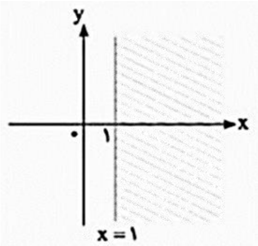
فضای $R^{۲}$



با معادلهٔ خط و برخی دیگر از اشکال هندسی در فضای دو بعدی آشنایی داریم. به عنوان مثال، معادلهٔ $x = ۱$ نشان‌دهندهٔ خطی است که موازی محور yهاست. حال فرض کنید می‌خواهیم نمودار رابطهٔ $x \geq ۱$ را در صفحه مختصات نشان دهیم. پس باید نقاطی از صفحه را بیابیم که مولفهٔ اول آن‌ها، بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد، بنابراین کلیه نقاطی از صفحه که سمت راست این خط قرار دارند، نمودار رابطهٔ $x \geq ۱$ را تشکیل می‌دهد.

۱. نمودار روابط زیر را در صفحه رسم کنید.

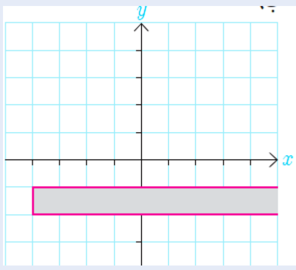
الف) $۱ \leq x \leq ۲ \; , \; -۱ \leq y \leq ۳$

ب) $۱ \leq x \leq ۵ \; , \; ۰ \geq y \geq -x$

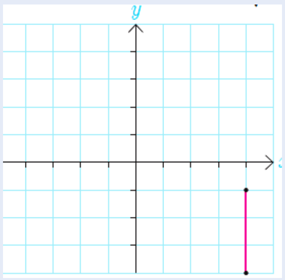
ج) $x^{۲} < y \leq ۲$

۲. رابطه مربوط به هر یک از نمودار های زیر را بدست آورید.

الف)



ب)

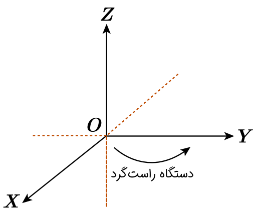


فضای R^3

فضای ۳ بعدی است که در آن مختصات هرنقطه با یک سه‌تایی مرتب $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ نمایش داده می‌شود:

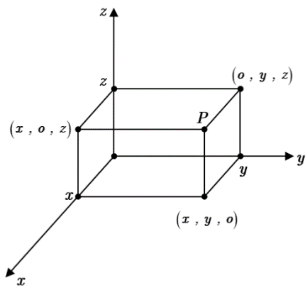
$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی R^3



دستگاه مختصات xyz از سه محور دوبه‌دو عمود برهم محور xها، محور yها و محور zها تشکیل شده است که براساس قاعده دست راست جهت آن‌ها را مشخص می‌کنیم، اگر دست راست را چنان قرار دهیم که انگشتان دست در حالت باز محور xها و در حالت نیمه‌باز محور yها را نشان دهد، آن‌گاه شست دستمان محور zها را نشان می‌دهد.

مختصات یک نقطه در فضای R^3

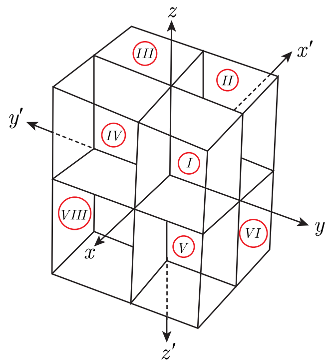


اگر $P(x\ ,\ y\ ,\ z)$ نقطه‌ای دلخواه در فضا باشد، از نقطهٔ P سه صفحه عمود بر سه محور رسم می‌کنیم (یا سه صفحه به موازات صفحات مختصات رسم می‌کنیم) مختص پای عمودها روی محورها x و y و z نقطه می‌باشند.

نواحی مختصات در فضای R^3

از تقاطع سه محور مختصات (با در نظر گرفتن سوی مثبت و منفی محورها) ۸ ناحیه در فضا ایجاد می‌شود که شمارهٔ هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل و جدول زیر نشان داده شده‌اند.

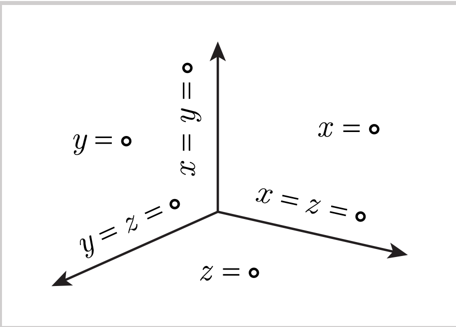
شمارهٔ ناحیه	X	Y	Z
I	+	+	+
II	−	+	+
III	−	−	+
IV	+	−	+
V	+	+	−
VI	−	+	−
VII	−	−	−
VIII	+	−	−



۳. الف) نقطه $(-۱\ ,\ ۳\ ,\ ۲)$ را در دستگاه مختصات سه بعدی نشان دهید.

ب) مشخص کنید نقطه ای به مختصات $(۲-\ ,\ ۵\ ,\ ۳-)$ در کدام ناحیه مختصات قرار دارد.

مختصات تصویر نقطه روی محورها یا صفحات مختصات

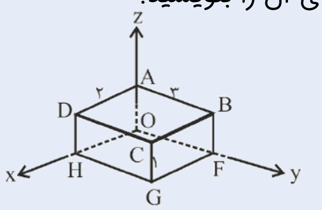
	نقطه $(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$	روی محور ox	$(x_0\ ,\ 0\ ,\ 0)$
		روی محور oy	$(0\ ,\ y_0\ ,\ 0)$
		روی محور oz	$(0\ ,\ 0\ ,\ z_0)$
		روی صفحهٔ xy	$(x_0\ ,\ y_0\ ,\ 0)$
		روی صفحهٔ xz	$(x_0\ ,\ 0\ ,\ z_0)$
		روی صفحهٔ yz	$(0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$

معادلهٔ صفحات خاص	معادلهٔ صفحهٔ موازی xoy یا عمود بر محور oz به‌صورت $z = z_0$ است. معادلهٔ صفحهٔ موازی xoz یا عمود بر محور oy به‌صورت $y = y_0$ است. معادلهٔ صفحهٔ موازی yoz یا عمود بر محور ox به‌صورت $x = x_0$ است.
معادلهٔ خط‌های خاص	معادلهٔ خط موازی محور ox یا عمود بر صفحهٔ yoz به‌صورت $\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ است. معادلهٔ خط موازی محور oy یا عمود بر صفحهٔ xoz به‌صورت $\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ است. معادلهٔ خط موازی محور oz یا عمود بر صفحهٔ xoy به‌صورت $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ است.

۴. الف) معادلهٔ خطی بنویسید که عمود بر صفحهٔ xz باشد و از نقطهٔ $A(۱ , -۱ , ۲)$ بگذرد.

ب) معادلهٔ صفحهٔ موازی با صفحهٔ xoy و گذرنده از نقطهٔ $(۲ , ۰ , -۱)$ را بنویسید.

۵. با توجه به شکل مقابل، مختصات رئوس مکعب مستطیل و همچنین معادله همه وجوه و یال‌های آن را بنویسید.



مختصات قرینه نقطه نسبت به محورها یا صفحات مختصات

نقطه	محور	نقطه	صفحه
$(x , -y , -z)$	xها	$(x , y , -z)$	xy
$(-x , y , -z)$	yها	$(-x , y , z)$	yz
$(-x , -y , z)$	zها	$(x , -y , z)$	zx

قرینه نقطهٔ $P(x , y , z)$ نسبت به مبدأ مختصات نقطهٔ $P'(-x , -y , z)$ است.

فاصله نقطه از محورها یا صفحات مختصات

فاصلهٔ نقطهٔ $A = (x , y , z)$ از محورها و صفحات مختصات به‌صورت زیر است:

فاصلهٔ نقطهٔ A	از محور xها: $\sqrt{y^۲ + z^۲}$	از صفحهٔ xoy: $\lvert z \rvert$
	از محور yها: $\sqrt{x^۲ + z^۲}$	از صفحهٔ yoz: $\lvert x \rvert$
	از محور zها: $\sqrt{x^۲ + y^۲}$	از صفحهٔ xoz: $\lvert y \rvert$

۶. اگر نقطه $A(a - b , ۳ , b)$ قرینه نقطه $B(۱ , m , ۲)$ نسبت به محور oz باشد $a + m$ را بیابید.

۷. چند نقطه روی صفحه xoy وجود دارد که از محور yها به فاصله ۳ و از مبدأ مختصات به فاصله ۵ باشد؟

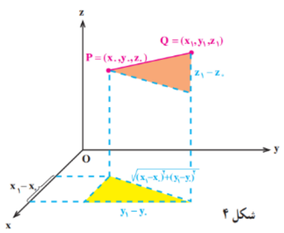
۸. مجموع فواصل نقطهٔ $A = (۳ , ۴ , -۱)$ از محور zها و صفحهٔ xoy را محاسبه کنید.

۱. اگر نقطهٔ $A'(۲ , ۲a-b , b)$ قرینهٔ نقطهٔ $A(a+b , ۴ , a+۲)$ نسبت به محور zها باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A''(-a , -۲a , b)$ دارای کدام ویژگی است؟

۱) قرینهٔ A نسبت به محور xها
۲) قرینهٔ A نسبت به محور yها
۳) تصویر قائم A روی صفحهٔ xy
۴) تصویر قائم A روی صفحهٔ yz

۲. اگر تصویر قائم نقطهٔ $A(x_۰ , y_۰ , z_۰)$ بر محور xها نقطهٔ $(۲ , ۰ , ۰)$ و قرینهٔ A نسبت به صفحهٔ xy نقطهٔ $(x_۰ , ۳ , ۴)$ باشد، قرینهٔ A نسبت به مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $(-۲ , -۳ , -۴)$
۲) $(-۲ , -۳ , ۴)$
۳) $(-۲ , ۳ , -۴)$
۴) $(۲ , ۳ , -۴)$



شکل ۴

$$|PQ| = \sqrt{(x_۱ - x_۰)^۲ + (y_۱ - y_۰)^۲ + (z_۱ - z_۰)^۲}$$

فاصله دو نقطه در فضا

در حالت کلی فاصلهٔ نقطهٔ $P = (X_۰ , Y_۰ , Z_۰)$ از نقطهٔ $Q = (X_۱ , Y_۱ , Z_۱)$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

فاصله نقطهٔ $P(x , y , z)$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ است.

۳. چند نقطه روی محور yها وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از دو نقطهٔ $A(۱ , -۳ , ۷)$ و $B(۵ , ۷ , -۵)$ برابر باشد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

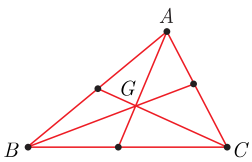
۴. اگر $A(۲ , ۱ , ۳)$، $B(۳ , ۰ , ۵)$ و $C(۵ , -۴ , ۲)$ سه راس یک مثلث باشند، آنگاه نوع این مثلث کدام است؟

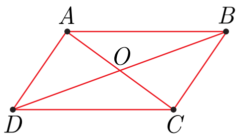
۱)قائم الزاویه
۲) متساوی الساقین
۳) متساوی الاضلاع
۴) قائم الزاویه متساوی الساقین

اگر $A(X_A , Y_A , Z_A)$ و $B(X_B , Y_B , Z_B)$ دو نقطه از فضای $R^۳$ باشند و M نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه مختصات M عبارتند از:

۵. اگر $A = (۱ , ۲ , ۱)$، $B = (-۴ , -۳ , ۲)$ و $C = (۲ , ۱ , ۴)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه وارد بر ضلع BC برابر است با:

۱) $\sqrt{۱۵}$
۲) $\sqrt{۱۶}$
۳) $\sqrt{۱۷}$
۴) $\sqrt{۱۸}$





اگر $A(X_A , Y_A , Z_A)$، $B = (X_B , Y_B , Z_B)$ و $C = (X_C , Y_C , Z_C)$ سه رأس یک مثلث باشند، مختصات محل برخورد سه میانه «مرکز ثقل» عبارتست از:

بین رئوس هر متوازی‌الاضلاع، همواره رابطهٔ مقابل برقرار است:

$$\boxed{\begin{aligned} X_A + X_C &= X_B + X_D \\ Y_A + Y_C &= Y_B + Y_D \\ Z_A + Z_C &= Z_B + Z_D \end{aligned}}$$

۶. اگر دو رأس از مثلثی دارای مختصات $(۳ , -۱ , ۱)$ و $(-۲ , ۳ , ۲)$ باشند و مختصات مرکز ثقل مثلث نیز $(۱ , -۲ , ۱)$ باشد، مختصات رأس سوم مثلث کدام است؟

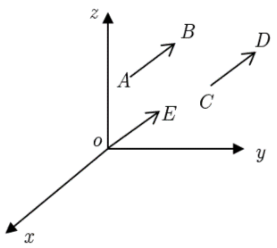
۱) $(۲ , -۸ , ۰)$
۲) $(-۲ , ۸ , ۰)$
۳) $(۲ , ۸ , ۰)$
۴) $(۲ , -۸ , ۶)$

۷. اگر نقاط $A(-۱ , ۰ , ۱)$ و $B(۲ , ۱ , -۲)$ و $C(۰ , -۲ , ۳)$ و D چهار رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات نقطهٔ D کدام است؟

۱) $(-۳ , ۳ , ۶)$
۲) $(-۳ , -۳ , -۶)$
۳) $(-۳ , -۳ , ۶)$
۴) $(-۲ , -۲ , ۱)$

بردار

هرپاره‌خط جهت‌دار را پیکان گوییم مانند پیکان AB . پیکان‌ها را هم‌ارز گوییم هرگاه هم طول، هم جهت و هم‌راستا باشند مانند پیکان‌های AB و CD.

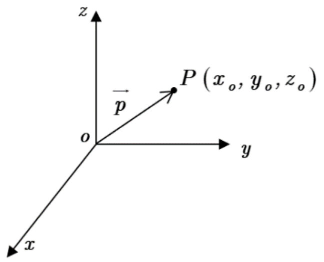


پیکانی را که ابتدای آن مبدأ مختصات است بردار می‌نامیم مثلاً پیکان $\overrightarrow{OE}$ یک بردار است ولی پیکانهای AB و CD بردار نیستند. گاهی ممکن است از عبارت «بردار $\overrightarrow{AB}$» استفاده شود که منظور از آن برداری هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{AB}$ است که از مبدأ مختصات رسم شده است مثلاً بردار $\overrightarrow{AB}$ همان بردار $\overrightarrow{OE}$ است.

مختصات یک بردار

ابتدای یک بردار مبدأ مختصات است، بنابراین هر بردار را می‌توان با مختصات نقطه انتهایی آن مشخص نمود، مثلاً اگر $P(x_o,y_o,z_o)$ باشد بردار $\overrightarrow{OP}$ یا $\vec{p}$ را بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\overrightarrow{OP}=(x_o,y_o,z_o) \quad \text{یا} \quad \vec{p}=(x_o,y_o,z_o)$$



طول بردار

اندازهٔ بردار مفروض $\vec{a}=(a_۱\ ,a_۲\ ,a_۳)$ را که با نماد $|\vec{a}|$ نشان می‌دهیم، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$|a|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$$

۹. بردارهایی معرفی کنید که واقع بر نیم‌سازهای سه صفحهٔ xoy، yoz و xoz بوده و به‌ترتیب طول‌هایی برابر $\sqrt{۲}$، $۲\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ داشته باشند.

تصویر و قرینه بردار نسبت به صفحات و محورهای مختصات

اگر بردار $\vec{a}$ به مختصات $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ باشد:

تصویر $\vec{a}$	روی محور xها: $\vec{a'}=(x\ ,\ ۰\ ,\ ۰)$	قرینه $\vec{a}$	نسبت به محور xها: $a''=(x\ ,\ -y\ ,\ -z)$
	روی محور xها: $\vec{a'}=(۰\ ,\ y\ ,\ ۰)$		نسبت به محور yها: $a''=(-x\ ,\ y\ ,\ -z)$
	روی محور zها: $\vec{a'}=(۰\ ,\ ۰\ ,\ z)$		نسبت به محور zها: $a''=(-x\ ,-y\ ,\ z)$
تصویر $\vec{a}$	روی صفحهٔ xoy: $\vec{a'}=(x\ ,\ y\ ,\ ۰)$	قرینه $\vec{a}$	نسبت به صفحهٔ xoy: $a''=(x\ ,\ y\ ,\ -z)$
	روی صفحهٔ yoz: $\vec{a'}=(۰\ ,\ y\ ,\ z)$		نسبت به صفحهٔ yoz: $a''=(-x\ ,\ y\ ,\ z)$
	روی صفحهٔ xoz: $\vec{a'}=(x\ ,\ ۰\ ,\ z)$		نسبت به صفحهٔ xoz: $a''=(x\ ,\ -y\ ,\ z)$

چکیده: در تصویریابی، ناهم‌نام‌ها صفر و در قرینه‌یابی، ناهم‌نام‌ها قرینه می‌شوند.

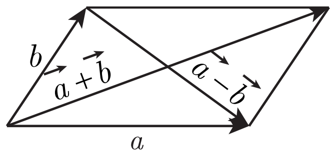
طول تصویر بردار u روی صفحات مختصات به‌ترتیب $\sqrt{۱۳}$ و $\sqrt{۱۲}$ و $\sqrt{۷}$ است، $|u|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

تساوی بردارها

برای آن‌که دو بردار $\vec{a}=(a_۱\,,\,a_۲\,,\,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱\,,\,b_۲\,,\,b_۳)$ مساوی باشند، لازم و کافی است که مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظیر مساوی باشند. یعنی:

جمع و تفریق بردارها



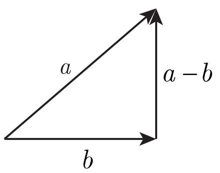
اگر $\vec{a}=(a_۱\,,\,a_۲\,,\,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱\,,\,b_۲\,,\,b_۳)$ دو بردار باشند، مجموع و تفاضل این دو بردار که با نماد $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ نشان داده می‌شوند برداری است که به این‌صورت تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_۱\pm b_۱\,,\,a_۲\pm b_۲\,,\,a_۳\pm b_۳)$$

و از نظر هندسی مجموع دو بردار a و b قطر متوازی‌الاضلاعی است که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند و با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ابتدای مشترک دارد دقت کنید که قطر دیگر متوازی‌الاضلاع تفاضل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

اگر بردارهای $\vec{a}=(۰\,,\,۲\,,\,-۲)$ و $\vec{b}=(-۱\,,\,-۲\,,\,۱)$ دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، طول قطر متوازی‌الاضلاع که ابتدای مشترک با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دارد برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۴



تفاضل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌صورت $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ تعریف می‌شود. همان‌طور که در شکل‌های مقابل مشخص است، اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ابتدای مشترک داشته باشند، $\vec{a}-\vec{b}$ برداری است که از انتهای $\vec{b}$ به انتهای $\vec{a}$ رسم می‌شود. پس طول ضلع سوم مثلث برابر است با: $|\vec{a}-\vec{b}|$

اگر دو بردار $\vec{a}=(۲\,,\,-۱\,,\,۳)$ و $\vec{b}=(۱\,,\,۲\,,۴)$ دو ضلع مجاور یک مثلث باشند، طول ضلع سوم مثلث چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۲}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

اگر $\vec{a}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{b}=(-۴,۲,۱)$ و $\vec{c}=(۵,۲,-۳)$ آن‌گاه $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ کدام است؟

می‌توان برای هر بردار در صفحه، نقطهٔ مبدأ را ابتدا در نظر گرفت و آن بردار برحسب مبدأ نوشت: یا به‌طور مختصر می‌توان نوشت

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}=B-A$

اگر $A=(۱\,,\,-۱\,,\,۰)$ و $B=(۲\,,\,-۳\,,۰)$ و $\overrightarrow{AM}=۳\overrightarrow{BM}$ باشد، مختصات نقطهٔ M و فاصله‌اش از محور yها و صفحهٔ yz را بیابید.

چند نکته مهم:

اگر $a\perp b$ متوازی الاضلاع بنا شده، روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مستطیل خواهد بود قطرهای مستطیل $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برابر خواهد بود.

$a\perp b \Leftrightarrow |a+b|=|a-b|$

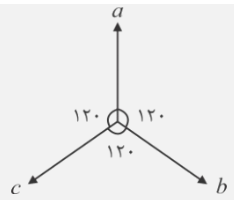
اگر قطرها بر هم عمود باشند متوازی الاضلاع بنا شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لوزی خواهد پس طول ضلع‌ها برابر است. $(a+b)\perp(a-b)\leftrightarrow |a|=|b|$

اگر $\alpha<۹۰$ $\quad |a+b|>|a-b|$

اگر $\alpha=۹۰$ $\quad |a+b|=|a-b|$

اگر $\alpha>۹۰$ $\quad |a+b|<|a-b|$

اگر بردار $a(m,۲,-۱)$ و $|b|=\sqrt{۴۱}$ ، دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ عمود بر هم باشند مقدار مثبت m کدام است؟



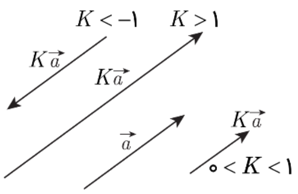
⭐ اگر برآیند سه بردار هم اندازه صفر باشد. سه بردار دوبه‌دو با هم زاویه ۱۲۰ می‌سازند. (قاعده بنز)

$$\left.\begin{matrix}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=۰\\ |a|=|b|=|c|\end{matrix}\right\} \rightarrow$$

ضرب عدد حقیقی در بردار

اگر $\vec{a}=(a_۱\ ,\ a_۲\ ,\ a_۳)$ یک بردار و k یک عد حقیقی باشند، حاصل‌ضرب k در بردار $\vec{a}$ به‌صورت زیر است:

$$k\vec{a}=\left(ka_۱\ ,\ ka_۲\ ,\ ka_۳\right)$$



دو بردار موازی

بردار $k\vec{a}$ برداری است موازی و هم‌راستای بردار $\vec{a}$:

ویژگی ضرب عدد در جمع بردارها

$$k\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$$

$$\left|k\vec{a}\right|=|k|\left|\vec{a}\right|$$

دو بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ را موازی گوییم هرگاه عددی غیرصفر مانند m یافت شود که $a=mb$ و یا داشته باشیم:

$$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\frac{a_۳}{b_۳}$$

باید توجه داشت که اگر یکی از مؤلفه‌ها در رابطه بالا برابر صفر باشد باید مؤلفه نظیرش در بردار دیگر نیز صفر باشد.

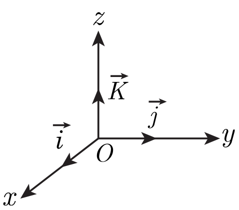
اگر $\vec{a}=(۳,۰,-۴)$ و $\vec{b}=(-۲,۲,۱)$ حاصل $\left|۲\vec{b}\right|-\left|۳\vec{a}\right|$ کدام است؟

دو بردار $\vec{a}\left(m+۱\ ,\ ۲\ ,۰\right)$ و $\vec{b}\left(۱\ ,-۴\ ,n-۱\right)$ موازی باشند، m و n را بیابید.

درصورتی که نقاط $A=\left(x+۱\ ,\ ۲\ ,\ x\right)$، $B=\left(۲\ ,\ ۵\ ,\ ۱\right)$ و $C=\left(۱\ ,\ -۱\ ,\ ۰\right)$ روی یک خط راست باشند، آن‌گاه x کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) چنین مؤلفه‌ای وجود ندارد.

بردارهای یکهٔ محورهای مختصات



بردارهای یکه هم‌امتداد و هم‌جهت با محورهای مختصات را به‌ترتیب i، j و k می‌نامیم:

$$\begin{cases}\vec{i}=(۱\ ,\ ۰\ ,\ ۰)\\ \vec{j}=(۰\ ,\ ۱\ ,\ ۰)\\ \vec{k}=(۰\ ,\ ۰\ ,\ ۱)\end{cases}\qquad \left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=۱$$

اهمیت این سه بردار در این است که تمام بردارهای دیگر را می‌توان برحسب آنها نوشت مثلاً:

$$a=(a_۱,a_۲,a_۳)=a_۱(۱.۰.۰)+a_۲(۰.۱.۰)+a_۳(۰.۰.۱)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$$

$$b=(۲.-۳.۱)=۲\vec{i}-۳\vec{j}+\vec{k}\qquad ,\qquad c(-۱.۰.۲)=-\vec{i}+۲\vec{k}$$

بردار جهت

برداری است با طول واحد که هم‌راستا و هم‌جهت با بردار a می‌باشد، آن را با e_a نشان داده و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

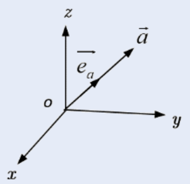
$$e_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \longrightarrow e_{\vec{a}} = \left(\frac{a_۱}{|\vec{a}|}, \frac{a_۲}{|\vec{a}|}, \frac{a_۳}{|\vec{a}|}\right) \longrightarrow e_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

بردار جهت (یکّه) بردار $\vec{a}(۱\,,\,-۲\,,\,۲)$

$$|a| = \sqrt{۱+۴+۴} = ۳ \longrightarrow \vec{e}_a = \left(\frac{۱}{۳}\,,\,\frac{-۲}{۳}\,,\,\frac{۲}{۳}\right)$$

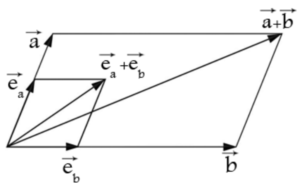
اگر $\vec{a} = -i + ۲j - k$ و $\vec{b} = j + ۲k$ باشد، هریک از بردارهای e_a ، e_b ، e_{a+b} و e_{a-b} را بیابید.

بردار $\vec{a}$ با محور x زاویه ۶۰ و با محور Z زاویه ۴۵ می سازد بردارجهت بردار $\vec{a}$ را بیابید.



نیمساز دو بردار

برای به‌دست آوردن برداری که زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نصف می کند نمی توان دو بردار را جمع کرد مگر $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ باشد. (در متوازی الاضلاع قطر نیمساز نیست ولی در لوزی قطر نیمساز است). پس باید ابتدا یکه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را حساب کنیم سپس با هم جمع کنیم.



$$b\ ,\ a \text{ نیمساز } = \vec{e}_a + \vec{e}_b = \frac{\vec{a}}{|a|} + \frac{\vec{b}}{|b|}$$

هر ضریبی از بردار $\frac{\vec{a}}{|a|} + \frac{\vec{b}}{|b|}$ نیز می‌تواند بردار نیمساز باشد. اگر بردار مفروض را در $|\vec{a}||\vec{b}|$ ضرب کنیم، بردار $|b|\vec{a} + |a|\vec{b}$ حاصل می شود.

$$b\ ,\ a \text{ نیمساز } = |b|\vec{a} + |a|\vec{b}$$

نیمساز دو بردار $\vec{a} = (۱\,,\,۲\,,\,۲)$ و $\vec{b}(۳\,,\,۰\,,\,۴)$ را بیابید.

ضرب داخلی «درونی، نقطه‌ای، اسکالر»

ضرب داخلی دو بردار مفروض $\vec{a}=(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1\,,\,b_2\,,\,b_3)$ با علامت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نشان داده می‌شود و عددی است که به‌صورت مقابل تعریف می‌شود.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

از تعریف ضرب داخلی دو بردار، نتیجه می‌شود که ضرب داخلی دو بردار، یک بردار نیست بلکه یک عدد است و این عدد می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

اگر $\vec{v}_1=(1\,,\,-1\,,1)$ و $\vec{v}_2=(-1\,,\,4\,,\,-5)$ باشد، حاصل $|\vec{v}_1+\vec{v}_2|+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2$ کدام است؟

۱) ۵−　　۲) صفر　　۳) ۵　　۴) ۱۵

ضرب داخلی دو بردار و زاویهٔ بین آن‌ها

اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را α بنامیم، آن‌گاه این زاویه از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \quad \text{یا} \quad \cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

برای هریک از بردارهای زیر، زاویهٔ بین دو بردار را به‌دست آورید:

الف) $a(0,-1,-1)$ و $b(1,0,0)$　　ب) $a(1,0,0)$ و $b=(\sqrt{3},1,0)$

بر روی دو بردار $a=3i+3j$ و $b=i-j-2k$ متوازی‌الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویهٔ بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) $\frac{2}{3}$

اگر $A=(2\,,\,4\,,\,5)$، $B=(2\,,\,3\,,\,4)$ و $C=(3\,,\,3\,,\,3)$ سه رأس یک مثلث باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ رأس B کدام است؟

۱) ۶۰　　۲) ۱۲۰　　۳) ۳۰　　۴) ۱۵۰

بردارهای عمود بر هم

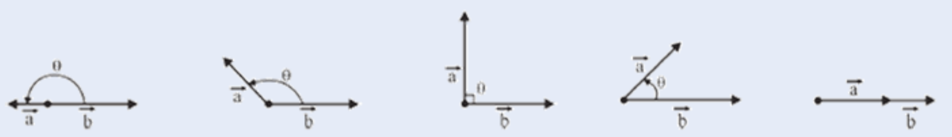
$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\longrightarrow\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$$

دو بردار a و b با تصویرهای $(2\alpha\,,\,\alpha+1\,,\,1)$ و $(-1\,,\,0\,,\,2)$ مفروض هستند. به‌ازای کدام مقادیر α بردارهای $a+b$ و $a-b$ عمود برهم‌اند؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۰/۴ و ۱−　　۲) ۰/۶ و ۱−　　۳) ۰/۴ و ۱　　۴) ۰/۶ و ۱

هر یک از حالات زیر را با شکل‌های داده شده نظیر کنید.

الف) $\vec{a}.\vec{b}>0$　　ب) $\vec{a}.\vec{b}=0$　　پ) $\vec{a}.\vec{b}<0$　　ت) $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$　　ج) $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$



(۱) $\theta=0$　　(۲) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$　　(۳) $\theta=\frac{\pi}{2}$　　(۴) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$　　(۵) $\theta=\pi$

ویژگی‌های ضرب داخلی

اگر a، b و c سه بردار دلخواه باشند، آن‌گاه ضرب داخلی:

۱. خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

۲. توزیع‌پذیری دارد: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

۳. ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر مربع اندازهٔ آن است: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^۲}$

۴. دو طرف تساوی را می توان در یک بردار ضرب داخلی کرد: $b=c\Rightarrow a.b=a\cdot c$

۵. قانون حذف برقرار نیست، یعنی اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ آن‌گاه به‌طور قطع نمی‌توان نتیجه گرفت:

$$a.c=b.c\Rightarrow a.c-b.c=\circ\Rightarrow(a-b).c=\circ\Rightarrow\begin{cases}a-b=\vec{o}\Rightarrow a=b\\(a-b)\perp c\\c=\vec{o}\end{cases}$$

۶. ضرب داخلی بردارهای یکه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=۱\\\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=۰\end{cases}$$

۷. همان‌طور که ملاحظه کردید ضرب داخلی دو بردار دارای خاصیت جابه‌جایی و توزیع‌پذیری است ولی باید توجه داشت که ضرب داخلی دارای خاصیت شرکت‌پذیری نمی‌باشد یعنی: $a\cdot(b\cdot c)\neq(a\cdot b)\cdot c$

زیرا ضرب داخلی دو بردار یک عدد است و ضرب داخلی بین عدد و بردار معنی ندارد.

اگر $\vec{a}(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}=\vec{j}+۳\vec{k}$ باشد، حاصل $(۲\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$ را بیابید.

نکتهٔ بسیار مهم راجع به اتحادهای جبری بین بردارها

$$\boxed{|\vec{a}\pm\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲\pm۲\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۲|\vec{a}|^۲+۲|\vec{b}|^۲$$

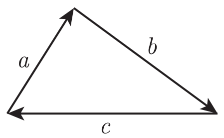
$$\boxed{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})}$$

اگر $|a|=۳$ و $|b|=۲$ و زاویه بین دو بردار ۶۰° باشد حاصل $|a+۲b|$ را بیابید.

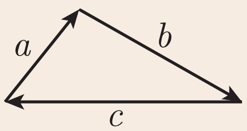
اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و $|\vec{a}|=|\vec{b}|=۲$ و $|\vec{a}-\vec{b}|=۲\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-۲\vec{b})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) -۴

۹. وقتی فرض $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$ داده می‌شود، معمولاً شکل به‌صورت مقابل است:



در شکل مقابل، اندازهٔ بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به‌ترتیب ۳ و ۵ و ۶ است. حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰)



۱) ۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) -۲

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای به‌ترتیب با طول‌های ۲، ۳ و ۵ باشند و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ چقدر است؟

۱) صفر　　۲) -19　　۳) -1　　۴) 31

نامساوی کوشی_ شوارتز

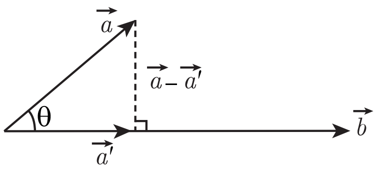
برای هر دو بردار مثل $a=(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)$ و $b=(b_1\,,\,b_2\,,\,b_3)$ داریم: $\boxed{|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha\xrightarrow{|\,|}|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\alpha|\xrightarrow{|\cos\alpha|\le 1}|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

اگر $3x+4y-6z=41$ باشد، کمترین مقدار عبارت $9x^2+4y^2+z^2$ کدام است؟

۱) ۲۱　　۲) ۳۱　　۳) ۴۱　　۴) ۵

تصویر قائم یک بردار بر راستای برداری دیگر



دو بردار غیرصفر a و b را که زاویهٔ بین آن‌ها θ است. با فرض $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ درنظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم

تصویر قائم $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ از رابطهٔ مهمِ $\boxed{\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$ به‌دست می‌آید.

اثبات:

طول بردار تصویر از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود: $|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

اثبات:

اگر $\vec{a}=i+j$ و $\vec{b}=-i+2j+4k$ باشند، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ کدام است؟

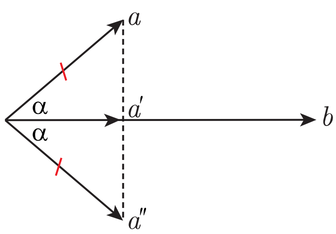
۱) $(-1\,,\,2\,,\,4)$　　۲) $(1\,,\,-2\,,\,-4)$　　۳) $\left(-\frac{1}{21}\,,\,\frac{2}{21}\,,\,\frac{4}{21}\right)$　　۴) $\left(-\frac{1}{21}\,,\,-\frac{2}{21}\,,\,\frac{4}{21}\right)$

اگر $a=(2,0,-1)$ و $b=(2,0,1)$ باشد تصویر بردار $a+2b$ در امتداد بردار b را بیابید. ؟

دو بردار a و b با معلومات $|\vec{a}|=5$ و $|\vec{b}|=7$ و $a-b=2i+j-3k$ مفروض‌اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a، چند برابر بردار a است؟ (ریاضی ۹۵ خارج)

۱) ۰/۷　　۲) ۰/۸　　۳) ۱/۲　　۴) ۱/۴۲

قرینهٔ یک بردار نسبت به برداری دیگر



اگر قرینهٔ برداری مثل $\vec{a}$ نسبت به برداری دیگر مثل $\vec{b}$، بردار $\vec{a}''$ باشد، با توجه به آن‌چه در مورد تصویر قائم یک بردار بر یک راستا گفته شد، $\vec{a}''$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

«a' تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ است»　　$\vec{a}+\vec{a}''=2\vec{a}'\Rightarrow\boxed{\vec{a}''=2\vec{a}'-\vec{a}}$

قرینهٔ بردار $\vec{a}=j+3k$ نسبت به راستای $\vec{b}=i-k$ کدام است؟

۱) $-j+3k$　　۲) $-3i-j$　　۳) $2i-j+k$　　۴) $3i+j$

اندازهٔ (طول) قرینهٔ هر بردار، با خود آن بردار برابر است: $|\vec{a}| = |\vec{a''}|$

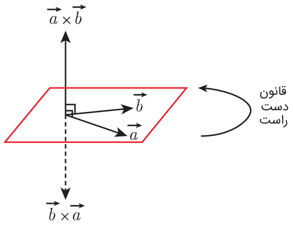
اگر بردار a'' قرینهٔ a نسبت به بردار b باشد، $a + a''$ همواره در راستای بردار b است:

اگر بردار a با بردار b موازی باشد قرینهٔ a نسبت به b با تصویر a روی b و هر دو با بردار a برابرند: $a = a' = a''$

قرینهٔ بردار $a = i - j$ نسبت به بردار $b = ۲i - j + ۲k$ را c می‌نامیم. ضرب داخلی دو بردار a و c کدام است؟ (ریاضی ۹۰ خارج)

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

ضرب خارجی «برونی یا هندسی»



بردارهای $\vec{a} = (a_۱ , a_۲ , a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱ , b_۲ , b_۳)$ را در نظر بگیرید. ضرب خارجی بردار $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با علامت $\vec{a} \times \vec{b}$ نشان می‌دهند.

ضرب خارجی، برداری است که بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و صفحه شامل آن دو عمود است.

می‌توان ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را از روش دترمینان ۳×۳ حساب کرد:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix} \vec{k} = (a_۲b_۳ - a_۳b_۲ \ , \ a_۳b_۱ - a_۱b_۳ \ , \ a_۱b_۲ - a_۲b_۱)$$

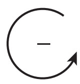
بردار عمود بر دو بردار $\vec{a} = (۱ , -۳ , ۲)$ و $\vec{b} = (-۲ , ۱ , -۵)$ کدام است؟

۱) $(۱۳ , ۱ , -۵)$ ۲) $(۱۳ , -۱ , -۵)$ ۳) $(-۱۳ , -۱ , ۵)$ ۴) ۱ و ۳ درست‌اند.

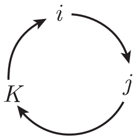
اگر $\vec{v_۱} = (-۱ , ۱ , ۲)$ و $\vec{v_۲} = (۱ , -۲ , ۳)$ باشد، زاویهٔ بردار $\vec{v_۱} \times \vec{v_۲}$ با کدام محور بزرگ‌تر است؟

۱) xها ۲) yها ۳) zها ۴) با هر سه محور یکسان است.

ضرب خارجی بردارهای یکه محورهای مختصات به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{K}$



خاصیت دوری یا چرخشی

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{K} \\ \vec{j} \times \vec{K} = \vec{i} \\ \vec{K} \times \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

ویژگی‌های ضرب خارجی

۱. ضرب خارجی هر بردار در خودش، برابر بردار صفر است: $\boxed{\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}}$

۲. ضرب خارجی دو بردار، خاصیت جابه‌جایی ندارد. $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})}$

۳. ضرب خارجی بردارها نسبت به جمع برداری از طرف چپ توزیع‌پذیر است. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

۴.خاصیت شرکت‌پذیری ندارد. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

۵. ضرب عدد حقیقی k در ضرب خارجی. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$

۶. دو طرف تساوی را می توان از یک طرف در یک بردار ضرب خارجی کرد: $b = c \Rightarrow a \times b = a \times c$

۷. قانون حذف برقرار نیست یعنی اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$، آن‌گاه به‌طور قطع نمی‌توان نتیجه گرفت: $\vec{b} = \vec{c}$

اگر i، j و k بردارهای واحد باشند، حاصل $(\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j})) \times \vec{k}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) صفر ۲) $-i$ ۳) j ۴) $-k$

اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$، ثابت کنید: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

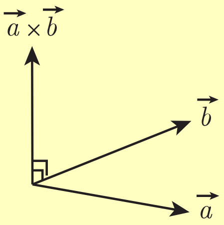
بردار v بر دو بردار $a=(1\,,\,-1\,,\,1)$ و $b=(1\,,\,2\,,\,1)$ عمود است، اگر $|v|=2\sqrt{2}$ باشد آنگاه v کدام است؟

۱) $(0\,,\,2\,,\,2)$ ۲) $(2\,,\,-0\,,\,2)$ ۳) $(-2\,,\,0\,,\,2)$ ۴) $(-1\,,\,0\,,\,2)$

دو بردار با تصویرهای $\vec{a}=(1\,,\,2\,,\,-1)$ و $\vec{b}=(2\,,\,4\,,\,m)$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقدار m اندازهٔ بردار $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر صفر است؟

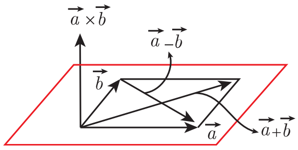
۱) فقط $m=\pm 2$ ۲) فقط $m=-2$ ۳) هیچ مقدار m ۴) هر عدد حقیقی m

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر باشند، آن‌گاه: $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ و $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$



اگر $\vec{a}(1,-1,1)$ و $\vec{b}(2,1,-1)$ باشد برداری بیابید که بر بردارهای $a-b$ و $a+2b$ عمود است.

بردار $a\times b$ بر بردارهای a و b و $ma\pm nb$ (هر ترکیب خطی از a و b) عمود است.



اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی دو بردار برحسب زاویهٔ بین آن‌ها

اگر $\vec{a}=(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1\,,b_2\,,\,b_3)$ دو بردار و θ زاویهٔ بین آن‌ها باشد، داریم:

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta}$$

در رابطهٔ مقابل اگر $\alpha=0$ باشد، خواهیم داشت: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(0)=0$

یعنی دو بردار a و b با یکدیگر موازیند اگر و تنها اگر ضرب خارجی آنها برابر صفر باشد: $a\parallel b \Leftrightarrow a\times b=\vec{o}$

زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کمتر از $90°$ درجه است. $|\vec{a}|=6$ و $|\vec{b}|=5$ و $|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=18$، حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

چهار بردار a، b، c و d، در دو رابطهٔ $a\times c=d\times b$ و $a\times d=c\times b$ صدق می‌کنند، الزاماً دو بردار غیرصفر $a+b$ و $c+d$ نسبت به هم، کدام وضع را دارند؟ (ریاضی ۹۳ خارج)

۱) مساوی ۲) قرینه ۳) عمود ۴) موازی

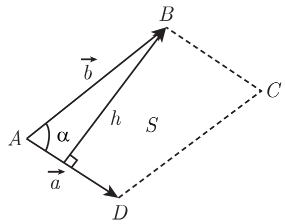
اتحاد لاگرانژ

$$|a\times b|^2+(a.b)^2=|a|^2\,|b|^2$$

بردارهای a و b مفروض‌اند به‌طوری‌که: $|a|=3$ ، $|b|=26$ و $|a\times b|=72$ ، حاصل $a\,.\,b$ را به‌دست آورید.

اگر a و b و c سه بردار باشند به‌طوری‌که: $a+b+c=0$، $|a|=3$ ، $|b|=5$ و $|c|=7$، حاصل $|a\times b|$ را به‌دست آورید.

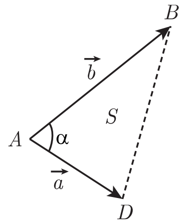
مساحت متوازی‌الاضلاع



اندازهٔ مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردار مفروض $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها.

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

مساحت مثلث



$$S = \frac{۱}{۲}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{۱}{۲}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin\alpha \quad \text{یا} \quad \boxed{S = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|}$$

نتیجه: سه نقطه A و B و C روی یک خط راست قرار دارند اگر و تنها اگر: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{o}$

اگر $\vec{a} = (۱\,,\,-۲\,,\,۳)$ و $\vec{b} = (۲\,,\,۰\,,\,۱)$، مساحت متوازی‌الاضلاع تولیدشده توسط دو بردار $\vec{a} + ۳\vec{b}$ و $۲\vec{a} + ۵\vec{b}$، کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$

اگر $A(۱,۲,۱)$، $B(۳,۲,-۱)$ و $C(۲,۲,۳)$ باشد مساحت مثلث ABC را بیابید.

دو بردار a و b به طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض‌اند، مساحت مثلث تولیدشده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویهٔ بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازهٔ تفاضل دو بردار کدام است؟ (ریاضی ۸۱)

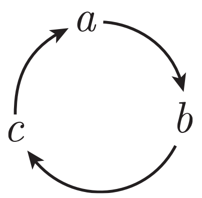
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵

ضرب مختلط سه بردار در فضا

اگر $\begin{vmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{vmatrix}$، $\vec{a}$ و $\begin{vmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{vmatrix}$ $\vec{b}$ و $\begin{vmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \end{vmatrix}$ $\vec{c}$ سه بردار غیرصفر باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ یک عدد حقیقی است که از ضرب داخلی $\vec{a}$ در بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ به‌دست می‌آید، این عدد برابر است با:

$$\text{ضرب مختلط} : \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} = a_۱\begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} - a_۲\begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ c_۱ & c_۳ \end{vmatrix} + a_۳\begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}$$

در ضرب مختلط، نمی‌توان بردارهای a، b و c را بدون نظم و ترتیب جابه‌جا کرد، بلکه باید با قانون چرخشی انجام شود:

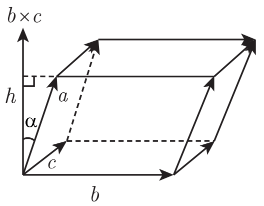


$$\boxed{\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)}$$

اگر a، b و c سه بردار غیرصفر باشند، خلاصه‌شده $(۲a - b) \cdot \left((b + c) \times (c - a)\right)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $a \cdot (b \times c)$ ۲) $۲a \cdot (b \times c)$ ۳) $۳a \cdot (b \times c)$ ۴) صفر

حجم متوازی‌السطوح



حجم متوازی‌السطوح که بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه یال هم‌رأس «غیرموازی» آن باشند، برابر با قدرمطلق حاصل‌ضرب مختلط همان سه بردار است.

$$\boxed{v = \left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|}$$

دو بردار با تصاویر $a=(1,-2,3)$ و $b=(2,1,-1)$ مفروض هستند. حجم متوازی‌السطوح که بر روی سه بردار a ، b و $a\times b$ ساخته شود، کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

بر روی سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ ، $\vec{b}=\vec{j}+3\vec{k}$ ، $\vec{c}=4\vec{i}-\vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر قاعدهٔ این متوازی‌السطوح را بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل دهند، ارتفاع متوازی‌السطوح کدام است؟ (ریاضی ۸۹ خارج)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

حجم متوازی‌السطوح یا همان حاصل‌ضرب مختلط سه بردار وقتی سه بردار هم‌صفحه باشند، صفر می‌شود (و بالعکس).

مقدار m را طوری بیابید که بردارهای $\vec{a}=(-1,0,2)$، $\vec{b}=(m,1,-1)$ و $\vec{c}=(1,2,-1)$ هم‌صفحه باشند.

اگر $a\times b+b\times c+c\times a=0$ باشد ثابت کنید سه بردار در یک صفحه قرار دارند.