درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

هندسه ۲ (یازدهم)

ویراست دوم

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی

نشر الگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را براســاس محتوای هندســهٔ سال یازدهم نوشــته‌ایم. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است و هر درس از دو بخش تشکیل شده است:

۱. خلاصــهٔ درس: در ایــن بخش، ضمن مرور مطالب کتاب درســی، نمونه‌هایی از پرســش‌های چهارگزینه‌ای را نیــز حل کرده‌ایم، تا خواننده با تکنیک‌های اصلی حل این‌گونه پرسش‌ها آشنا شود. تقسیم‌بندی درس‌ها مانند کتاب درسی است. چون هدف این کتاب آموزش مهارت‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای است، اثبات قضیه‌ها و نکته‌ها را نیاورده‌ایم.

۲. پرســش‌های چهارگزینه‌ای: در پایان هر درس مجموعه‌ای از پرســش‌های چهارگزینه‌ای مربوط بــه آن درس را آورده‌ایم. در این قسمت، از همهٔ مطالب کتاب درسی پرسش‌هایی طرح کرده‌ایم. علاوه بر این‌ها، تعداد زیادی پرسش تألیفی به همراه پرسش‌های کنکورهای سال‌های قبل را نیز آورده‌ایم. راه‌حل همهٔ پرسش‌ها در فصل چهارم قرار دارد.

بــرای مطالعــهٔ ایــن کتاب، ابتدا باید خلاصهٔ درس را با دقت بخوانید و مطمئن شــوید که روش‌های حل کردن پرســش‌های آن را یاد گرفته‌اید. سپس به حل کردن پرسش‌های انتهای درس بپردازید. با این کار، علاوه بر این که مطالب درسی را کامل مرور می‌کنید، با انواع مختلف پرسش‌های چهارگزینه‌ای آشنا می‌شوید.

در این ویراســت برخی از پرســش‌های ویراســت قبلی را حذف کرده‌ایم و البته تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های هر مبحث از درس را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. در دستهٔ اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شــود. این پرســش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تســلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دستهٔ دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرســش‌ها بســیار بیشتر از پرسش‌های دستهٔ اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در دستهٔ سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که ســطح دشــواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های دســتهٔ دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این دسته از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

به یاد داشته باشید که سرعت مطالعهٔ هندسه کمتر از درس‌های دیگر است. سعی کنید دربارهٔ آن‌چه که می‌خوانید تفکر و تأمل کنید، نه این‌که سرســری مطالب را حفظ کنید. حتماً به اســتدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شــوید می‌فهمید که چرا این کارها را در راه‌حل‌ها انجام داده‌ایم. هنگام مطالعه همیشــه کاغذ و قلم کنار خود داشــته باشید و هرگاه به مسئله‌ای رسیدید، پیش از این‌که راه‌حل آن را از روی کتاب بخوانید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید و اگر نتوانستید آن را حل کنید، راه‌حلش را ببینید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشــر الگو، خانم عاطفه ربیعی و دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و سکینه مختار مدیر واحد فنی و ویرایش تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: دایره

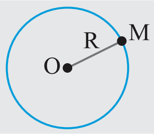
فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

تعریف

فرض کنید O نقطه‌ای ثابت و R عددی حقیقی و مثبت باشـد. دایره‌ای به مرکز O و شـعاع R مجموعهٔ تمام نقطه‌هایی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ O برابر R باشد. در شکل مقابل، $M \Leftrightarrow OM=R$ روی دایره است.



قرارداد دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نمایش می‌دهیم.

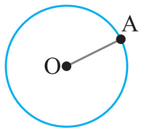
نکته

دو دایره با شعاع‌های مساوی با هم برابرند.

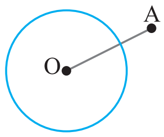
وضع نقطه و دایره

نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. وضعیت این نقطه نسبت به دایره یکی از سه حالت زیر است:

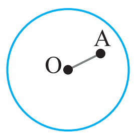
۱- نقطهٔ A روی دایره است. $\quad$ A روی دایره است. $\Leftrightarrow OA=R$



۲- نقطهٔ A بیرون دایره است. $\quad$ A بیرون دایره است. $\Leftrightarrow OA>R$



۳- نقطهٔ A درون دایره است. $\quad$ A درون دایره است. $\Leftrightarrow OA<R$



تست ۱

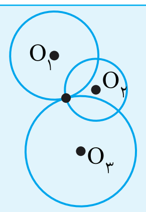
فرض کنید x عددی حقیقی باشـد. فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایرهٔ $C(O, x^2+5x)$ برابر ۶ اسـت. اگر نقطهٔ A بیرون این دایره باشد، برای x چند مقدار صحیح به‌دست می‌آید؟

۱) صفر $\quad$ ۲) ۱ $\quad$ ۳) ۲ $\quad$ ۴) نامتناهی

راه‌حل چون A بیرون دایره است، پس $R<OA$ ، یعنی $x^2+5x<6$ ، بنابراین $-6<x<1$. همچنین چون x^2+5x شعاع دایره است، پس $x^2+5x>0$ در نتیجه $x<-5$ یا $x>0$. از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $0<x<1$ یا $-6<x<-5$. پس هیچ مقدارِ صحیحی برای x به‌دست نمی‌آید.

نکته

۱- از یـک نقطه در صفحه، نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها، هر نقطهٔ دلخواه از صفحه، به غیر از نقطهٔ مورد نظر است.

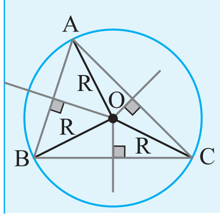


۲- از دو نقطهٔ متمایز A و B در صفحه نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند.

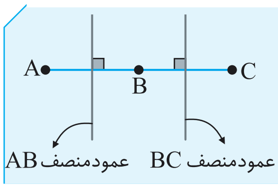
توجه کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از دو نقطهٔ A و B ، دایره‌ای به قطر AB است.

۳- سه نقطهٔ A ، B و C را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر سه نقطهٔ A ، B و C روی یک خط راست قرار نداشته باشند، فقط یک دایره از آن‌ها می‌گذرد و مرکز این دایره محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است.



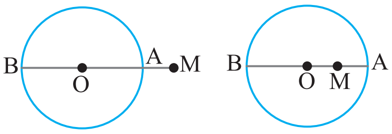
ب) اگر ســه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راســت قرار داشــته باشــند، هیچ دایره‌ای وجود ندارد که از هر ســه نقطه عبور کند. چون عمودمنصف‌های پاره‌خط‌هایی که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند موازی‌اند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



دورترین و نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره به یک نقطه

نقطـهٔ M و دایـرهٔ $C(O,R)$ را در نظـر بگیرید. با توجه به شـکل، در هـر دو حالت، در بین نقطه‌های روی دایره، A نزدیک‌ترین نقطه به M و نقطهٔ B دورترین نقطهٔ دایره به M هستند. همچنین

$$MA=|OM-R|,\quad MB=OM+R$$



تست ۲

کمترین و بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ A خارج دایره از این دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است. شعاع این دایره چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

راه‌حل

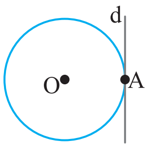
در شـکل مقابـل، M نزدیک‌تریـن و N دورتریـن نقطـهٔ دایـره تـا نقطهٔ A اسـت. اکنون توجـه کنید که $AN=OA+R=۱۲$ و $AM=OA-R=۸$. با کم کردن برابری‌های به‌دست آمده می‌توان نوشت $۲R=۴$، پس $R=۲$.

اوضاع نسبی خط و دایره

خط d و دایرهٔ $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. بر اساس تعداد نقطه‌های مشترک خط d و دایرهٔ $C(O,R)$، این خط با دایره یکی از سه حالت زیر را دارد:

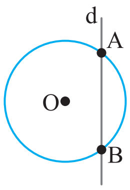
۱- خط d بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس است.

در این حالت خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک‌اند.



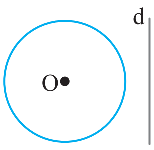
۲- خط d و دایرهٔ $C(O,R)$ متقاطع‌اند.

در این حالت، خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند.



۳- خط d خارج دایرهٔ $C(O,R)$ است.

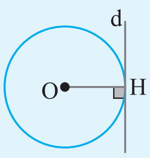
در این حالت، خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.



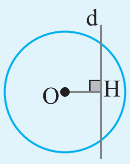
نکته

می‌توان وضعیت خط و دایره را با مقایسهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از خط با شعاع دایره به دست آورد. دایرهٔ $C(O,R)$ و خط d را در نظر بگیرید:

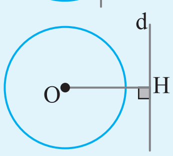
۱- اگر $OH=R$، آن‌گاه خط بر دایره مماس است و برعکس.



۲- اگر $OH<R$، آن‌گاه خط و دایره متقاطع هستند و برعکس.



۳- اگر $OH>R$، آن‌گاه خط خارج دایره است و برعکس.



تست ۳

مرکز دایرهٔ $C(O,۳)$ به فاصلهٔ $۲x-۱$ از خط d است. اگر این خط دایره را در دو نقطه قطع کند، حدود x کدام است؟

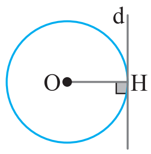
۱) $x<۲$ ۲) $x>۲$ ۳) $۲<x<۳$ ۴) $\frac{۱}{۲}\le x<۲$

راه‌حل چون خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $\text{شعاع دایره} > \text{فاصلهٔ مرکز دایره تا خط} \Rightarrow ۲x-۱<۳ \Rightarrow x<۲$

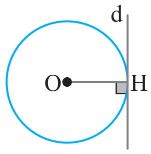
از طرف دیگر $۲x-۱\ge ۰$، پس $x\ge \frac{۱}{۲}$. به این ترتیب $\frac{۱}{۲}\le x<۲$.

چند مطلب دربارهٔ خط مماس بر دایره

۱- اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره که روی دایره است، بر آن شعاع عمود باشد، آن‌گاه این خط بر دایره مماس است.
به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر شعاع OH بر خط d عمود باشد، آن‌گاه خط d بر دایره مماس است.

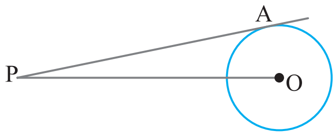


۲- شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است.
به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر خط d بر دایره مماس باشد، آن‌گاه شعاع OH بر خط d عمود است.



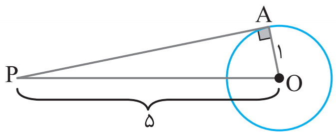
تست ۴

در شکل مقابل طول PO برابر ۵ و شعاع دایره برابر ۱ است. طول PA کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

راه‌حل می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. پس مثلث OAP در رأس A قائم‌الزاویه است (شکل را ببینید). اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAP،



$$PA=\sqrt{OP^۲-OA^۲}=\sqrt{۲۵-۱}=۲\sqrt{۶}$$

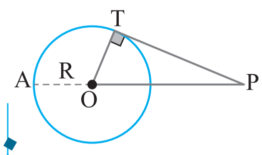
تست ۵

فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره از نقطهٔ P برابر ۹ و فاصلهٔ P تا مرکز دایره $\frac{۱۳}{۲}$ است. طول مماس رسم شده از نقطهٔ P بر دایره کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$

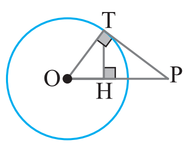
راه‌حل در شکل روبه‌رو دورترین نقطهٔ دایره به نقطهٔ P نقطهٔ A است. پس $PA=۹\Rightarrow OP+OA=۹$

از طرف دیگر $OP=\frac{۱۳}{۲}$. در نتیجه $\frac{۱۳}{۲}+R=۹$، یعنی $R=\frac{۵}{۲}$. در مثلث‌قائم‌الزاویهٔ OPT بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $PT=\sqrt{OP^۲-OT^۲}=\sqrt{(\frac{۱۳}{۲})^۲-(\frac{۵}{۲})^۲}=۶$.



تست ۶

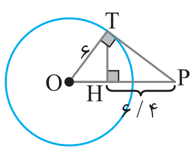
اندازهٔ تصویر مماس PT روی قطر گذرنده از نقطهٔ P در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر با ۶/۴ است. اندازهٔ مماس PT چقدر است؟



۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

راه‌حل **راه‌حل اول** می‌دانیم که PH تصویر PT روی OP است و $PT>PH$، پس $PT>۶/۴$ و تنها گزینه‌ای که از ۶/۴ بزرگ‌تر است گزینهٔ (۴) است.

راه‌حل دوم فرض کنید PH تصویر مماس PT روی PO باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTP،

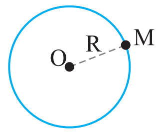


$$OT^۲=OH\times OP\Rightarrow ۶^۲=OH(OH+۶/۴)\Rightarrow OH^۲+۶/۴OH-۳۶=۰$$

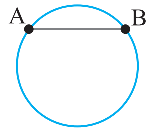
$$(OH+۱۰)(OH-۳/۶)=۰\Rightarrow OH=۳/۶\,,\quad OH=-۱۰ \ (\text{غ.ق.ق})$$

پس اندازهٔ OP برابر با $۳/۶+۶/۴=۱۰$ است. در نتیجه $\triangle OTP: PT^۲=OP^۲-OT^۲=۱۰^۲-۶^۲=۶۴\Rightarrow PT=۸$

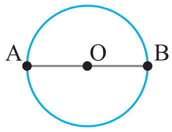
یادآوری برخی از مفاهیم اولیه



۱- شعاع دایره: پاره‌خطی را که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره است **شعاع** دایره می‌گوییم.
در شکل مقابل، OM شعاع دایره است.

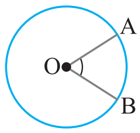


۲- وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط دایره قرار دارد **وتر** نامیده می‌شود. در شکل مقابل، AB وتر است.

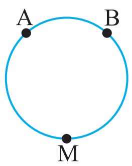


۳- قطر دایره: قطر وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد. در شکل مقابل، AB قطر است.

توجه اگر R اندازهٔ شعاع دایره باشد، آن‌گاه اندازهٔ تمام قطرهای این دایره برابر $2R$ است.



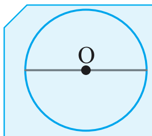
۴- زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای را که رأس آن مرکز دایره است **زاویهٔ مرکزی** آن دایره می‌گوییم. در شکل مقابل، $A\hat{O}B$ زاویه‌ای مرکزی است.



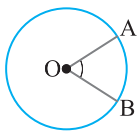
۵- کمان: دو نقطهٔ A و B روی محیط دایره را در نظر بگیرید (شکل را ببینید). این دو نقطه، محیط دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که به آن‌ها، **کمان** یا **قوس** می‌گوییم.

توجه معمولاً کمان ایجاد شده توسط دو نقطهٔ A و B را با $\overset{\frown}{AB}$ نشان می‌دهیم و برای نشان دادن کمان دیگر، از نقطه‌ای کمکی مانند M روی محیط دایره استفاده می‌کنیم (شکل را ببینید) و آن را به صورت $\overset{\frown}{AMB}$ می‌نویسیم.

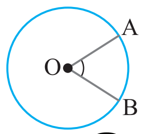
نکته



هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که به آن کمان‌ها نیم‌دایره می‌گوییم.



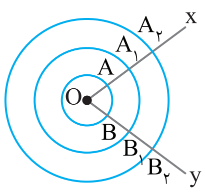
۶- کمان زاویهٔ مرکزی: کمانی از دایره که یک زاویهٔ مرکزی روی محیط دایره ایجاد می‌کند، **کمان نظیر آن زاویه** نامیده می‌شود. در شکل مقابل، کمان AB کمان نظیر زاویهٔ AOB است.



$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$

۷- اندازهٔ کمان: اندازهٔ کمان، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان است و واحد آن درجه است. در شکل مقابل

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$



توجه توجه کنید که نباید اندازهٔ یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. به شکل روبه‌رو نگاه کنید. سه دایره هم‌مرکز هستند:

$$x\hat{O}y = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{A_2B_2}$$

یعنی اندازهٔ کمان‌های AB، A_1B_1 و A_2B_2 برابرند اما طول این کمان‌ها برابر نیستند:

طول کمان $AB <$ طول کمان $A_1B_1 <$ طول کمان A_2B_2

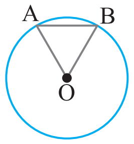
رابطهٔ بین طول و اندازهٔ کمان

بین طول و اندازهٔ کمان تساوی $\dfrac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \dfrac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{360^\circ}$ برقرار است.

نتیجه اگر L طول کمان AB در دایرهٔ $C(O, R)$ باشد و $\overset{\frown}{AB} = \alpha$، به‌دست می‌آید $L = \dfrac{\alpha \pi R}{180^\circ}$. توجه کنید که α برحسب درجه است.

تست ۷

در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۱۲ و طول کمان کوچک‌تر AB برابر ۴π است. اندازهٔ وتر AB برابر کدام است؟



۱) ۶
۲) $۱۲\sqrt{۳}$
۳) ۱۲
۴) $۶\sqrt{۳}$

راه‌حل طول کمان AB از رابطهٔ زیر برحسب اندازهٔ کمان AB به دست می‌آید:

$$L=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}\Rightarrow ۴\pi=\frac{\text{اندازهٔ کمان AB}}{۱۸۰^\circ}(\pi\times ۱۲)\Rightarrow ۴\pi=\frac{\text{اندازهٔ کمان AB}}{۱۵^\circ}\times\pi\Rightarrow \text{اندازهٔ کمان AB}=۶۰^\circ$$

بنابراین اندازهٔ زاویهٔ مرکزی O برابر ۶۰° است. چون $OA=OB=R$، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است، در نتیجه $AB=۱۲$.

تست ۸

طول کمانی با اندازهٔ ۳۰° در دایره‌ای به مرکز O با طول کمانی با اندازهٔ ۴۵° در دایره‌ای به مرکز O' برابر است. نسبت مساحت دایرهٔ به مرکز O به مساحت دایرهٔ به مرکز O' کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$
۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۶}{۹}$
۴) $\frac{۷}{۹}$

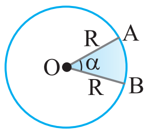
راه‌حل شعاع دایره‌ها را R و R' در نظر می‌گیریم. چون $L=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}$، با توجه به فرض تست می‌توان نوشت $\frac{۳۰^\circ\times\pi R}{۱۸۰^\circ}=\frac{۴۵^\circ\times\pi R'}{۱۸۰^\circ}$. در نتیجه $\frac{R}{R'}=\frac{۳}{۲}$،

بنابراین $\frac{S}{S'}=\frac{\pi R^۲}{\pi R'^۲}=(\frac{R}{R'})^۲=\frac{۹}{۴}$.

قطاع

به شکل روبه‌رو توجه کنید. به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع آن محدود است **قطاع** می‌گوییم.

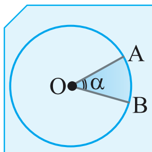
کمان AB را **کمان قطاع**، R را **شعاع قطاع** و زاویهٔ AOB را **زاویهٔ قطاع** می‌گوییم.



نکته

اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ برحسب درجه مساوی α باشد، آن‌گاه مساحت قطاع برابر است با

$$S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}$$

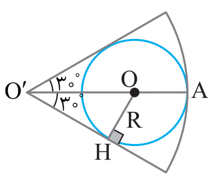


تست ۹

دایره‌ای در قطاع ۶۰° از دایره‌ای به شعاع ۸ محاط شده است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۶
۴) $\frac{۸}{۳}$

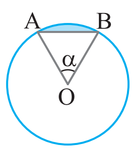
راه‌حل فرض می‌کنیم دایرهٔ به مرکز O در قطاع ۶۰° از دایرهٔ به مرکز O' محاط شده باشد. در این صورت دو دایره مماس داخلی هستند، پس طول خط‌المرکزین آن‌ها مساوی تفاضل شعاع‌های دو دایره است. بنابراین $OO'=۸-R$. از طرف دیگر OO' نیمساز زاویهٔ ۶۰° است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'H$،



$$O'=۳۰^\circ\Rightarrow OH=\frac{OO'}{۲}\Rightarrow R=\frac{۸-R}{۲}\Rightarrow ۲R=۸-R\Rightarrow R=\frac{۸}{۳}$$

قطعه

قسمتی از سطح دایره، محصور بین یک کمان و وتر نظیر آن کمان را **قطعهٔ دایره** می‌نامیم.

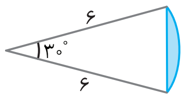


توجه برای محاسبهٔ مساحت قطعه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(\text{مساحت مثلث }OAB)-(\text{مساحت قطاع }OAB)=\text{مساحت قطعهٔ }\alpha$$

تست ۱۰

در قطاع شکل مقابل مساحت قسمت رنگی برابر کدام است؟



۱) $۳\pi-۶$ ۲) ۳π

۳) $۳\pi-۹$ ۴) ۶π

راه‌حل برای محاسبهٔ مساحت قطعهٔ مورد نظر باید مساحت قطاع را منهای مساحت مثلث کنیم:

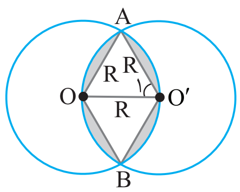
$$\left.\begin{array}{l}\text{مساحت قطاع}=\frac{۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\pi R^۲=\frac{۱}{۱۲}\pi(۶)^۲=۳\pi \\ \text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}(۶)(۶)\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}(۶)(۶)(\frac{۱}{۲})=۹\end{array}\right\}\Rightarrow \text{مساحت قطعه}=\text{مساحت قطاع}-\text{مساحت مثلث}=۳\pi-۹$$

تست ۱۱

دو دایره به شعاع‌های ۱ واحد از مرکز یکدیگر گذشته‌اند. مساحت ناحیهٔ مشترک این دو دایره کدام است؟

۱) $\pi-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}-\sqrt{۳}$

راه‌حل شکل تست به صورت مقابل است. برای به‌دست آوردن مساحت ناحیهٔ مشترک باید مساحت لوزی $AOBO'$ را با مسـاحت بخش‌های رنگی جمع کنیم. لوزی $AOBO'$ از دو مثلث متسـاوی‌الاضلاع به طول ضلع R تشـکیل شـده است، پس $S_{AOBO'}=۲(\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^۲)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R^۲$. از طرف دیگر بخش رنگی از چهار قطعهٔ مساوی تشکیل شده است. مساحت یک قطعه به صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$\text{مساحت قطعه}=\text{مساحت قطاع } AOO'-S_{AOO'}=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(\pi R^۲)-\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^۲=(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴})R^۲$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی که چهار برابر مساحت این قطعه است مساوی $۴(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴})R^۲$، یعنی $(\frac{۲\pi}{۳}-\sqrt{۳})R^۲$ است. در نتیجه

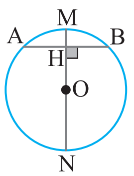
$$\text{مساحت خواسته شده}=\text{مساحت لوزی}+\text{مساحت قسمت رنگی}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R^۲+(\frac{۲\pi}{۳}-\sqrt{۳})R^۲\xrightarrow{R=۱}\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۲\pi}{۳}-\sqrt{۳}=\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

نکاتی در مورد وتر و کمان نظیر آن

۱- در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

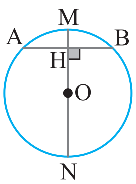
به عبارت دیگر، در شکل مقابل اگر قطر MN بر وتر AB عمود باشد، آن‌گاه

$$AH=BH\ ,\quad \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}\ ,\quad \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{BN}$$



۲- خطی که مرکز دایره را به وسـط یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود اسـت و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. به عبارت دیگر، در شکل روبه‌رو، اگر H وسط وتر AB باشد، آن‌گاه

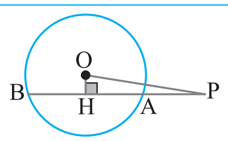
$$MN\perp AB\ ,\quad \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}\ ,\quad \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{BN}$$



نتیجه وسط کمان‌های نظیر یک وتر، مرکز دایره و وسط وتر مورد نظر روی یک خط راست قرار دارند.

تست ۱۲

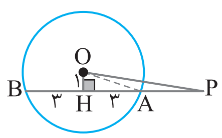
در شکل مقابل $AB=۶$ ، $OH=۱$ و $O\hat{H}A=۹۰^\circ$. طول شعاع دایره چقدر است؟



۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۲}$

۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

راه‌حل چـون OH بر AB عمود اسـت، پـس آن را نصف می‌کند. در نتیجـه $AH=\frac{AB}{۲}=۳$. در مثلث OAH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $OA=\sqrt{OH^۲+AH^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$.

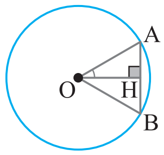


تست ۱۳

در دایرهٔ $C(O,R)$ ، $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ و $AB=۱۰$. فاصلهٔ O از وتر AB کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

راه‌حل



در شکل روبه‌رو مثلث OAB متساوی‌الساقین است $(OA=OB)$ و $A\hat{O}B=۶۰^\circ$. پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a، اندازهٔ ارتفاع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است. پس

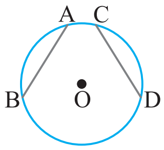
$$OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۰=۵\sqrt{۳}$$

نکاتی در مورد دو وتر از یک دایره

۱- کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس.

به عبارت دیگر، در شکل مقابل

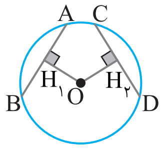
$$AB=CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$



۲- در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.

به عبارت دیگر، در شکل مقابل

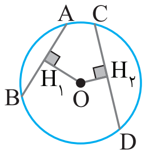
$$AB=CD \Leftrightarrow OH_۱=OH_۲$$



۳- در یک دایره، اگر دو وتر نامساوی باشند، آن‌گاه وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

به عبارت دیگر، در شکل مقابل

$$AB<CD \Leftrightarrow OH_۱>OH_۲$$



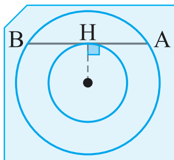
نکته

قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره است زیرا از مرکز دایره کمترین فاصله را دارد.

نکته

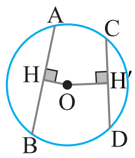
در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز هستند و وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر، بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. در این صورت

$$AH=BH$$



تست ۱۴

در دایرهٔ شکل مقابل اگر $AB>CD$ ، $OH=۴x+۲$ و $OH'=x+۸$ ، کدام رابطه برقرار است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}<x<۲$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\leq x<۲$

۳) $x<۲$ ۴) $۰\leq x<۳$

راه‌حل

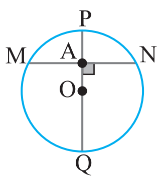
از دو وتر نابرابر در دایره، هرکدام که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است. بنابراین $AB>CD \Rightarrow OH<OH' \Rightarrow ۴x+۲<x+۸ \Rightarrow x<۲$

از طرف دیگر،

$$۴x+۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq -\frac{۱}{۲} \quad , \quad x+۸>۰ \Rightarrow x>-۸$$

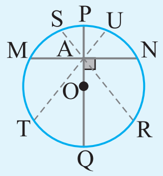
پس $-\frac{۱}{۲}\leq x<۲$.

وتر مینیمم



نقطهٔ A که مرکز دایره نیست، درون دایره قرار دارد. از این نقطه، نامتناهی وتر می‌گذرد که بزرگ‌ترین آن‌ها قطر دایره است و کوچک‌ترین آن‌ها وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود است. در شکل مقابل، PQ بزرگ‌ترین وتر گذرنده از A و MN کوچک‌ترین وتر گذرنده از A است که به آن **وتر مینیمم** گذرنده از A می‌گوییم.

نکته



نقطهٔ A که مرکز دایره نیست درون دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد. در این صورت:

۱- فقط یک وتر به طول $2R$ وجود دارد که از A می‌گذرد، که همان قطر گذرنده از A است (قطر PQ در شکل).

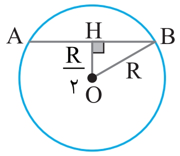
۲- فقط یک وتر مینیمم وجود دارد که از A می‌گذرد (وتر MN در شکل).

۳- دو وتر به طول L که در این‌جا L بین اندازهٔ وتر مینیمم و قطر دایره است وجود دارد که از A می‌گذرند (وترهای RS و TU در شکل).

تست ۱۵

از نقطهٔ H به فاصلهٔ $\frac{R}{2}$ از مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ وتری مینیمم در دایره رسم کرده‌ایم. طول این وتر مینیمم کدام است؟

۱) $\sqrt{3}R$
۲) $\sqrt{2}R$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

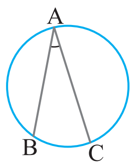


راه‌حل در شکل روبه‌رو AB وتر مینیمم است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH،

$$BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

اکنون می‌توان نوشت $AB=2BH=\sqrt{3}R$.

زاویهٔ محاطی

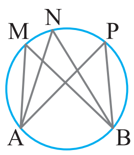


زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره اسـت و ضلع‌های آن دو وتر از دایره هسـتند، **زاویهٔ محاطی** می‌گوییم. در شـکل مقابل، $B\hat{A}C$ زاویه‌ای محاطی است.

نکته

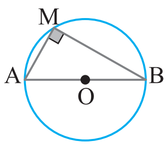
اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است، یعنی در شکل بالا، $B\hat{A}C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$.

نتایج بسیار مهم



۱- در هر دایره اندازهٔ زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان، با هم برابرند.

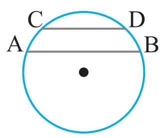
$$\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$



۲- اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر دایره برابر 90° است.

در شکل روبه‌رو، اگر AB قطر دایره باشد، آن‌گاه

$$A\hat{M}B=90^\circ$$



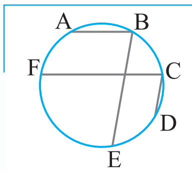
۳- کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند.

در شکل مقابل، اگر دو وتر AB و CD با هم موازی باشند، آن‌گاه

$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

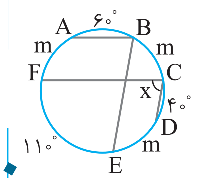
تذکر توجه کنید که عکس مطلب بالا لزوماً درست نیست.

تست ۱۶



در شکل روبه‌رو، اگر $AB||FC$ ، $CD||BE$ ، $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$ ، $\overset{\frown}{CD}=40^\circ$ و $\overset{\frown}{EF}=110^\circ$ ، اندازهٔ زاویهٔ FCD کدام است؟

۱) 90°
۲) 55°
۳) 70°
۴) 80°

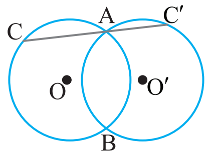


راه‌حل می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند. پس $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}=m$. از طرف دیگر محیط دایره برابر 360° است. بنابراین $3m+60^\circ+110^\circ+40^\circ=360^\circ$. پس $m=50^\circ$. اکنون می‌توان نوشت

$$F\hat{C}D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{FED}=\frac{1}{2}(110^\circ+50^\circ)=80^\circ$$

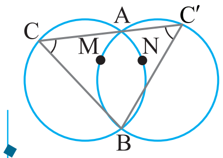
تست ۱۷

در شکل روبه‌رو، دو دایرهٔ مساوی متقاطع‌اند. قاطع CAC' را رسم می‌کنیم. مثلث CBC' همواره ....



۱) متساوی‌الاضلاع است.
۲) قائم‌الزاویه است.
۳) متساوی‌الساقین است.
۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

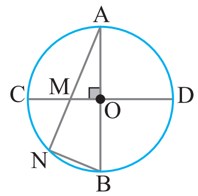
راه‌حل



چون دو دایره مساوی هستند، پس $\overset{\frown}{ANB}=\overset{\frown}{AMB}$. از طرف دیگر، $\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ANB}$ و $\hat{C}'=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AMB}$. در نتیجه $\hat{C}=\hat{C}'$، یعنی $BC=BC'$. پس مثلث CBC' متساوی‌الساقین است.

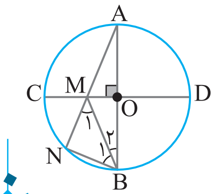
تست ۱۸

در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر $MN=NB$، اندازهٔ زاویهٔ A کدام است؟



۱) $۲۲/۵^\circ$
۲) ۳۰°
۳) ۴۵°
۴) ۶۰°

راه‌حل

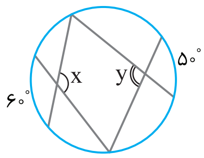


چون $MN=NB$، پس مثلث MNB متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر، $\hat{N}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$. پس $\hat{M}_۱=\hat{B}_۱=۴۵^\circ$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{cases}\hat{M}_۱=\hat{A}+\hat{B}_۲\\ MA=MB\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}_۲\end{cases}\Rightarrow ۴۵^\circ=۲\hat{A}\Rightarrow\hat{A}=۲۲/۵^\circ$$

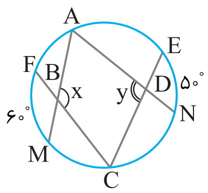
تست ۱۹

در دایرهٔ شکل مقابل مقدار $x+y$ برابر کدام است؟



۱) ۲۳۵°
۲) ۲۲۵°
۳) ۲۱۵°
۴) ۱۱۰°

راه‌حل



با توجه به شکل زیر در چهارضلعی $ABCD$ مجموع زاویه‌های داخلی ۳۶۰° است. از طرف دیگر، زاویه‌های A و C محاطی هستند. بنابراین

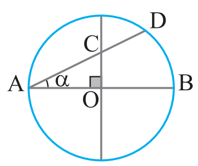
$$\begin{cases}\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{MCN}\\ \hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FAE}\end{cases}\xrightarrow{+}\hat{A}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{MCN}+\overset{\frown}{FAE})$$

در ضمن $\overset{\frown}{MCN}+۵۰^\circ+\overset{\frown}{FAE}+۶۰^\circ=۳۶۰^\circ$. پس $\overset{\frown}{MCN}+\overset{\frown}{FAE}=۲۵۰^\circ$. بنابراین $\hat{A}+\hat{C}=\frac{۲۵۰^\circ}{۲}=۱۲۵^\circ$. اکنون در چهارضلعی $ABCD$ می‌نویسیم

$$\hat{A}+\hat{C}+\hat{B}+\hat{D}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۱۲۵^\circ+x+y=۳۶۰^\circ\Rightarrow x+y=۲۳۵^\circ$$

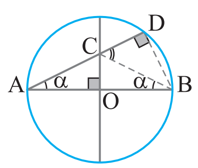
تست ۲۰

در شکل مقابل دو قطر دایره بر هم عمود هستند. نسبت $\frac{CD}{CA}$ برابر با کدام است؟



۱) $۲\sin^۲\alpha$
۲) $۲\cos^۲\alpha$
۳) $\cos ۲\alpha$
۴) $\sin ۲\alpha$

راه‌حل



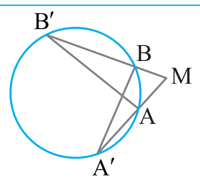
نقطه‌های C و D را به B وصل می‌کنیم. چون قطرهای دایره بر هم عمود هستند، پس $BC=CA$. در نتیجه $\hat{A}=A\hat{B}C=\alpha$ از طرف دیگر زاویهٔ BCD زاویهٔ خارجی مثلث ABC است، پس $B\hat{C}D=\hat{A}+A\hat{B}C=\alpha+\alpha=۲\alpha$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD، بنابر تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت $\cos(B\hat{C}D)=\frac{CD}{BC}$. در نتیجه

$$\frac{CD}{CA}=\cos ۲\alpha$$

تست ۲۱

در دایرهٔ شکل مقابل اگر $MA=۴$ ، $BB'=۹$ ، $AB'=۱۲$ و $A'B=۹$ ، طول AA' کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۸ ۴) ۴

راه‌حل

دو زاویهٔ محاطی A' و B' روبه‌رو به کمان AB هستند، پس مساوی‌اند. در نتیجه

$$\begin{cases}\hat{A}'=\hat{B}'\\ \hat{M}=\hat{M}\end{cases}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle A'BM\sim\triangle B'AM$$

بنابراین اضلاع نظیر این دو مثلث متشابه، متناسب‌اند:

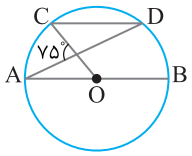
$$\frac{MA}{MB}=\frac{AB'}{A'B}=\frac{MB'}{MA'}\Rightarrow\frac{۴}{MB}=\frac{۱۲}{۹}=\frac{MB+۹}{۴+AA'}$$

از این تساوی‌ها نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۴}{MB}=\frac{۱۲}{۹}\Rightarrow MB=۳\ ,\quad \frac{۱۲}{۹}=\frac{MB+۹}{۴+AA'}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{۳+۹}{۴+AA'}\Rightarrow AA'=۵$$

تست ۲۲

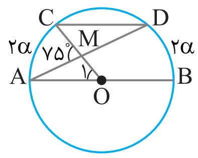
در دایرهٔ شکل مقابل O مرکز دایره است و $CD||AB$. اندازهٔ کمان CD چقدر است؟



۱) ۵۰° ۲) ۸۰°

۳) ۷۵° ۴) $۳۷/۵^\circ$

راه‌حل



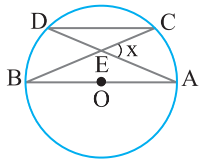
در شکل مقابل فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{BD}=۲\alpha$. چون $AB||CD$ ، پس کمان‌های محصور بین این دو وتر با هم برابرند، یعنی $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=۲\alpha$. زاویهٔ A، زاویهٔ محاطی مقابل به کمان BD و زاویهٔ O_1 زاویهٔ مرکزی مقابل به کمان AC است، بنابراین $\hat{O}_1=\overset{\frown}{AC}=۲\alpha$ و $\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}=\alpha$. زاویهٔ AMC ، زاویهٔ خارجی برای مثلث OMA است، پس

$$A\hat{M}C=\hat{O}_1+\hat{A}\Rightarrow ۷۵^\circ=۲\alpha+\alpha\Rightarrow\alpha=۲۵^\circ$$

اکنون به‌دست می‌آید $\overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ-(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC})=۱۸۰^\circ-۴\alpha=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$.

تست ۲۳

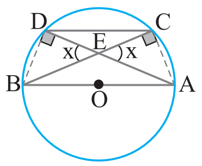
در دایرهٔ مقابل وتر DC را موازی قطر AB رسم کرده‌ایم. نسبت مساحت مثلث ECD به مساحت مثلث EAB کدام است؟



۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$

۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\sin^۲ x$

راه‌حل



از A به C و از D به B وصل می‌کنیم. در این صورت دو زاویهٔ BDA و ACB محاطی روبه‌رو به قطر هستند، پس قائمه هستند. با توجه به تعریف کسینوس در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

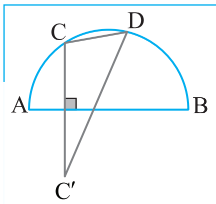
$$\triangle ACE:\cos x=\frac{EC}{EA}\quad(۱)\ ,\qquad\triangle BDE:\cos x=\frac{ED}{EB}\quad(۲)$$

اکنون می‌توانیم نسبت مساحت دو مثلث ECD و EAB را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{S_{ECD}}{S_{EAB}}=\frac{\frac{۱}{۲}EC\times ED\sin(۱۸۰^\circ-x)}{\frac{۱}{۲}EA\times EB\sin(۱۸۰^\circ-x)}=\frac{EC}{EA}\times\frac{ED}{EB}\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{S_{ECD}}{S_{EAB}}=\cos x\times\cos x=\cos^۲ x$$

تست ۲۴

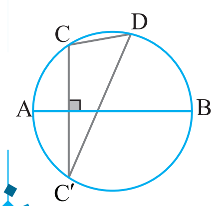
وتر CD به طول ثابت L روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB $(L<AB=۲R)$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌لغزد. اگر C' قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به AB باشد، اندازهٔ زاویهٔ $CC'D$ چه وضعی دارد؟



۱) وضع مشخصی ندارد. ۲) همواره افزایش می‌یابد.

۳) همواره کاهش می‌یابد. ۴) همواره ثابت است.

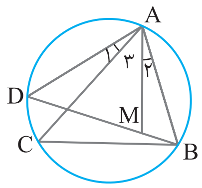
راه‌حل



نیم‌دایره را کامل می‌کنیم تا به یک دایره به قطر AB برسیم. چون قطر AB محور تقارن است، پس C' روی دایره قرار می‌گیرد و چون وتر CD طول ثابت دارد، پس کمان CD اندازهٔ ثابت دارد. بنابراین زاویهٔ محاطی $CC'D$ که روبه‌روی کمان با اندازهٔ ثابت CD قرار دارد، اندازهٔ ثابتی دارد.

تست ۲۵

در شکل مقابل $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. حاصل $AD\times BC$ برابر کدام است؟



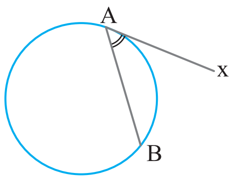
۱) $DM\times AC$
۲) $BM\times AC$
۳) $AB\times CD$
۴) $BD\times BM$

راه‌حل
دو زاویهٔ محاطی C و D روبه‌رو به کمان AB هستند، پس مساوی‌اند. در ضمن $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. اگر به دو طرف این تساوی اندازهٔ زاویهٔ A_3 را اضافه کنیم، نتیجه می‌گیریم $B\hat{A}C=D\hat{A}M$. بنابراین

$$\begin{cases}\hat{C}=\hat{D}\\ B\hat{A}C=D\hat{A}M\end{cases}\xrightarrow{(ز ز)}\triangle ABC\sim\triangle AMD$$

اکنون نسبت اضلاع نظیر این دو مثلث را می‌نویسیم: $\frac{BC}{DM}=\frac{AC}{AD}$ ، در نتیجه $AD\times BC=DM\times AC$.

زاویهٔ ظلی

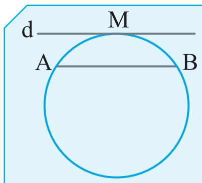


زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره است، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است، **زاویهٔ ظلی** می‌نامند. در شکل مقابل $B\hat{A}x$ زاویه‌ای ظلی است.

تذکر
کمانی از دایره که درون زاویهٔ ظلی قرار دارد، **کمان نظیر** یا **کمان روبه‌رو** به زاویهٔ ظلی است. در شکل بالا $\overset{\frown}{AB}$ کمان نظیر زاویهٔ ظلی BAx است.

قضیه
اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر با نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است. به عبارت دیگر در شکل بالا، $B\hat{A}x=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$.

نکته



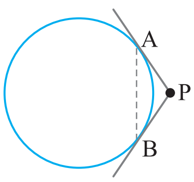
در شکل مقابل، خط d در نقطهٔ M بر دایره مماس است و وتر AB با خط d موازی است. در این صورت

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$$

تست ۲۶

کمان AB به اندازهٔ ۷۰° را بر دایره‌ای اختیار کرده و در نقطه‌های A و B ، دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند. بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث PAB کدام است؟

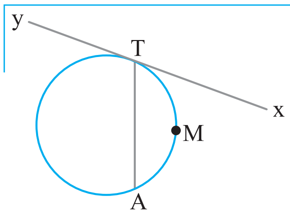
۱) ۴۰°
۲) ۷۰°
۳) ۱۱۰°
۴) ۸۰°



راه‌حل
در شکل روبه‌رو زاویه‌های A و B در مثلث PAB ، زاویهٔ ظلی هستند، بنابراین $\hat{A}=\hat{B}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}=\frac{۱}{۲}\times۷۰^\circ=۳۵^\circ$.
اکنون به‌دست می‌آید $\hat{P}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=۱۸۰^\circ-(۳۵^\circ+۳۵^\circ)=۱۱۰^\circ$. بنابراین بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث PAB برابر ۱۱۰° است.

تست ۲۷

در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ ATx برابر $\alpha+۱۱^\circ$ و اندازهٔ کمان AMT برابر $۳\alpha-۴۰^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ ATy کدام است؟



۱) ۱۰۷°
۲) ۷۳°
۳) ۶۲°
۴) $۱۵۴/۵^\circ$

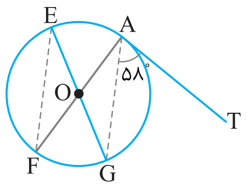
راه‌حل
زاویهٔ ATx زاویهٔ ظلی است، پس اندازهٔ آن نصف کمان مقابلش است. پس

$$A\hat{T}x=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AMT}\Rightarrow\alpha+۱۱^\circ=\frac{۱}{۲}(۳\alpha-۴۰^\circ)\Rightarrow۲\alpha+۲۲^\circ=۳\alpha-۴۰^\circ\Rightarrow\alpha=۶۲^\circ$$

بنابراین $\overset{\frown}{AMT}=۳\alpha-۴۰^\circ=۳\times۶۲^\circ-۴۰^\circ=۱۴۶^\circ$. در نتیجه $\overset{\frown}{AT}=۳۶۰^\circ-\overset{\frown}{AMT}=۳۶۰^\circ-۱۴۶^\circ=۲۱۴^\circ$. چون زاویهٔ ATy زاویهٔ ظلی روبه‌رو به کمان AT است، پس $A\hat{T}y=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AT}=\frac{۲۱۴^\circ}{۲}=۱۰۷^\circ$.

تست ۲۸ **دو قطر AF و GE در دایره‌ای به مرکز O مفروض هستند. مماس AT در نقطهٔ A بر دایره رسم شده است. اگر زاویهٔ TAG برابر ۵۸° باشد، اندازهٔ زاویهٔ محاطی AFE کدام است؟**

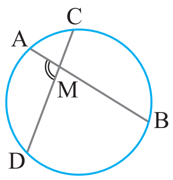
۱) ۳۲° ۲) ۵۸° ۳) ۶۴° ۴) ۱۵۱°



راه‌حل در شکل روبه‌رو زاویهٔ TAG، زاویهٔ ظلی است، پس $T\hat{A}G=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AG}\Rightarrow ۵۸^\circ=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AG}$
یعنی $\overset{\frown}{AG}=۱۱۶^\circ$. چون EG قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{AG}=۱۸۰^\circ$ در نتیجه $\overset{\frown}{AE}+۱۱۶^\circ=۱۸۰^\circ$.
بنابراین $\overset{\frown}{AE}=۱۸۰^\circ-۱۱۶^\circ=۶۴^\circ$. زاویهٔ AFE زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان AE است، بنابراین

$$A\hat{F}E=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}=\frac{۱}{۲}\times ۶۴^\circ=۳۲^\circ$$

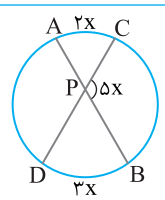
زاویهٔ بین دو وتر



اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازهٔ دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدود است. به عبارت دیگر در شکل روبه‌رو،

$$A\hat{M}D=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$$

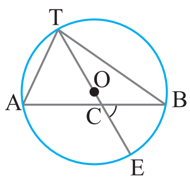
تست ۲۹ **در شکل مقابل $\overset{\frown}{AC}=۲x$، $\overset{\frown}{BD}=۳x$ و $C\hat{P}B=۵x$. مقدار x کدام است؟**



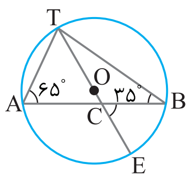
۱) ۲۰° ۲) ۲۴°
۳) ۳۲° ۴) ۳۶°

راه‌حل با توجه به شکل $A\hat{P}C=۱۸۰^\circ-۵x$. از طرف دیگر، زاویهٔ APC زاویهٔ بین دو وتر متقاطع است، بنابراین $A\hat{P}C=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$. پس $۱۸۰^\circ-۵x=\frac{۱}{۲}(۲x+۳x)$. در نتیجه $x=۲۴^\circ$.

تست ۳۰ **در شکل مقابل O مرکز دایره است، $\hat{A}=۶۵^\circ$ و $\hat{B}=۳۵^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟**



۱) ۶۰ ۲) ۶۱
۳) ۶۲ ۴) ۶۳



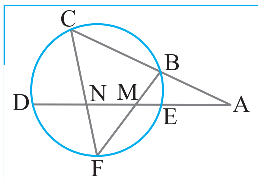
راه‌حل چون $\hat{A}=۶۵^\circ$، پس $\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BT}=۶۵^\circ$. یعنی $\overset{\frown}{BT}=۱۳۰^\circ$. چون ET قطر دایره است، پس

$$\overset{\frown}{BE}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ-۱۳۰^\circ=۵۰^\circ$$

از طرف دیگر چون $\hat{B}=۳۵^\circ$، پس $\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AT}=۳۵^\circ$، یعنی $\overset{\frown}{AT}=۷۰^\circ$. زاویهٔ C زاویهٔ بین دو وتر متقاطع است، پس

$$\hat{C}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{BE})=\frac{۱}{۲}(۷۰^\circ+۵۰^\circ)=۶۰^\circ$$

تست ۳۱ **اگر F وسط کمان DE باشد، کدام گزینه همواره درست است؟**



۱) $\hat{F}=۲\hat{A}$ ۲) $C\hat{B}F+C\hat{N}E=۱۸۰^\circ$
۳) $\hat{A}+\hat{C}=A\hat{B}M$ ۴) $C\hat{N}D+B\hat{M}A=۹۰^\circ$

راه‌حل زاویهٔ CBF زاویهٔ محاطی است، پس

$$C\hat{B}F=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DF}) \quad (۱)$$

زاویهٔ CNE زاویهٔ بین دو وتر متقاطع است، پس

$$C\hat{N}E=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{EC}) \quad (۲)$$

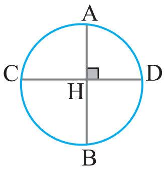
از جمع تساوی‌های (۱) و (۲) و با توجه به این که $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{FE}$، می‌نویسیم $C\hat{B}F+C\hat{N}E=\frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{EC}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$.

تست ۳۲

دو وتر AB و CD از دایره‌ای بر هم عمودند و اندازه‌های دو کمان از چهار کمان حاصل ۹۰° و ۸۰° است. اندازهٔ یکی از دو کمان دیگر کدام است؟

۱) ۹۵° ۲) ۸۰° ۳) ۱۰۰° ۴) ۱۱۰°

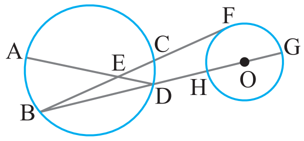
راه‌حل کمان‌های مقابل نمی‌توانند ۹۰° و ۸۰° باشند، چون دیگر زاویهٔ H قائمه نخواهد بود، پس دو کمان مجاور ۹۰° و ۸۰° هستند. فرض می‌کنیم اندازهٔ کمان AD برابر با ۸۰° و اندازهٔ کمان AC برابر با ۹۰° باشد. در این صورت



$$\hat{H}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})\Rightarrow ۹۰^\circ=\frac{۱}{۲}(۹۰^\circ+\overset{\frown}{BD})\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۹۰^\circ$$

$$\hat{H}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})\Rightarrow ۹۰^\circ=\frac{۱}{۲}(۸۰^\circ+\overset{\frown}{BC})\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۰۰^\circ$$

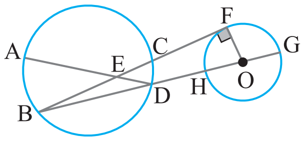
تست ۳۳



در شکل مقابل $\overset{\frown}{AB}=۹۰^\circ$، $A\hat{E}B=۵۵^\circ$ و خط گذرنده از وتر BD از مرکز O عبور می‌کند. اگر BF بر دایره به مرکز O مماس باشد، اندازهٔ کمان FH چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰
۳) ۷۰ ۴) ۸۰

راه‌حل زاویهٔ AEB زاویهٔ بین دو وتر متقاطع است، پس

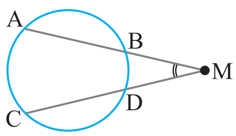


$$A\hat{E}B=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})\Rightarrow ۵۵^\circ=\frac{۱}{۲}(۹۰^\circ+\overset{\frown}{CD})\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۲۰^\circ$$

زاویهٔ B زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان CD است. پس $\hat{B}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CD}=\frac{۲۰^\circ}{۲}=۱۰^\circ$

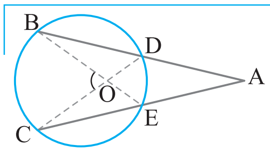
اکنون اگر از مرکز O به نقطهٔ تماس F وصل کنیم، شعاع OF بر خط مماس BF عمود است. بنابراین مثلث OBF قائم‌الزاویه است. پس $B\hat{O}F=۹۰^\circ-\hat{B}=۹۰^\circ-۱۰^\circ=۸۰^\circ$. چون $B\hat{O}F$ زاویهٔ مرکزی است، پس با کمان FH هم‌اندازه است. بنابراین $\overset{\frown}{FH}=۸۰^\circ$.

زاویهٔ بین امتداد دو وتر



اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر نصف قدرمطلق تفاضل اندازهٔ کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدود هستند. به عبارت دیگر، در شکل مقابل، $\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$

تست ۳۴



در شکل مقابل $\hat{A}=۲۷^\circ$ و $B\hat{O}C=۷۱^\circ$. اندازهٔ کمان BC چند درجه است؟

۱) ۹۸ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۲ ۴) ۱۰۴

راه‌حل زاویهٔ A زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، پس

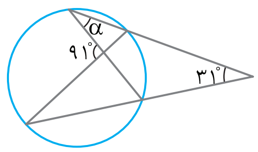
$$\hat{A}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE})\Rightarrow ۲۷^\circ=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE})\Rightarrow \overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}=۵۴^\circ \quad (۱)$$

زاویهٔ BOC زاویهٔ بین دو وتر متقاطع است، پس

$$B\hat{O}C=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE})\Rightarrow ۷۱^\circ=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE})\Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}=۱۴۲^\circ \quad (۲)$$

با جمع کردن برابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $۲\overset{\frown}{BC}=۵۴^\circ+۱۴۲^\circ$، بنابراین $\overset{\frown}{BC}=۹۸^\circ$.

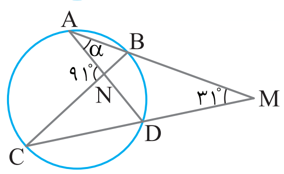
تست ۳۵



در شکل مقابل اندازهٔ α کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) $۲۲/۵^\circ$
۳) ۶۰° ۴) ۳۰°

راه‌حل با توجه به شکل مقابل



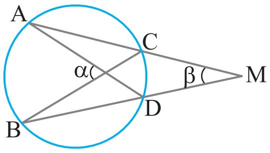
$$\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}),\quad A\hat{N}C=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$$

یعنی $\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}=۶۲^\circ$ و $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=۱۸۲^\circ$. از این دو برابری به‌دست می‌آید $\overset{\frown}{BD}=۶۰^\circ$. زاویهٔ A، زاویهٔ محاطی مقابل به کمان BD است. بنابراین

$$\hat{A}=\alpha=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}=۳۰^\circ$$

تست ۳۶

در شکل مقابل اگر α به اندازهٔ ۳۰° از β بیشتر باشد، اندازهٔ کمان CD چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۱۵
۳) ۶۰
۴) نمی‌توان معلوم کرد.

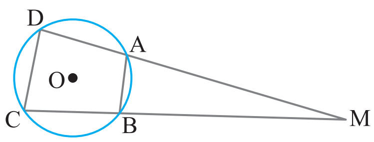
راه‌حل α اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع و β اندازهٔ زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، بنابراین $\alpha=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$ و $\beta=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})$.

بنابر فرض $\alpha=\beta+۳۰^\circ$. بنابراین

$$\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})+۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}+۶۰^\circ \Rightarrow ۲\overset{\frown}{CD}=۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۳۰^\circ$$

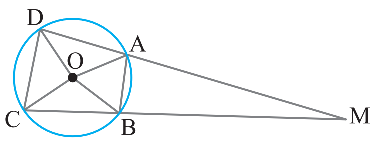
تست ۳۷

در دایرهٔ شکل مقابل اگر $AB=R$ و $CD=R\sqrt{۲}$، اندازهٔ زاویهٔ M چند درجه است؟ (R شعاع دایره است.)



۱) ۳۰
۲) ۲۲/۵
۳) ۲۰
۴) ۱۵

راه‌حل از مرکز O به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OAB مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع R است $(OA=OB=AB=R)$. پس اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۶۰° است. بنابراین $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$. از طرف دیگر اگر از O به نقطه‌های C و D وصل کنیم، $OC=OD=R$ و $CD=R\sqrt{۲}$. بنابراین مثلث OCD قائم‌الزاویه است، زیرا $CD^۲=OD^۲+OC^۲$. پس اندازهٔ زاویهٔ مرکزی COD برابر ۹۰° است. بنابراین $\overset{\frown}{CD}=۹۰^\circ$.

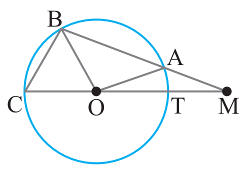


در ضمن زاویهٔ M زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، بنابراین

$$\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB})=\frac{۹۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$$

تست ۳۸

در شکل مقابل، دایرهٔ $C(O\,,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M خارج از دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است، $AM=R$ و $\hat{M}=۲۰^\circ$. طول وتر BC کدام است؟

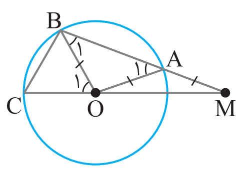


۱) R
۲) $R\sqrt{۲}$
۳) $\frac{R\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}R}{۳}$

راه‌حل **راه‌حل اول** چون $OA=AM=R$، مثلث AOM متساوی‌الساقین است و $A\hat{O}M=\hat{M}=۲۰^\circ$. در نتیجه $\overset{\frown}{AT}=۲۰^\circ$. $\hat{M}$ زاویهٔ بین امتداد دو وتر دایره است، پس

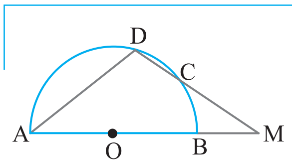
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AT}}{۲}\Rightarrow ۲۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{BC}-۲۰^\circ}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}C=۶۰^\circ \Rightarrow BC=BO=CO=R$$

راه‌حل دوم در شکل مقابل چون $OA=AM$، پس مثلث AOM متساوی‌الساقین است و $A\hat{O}M=A\hat{M}O=۲۰^\circ$ زاویهٔ $A_۱$، زاویهٔ خارجی مثلث OAM است، بنابراین $A_۱=A\hat{O}M+A\hat{M}O=۲۰^\circ+۲۰^\circ=۴۰^\circ$. توجه کنید که $OA=OB=R$، پس $\hat{B}_۱=\hat{A}_۱=۴۰^\circ$. زاویهٔ $O_۱$، زاویهٔ خارجی مثلث OBM است، پس $\hat{O}_۱=\hat{B}_۱+\hat{M}=۴۰^\circ+۲۰^\circ=۶۰^\circ$. اکنون توجه کنید که مثلث OBC، متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس آن ۶۰° است. پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است، در نتیجه



$$BC=OB=R$$

تست ۳۹

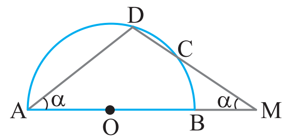


در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایرهٔ به قطر AB است، AMD مثلثی متساوی‌الساقین است و $\overset{\frown}{DC}=۱۸^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ M چند درجه است؟

۱) ۳۳ ۲) ۲۹

۳) ۳۹ ۴) ۳۶

راه‌حل



چون مثلث AMD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}=\hat{M}=\alpha$. زاویهٔ A زاویهٔ محاطی در دایره است، پس

$$\hat{A}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{BC})\xrightarrow{\hat{A}=\alpha}\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{BC}=۲\alpha\Rightarrow ۱۸^\circ+\overset{\frown}{BC}=۲\alpha \qquad (۱)$$

از طرف دیگر زاویهٔ M زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، پس

$$\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC})\xrightarrow{\hat{M}=\alpha}\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}=۲\alpha \qquad (۲)$$

در ضمن AB قطر دایره است، پس

$$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\overset{\frown}{DC}=۱۸^\circ}\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=۱۶۲^\circ \qquad (۳)$$

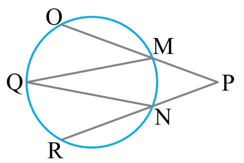
از تساوی‌های (۲) و (۳) به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}=۲\alpha\\ \overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=۱۶۲^\circ\end{cases}\xrightarrow{-}۲\overset{\frown}{BC}=۱۶۲^\circ-۲\alpha \qquad (۴)$$

اکنون از تساوی‌های (۱) و (۴) نتیجه می‌گیریم

$$۲(۲\alpha-۱۸^\circ)=۱۶۲^\circ-۲\alpha\Rightarrow ۶\alpha=۱۹۸^\circ\Rightarrow\hat{M}=\alpha=۳۳^\circ$$

تست ۴۰



در شکل مقابل، $\overset{\frown}{RQ}=۴۵^\circ$ و $\overset{\frown}{OQ}=۵۳^\circ$. مجموع اندازهٔ زاویه‌های P و Q چند درجه است؟

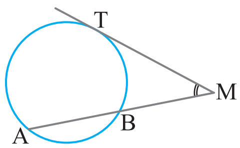
۱) ۴۶ ۲) ۴۹

۳) ۵۲ ۴) ۵۵

راه‌حل

زاویهٔ Q زاویهٔ محاطی است، پس $\hat{Q}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{MN}$ و زاویهٔ P زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، پس $\hat{P}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{OQR}-\overset{\frown}{MN})$ ، از جمع تساوی‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $\hat{P}+\hat{Q}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{OQR}-\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{MN})=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{OQR}$. کمان OQR مجموع دو کمان OQ و RQ است، پس اندازهٔ آن مساوی است با $\overset{\frown}{OQR}=۴۵^\circ+۵۳^\circ=۹۸^\circ$ ، بنابراین $\hat{P}+\hat{Q}=\frac{۹۸^\circ}{۲}=۴۹^\circ$.

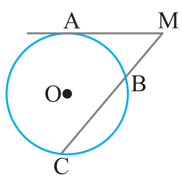
زاویهٔ بین مماس و وتر



در شکل مقابل خط MT مماس بر دایره است و از M قاطع MA را بر دایره رسم کرده‌ایم. در این صورت

$$\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{TA}-\overset{\frown}{TB})$$

تست ۴۱



در دایرهٔ $C(O,۵)$ اگر $\hat{M}=۵۰^\circ$ و $\overset{\frown}{BC}=۱۱۰^\circ$ ، طول کمان AC برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱۷۵}{۳۶}\pi$

۳) $\frac{\pi}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱۶۳}{۳۶}\pi$

راه‌حل

اندازهٔ زاویهٔ M از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB})\Rightarrow ۵۰^\circ=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB})\Rightarrow\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}=۱۰۰^\circ$$

از طرف دیگر اندازهٔ کمان BC برابر ۱۱۰° است. بنابراین

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}=۲۵۰^\circ$$

از دو تساوی به دست آمده اندازهٔ کمان AC را پیدا می‌کنیم:

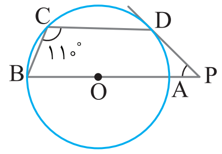
$$\begin{cases}\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}=۲۵۰^\circ\\ \overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}=۱۰۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{+}۲\overset{\frown}{AC}=۳۵۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AC}=۱۷۵^\circ$$

اکنون طول کمان AC را به صورت مقابل به دست می‌آوریم:

$$L=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}\Rightarrow \text{طول کمان } AC=\frac{۱۷۵^\circ}{۱۸۰^\circ}(\pi\times ۵)=\frac{۱۷۵}{۳۶}\pi$$

تست ۴۲

در شکل مقابل AB قطر دایره است و $\hat{C}=۱۱۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ P کدام است؟ (PD در نقطهٔ D بر دایره مماس است.)



۱) ۵۰° ۲) ۶۰°
۳) ۴۵° ۴) ۵۵°

راه‌حل

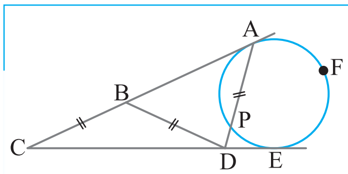
چون AB قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{AB}=۱۸۰^\circ$. زاویهٔ C محاطی است، پس اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان مقابلش است. بنابراین

$$\hat{C}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD})\Rightarrow ۱۱۰^\circ=\frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ+\overset{\frown}{AD})\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۴۰^\circ$$

در نتیجه $\overset{\frown}{BCD}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{AD}=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ=۱۴۰^\circ$. از طرف دیگر زاویهٔ P زاویهٔ بین امتداد یک وتر و خط مماس است. پس اندازهٔ آن نصف قدرمطلق تفاضل دو کمان روبه‌رو به آن است. بنابراین $\hat{P}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BCD}-\overset{\frown}{AD})=\frac{۱}{۲}(۱۴۰^\circ-۴۰^\circ)=۵۰^\circ$.

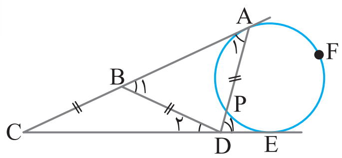
تست ۴۳

در دایرهٔ شکل مقابل $BC=BD=DA$ و $\hat{C}=۲۵^\circ$. مقدار $\overset{\frown}{AFE}-\overset{\frown}{PE}$ برابر کدام است؟



۱) ۱۰۰° ۲) ۱۲۵°
۳) ۷۵° ۴) ۱۵۰°

راه‌حل

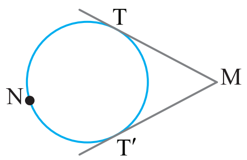


در شکل مقابل زاویهٔ $B_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین BCD است. اگر فرض کنیم $\hat{C}=\hat{D}_۲=\alpha$. آن‌گاه $\hat{B}_۱=\hat{C}+\hat{D}_۲=۲\alpha$. مثلث ABD نیز متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}_۱=۲\alpha$. در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ $D_۱$ که زاویهٔ خارجی مثلث ACD است برابر $۳\alpha=۷۵^\circ$ است.

از طرف دیگر زاویهٔ $D_۱$ زاویهٔ بین امتداد یک وتر و خط مماس است. بنابراین

$$\hat{D}_۱=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AFE}-\overset{\frown}{PE})\Rightarrow ۷۵^\circ=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AFE}-\overset{\frown}{PE})\Rightarrow \overset{\frown}{AFE}-\overset{\frown}{PE}=۱۵۰^\circ$$

زاویهٔ بین دو مماس



از نقطهٔ M مماس‌های MT و MT' را بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم کرده‌ایم. در این صورت

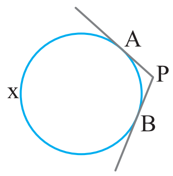
$$\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{TNT'}-\overset{\frown}{TT'})$$

تست ۴۴

در یک دایره، اندازهٔ کمان AB برابر با ۷۰° است. اندازهٔ زاویهٔ بین مماس‌هایی که در نقطه‌های A و B بر دایره رسم می‌شوند، کدام است؟

۱) ۸۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۱۱۰° ۴) ۹۰°

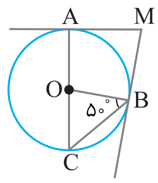
راه‌حل



اگر اندازهٔ کمان AB برابر با ۷۰° باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان AxB برابر با ۲۹۰° است $(۳۶۰^\circ-۷۰^\circ=۲۹۰^\circ)$. اگر فرض کنیم مماس‌های مرسوم در نقطه‌های A و B بر دایره در نقطهٔ P یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه $\hat{P}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AxB}-\overset{\frown}{AB})=\frac{۱}{۲}(۲۹۰^\circ-۷۰^\circ)=\frac{۲۲۰^\circ}{۲}=۱۱۰^\circ$.

تست ۴۵

در شکل مقابل MA و MB بر دایرهٔ به قطر AC مماس هستند. اگر $O\hat{B}C=۵۰^\circ$ ، اندازهٔ زاویهٔ M برابر کدام است؟

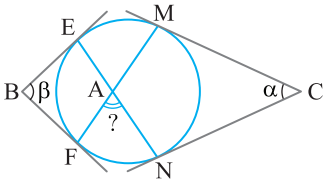


۱) ۴۰° ۲) ۱۰۰°
۳) ۵۰° ۴) ۸۰°

راه‌حل

در دایرهٔ داده شده زاویهٔ M زاویهٔ بین دو مماس MA و MB است. بنابراین $\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB})$. در ضمن مثلث OBC متساوی‌الساقین است، پس $B\hat{O}C=۱۸۰^\circ-(۲\times۵۰^\circ)=۸۰^\circ$ و چون $B\hat{O}C$ زاویهٔ مرکزی در این دایره است، پس $\overset{\frown}{BC}=۸۰^\circ$ ، بنابراین $\overset{\frown}{AB}=۱۰۰^\circ$ و $\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ+۸۰^\circ=۲۶۰^\circ$. در نتیجه $\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB})=\frac{۱}{۲}(۲۶۰^\circ-۱۰۰^\circ)=۸۰^\circ$.

تست ۴۶



در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. زاویهٔ A برابر کدام است؟

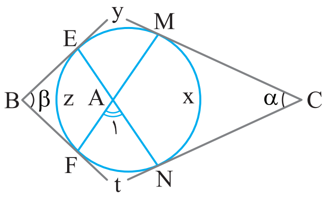
۱) $\frac{\alpha+\beta}{۲}$

۲) $\alpha+\beta$

۳) $۲\alpha+۲\beta$

۴) $\frac{\alpha+\beta}{۴}$

راه‌حل



با توجه به شکل مقابل، اندازهٔ زاویه‌های B و C را برحسب کمان‌های مقابل آن‌ها می‌نویسیم. در این صورت

$$\hat{B}=\frac{(y+x+t)-z}{۲}\Rightarrow y+x+t-z=۲\beta\ ,\quad \hat{C}=\frac{(y+z+t)-x}{۲}\Rightarrow y+z+t-x=۲\alpha$$

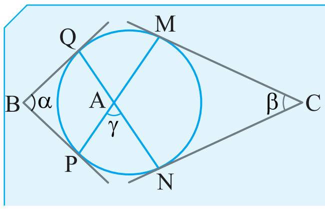
از جمع دو تساوی بالا نتیجه می‌گیریم

$$۲(y+t)=۲\alpha+۲\beta\Rightarrow y+t=\alpha+\beta \qquad (۱)$$

از طرف دیگر

$$\hat{A}_۱=\frac{y+t}{۲}\xrightarrow{\text{از }(۱)}\hat{A}_۱=\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

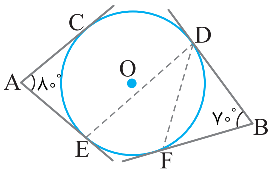
نکته



در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. در این صورت

$$\alpha+\beta=\overset{\frown}{MQ}+\overset{\frown}{NP}\quad \text{یا}\quad \alpha+\beta=۲\gamma$$

تست ۴۷



در شکل روبه‌رو، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. اگر وتر CD، $\sqrt{۲}$ برابر اندازهٔ شعاع دایره باشد، اندازهٔ زاویهٔ EDF کدام است؟

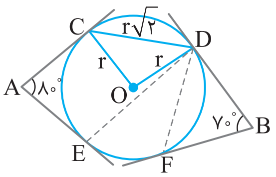
۱) ۲۵°

۲) ۳۰°

۳) ۳۵°

۴) ۶۰°

راه‌حل



در شکل مقابل O مرکز دایره و r اندازهٔ شعاع دایره است. چون وتر CD برابر $r\sqrt{۲}$ است پس طول اضلاع مثلث OCD در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، بنابراین $\hat{COD}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\overset{\frown}{CD}=۹۰^\circ$.

بنابر نکتهٔ بیان شده،

$$\hat{A}+\hat{B}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EF}\Rightarrow ۸۰^\circ+۷۰^\circ=۹۰^\circ+\overset{\frown}{EF}$$

یعنی $\overset{\frown}{EF}=۶۰^\circ$. زاویهٔ EDF، زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان EF است، بنابراین

$$E\hat{D}F=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{EF}=\frac{۱}{۲}\times ۶۰^\circ=۳۰^\circ$$

فصل اول

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

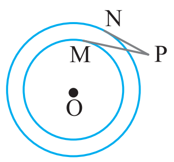
۱- اگر فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d از مرکز دایرهٔ $C(O,۲\sqrt{۵})$ برابر $۳\sqrt{۲}$ باشد، وضعیت نسبی خط d و دایرهٔ C کدام است؟

۱) مماس ۲) متقاطع ۳) نامتقاطع ۴) نامشخص

۲- مرکز تمام دایره‌هایی به شعاع ثابت R که بر خط مفروض d مماس‌اند روی کدام شکل قرار می‌گیرند؟

۱) خط ۲) دو خط موازی ۳) دو خط عمود بر هم ۴) دایره

۳- پاره‌خط‌های PM و PN بر دایره‌های $C(O,۳)$ و $C'(O,۴)$ مماس هستند. اگر $PM=۴$، طول PN کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۲/۵

۳) ۳ ۴) ۳/۵

۴- کمترین و بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ A از دایرهٔ $C(O,R)$ برابر ۵ و ۹ است. طول مماسی که از نقطهٔ A بر دایره رسم شده است، چند برابر شعاع دایره است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) $۶\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۴}$

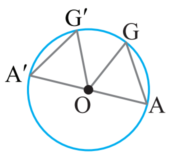
۵- در دایرهٔ $C(O,۴)$ طول وتر AB برابر $\sqrt{۳۲}$ است. طول کمان بزرگ‌تر AB در این دایره برابر کدام است؟

۱) ۵π ۲) ۶π ۳) ۴π ۴) ۸π

۶- در دایرهٔ $C(O,R)$ طول کمان AB برابر ۴π و مساحت قطاع OAB برابر ۱۲π است. مساحت دایره برابر کدام است؟

۱) ۲۸π ۲) ۳۲π ۳) ۳۶π ۴) ۴۸π

۷- در دایرهٔ $C(O,R)$ دو وتر AG و $A'G'$ برابرند. نسبت مساحت‌های دو مثلث OAG و $OA'G'$ کدام است؟



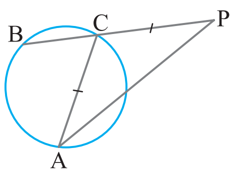
۱) بیشتر از ۱ است

۲) کمتر از ۱ است.

۳) برابر با ۱ است.

۴) هر سه گزینه می‌تواند درست باشد.

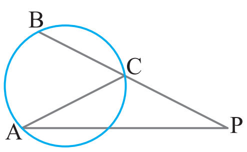
۸- در شکل روبه‌رو، اگر اندازهٔ زاویهٔ P برابر ۳۲° و مثلث ACP متساوی‌الساقین باشد، اندازهٔ کمان AB کدام است؟



۱) ۶۹° ۲) ۷۴°

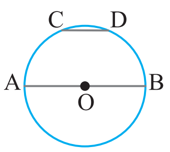
۳) ۸۶° ۴) ۱۲۸°

۹- در شکل مقابل اگر اندازهٔ زاویهٔ P برابر با ۲۷° باشد و مثلث ACP در رأس C متساوی‌الساقین باشد، اندازهٔ کمان AB کدام است؟



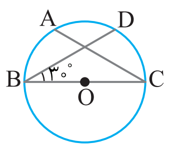
۱) ۱۰۶° ۲) ۹۸° ۳) ۹۲° ۴) ۱۰۸°

۱۰- در دایرهٔ $C(O,۴)$، اگر $AB||CD$ و $\overset{\frown}{CD}=۴۵^\circ$، طول کمان BD چقدر است؟



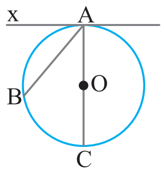
۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) ۲π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۱- در شکل مقابل، BC قطر دایره و D وسط کمان AC است و $D\hat{B}C=۳۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ ACB چند درجه است؟



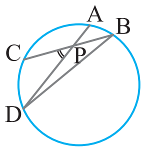
۱) ۲۰ ۲) ۶۰

۳) ۴۵ ۴) ۳۰



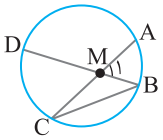
۱۲- در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ ظلی BAx برابر ۵۰° است. اندازهٔ کمان BC برحسب درجه کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۸۵



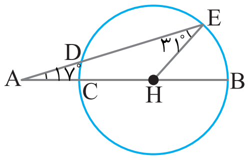
۱۳- در شکل مقابل $\hat{D}=\frac{۱}{۲}\hat{B}$. اندازهٔ زاویهٔ P چند برابر اندازهٔ کمان AB است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲



۱۴- در شکل مقابل $\hat{C}=\frac{۱}{۳}\hat{B}$. اندازهٔ زاویهٔ $M_۱$ چند برابر اندازهٔ کمان AB است؟

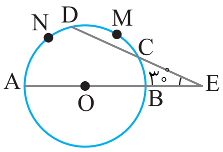
۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$



۱۵- در شکل روبه‌رو $\hat{A}=۱۷^\circ$، $\hat{E}=۳۱^\circ$ و H وسط قطر CB است. اندازهٔ کمان CD کدام است؟

۱) ۱۴° ۲) ۱۹°

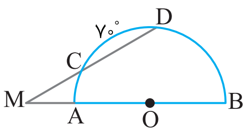
۳) ۲۲° ۴) ۲۴°



۱۶- در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است، $\overset{\frown}{DMC}=۳۰^\circ$ و $\hat{E}=۳۰^\circ$. اندازهٔ کمان AND کدام است؟

۱) ۸۵° ۲) ۹۵°

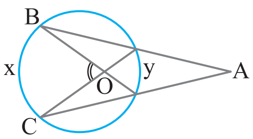
۳) ۱۰۵° ۴) ۱۱۵°



۱۷- در شکل مقابل O مرکز نیم‌دایره به قطر AB است و $D\hat{M}B=۳۰^\circ$. اندازهٔ کمان AC چند درجه است؟

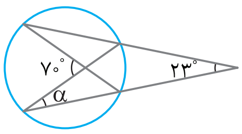
۱) ۲۵ ۲) ۳۵

۳) ۱۵ ۴) ۳۰



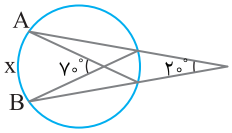
۱۸- در شکل مقابل $\hat{A}=۲۷^\circ$ و $\hat{O}=۷۱^\circ$. نسبت $\frac{x}{y}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۴۹}{۲۲}$ ۲) $\frac{۴۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۹۸}{۴۲}$ ۴) $\frac{۹۸}{۲۲}$



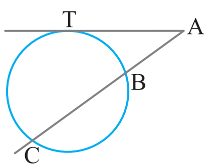
۱۹- در شکل مقابل اندازهٔ α برابر کدام است؟

۱) $۲۳/۵^\circ$ ۲) ۲۳° ۳) ۲۴° ۴) $۲۴/۵^\circ$



۲۰- در شکل مقابل اندازهٔ کمان AxB چند درجه است؟

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۹۵



۲۱- در شکل روبه‌رو AT مماس بر دایره است و $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{TC}=۲\overset{\frown}{BT}$. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

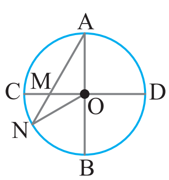
۱) ۱۸ ۲) ۷۲

۳) ۳۶ ۴) ۱۴۴

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (۲)

۲۲- فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d تا دایرهٔ $C(O,۲x-۱)$ برابر $۳-x$ است. اگر خط و دایره نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، حدود x کدام است؟

۱) $x<۳$ ۲) $\frac{۱}{۲}<x<۳$ ۳) $۳<x$ ۴) هیچ مقداری برای x نداریم.

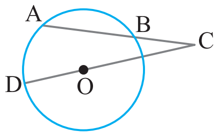


۲۳- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند و $OM=MN$. اندازهٔ زاویهٔ A چقدر است؟

۱) ۲۰° ۲) ۳۰° ۳) $۲۲/۵^\circ$ ۴) ۴۵°

۲۴- دو خط m و n در نقطهٔ A متقاطع‌اند. چند دایره به شعاع ۴ می‌توان رسم کرد طوری که مرکزشان روی n باشد و خط m بر آن‌ها مماس باشد؟

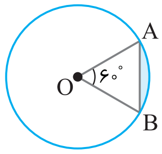
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی



۲۵- در شکل مقابل، طول BC مساوی شعاع دایره است. اگر $\hat{C}=۲۰^\circ$، اندازهٔ کمان AD چند درجه است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵

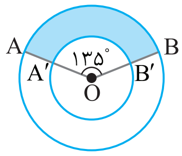
۳) ۵۰ ۴) ۶۰



۲۶- در شکل مقابل، در دایره به مرکز O مساحت قطعهٔ رنگی برابر $۶\pi-۹\sqrt{۳}$ است. مجموع طول کمان AB و طول وتر AB برابر کدام است؟

۱) $\pi+۳$ ۲) $\pi+۶$

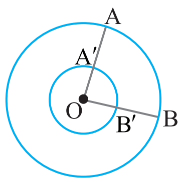
۳) $۲(\pi+۳)$ ۴) $۲(\pi+۶)$



۲۷- دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O,۲R)$ را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر مساحت قسمت رنگی ۱۸π باشد، طول کمان AB برابر کدام است؟

۱) ۴π ۲) ۶π

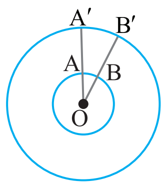
۳) ۲π ۴) ۳π



۲۸- دو دایرهٔ $C'(O,\frac{۲}{۳}R)$ و $C'(O,\frac{۳}{۲}R)$ مفروض‌اند. اگر طول کمان $A'B'$ برابر ۶ باشد، طول کمان AB برابر کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۳/۵

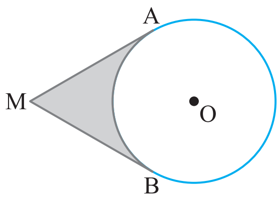
۳) ۱۲ ۴) ۱۲/۵



۲۹- دو دایرهٔ $C(O,۲)$ و $C'(O,۵)$ مفروض‌اند. اگر مساحت قطاع OAB برابر یک واحد مربع باشد، طول کمان $A'B'$ چند واحد است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵

۳) ۳ ۴) ۳/۵



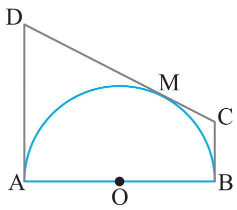
۳۰- در دایرهٔ $C(O,۱)$ زاویهٔ بین مماس‌های MA و MB برابر ۶۰° است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۳}-\pi}{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}-\pi$

۳) $\frac{\pi-\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}$

۳۱- در دایرهٔ $C(O,R)$ اگر اندازهٔ کمان AB برابر ۶۰° و اندازهٔ وتر AB برابر ۳۰ سانتی‌متر باشد، کمترین فاصلهٔ O از AB برابر کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) $۱۵\sqrt{۳}$ ۳) ۱۰ ۴) $۱۰\sqrt{۳}$



۳۲- در شکل مقابل پاره‌خط‌های AD، DC و BC بر نیم‌دایره به مرکز O و شعاع R مماس هستند. اگر M روی نیم‌دایره تغییر کند، حاصل‌ضرب $AD\times BC$ کدام است؟

۱) $R^۲$ ۲) $۲R^۲$

۳) $۳R^۲$ ۴) $۴R^۲$

۳۳- در دایره‌ای به قطر ۱۰ واحد، وتر AB به طول ۸ واحد رسم شده است. نقطهٔ C روی دایره متحرک است. بیشترین مساحت مثلث ABC کدام است؟

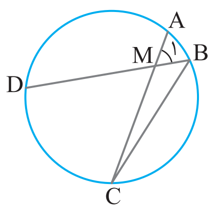
۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۸

۳۴- دایره‌ای به شعاع ۴ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن‌ها ۲ باشد و از M بگذرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) نامتناهی

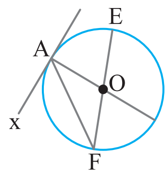
۳۵- در دایره‌ای به قطر ۲۶ واحد، فاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکز دایره ۵ واحد است. اندازهٔ کوچک‌ترین وتر از دایره که از نقطهٔ P می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴



۳۶- در شکل مقابل $\hat{C}=\frac{۱}{۴}\hat{B}$. اندازهٔ زاویهٔ $M_۱$ چند برابر اندازهٔ کمان AB است؟

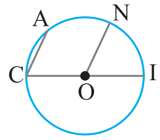
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$



۳۷- در شکل مقابل Ax بر دایرهٔ به مرکز O مماس بوده و اندازهٔ زاویهٔ FAx برابر ۵۶° است. اندازهٔ کمان AE کدام است؟

۱) ۶۸° ۲) ۶۶°

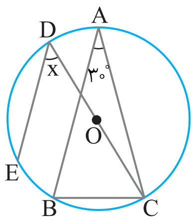
۳) ۶۴° ۴) ۶۲°



۳۸- در شکل مقابل، CI قطر دایره است و $CA||ON$. اگر $\widehat{AC}=۵۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ NOI چند درجه است؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۰

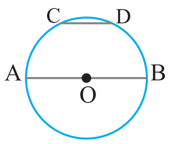
۳) ۶۵ ۴) ۷۰



۳۹- در شکل مقابل O مرکز دایره و مثلث ABC متساوی‌الساقین $(AB=AC)$ است. اگر $AB||DE$، مقدار x کدام است؟

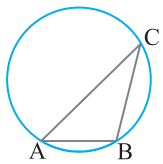
۱) ۳۰° ۲) ۴۵°

۳) ۶۰° ۴) ۹۰°



۴۰- در دایرهٔ $C(O,R)$، اگر $AB||CD$ و $\widehat{CD}=۵۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ DCB کدام است؟

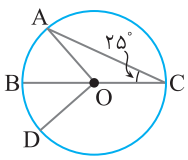
۱) ۳۰° ۲) $\frac{۶۵^\circ}{۲}$ ۳) $\frac{۵۵^\circ}{۲}$ ۴) ۲۵°



۴۱- در دایرهٔ شکل مقابل $A\hat{C}B=۳۰^\circ$ و $AB=۶$. طول کمان کوچک‌تر AB برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$

۳) π ۴) ۲π



۴۲- در دایرهٔ $C(O,۴)$ مساحت قطاع BOD برابر $\frac{۱۶\pi}{۹}$ است. طول کمان ABD برابر کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}\pi$ ۲) $\frac{۳}{۲}\pi$

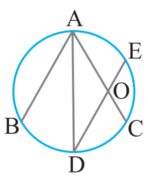
۳) π ۴) ۲π

۴۳- در دایره‌ای قطر AB و وتر CD را طوری رسم می‌کنیم که $AB||CD$. حاصل $|A\hat{C}D-A\hat{D}C|$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۴۴- دو قطر AB و CD در دایره‌ای به مرکز O مفروض‌اند. مماس AT در نقطهٔ A را بر دایره رسم کرده‌ایم. اگر $T\hat{A}D=۶۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ ABC چند درجه است؟

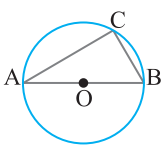
۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۵۶



۴۵- در دایرهٔ شکل مقابل $AB||DE$، $A\hat{O}D=۱۲۰^\circ$ و AD نیمساز زاویهٔ BAC است. اندازهٔ کمان BD چند درجه است؟

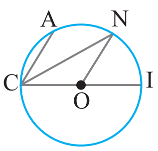
۱) ۳۰ ۲) ۶۰

۳) ۴۵ ۴) ۴۰



۴۶- در دایرهٔ $C(O,R)$ اگر $BC=۱$ و $AC=\sqrt{۳}$، طول کمان AC چند برابر π است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

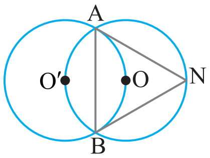


۴۷- در شکل مقابل، CI قطر دایره است و $CA||ON$. اگر اندازهٔ زاویهٔ ACO برابر با ۷۵° درجه باشد، اندازهٔ زاویهٔ CNO کدام است؟

۱) $۳۷/۵^\circ$ ۲) ۳۰°

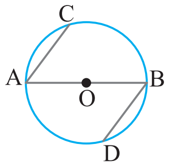
۳) ۳۵° ۴) $۳۲/۵^\circ$

۴۸- دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R)$ هر یک از مرکز دیگری می‌گذرند و در نقطه‌های A و B متقاطع‌اند. اندازهٔ زاویهٔ ANB چند درجه است؟



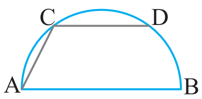
۱) ۴۵
۲) ۴۰
۳) ۶۰
۴) ۵۰

۴۹- در دایرهٔ $C(O,۵)$ وترهای AC و BD موازی‌اند. اگر $AC=۶$ ، محیط چهارضلعی ACBD کدام است؟



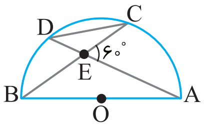
۱) ۱۸
۲) ۲۶
۳) ۲۸
۴) ۳۶

۵۰- در نیم‌دایره‌ای به قطر $AB=۱۰$ ، وتر $CD=۶$ موازی با AB رسم شده است. طول AC کدام است؟



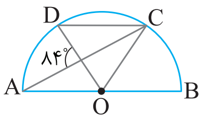
۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

۵۱- در نیم‌دایرهٔ شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث ABE کدام است؟



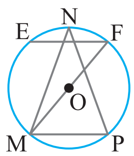
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۵۲- در شکل مقابل O مرکز نیم‌دایره است. اگر وتر CD موازی قطر AB باشد، اندازهٔ کمان DC برابر کدام است؟



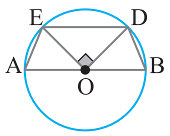
۱) ۶۸°
۲) ۶۴°
۳) ۵۶°
۴) ۵۴°

۵۳- در دایرهٔ $C(O,R)$ شکل مقابل اگر $M\hat{N}P=۴۰^\circ$ ، $MN=PN$ و $EF||MP$ ، اندازهٔ زاویهٔ MFE چند درجه است؟



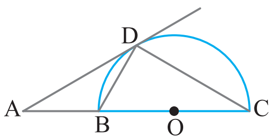
۱) ۷۰
۲) ۵۰
۳) ۴۰
۴) ۲۰

۵۴- وتر DE از دایرهٔ $C(O,۳)$ با قطر AB موازی است و $D\hat{O}E=۹۰^\circ$. مساحت چهارضلعی ABDE چقدر است؟



۱) $\frac{۹}{۲}(\sqrt{۲}+۱)$
۲) $۵(\sqrt{۲}+۱)$
۳) $۵(۲\sqrt{۲}-۱)$
۴) $\frac{۹}{۲}(۲\sqrt{۲}-۱)$

۵۵- در شکل مقابل، AD بر نیم‌دایره مماس است و $AB=BD$. اندازهٔ زاویهٔ DCB چند درجه است؟

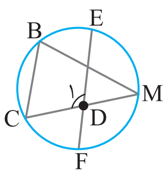


۱) ۴۵
۲) ۴۰
۳) ۶۰
۴) ۳۰

۵۶- اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع AB و CD درون دایره‌ای، برابر ۶۰° است. اگر اندازهٔ دو کمان از چهار کمان حاصل ۸۰° و ۱۱۰° باشد، تفاضل اندازهٔ دو کمان دیگر چند درجه است؟

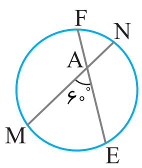
۱) ۶۰
۲) ۹۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۵

۵۷- در شکل مقابل M وسط کمان EF است و اندازهٔ کمان BC برابر با ۸۰° است. مجموع اندازهٔ زاویه‌های B و $D_۱$ چند درجه است؟



۱) ۱۶۰
۲) ۱۷۵
۳) ۱۸۰
۴) ۲۳۰

۵۸- در دایرهٔ $C(O,۱۲)$ اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر MN و EF برابر ۶۰° است. مجموع طول کمان‌های ME و FN برابر کدام است؟

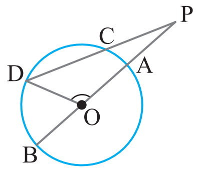


۱) ۶π
۲) ۱۶π
۳) ۱۲π
۴) ۸π

۵۹- در دایره‌ای امتداد دو وتر مساوی AB و CD در بیرون آن، زاویهٔ ۸۰° می‌سازند و کمان‌های داخل این زاویه به نسبت ۱ و ۵ هستند. اندازهٔ کمان AB چند درجه است؟

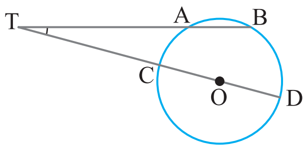
۱) ۵۰
۲) ۵۵
۳) ۶۰
۴) ۶۵

۶۰- در شکل مقابل AB قطر دایره است و $\hat{P}$=۲۰° . اگر $\widehat{CD}$=۹۰° ، اندازهٔ زاویهٔ DOA چند درجه است؟



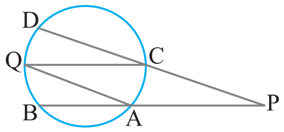
۱) ۱۱۵
۲) ۱۱۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۰۰

۶۱- در شکل روبه‌رو O مرکز دایره‌ای به شعاع R است. اگر $\hat{T}$=۱۵° و $\widehat{BD}$=۷۵° ، طول وتر AB کدام است؟



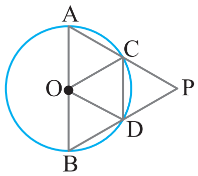
۱) $\frac{۲}{۳}$R
۲) R
۳) $\frac{۴}{۳}$R
۴) $\frac{۵}{۶}$R

۶۲- در شکل روبه‌رو، نقطه‌های A ، B ، C ، D و Q روی دایره هستند و اندازهٔ کمان‌های BQ و QD به ترتیب ۴۲ و ۳۸ درجه است. مجموع اندازهٔ دو زاویهٔ P و Q چند درجه است؟



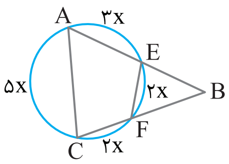
۱) ۸۰
۲) ۴۰
۳) ۳۸
۴) ۷۲

۶۳- در شکل مقابل، AB قطر دایره و طول CD با شعاع دایره برابر است. اندازهٔ زاویهٔ P چند درجه است؟



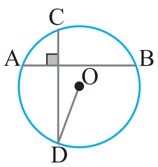
۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۶۰
۴) ۷۵

۶۴- در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟



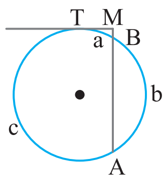
۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۶۰

۶۵- در دایرهٔ شکل مقابل دو وتر عمود بر هم AB و CD رسم شده‌اند. اگر اندازهٔ زاویهٔ ODC برابر با ۲۰° باشد، $\widehat{BC}-\widehat{AC}$ چند درجه است؟



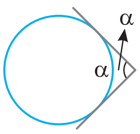
۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۲۵

۶۶- در شکل مقابل $\frac{a}{۱}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۷}$. اندازهٔ زاویهٔ M چند درجه است؟



۱) ۷۰
۲) ۸۰
۳) ۹۰
۴) ۷۵

۶۷- با توجه به شکل مقابل اندازهٔ α برابر کدام است؟

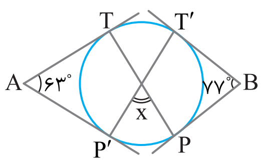


۱) ۶۰°
۲) ۹۰°
۳) ۳۰°
۴) ۵۰°

۶۸- دو نقطهٔ A و B دایره‌ای را نسبت به ۳ و ۵ تقسیم کرده‌اند. اندازهٔ زاویهٔ بین مماس‌های رسم شده از این دو نقطه بر دایره چند درجه است؟

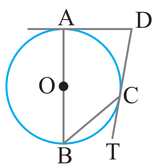
۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۶۰
۴) ۹۰

۶۹- در شکل مقابل اندازهٔ x برابر کدام است؟



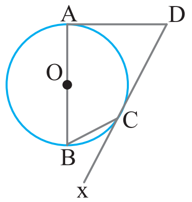
۱) ۷۵°
۲) ۸۰°
۳) ۶۰°
۴) ۷۰°

۷۰- در دایرهٔ شکل مقابل به مرکز O، AD و CD بر دایره مماس‌اند و $B\hat{C}T$=۴۰° . اندازهٔ زاویهٔ D چند درجه است؟



۱) ۵۰
۲) ۸۰
۳) ۴۰
۴) ۴۵

۷۱- در دایرهٔ شکل مقابل به مرکز O و شعاع ۳ ، AD و DC بر دایره مماس‌اند و $B\hat{C}x=۳۵^\circ$. طول کمان AC چقدر است؟



۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$

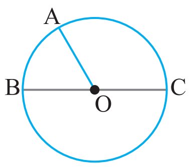
۳) $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ۴) ۲π

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره ۳

۷۲- چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ C مماس باشند و با خط Δ در خارج دایره زاویهٔ ۶۰° بسازند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) نامتناهی

۷۳- در دایرهٔ به مرکز O طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{\sqrt{۳}}$ و مساحت قطاع AOB برابر π است. فاصلهٔ A از قطر BC برابر کدام است؟

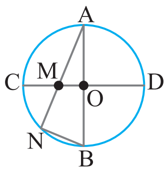


۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۷۴- دو وتر موازی به طول‌های ۴ و ۱۰ در دو طرف مرکز دایره‌ای به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر کوچک‌تر، دو برابر فاصلهٔ مرکز تا وتر بزرگ‌تر است. طول وتری که موازی این دو وتر است و دقیقاً وسط فاصلهٔ آن دو قرار می‌گیرد، چقدر است؟

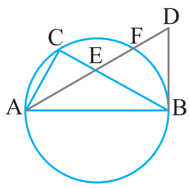
۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۸

۷۵- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند و $MN=NB$. اندازهٔ زاویهٔ A چه کسری از قائمه است؟



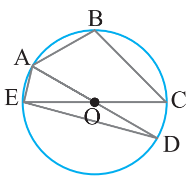
۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۷۶- در شکل مقابل AB قطر دایره، AD نیمساز زاویهٔ A و BD بر دایره مماس است. نسبت تصویر BD روی AD به تصویر BE روی AD برابر کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

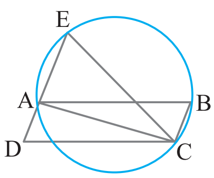
۷۷- در شکل مقابل دایره به مرکز O و شعاع ۶ است. اگر $AB=۶$ و $BC=۶\sqrt{۲}$ ، مساحت مثلث ADE برابر کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۶

۳) ۳۶ ۴) ۱۸

۷۸- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و دایرهٔ محیطی مثلث ABC امتداد AD را در E قطع کرده است. اگر $AB=۱۰$ ، $BC=۳$ و $AE=۵$ ، مساحت مثلث DEC برابر کدام است؟



۱) ۱۵ ۲) $۴\sqrt{۲۱}$

۳) $۸\sqrt{۲۱}$ ۴) ۳۰

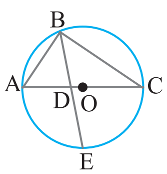
۷۹- زاویهٔ محاطی BAC را در یک دایره در نظر بگیرید. نیمساز این زاویه، دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. از D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند. اگر شعاع دایره ۵ باشد، $AB=۳$ و $DE=۷$ ، طول وتر AC کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۰- در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ۶ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه چند واحد است؟

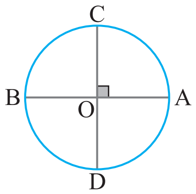
۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۸۱- در شکل مقابل BD نیمساز زاویهٔ B و AC قطر دایره است. اگر مساحت مثلث ABC برابر S باشد، کدام رابطه درست است؟



۱) $۲S=BD\times BC$ ۲) $۲S=BD\times BE$

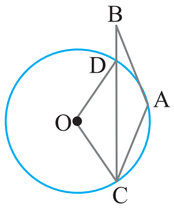
۳) $۲S=AB\times AC$ ۴) $۲S=BE\times AC$



۸۲- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر کمان AC مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم تا امتداد CD را در نقطهٔ P قطع کند. اگر $\widehat{MPO}=۲۸^\circ$ ، اندازهٔ زاویهٔ MBA کدام است؟

۱) ۱۴° ۲) ۲۸°

۳) ۵۶° ۴) ۵۲°



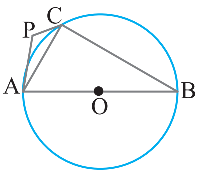
۸۳- در شکل مقابل اگر طول مماس AB با طول وتر AC مساوی باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{O}=۲\hat{B}$

۲) $\hat{O}=۳\hat{B}$

۳) $\hat{O}=۴\hat{B}$

۴) $\hat{O}=۶\hat{B}$

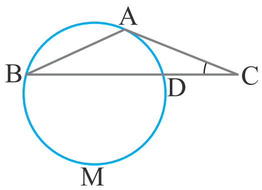


۸۴- در دایرهٔ شکل مقابل AB قطر دایره است، $BC=۲\sqrt{۳}$ و $AC=۲$. اگر PA و PC بر دایره مماس باشند، اندازهٔ زاویهٔ P برابر کدام است؟

۱) ۶۰° ۲) ۹۰°

۳) ۱۱۰° ۴) ۱۲۰°

کنکور سراسری



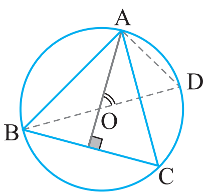
۸۵- در شکل مقابل، مماس AC بر دایره با وتر AB از دایره برابرند، اگر کمان DMB برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویهٔ C چند درجه است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱) ۲۱ ۲) ۲۲

۳) ۲۳ ۴) ۲۴

۸۶- دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، مماس بر دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟ ریاضی - ۹۲

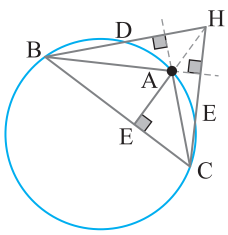
۱) ۸ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۰



۸۷- در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویهٔ $\widehat{AOD}$ برابر کدام است؟ ریاضی - ۹۲

۱) $O\hat{B}C$ ۲) $C\hat{A}D$

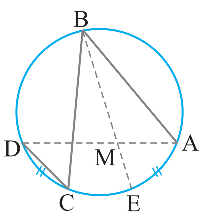
۳) $O\hat{A}C$ ۴) $A\hat{D}O$



۸۸- در شکل روبه‌رو نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است. زاویهٔ AHD با کدام زاویه برابر است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱) $C\hat{A}E$ ۲) $A\hat{B}C$

۳) $A\hat{D}H$ ۴) $A\hat{H}C$



۸۹- در شکل مقابل $AB=۶$ ، $BC=۸$ ، $CD=۳$ و $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$ ، اندازهٔ AM کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

۹۰- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ نقطهٔ O در امتداد AC، مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟ ریاضی - ۹۴

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص

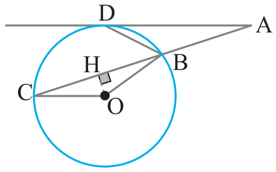
۹۱- دو دایرهٔ متقاطع در نقطهٔ A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایرهٔ مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطهٔ M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۱) MA ۲) محیط ۳) مساحت ۴) زاویهٔ BMC

۹۲- در مثلث ABC $(AB=AC)$، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC=۶$ و ارتفاع $AH=۴$، شعاع این دایره کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴/۵

۹۳- در شکل مقابل AD مماس بر دایرهٔ به مرکز O و OH عمود بر AC است. اگر $D\hat{B}C=۲D\hat{A}C$، زاویهٔ COH چند برابر زاویهٔ DAC است؟ ریاضی - ۹۷

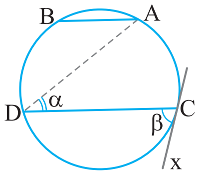


۱) ۲/۵ ۲) ۳
۳) ۳/۵ ۴) ۴

۹۴- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، خط گذرا بر رأس A قاعدهٔ BC و دایرهٔ محیطی مثلث را به ترتیب در نقطه‌های D و E قطع می‌کند. مقدار $AD\times AE$ برابر کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۷

۱) $BD\times BC$ ۲) $CD\times CB$ ۳) $AC^۲$ ۴) $BC^۲$

۹۵- در شکل روبه‌رو، وتر AB برابر شعاع دایره، $AB||CD$، $\beta=۲\alpha$ و Cx مماس بر دایره است. اندازهٔ کمان BD چند درجه است؟ ریاضی - ۹۸

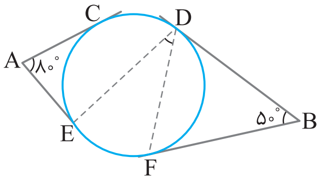


۱) ۵۰ ۲) ۶۰
۳) ۷۰ ۴) ۷۵

۹۶- در مثلث ABC داریم $AB=AC=۱۷$ و $BC=۱۶$، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم شود، در نقطهٔ D قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ C از خط BD، کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۸

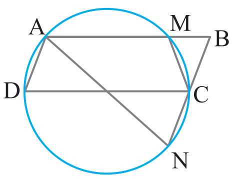
۱) ۷/۲ ۲) ۸/۴ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰/۲

۹۷- در شکل روبه‌رو، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویهٔ $E\hat{D}F$ چند درجه است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۸



۱) ۲۵ ۲) ۳۰
۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۹۸- در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقین، کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۹



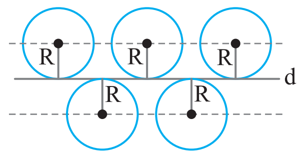
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

فصل اول

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ (۲) فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d از مرکز دایرهٔ C طول عمودی است که از O بـر d وارد می‌شـود. اگـر OH عمـود بـر d باشـد، آن‌گاه $OH=۳\sqrt{۲}$. چـون $۳\sqrt{۲}<۲\sqrt{۵}$، پس $OH<R$. بنابراین خط d دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

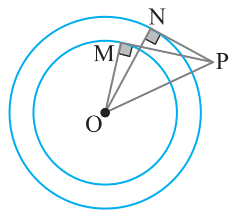
۲ (۲) مرکـز ایـن دایره‌ها از خط d بـه فاصلهٔ معلوم R هسـتند. پس مرکز این دایره‌ها روی دو خط موازی با d و به فاصلهٔ R از d واقع هستند.



۳ (۳) از مرکـز O بـه نقطه‌های تماس M و N وصـل می‌کنیم. در این صورت شعاع‌های OM و ON به‌ترتیب بر خط‌های مماس PM و PN عمود هستند. از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ایجاد شده به دست می‌آید

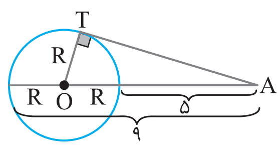
$$\triangle OPM:\ PM^{۲}+OM^{۲}=OP^{۲}\Rightarrow ۱۶+۹=OP^{۲}\Rightarrow OP=۵$$

بنابراین $\triangle OPN: PN^{۲}+ON^{۲}=OP^{۲}\Rightarrow PN^{۲}+۱۶=۲۵\Rightarrow PN=۳$



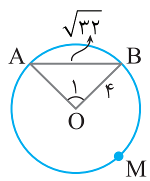
۴ (۱) بنابـر فـرض مسـئله، $OA+R=۹$ و $OA-R=۵$. با حل دسـتگاه حاصل از این دو معادله به دسـت می‌آید $OA=۷$ و $R=۲$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $AT=\sqrt{OA^{۲}-OT^{۲}}=\sqrt{۷^{۲}-۲^{۲}}=۳\sqrt{۵}$

در نتیجه $\frac{AT}{R}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$.



۵ (۲) از مرکـز O بـه نقطه‌های A و B وصـل می‌کنیم. در ایـن صورت طـول ضلع‌های مثلـث OAB در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند: $AB^{۲}=OA^{۲}+OB^{۲}$. بنابرایـن مثلـث OAB قائم‌الزاویه اسـت و $\hat{O}_{۱}=۹۰^\circ$. در نتیجـه اندازهٔ کمـان AB برابر ۹۰° اسـت. بنابرایـن اندازهٔ کمان AMB برابر $۳۶۰^\circ-۹۰^\circ=۲۷۰^\circ$ اسـت. طول کمان AMB برابر است با

$$\text{طول کمان AMB}=\frac{۲۷۰^\circ\times\pi\times۴}{۱۸۰^\circ}=۶\pi$$



۶ (۳) فرض کنید زاویهٔ مرکزی مقابل به کمان AB، برابر α (درجه) باشـد. مساحت قطاع OAB در دایرهٔ به شعاع R برابر است با

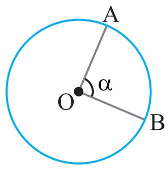
$$\text{مساحت قطاع}=\frac{\alpha\pi R^{۲}}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow\frac{\alpha\pi R^{۲}}{۳۶۰^\circ}=۱۲\pi\qquad(۱)$$

همچنین طول کمان AB به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{طول کمان AB}=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}\Rightarrow\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}=۴\pi\qquad(۲)$$

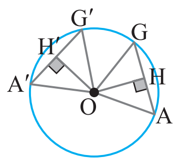
از تقسیم تساوی (۱) بر (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\frac{\alpha\pi R^{۲}}{۳۶۰^\circ}}{\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}}=\frac{۱۲\pi}{۴\pi}\Rightarrow\frac{R}{۲}=۳\Rightarrow R=۶$$



بنابراین $\text{مساحت دایره}=\pi R^{۲}=\pi(۶)^{۲}=۳۶\pi$.

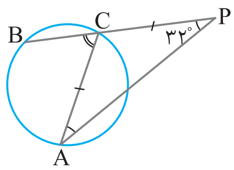
۷ (۳) دو وتـر AG و $A'G'$ مساوی‌اند، پس از مرکز دایره به یک فاصله‌اند. بنابراین عمودهای OH و OH' برابرند. در نتیجه دو مثلث OAG و $OA'G'$ قاعده و ارتفاع مساوی دارند، بنابراین هم‌مساحت‌اند.



۸ (۴) چـون $CA=CP$، پـس $\hat{A}=\hat{P}=۳۲^\circ$. زاویـهٔ ACB زاویهٔ خارجی مثلث CAP است. بنابراین

$$A\hat{C}B=\hat{A}+\hat{P}=۳۲^\circ+۳۲^\circ=۶۴^\circ$$

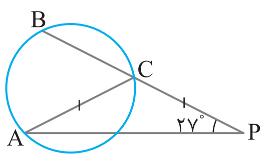
چـون $A\hat{C}B$ محاطـی اسـت، پـس $\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}=۶۴^\circ$، یعنی $\overset{\frown}{AB}=۱۲۸^\circ$.



۹ (۴) چـون $AC=CP$، پـس $\hat{A}=\hat{P}=۲۷^\circ$. همچنیـن، زاویـهٔ ACB، زاویهٔ خارجی مثلث ACP است، بنابراین

$$A\hat{C}B=\hat{A}+\hat{P}=۲۷^\circ+۲۷^\circ=۵۴^\circ$$

از طـرف دیگـر $A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$. در نتیجه $\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=۵۴^\circ$. یعنی $\overset{\frown}{AB}=۱۰۸^\circ$.



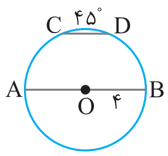
۱۰ (۳) چون کمان‌هـای بین دو وتر موازی مسـاوی‌اند، پس $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. در ضمن AB قطر دایره است. بنابراین

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ$$

$$۲\overset{\frown}{BD}+۴۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BD}=۶۷/۵^\circ$$

از طرف دیگر، $L=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}$. پس

$$\text{طول کمان BD}=\frac{۶۷/۵^\circ\times\pi\times۴}{۱۸۰^\circ}=\frac{۳\pi}{۲}$$



۱۱ (۴) اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی مساوی نصف کمان مقابلش است، پس

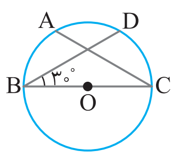
$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow ۳۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow\overset{\frown}{CD}=۶۰^\circ$$

چـون D وسـط کمـان AC اسـت، پـس $\overset{\frown}{AD}=۶۰^\circ$ و چون BC قطر دایره است، پس

$$B\hat{A}C=۱۸۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ$$

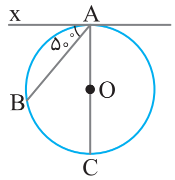
$$\overset{\frown}{AB}+۶۰^\circ+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$$

بنابراین $A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$.



۱۲ ۳ چون $B\hat{A}x=۵۰^\circ$، پس $\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}=۵۰^\circ$، یعنی $\overset{\frown}{AB}=۱۰۰^\circ$. چون AC قطر دایره است، پس

$$\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{AB}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$$

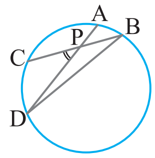


۱۳ ۳ چون $\hat{D}=\frac{۱}{۲}\hat{B}$، پس

$$\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CD}\right)\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CD}$$

همچنین

$$\hat{P}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}+۲\overset{\frown}{AB})=\frac{۳}{۲}\overset{\frown}{AB}$$

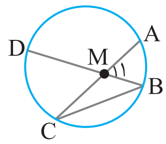


۱۴ ۱ زاویه‌های B و C زاویه‌های محاطی در دایره هستند. از فرض تست نتیجه می‌شود

$$\hat{C}=\frac{۱}{۳}\hat{B}\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۱}{۳}\left(\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}\right)\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۳\overset{\frown}{AB}$$

از طرف دیگر زاویهٔ $M_۱$ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع است، پس

$$\hat{M}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}+۳\overset{\frown}{AB}}{۲}=۲\overset{\frown}{AB}$$

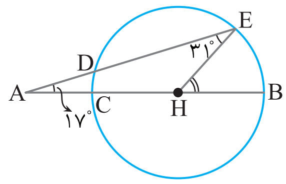


۱۵ ۱ زاویهٔ EHB زاویهٔ خارجی مثلث AEH است، پس

$$E\hat{H}B=\hat{A}+\hat{E}=۱۷^\circ+۳۱^\circ=۴۸^\circ$$

در نتیجه $\overset{\frown}{BE}=۴۸^\circ$. از طرف دیگر،

$$\hat{A}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{CD})\Rightarrow ۱۷^\circ=\frac{۱}{۲}(۴۸^\circ-\overset{\frown}{CD})\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۱۴^\circ$$



۱۶ ۳ چون $\hat{E}=۳۰^\circ$، پس

$$\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AND}-\overset{\frown}{BC})=۳۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AND}-\overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ \qquad (۱)$$

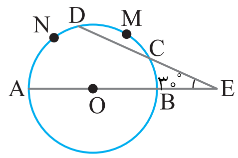
از طرف دیگر چون AB قطر دایره است، پس

$$\overset{\frown}{AND}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DMC}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AND}+\overset{\frown}{BC}+۳۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

در نتیجه

$$\overset{\frown}{AND}+\overset{\frown}{BC}=۱۵۰^\circ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{AND}=۱۰۵^\circ$.



۱۷ ۱ چون AB قطر دایره است، پس

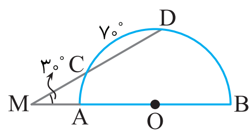
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AC}+۷۰^\circ+\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=۱۱۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ M زاویهٔ بین امتداد دو وتر متقاطع است، بنابراین

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow ۳۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}=۶۰^\circ$$

از تساوی‌های به دست آمده به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=۱۱۰^\circ\\ \overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}=۶۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{-}۲\overset{\frown}{AC}=۵۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۲۵^\circ$$



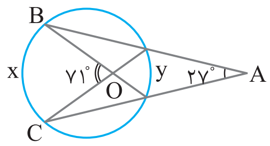
۱۸ ۱ با توجه به شکل می‌نویسیم

$$\hat{A}=۲۷^\circ\Rightarrow \frac{x-y}{۲}=۲۷^\circ\ ,\quad \hat{O}=۷۱^\circ\Rightarrow \frac{x+y}{۲}=۷۱^\circ$$

بنابراین

$$\begin{cases}x-y=۵۴^\circ\\ x+y=۱۴۲^\circ\end{cases}\xrightarrow{+}۲x=۱۹۶^\circ\Rightarrow x=۹۸^\circ$$

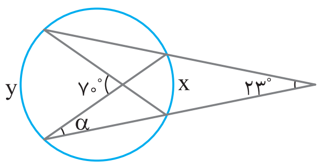
پس $y=۴۴^\circ$. در نتیجه $\frac{x}{y}=\frac{۹۸^\circ}{۴۴^\circ}=\frac{۴۹}{۲۲}$.



۱۹ ۱ با توجه به اندازه‌های روی شکل می‌نویسیم $\frac{y-x}{۲}=۲۳^\circ$ و $\frac{y+x}{۲}=۷۰^\circ$. در نتیجه

$$\begin{cases}y-x=۴۶^\circ\\ y+x=۱۴۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{-}۲x=۹۴^\circ\Rightarrow x=۴۷^\circ$$

α اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان ۴۷° است، بنابراین $\alpha=\frac{۴۷^\circ}{۲}=۲۳/۵^\circ$.



۲۰ ۳ زاویهٔ P زاویهٔ بین امتداد دو وتر متقاطع است، پس

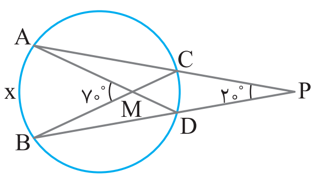
$$\hat{P}=\frac{\overset{\frown}{AxB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow ۲۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AxB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AxB}-\overset{\frown}{CD}=۴۰^\circ \qquad (۱)$$

زاویهٔ M زاویهٔ بین دو وتر متقاطع است، پس

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AxB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow ۷۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AxB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AxB}+\overset{\frown}{CD}=۱۴۰^\circ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}\overset{\frown}{AxB}-\overset{\frown}{CD}=۴۰^\circ\\ \overset{\frown}{AxB}+\overset{\frown}{CD}=۱۴۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{+}۲\overset{\frown}{AxB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AxB}=۹۰^\circ$$

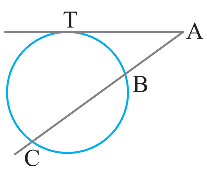


۲۱ ۳ محیط هر دایره ۳۶۰° است، بنابراین

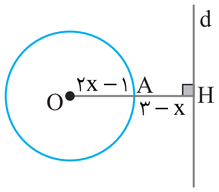
$$\overset{\frown}{TC}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BT}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۵\overset{\frown}{BT}=۳۶۰^\circ$$

در نتیجه $\overset{\frown}{BT}=۷۲^\circ$ و $\overset{\frown}{TC}=۱۴۴^\circ$. پس اندازهٔ زاویهٔ A برابر است با

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{TC}-\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{۱۴۴^\circ-۷۲^\circ}{۲}=۳۶^\circ$$



۲۲ (۲) از مرکز O عمود OH را بر خط d رسم می‌کنیم تا دایره را در A قطع کند. در این‌صورت نقطهٔ A نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا خط است، پس $AH=۳-x$. بنابراین $OH=۲x-۱+۳-x=x+۲$. از طرف دیگر، چون خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، پس $R<OH$. در نتیجه $۲x-۱<x+۲$ ، بنابراین $x<۳$. از طرف دیگر چون $۳-x$ فاصله است، پس باید $x<۳$. همچنین طول شعاع دایره باید مثبت باشد، یعنی $۲x-۱>۰\Rightarrow x>\frac{۱}{۲}$. از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\frac{۱}{۲}<x<۳$.



۲۳ (۲) دو مثلث OMN و OAN متساوی‌الساقین هستند، پس

$$OM=MN\Rightarrow \hat{N}=\hat{O}_۱ ,\quad OA=ON\Rightarrow \hat{A}=\hat{N}$$

از طرف دیگر، زاویهٔ $M_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث OMN است. بنابراین

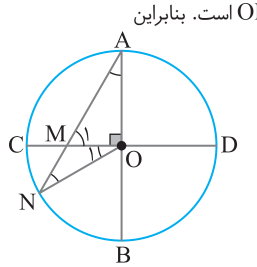
$$\hat{M}_۱=\hat{N}+\hat{O}_۱ \xrightarrow{\hat{O}_۱=\hat{N}} \hat{M}_۱=۲\hat{N}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM می‌نویسیم

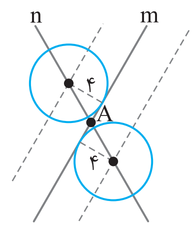
$$\hat{A}+\hat{M}_۱+\hat{O}=۱۸۰^\circ$$

$$\hat{N}+۲\hat{N}+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{N}=۳۰^\circ$$

چون $\hat{A}=\hat{N}$ ، پس $\hat{A}=۳۰^\circ$.



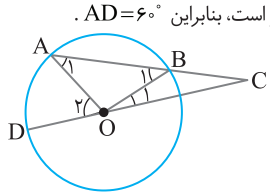
۲۴ (۳) مرکز دایره‌هایی که بر خط m مماس هستند و شعاع آن‌ها ۴ است، روی دو خط موازی با m و به فاصلهٔ ۴ از خط m قرار دارند. اگر این دو خط موازی را رسم کنیم، هریک از آن‌ها خط n را در یک نقطه قطع می‌کند. پس دو نقطه روی خط n قرار دارد که مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ هستند و خط m بر این دایره‌ها مماس است.



۲۵ (۴) از مرکز O به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. اگر R شعاع دایره باشد، بنابر فرض تست،

$$\begin{cases} BC=R \\ OB=R \end{cases}\Rightarrow OB=BC\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{C}$$

همچنین $OB=OA=R$ ، در نتیجه $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$. از طرف دیگر، زاویهٔ $B_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث OBC است پس $\hat{B}_۱=\hat{O}_۱+\hat{C}$ ، در نتیجه $\hat{B}_۱=۲\hat{C}$. در ضمن زاویهٔ $O_۲$ زاویهٔ خارجی مثلث OAC است. بنابراین $\hat{O}_۲=\hat{A}_۱+\hat{C}=\hat{B}_۱+\hat{C}=۲\hat{C}+\hat{C}=۳\hat{C}$. چون $\hat{C}=۲۰^\circ$ ، پس $\hat{O}_۲=۶۰^\circ$ و چون $\hat{O}_۲$ زاویهٔ مرکزی در این دایره است، اندازهٔ آن با اندازهٔ کمان مقابلش برابر است، بنابراین $\overset{\frown}{AD}=۶۰^\circ$.



۲۶ (۳) اگر R شعاع دایره باشد، مساحت قطعهٔ رنگی به صورت زیر به‌دست می‌آید

مساحت مثلث OAB − مساحت قطاع OAB = مساحت قطعه

$$۶\pi-۹\sqrt{۳}=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\pi R^۲-\frac{۱}{۲}R^۲\sin ۶۰^\circ\Rightarrow ۶\pi-۹\sqrt{۳}=\frac{۱}{۶}\pi R^۲-\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

$$۳(۲\pi-۳\sqrt{۳})=(\frac{۲\pi-۳\sqrt{۳}}{۱۲})R^۲\Rightarrow R^۲=۳۶\Rightarrow R=۶$$

بنابراین

$$\text{طول کمان } AB=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}=\frac{۶۰^\circ\times\pi\times۶}{۱۸۰^\circ}=۲\pi$$

در ضمن مثلث OAB متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ است، پس $AB=۶$. در نتیجه

$$\text{طول وتر } AB+\text{طول کمان } AB=۲\pi+۶=۲(\pi+۳)$$

۲۷ (۲) مساحت قسمت رنگی، تفاضل مساحت‌های دو قطاع OAB و OA'B' است:

$$۱۸\pi=\text{مساحت قطاع } OA'B'-\text{مساحت قطاع } OAB$$

$$۱۸\pi=\frac{۱۳۵^\circ}{۳۶۰^\circ}\pi(۲R)^۲-\frac{۱۳۵^\circ}{۳۶۰^\circ}\pi R^۲\Rightarrow ۱۸\pi=\frac{۱۳۵^\circ}{۳۶۰^\circ}\times۳\pi R^۲$$

$$۱۸\pi=\frac{۹}{۸}\pi R^۲\Rightarrow R^۲=۱۶\Rightarrow R=۴$$

بنابراین $\text{طول کمان } AB=\frac{۱۳۵^\circ\pi(۲R)}{۱۸۰^\circ}=\frac{۳\times\pi\times۸}{۴}=۶\pi$.

۲۸ (۲) چون طول کمانی از یک دایره به شعاع R که زاویهٔ مرکزی رو به‌رو به آن کمان برابر α (درجه) باشد برابر $\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}$ است. پس طول کمان A'B' برابر است با

$$\text{طول کمان } A'B'=\frac{\alpha}{۱۸۰^\circ}(\pi\times\frac{۲}{۳}R)\Rightarrow ۶=\frac{\alpha}{۱۸۰^\circ}\times\frac{۲}{۳}\pi R\Rightarrow \frac{\alpha}{۱۸۰^\circ}=\frac{۹}{\pi R}\qquad (۱)$$

پس

$$\text{طول کمان } AB=\frac{\alpha}{۱۸۰^\circ}(\pi\times\frac{۳}{۲}R)$$

$$\xrightarrow{\text{از } (۱)} \text{طول کمان } AB=\frac{۹}{\pi R}(\pi\times\frac{۳}{۲}R)=\frac{۲۷}{۲}=۱۳/۵$$

۲۹ (۲) زاویهٔ AOB را α (با واحد درجه) در نظر می‌گیریم:

$$\text{مساحت قطاع } OAB=۱\Rightarrow\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\pi R^۲=۱\xrightarrow{R=۲}\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\times۴\pi=۱\Rightarrow\alpha=\frac{۹۰^\circ}{\pi}$$

بنابراین $\text{طول کمان } A'B'=\frac{\alpha\pi R'}{۱۸۰^\circ}=\frac{۹۰^\circ(\pi\times۵)}{۱۸۰^\circ\pi}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$.

۳۰ (۱) از مرکز O به نقاط تماس A و B وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه‌های A و B قائمه‌اند. همچنین چهارضلعی OAMB کایت است، پس دو قطر OM و AB برهم عمودند و OM نیمساز زاویهٔ M است. بنابراین

$$\triangle OAM: \hat{M}_۱=۳۰^\circ\Rightarrow OA=\frac{OM}{۲}\xrightarrow{OA=۱} OM=۲$$

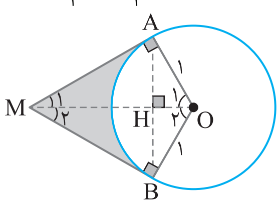
$$\triangle OAH: \hat{O}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA\xrightarrow{OA=۱} AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس $AB=۲AH=\sqrt{۳}$. بنابراین $S_{AOBM}=\frac{۱}{۲}AB\times OM=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(۲)=\sqrt{۳}$.

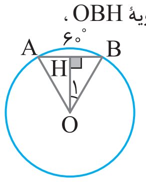
اکنون مساحت قطاع OAB را حساب می‌کنیم:

$$\text{مساحت قطاع } OAB=\frac{\alpha\pi R^۲}{۳۶۰^\circ}=\frac{۱۲۰^\circ\pi(۱)^۲}{۳۶۰^\circ}=\frac{\pi}{۳}$$

از طرف دیگر، مساحت قسمت رنگی برابر تفاضل مساحت چهارضلعی OAMB و مساحت قطاع OAB است. پس $\text{مساحت قسمت رنگی}=\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}-\pi}{۳}$



۳۱ (۲) **راه‌حل اول** از مرکز O به وتر AB عمود OH را رسم می‌کنیم. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۶۰° است، بنابراین $\hat{O}_۱=۳۰^\circ$. در ضمن عمود OH وتر AB را نصف می‌کند، پس $BH=۱۵$. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH ،



$$\tan\hat{O}_۱=\frac{BH}{OH}\Rightarrow\tan ۳۰^\circ=\frac{۱۵}{OH}$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱۵}{OH}\Rightarrow OH=\frac{۴۵}{\sqrt{۳}}=۱۵\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۶۰° است. چون $OA=OB$ ، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۳۰=۱۵\sqrt{۳}$.

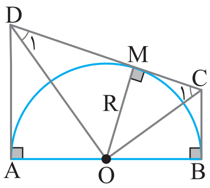
۳۲ (۱) شعاع OM بر خط مماس DC عمود است. در ضمن شعاع OB بر خط مماس BC و شعاع OA بر خط مماس AD عمود است. بنابراین

OC نیمساز زاویهٔ C است. $OB=OM\Rightarrow$

OD نیمساز زاویهٔ D است. $OA=OM\Rightarrow$

در ضمن مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره مساوی‌اند، پس DM=AD و MC=BC. از طرف دیگر دو مماس AD و BC بر AB عمودند، پس موازی‌اند. در نتیجه بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\hat{D}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{D}_۱+\hat{C}_۱=۹۰^\circ$$



$$D\hat{O}C=۹۰^\circ$$

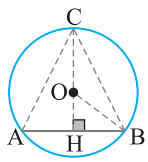
پس مثلث ODC قائم‌الزاویه است. از رابطهٔ طولی در این مثلث نتیجه می‌شود

$$OM^۲=DM\times MC\Rightarrow R^۲=AD\times BC$$

۳۳ (۱) مطابق شکل، در صورتی بیشترین مساحت مثلث ABC به دست می‌آید که طول ارتفاع CH بیشترین مقدار ممکن باشد و این موضوع زمانی اتفاق می‌افتد که CH در راستای قطر دایره باشد. چون ارتفاع CH ضلع AB را نصف می‌کند، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است. بنابراین $\begin{cases}OB=۵\\BH=۴\end{cases}\Rightarrow OH=\sqrt{۲۵-۱۶}=۳$

از طرف دیگر، CH=OH+OC=۸. بنابراین بیشترین مساحت مثلث ABC برابر است با

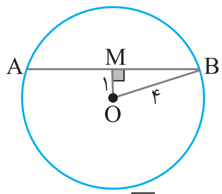
$$S=\frac{۱}{۲}AB\times CH=\frac{۱}{۲}\times۸\times۸=۳۲$$



۳۴ (۳) وتر AB گذرنده از نقطهٔ M و عمود بر OM کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OBM،

$$MB=\sqrt{OB^۲-OM^۲}=\sqrt{۱۶-۱}=\sqrt{۱۵}$$

$$AB=۲\sqrt{۱۵}$$



پس طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M برابر $۲\sqrt{۱۵}$ است و چون $۲<۲\sqrt{۱۵}$، پس هیچ وتری به طول ۲ از نقطهٔ M نمی‌گذرد.

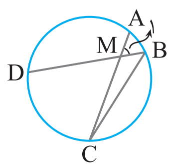
۳۵ (۴) کوچک‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ P وتری است که بر قطر گذرنده از P عمود باشد. بنابراین اگر وتر CD از P گذشته و بر قطر AB عمود باشد، آن‌گاه CD کوتاه‌ترین وتر گذرنده از P است. در ضمن چون قطر AB بر وتر CD عمود است، پس AB وتر CD را نصف می‌کند، یعنی P وسط CD است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OCP،

$$OC^۲=OP^۲+CP^۲$$

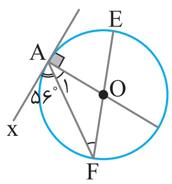
$$۱۳^۲=۵^۲+CP^۲\Rightarrow CP=۱۲$$

بنابراین $CD=۲CP=۲۴$.

۳۶ (۱) زاویهٔ $M_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث MBC است. بنابراین $\hat{M}_۱=\hat{C}+\hat{B}$. از طرف دیگر $\hat{B}=۴\hat{C}$، در نتیجه $\hat{M}_۱=۵\hat{C}$. در ضمن زاویهٔ C محاطی روبه‌رو به کمان AB است، پس $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$. در نتیجه $\hat{M}_۱=\frac{۵}{۲}\overset{\frown}{AB}$.



۳۷ (۱) می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. پس $\hat{A}_۱=۹۰^\circ-F\hat{A}x=۹۰^\circ-۵۶^\circ=۳۴^\circ$. چون OA=OF، پس $\hat{F}=\hat{A}_۱=۳۴^\circ$. از طرف دیگر، $\hat{F}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}$. پس $۳۴^\circ=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}$. در نتیجه $\overset{\frown}{AE}=۶۸^\circ$.



۳۸ (۳) چون CI قطر دایره است، پس

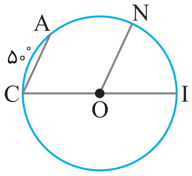
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{ANI}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\overset{\frown}{AC}=۵۰^\circ}\overset{\frown}{ANI}=۱۳۰^\circ$$

بنابراین اندازهٔ زاویهٔ محاطی C برابر است با

$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{ANI}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$$

از طرف دیگر، از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}CA||ON\\ \text{مورب } CI\end{cases}\Rightarrow N\hat{O}I=\hat{C}=۶۵^\circ$$

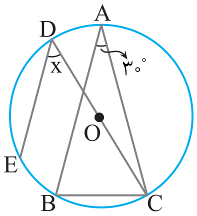


۳۹ (۲) چون $\hat{A}=۳۰^\circ$، پس $\overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ$. از طرف دیگر مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین $\hat{B}=۷۵^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AC}=۱۵۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AD}=۳۰^\circ$

کمان‌های بین دو وتر موازی، مساوی‌اند:

$$AB||DE\Rightarrow\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AD}\Rightarrow\overset{\frown}{BE}=۳۰^\circ$$

زاویهٔ EDC زاویهٔ محاطی است، پس $x=\frac{\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۳۰^\circ+۶۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$.



۴۰ (۲) کمان‌های بین دو وتر موازی، مساوی‌اند. بنابراین

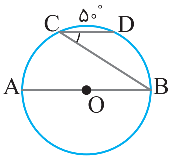
$$AB||CD\Rightarrow\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

از طرف دیگر،

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ$$

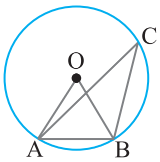
$$۲\overset{\frown}{BD}+۵۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BD}=۶۵^\circ$$

چون زاویهٔ DCB محاطی است، پس اندازهٔ آن نصف کمان روبه‌رو به خود است: $D\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{۶۵^\circ}{۲}$



۴۱ (۴) زاویهٔ ACB محاطی است، پس اندازهٔ آن برابر $\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ است، در نتیجه $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$. بنابراین اگر از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کنیم، مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه شعاع دایره برابر AB و مساوی ۶ است. پس

$$\text{طول کمان } AB=\frac{۶۰^\circ\times\pi\times۶}{۱۸۰^\circ}=۲\pi$$

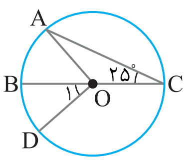


۴۲ (۴) اگر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی BOD برابر α درجه باشد، آن‌گاه مساحت قطاع BOD به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{مساحت قطاع } BOD=\frac{\alpha\pi R^۲}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow\frac{۱۶\pi}{۹}=\frac{\hat{O}_۱\pi(۴)^۲}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow\hat{O}_۱=۴۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ محاطی C برابر ۲۵° است، پس $\overset{\frown}{AB}=۵۰^\circ$، در نتیجه $A\hat{O}D=۵۰^\circ+۴۰^\circ=۹۰^\circ$.

پس $\text{طول کمان } ABD=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰^\circ}=\frac{۹۰^\circ\times\pi\times۴}{۱۸۰^\circ}=۲\pi$



۴۳ (۴) می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی در دایره مساوی‌اند، بنابراین

$$AB||CD\Rightarrow\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

از طرف دیگر، دو زاویهٔ ADC و ACD محاطی هستند، پس اندازهٔ هر کدام آن‌ها نصف کمان مقابلشان است: $A\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BD}}{۲}$ و $A\hat{D}C=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$.

بنابراین $|A\hat{C}D-A\hat{D}C|=|\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲}|$. چون $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ و AB قطر دایره است، پس

$$|A\hat{C}D-A\hat{D}C|=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$