی علامت z منفی است. یعنی $x>۰, y>۰, z<۰$ است، بنابراین تنها گزینهٔ ۱ جواب است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ ناحیهٔ ششم ۳ ناحیهٔ هشتم ۴ ناحیهٔ هفتم

808 ۱ در ناحیهٔ هشتم دستگاه $\mathbb{R}^۳$ علامت x,y همانند علامت x,y در ناحیهٔ چهارم است و علامت z منفی است، یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x>۰ \Rightarrow m>۰ \\ y<۰ \Rightarrow m-۲<۰ \\ z<۰ \Rightarrow -۲<۰ \end{cases} \Rightarrow ۰<m<۲$$

809 ۲ نقطه‌ای که روی محور oy است، طول (x) و ارتفاع (z) آن صفر است، یعنی گزینهٔ ۲ جواب است.

810 ۳ باید عرض نقطه صفر باشد که در گزینه‌ها نقطهٔ $(۴,۰,۳)$ چنین است.

811 ۳ باید طول نقطه برابر صفر باشد، بنابراین گزینهٔ ۳ جواب است.

1137 ۱ حجم متوازی السطوح برابر با قدر مطلق ضرب مختلط این سه بردار است:

$$V=|(a\times b).((a+b)\times(a-b))|=|(a\times b).(\underbrace{-a\times b+b\times a}_{۲b\times a})|=۲|a\times b|^{۲}$$

$$\begin{cases}a=(۱,-۱,۱)\\ b=(۱,-۲,۲)\end{cases} \Rightarrow a\times b=(۰,-۱,-۱)\Rightarrow V=۲\times(\sqrt{۲})^{۲}=۴$$

1138 ۴ با توجه به این‌که حجم متوازی السطوح برابر است با مساحت قاعده ضرب در ارتفاع، کافیست حجم را بر مساحت قاعده تقسیم کنیم تا ارتفاع به‌دست آید:

$$\begin{cases}a=(۲,-۱,۰)\\ b=(۰,۱,۳)\end{cases} \Rightarrow a\times b=(-۳,-۶,۲)\ ,\ c=(۴,۰,-۱)$$

$$V=|c.(a\times b)|=۱۴\Rightarrow h=\frac{|c.(a\times b)|}{|a\times b|}=\frac{۱۴}{\sqrt{۹+۳۶+۴}}=۲$$

1139 ۱ حجم هرم ساخته شده توسط ۳ بردار $\frac{۱}{۶}$ قدر مطلق ضرب مختلط ۳ بردار است:

$$V=\frac{۱}{۶}\left|\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۲\\ ۳ & ۰ & ۳\end{vmatrix}\right|=\frac{۱}{۶}[۱\times(۶)-۱\times(-۶)]=۲$$

1140 ۲ ابتدا عبارت درون پرانتز دوم را ساده می‌کنیم:

$$(a-c).((b+a)\times c)=(a-c).(b\times c+a\times c)$$

حال عبارت $a-c$ را روی پرانتز دوم پخش می‌کنیم و حاصل برابر است با:

$$a.(b\times c)+\underbrace{a.(a\times c)}_{۰}-\underbrace{c.(b\times c)}_{۰}-\underbrace{c.(a\times c)}_{۰}$$

با توجه به جابه جایی دوری حاصل عبارت فوق برابر است با:

$$a.(b\times c)=b.(\underbrace{c\times a}_{-a\times c})=\underbrace{(۱,۱,-۲).(-۲,۱,۰)}_{-۲+۱+۰}=-۱$$

1141 ۳ در گزینه‌های ۱، ۲، ۴ هر سه بردار در یک صفحه واقع‌اند و به طور قطع حاصل ضرب مختلط آن‌ها صفر است. امّا در گزینهٔ ۳ سه بردارها در یک صفحه قرار نمی‌گیرند و حاصل ضرب مختلط آن‌ها غیر صفر است.

1142 ۱ اگر $a\times c$ را به طرف اول ببریم و از a فاکتور بگیریم، داریم:

$$a\times b-a\times c=\bar{o}\Rightarrow a\times(b-c)=\bar{o}\Rightarrow\begin{cases}a=\bar{o}\\ a\,||\,b-c\\ b=c\end{cases}$$

وقتی $a\,||\,b-c$ است دیگر عمود بر آن نیست و گزینهٔ ۱ نادرست است، امّا وقتی a با $b-c$ موازی است بردارهای a و $b-c$ یا به عبارتی c,b,a در یک صفحه هستند و ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

1143 ۴ برای این که بتوان a را برحسب مجموع دو بردار در راستای $V_۱$ و $V_۲$ نوشت باید a و $V_۱$ و $V_۲$ هم‌صفحه باشند، یعنی ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد:

$$a.(V_۱\times V_۲)=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & m\\ ۰ & -۱ & ۲\\ ۲ & ۳ & -۱\end{vmatrix}=\underbrace{۱(۱-۶)-۲(۰-۴)+m(۰+۲)}_{۲m=-۳}=۰\Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$$

1144 ۴ کافیست یکی از بردارها را برحسب بقیه حساب کنیم و در رابطهٔ $a.(b\times c)$ قرار دهیم:

$$c=۲a+۳b\Rightarrow a.(b\times c)=a.[\underbrace{b\times(۲a+۳b)}_{۲b\times a+۳b\times b}]=۲a.(b\times a)=۰$$

همان‌طور که توضیح دادیم اگر ترکیب خطی سه بردار صفر باشد، سه بردار هم صفحه‌اند و ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

1145 ۱ بردارهای $a\times b, a\times c, a\times d$ همگی بر بردار a عمود می‌باشند، بنابراین همگی درون یک صفحه قرار دارند یا به تعبیری دیگر، موازی یک صفحه‌اند.

1146 ۴ بردارهای $c\times i, b\times i, a\times i$ همگی عمود بر i هستند، پس قطعاً همگی درون یک صفحه قرارگیرند و در نتیجه ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

1147 ۴ باید بردارهای $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ درون یک صفحه باشند یعنی ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد.

$$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}۰ & -۱ & -۲\\ ۱ & ۳ & ۳\\ a-۱ & ۹ & ۶\end{vmatrix}=۰$$

$$۰(۱۸-۲۷)+۱(۶-۳a+۳)-۲(۹-۳a+۳)=۰$$

$$(۹-۳a)-۲(۱۲-۳a)=۰\Rightarrow -۱۵+۳a=۰\Rightarrow a=۵$$

NOTE

برای تشخیص زنده یا مرده بودن یک انسان، به شرف او نگاه کنید، نه به نبض او ...

«ارنستو چگوارا»