



GEOMETRY 11

Password

ن وَالْقَلَمِ وَمَا يَسْطُرُونَ



www.gaj.ir



Other user

ENG





2K

تعداد مؤلفین همکار

101 M

تعداد جلد های چاپ شده تا امروز

3K

تعداد عناوین چاپ شده تا امروز



gaj.ir



gajmarket.com



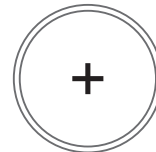
Mygaj.com



driq.com



gajino.com



به نام خدا

دوست خوب نادیده ام، سلام

در تهیه کاغذ این کتاب هیچ درختی قطع نشده است و در فرایند تولید آن نیز از مواد شیمیایی مضر استفاده نگردیده است. این کاغذ در کشور عزیزمان ایران تولید می شود و ماده اصلی تشکیل دهنده آن باگاس یا همان تفاله نیشکر است. امروزه در خیلی از کشورها رنگ کاغذ مصرفی کتاب، تیره است و این تیرگی به علت انعکاس نور کمتر باعث می شود چشمها هنگام مطالعه خستگی کمتری را احساس کنند. اما بدانیم که هزینه های تولید کتاب بالاست، لذا تقاضا داریم بعد از مطالعه کتاب حاضر آن را در وب سایت www.mygaj.com قرار دهید و باقیمت کمتر به عنوان کتاب دست دوم بفروش برسانید تا سایر دوستانتان بتوانند با هزینه کمتر از آن استفاده کرده و از تولید مجدد آن جلوگیری و در نهایت در مصرف کاغذ صرفه جویی شود.

ارادتمند شما
ابوالفضل جوکار

کتاب مبادله کنید.

کتاب دست دوم بخرید.

کتاب هدیه بگیرید!.



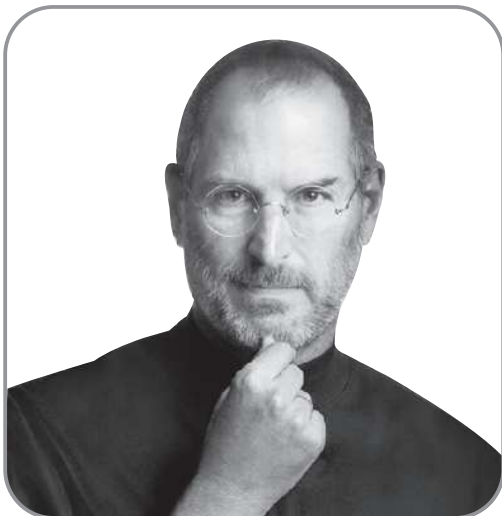
حاضر تمام دستاورد از تکنولوژی را از دست بدهم تا بتوانم یک بعد از ظهر با سقراط صحبت کنم !!!
استیو پاول جابز



Google



Steven Paul Jobs



استیو جابز نابغه بزرگ در مراسم رونمایی از اولین گوشی آیفون پس از بیان تفاوت‌های اساسی و مهم گوشی آیفون نسبت به تمام گوشی‌های تلفن همراه تا آن روز اعلام کرد:

«ما تلفن را دوباره اختراع کردیم»

ما در سال ۱۳۸۱ برای اولین بار کتاب‌هایی تحت عنوان کتاب‌های محوری ارائه دادیم که به واکاوی تست‌های کنکور و انطباق آن بر صفحات کتاب درسی می‌پرداخت و بسیار زیاد مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان آن روزگار قرار گرفت در ادامه در سال ۱۳۸۲ کتاب‌های میکرو سفید را تولید کردیم که الگوی جدیدی در طبقه بندی تست‌ها محسوب می‌شد و سلیقه جدیدی برای دانش‌آموزان و معلمان آن زمان به وجود آورد. در سال ۱۳۹۰ با یک پوست‌اندازی کامل نسل جدید کتاب‌های میکرو [مشهور به میکرو نقره‌ای] وارد بازار شد که رکوردهای فروش در عرصه نشر ایران را فرسنگ‌ها جابه‌جا کرد

اکنون سال ۱۳۹۹ است و با افتخار اعلام می‌کنیم که ما آموزش به روش سنتی که پاسخگوی نیازهای دانش‌آموزان نسل‌های قبلی بود را به طور کامل دگرگون کردیم و آموزشی مدرن و هوشمند روی صفحات کاغذ مطابق با سلیقه دانش‌آموزان عصر سرعت و اینترنت 5G ارائه کردیم که به جرأت می‌توان گفت شاید استفاده از هر کتاب دیگری به غیر از این نسل از کتاب همانند این است که شما در عصری که گوشی‌های آیفون جهان را تسخیر کرده از گوشی نوکیای نسل اول با دکمه‌های پلاستیکی و سائیزی مشابه یک گوشت کوب برقی استفاده کنید و همان بهار را نیز عیناً برای خرید آن بپردازید که در این صورت نه تنها متحمل ضررهای مالی خواهید شد بلکه ضرر بزرگ و هنگفت دیگری نیز در کمین شما خواهد بود که با هیچ بهایی قابل خرید نیست و آن بهای سنگین همان «زمان از دست رفته است» که مارسل پروست نویسنده بزرگ در کتاب مهم و تأثیرگذار «در جستجوی زمان از دست رفته» از دیدگاه فلسفی به واکاوی اهمیت این موضوع می‌پردازد!

امروز ما نیز اگر بخواهیم به تفاوت‌های عمده و اساسی این کتاب با سایر کتاب‌های آموزشی که از آغاز تا به امروز نوشته شده اشاره کنیم باید اعلام کنیم که ما نه تنها کتاب‌های میکرو و کتاب‌های کمک آموزشی را دوباره اختراع کردیم، بلکه:

«ما آموزش روی کاغذ را دوباره اختراع کردیم، کتابی که در دست شماست پنج سال از تمام کتاب‌های فعلی جلوتر است...»

[مدیر واحد نوآوری و استراتژی تألیف]

Wikipedia · 1 min ago



Home



Collections



Recent



More

Ali.Monsef Shokri

36

تعداد مؤلفین همکار

1.2 M

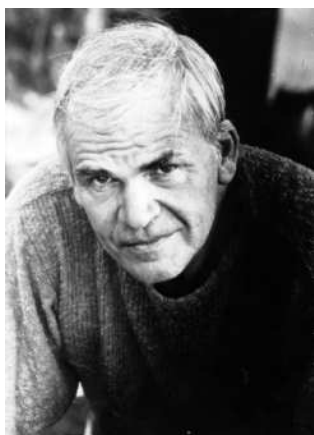
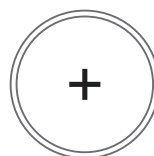
تعداد جلد های چاپ شده تا امروز

70

تعداد عناوین تألیفی از این مؤلف



بد نیست بدانید تألیف این کتاب تقریباً **چند روز** برای من ، **چند هفته** برای من و **مهندس حسینی فرد** برای تکمیل برخی تست ها و درسنامه ها، **چند ماه** برای من و **مهندس اسمعیلی** برای ارتقاء کیفیت محتوا و پوشش تمام نقاط تاریک کتاب درسی، متجاوز از **یک سال** برای من و **خانم جلال** برای مرتب سازی و صفحه آرایی و مجموعاً **۷۶ سال** برای من و **استیو جابز** برای طراحی ساختار و رسیدن به این معماری زمان برده است!!!



Milan.Kundera



هیچ وسیله ای برای تشخیص تصمیم درست و وجود ندارد، زیرا هیچ مقایسه ای امکان پذیر نیست.
در زندگی با همه چیز برای نخستین بار برخورد می کنیم، مانند هنرپیشه ای که بدون تمرین وارد صحنه شود اما اگر اولین تمرین زندگی، خود زندگی باشد پس برای زندگی چهار شی می توان قائل شد؟
این است که زندگی همیشه به یک «طرح» شباهت دارد اما حتی طرح هم کلمه درستی نیست، زیرا طرح همیشه زمینه سازی برای آماده کردن یک تصویر است،

اما طرحی که زندگی ماست طرح هیچ چیز نیست! طرحی بدون تصویر است !!!



Neil.Gaiman



من فهرستی از آن چه در مدرسه به ما یاد نمی دهند را تهیه کرده ام؛
آن ها به ما یاد نمی دهند که چگونه کسی را دوست بداریم.
آن ها به ما یاد نمی دهند که چگونه در شهرت به درستی زندگی کنیم.
آن ها به ما یاد نمی دهند که چگونه در گمنامی، از زندگی لذت ببریم.
آن ها به ما یاد نمی دهند که چگونه از کسی که دوستش نداریم جدا شویم.
آن ها به ما یاد نمی دهند که به کسی که در حال مرگ است چه بگوئیم.
آن ها به ما هیچ چیزی را که ارزش یاد گرفتن داشته باشد، یاد نمی دهند.



Dr.Viktor Frankl



دکتر ویکتور فرانکل در نامه ای خطاب به معلمان سراسر جهان برای تمام تاریخ این گونه می نویسد: من اتاق های گازی را دیدم که توسط بهترین مهندسين طراحی می شدند، من پزشکان ماهری را دیدم که کودکانی معصوم و بی گناه را به راحتی مسموم می کردند، من پرستارانی کاربلد را دیدم که انسان ها را با تزریق یک آمپول به قتل می رساندند و مجموع این دلایل مرا به آموزش مشکوک کرد. از شما تقاضا می کنم که تلاش کنید قبل از تربیت دانش آموزانتان به عنوان یک دکتر یا یک مهندس از آن ها یک انسان بسازید تا روزی تبدیل به جانوران روانی دانشمند نشوند !!!
به دانش آموزان خود بیاموزید بهترین ثروت آن ها انسانیت است.



MESSAGES

S.Sepehri



Last years ago

روزی خواهیم آمد و پیامی خواهیم آورد
 در رک ها نور خواهیم ریخت و صدا خواهیم در داد، ای سبدتان پر خواب،
 سیب آوردم، سیب...



نتیجه گیری



راه میان بر



تذکر- توجه



نکات اصلی



عمق مفاهیم



بیشتر بدانیم



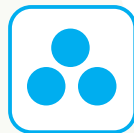
پاورقی



اشتباه متداول



پاسخ- اثبات



مثال- تمرین



زیرعنوان



مقایسه دو چیز



ترکیب با آینده



ترکیب با گذشته



نگاهی به آینده



یاد آوری



Now

MESSAGES

A.Monsef Shokri [مدیر تألیف]

سیب را در افسانه ها نماد دانش، آگاهی و دانایی می دانند،
 سیبی که با سقوط از درخت و خوردن به سر نیوتن موجب کشف قوانین جاذبه شد، آدم آن را برداشت، گاز زد،
 سیب دیگری ساخت، پشت گوشی تلفنش چسباند
 و جهان را تسخیر کرد ...



همکارانی که تجربه فراوان آن‌ها در تدریس و تألیف پشتوانه این کتاب شد :

✓ همکاران تألیف



- M. Hoseyni fard مهندس محمدرضا حسینی فرد
- M . Esmaeili مهندس محسن اسمعیلی
- B . Jalali مهندس بهرام جلالی
- M . Vaezin مهندس محمد حسین حشمت‌الواعظین
- M. Sehat kar مهندس محمد صحت‌کار
- K . Darabi مهندس کیوان دارابی

May29

E

virastarni ke ba deghat va hoseleye bimanand satr be satr ketab ra khandand :

- M. Sasani مهندس مریم ساسانی
- Dr . P. tayoub دکتر پیام طیوب
- Dr . A. Ashtab دکتر آرمان آشتاب
- A . KHavanin Zadeh مهندس امین خوانین‌زاده
- E . Vahabi مهندس ایمان وهابی
- M. Deh haghi مهندس مرجان ده‌حقی

Today

✓ ویراستاران علمی



کارشناسان خبره‌ای که دانش و تجربه خود را با ما به اشتراک گذاشتند :

✓ کارشناسان علمی



- N. O. Shojaee مهندس نوید اورازانی شجاعی
- M.alae nasab مهندس مجید علائی نسب
- M. Arbab bahrami مهندس محمد ارباب بهرامی
- H. khazae مهندس حسین خزائی
- H. Pirzad مهندس حسین پیرزاد
- S. Roshani مهندس سوگند روشنی

Message



طوفانی از کتاب‌های حرفه‌ای در راه است ...

Search

CONTENTS



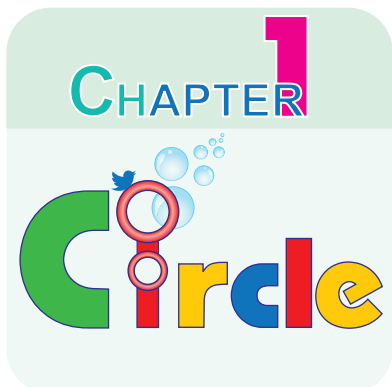
Circle



Geometric conversions



Logitudinal Relations



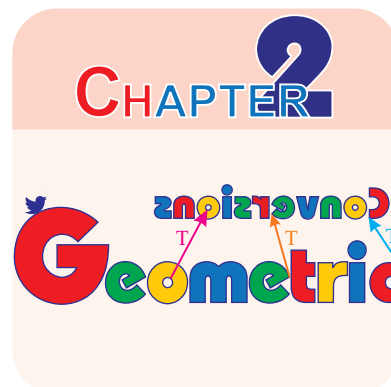
۱۰ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

۲۳ رابطه‌های طولی در دایره

۳۴ چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

۴۸ تبدیل‌های هندسی

۷۳ کاربرد تبدیل‌ها



۸۶ قضیه سینوس‌ها

۹۰ قضیه کسینوس‌ها

۹۵ قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۹۹ قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)



109 **Answers**

Edit

New Widget Available



Tweet



Johan Forbes Nash

@Johan 1928

من همیشه به اعداد، معادلات و منطق که به عقلانیت منجر میشوند باور داشتم. اما هرچه جستجویم در این راه مرا به این پرسش رساند: **منطق واقعاً چیست و عقلانیت کدام است؟**

I've always believed in numbers and the equations and logics that lead to reason . But after a life time of such pursuits , I ask , «What truly is logic? Who decides reason?»

درس اول : مفاهیم اولیه و زوایای در دایره

درس دوم : رابطهای طولی در دایره

درس سوم : چند ضلعهای موازی و محیطی

[Translate Tweet](#)

07:30 . 5/31/20

[View Tweet activity](#)

پرفسور جان نش ریاضیدان نابغه و برجسته آمریکایی و برنده جایزه نوبل در اقتصاد بود وی به مدت بیش از چند دهه به بیماری اسکیزوفرنی مبتلا بود. سرانجام در ۲۳ می ۲۰۱۵ بعد از نیم قرن مبارزه با بیماری در ۸۶ سالگی در گذشت. فیلم ذهن زیبا براساس زندگی این دانشمند ساخته شده است ...

5,337

7,412

7,520,918,608

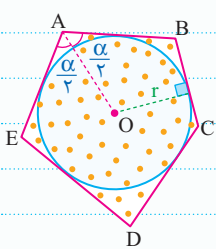


CHAPTER 1



Add another Tweet



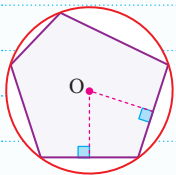


اگر یک n ضلعی بر یک دایره محیط شود [همه اضلاع آن بر دایره مماس شود]، آنگاه مرکز دایره، محل همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی n ضلعی است. به این n ضلعی، چندضلعی محیطی می‌گویند.

- 1) n ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمسازهای زوایای داخلی آن همرس باشند.
- 2) اگر در یک n ضلعی، $(n-1)$ نیمساز همرس باشند، آنگاه n امین نیمساز نیز از نقطه همرسی می‌گذرد و می‌توان نتیجه گرفت که همه نیمسازها همرسند.

مساحت هر n ضلعی محیطی برابر است با حاصل ضرب شعاع دایره محاطی در نصف محیط n ضلعی:

$$S = r.p$$



اگر یک n ضلعی درون دایره محاط شود [یک دایره از همه رأس‌های آن بگذرد] آنگاه مرکز دایره محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع n ضلعی است. به این n ضلعی، چندضلعی محاطی می‌گویند.

- 1) یک n ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس باشند.
- 2) اگر در یک n ضلعی، $(n-1)$ عمودمنصف همرس باشند، آنگاه n امین عمودمنصف نیز از نقطه همرسی می‌گذرد و می‌توان نتیجه گرفت که همه عمودمنصف‌ها همرسند.

Test در یک شش ضلعی محدب نیمسازهای ۵ تا از زاویه‌های داخلی در یک نقطه همرس شده‌اند، در این صورت

- 1) دایره‌ای وجود دارد که از همه رأس‌های این شش ضلعی می‌گذرد.
- 2) نقطه همرسی از وسط‌های اضلاع به یک فاصله است.
- 3) نقطه همرسی از رأس‌ها به یک فاصله است.
- 4) نقطه همرسی از اضلاع به یک فاصله است.
- 5) نقطه همرسی نیمسازهای پنج زاویه روی نیمساز زاویه ششم نیز قرار دارد و نتیجه می‌گیریم این نقطه مرکز دایره محاطی در شش ضلعی است و باید از همه اضلاع به یک فاصله باشد.

۱۰۴. یک پنج ضلعی محدب بر دایره‌ای به شعاع ۳ محیط شده است. اگر اندازه محیط این پنج ضلعی برابر با ۲۴ باشد، آنگاه مساحتش چقدر است؟

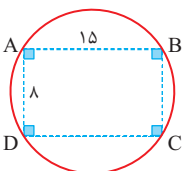
- ۳۶ (۱)
۲۴ (۳)
۷۲ (۲)
۴۸ (۴)

۱۰۵. تمام اضلاع یک ۷ ضلعی که مجموع طول اضلاع آن برابر ۱۸ است بر دایره‌ای به قطر ۴ مماس شده است. مساحت محصور بین ۷ ضلعی و دایره چقدر است؟

- ۱۸-۴π (۱)
۷۲-۱۶π (۳)
۹-۲π (۲)
۲۶-۴π (۴)

۱۰۶. در شکل مقابل ABCD مستطیل است. شعاع دایره چقدر است؟

- ۸ (۱)
۸/۵ (۲)
۹ (۳)
۱۰/۵ (۴)

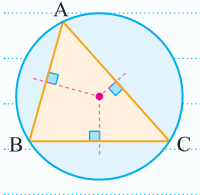


عمود منصف‌های اضلاع در هر مثلث هم‌رسند و نقطه هم‌رسی، نقطه‌ای است یکتا که از سه رأس به یک فاصله است. این نقطه، مرکز دایره محیطی مثلث است.

1 اگر مثلثی زاویه منفرجه داشته باشد، مرکز دایره محیطی آن، خارج مثلث است.

2 در مثلث قائم‌الزاویه مرکز دایره محیطی، وسط وتر است.

3 در مثلثی که همه زوایای آن حاده است، مرکز دایره محیطی داخل مثلث است.



مثلث حاده‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه

مثلث منفرجه‌الزاویه

اگر اندازه یک ضلع از مثلث و زاویه روبه‌رو به آن معلوم باشد، شعاع دایره محیطی و فاصله مرکز دایره محیطی تا ضلع BC برابر است با:

$$\Delta OBH: \sin \alpha = \frac{BC}{2R}$$

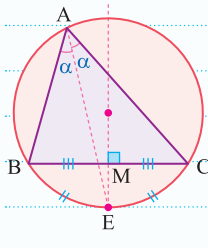
$$R = \frac{BC}{2 \sin A}$$

$$\Delta OBH: \cos \alpha = \frac{OH}{R}$$

$$OH = R \cdot \cos A = \frac{BC}{2 \tan A}$$

در مثلث قائم‌الزاویه مرکز دایره محیطی وسط وتر و شعاع دایره محیطی، نصف وتر است؛ پس فاصله مرکز دایره محیطی تا وتر مثلث، صفر است.

در هر مثلث دلخواه نیمساز هر زاویه داخلی و عمود منصف ضلع مقابل به آن زاویه، روی دایره محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند [مطابق شکل مقابل نقطه E وسط کمان BC است].



Test اندازه‌های دو زاویه از مثلثی برابر 65° و 70° و طول ضلع بین آن‌ها برابر 4 است. شعاع دایره محیطی این مثلث چقدر است؟

1) 4
2) $2\sqrt{2}$
3) 8
4) $4\sqrt{2}$

2 از مثلث ABC دو زاویه $\hat{B} = 65^\circ$ و $\hat{C} = 70^\circ$ معلوم است، بنابراین $\hat{A} = 180^\circ - 65^\circ - 70^\circ = 45^\circ$ است. حال می‌توانیم اندازه شعاع دایره محیطی را به دست آوریم:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

107. زاویه‌های یک مثلث با اعداد 2, 3, 5 متناسب است، محل تلاقی عمود منصف‌ها کجاست؟

- 1) داخل مثلث
2) روی یکی از رأس‌های مثلث
3) وسط یکی از اضلاع مثلث
4) خارج مثلث

108. طول اضلاع مثلثی برابر $2\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{3}$ است. شعاع دایره محیطی این مثلث چقدر است؟

- 1) $\frac{3}{2}$
2) $\sqrt{3}$
3) 2
4) 1

۱۰۹. در مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه $2\sqrt{2}$ و $2\sqrt{3}$ ، مساحت دایره محیطی چقدر است؟

- ۱) 6π ۲) 10π ۳) 5π ۴) 9π

۱۱۰. نقطه O از رأس های مثلث ABC که در آن $\hat{B} = 30^\circ$ و $\hat{C} = 20^\circ$ به یک فاصله است. زاویه \hat{BOC} چقدر است؟

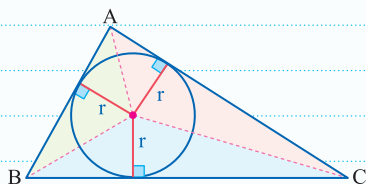
- ۱) 50° ۲) 100° ۳) 130° ۴) 150°

۱۱۱. در مثلث ABC، داریم $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ ، نیمساز داخلی زاویه \hat{A} و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطعند، زاویه \hat{MBC} چقدر است؟

- ۱) 25° ۲) 30° ۳) 35° ۴) 40°

نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم رسند و نقطه هم رسی آنها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. این نقطه مرکز دایره محاطی داخلی است.

شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC با مساوی قرار دادن مجموع مساحت مثلث های رنگ شده با مساحت مثلث اصلی به صورت زیر به دست می آید:



$$r = \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{نصف محیط مثلث}} = \frac{S}{p}$$

Test در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد، شعاع دایره محاطی داخلی چقدر است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

مساحت مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائم ۳ و ۴ برابر $6 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ است. از طرفی طول وتر این مثلث برابر ۵ و در نتیجه محیط آن برابر $3 + 4 + 5 = 12$ است، پس نصف محیط آن برابر ۶ است و خواهیم داشت:

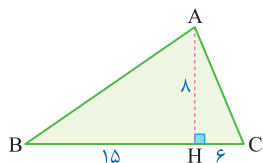
$$r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1$$

۱۱۲. در مثلثی با اضلاع ۹، ۱۲، ۱۵ شعاع دایره محاطی داخلی کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\frac{1}{5}$

۱۱۳. در شکل زیر AH ارتفاع است. شعاع دایره محاطی داخلی چقدر است؟

- ۱) ۳ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) ۴



در مثلث متساوی الاضلاع بین شعاع دایره محاطی داخلی «r»، شعاع دایره محیطی «R»، و ارتفاع مثلث «h» رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{r}{1} = \frac{R}{2} = \frac{h}{3}$$

با توجه به رابطه فوق می توان گفت در مثلث های متساوی الاضلاع شعاع دایره محیطی برابر با $\frac{2}{3}$ ارتفاع و شعاع دایره محاطی برابر با $\frac{1}{3}$ ارتفاع است.

Test در مثلث متساوی الاضلاع ABC اگر شعاع دایره محاطی داخلی برابر ۲ باشد، شعاع دایره محیطی چقدر است؟

- ۱) ۲ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

می دانیم در مثلث متساوی الاضلاع همواره $\frac{r}{1} = \frac{R}{2} = \frac{h}{3}$ است، یعنی شعاع دایره محیطی در مثلث متساوی الاضلاع همواره ۲ برابر شعاع دایره محاطی داخلی است، بنابراین $R = 2r = 4$ خواهد بود.



شعاع دایره محاطی داخلی



شعاع ها در مثلث متساوی الاضلاع

۱۱۴. شعاع دایره محیطی یک مثلث متساوی الاضلاع برابر $\sqrt{6}$ است، محیط این مثلث کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$ (۲) $9\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴) $12\sqrt{3}$

۱۱۵. مساحت مثلث متساوی الاضلاعی که درون دایره به شعاع ۶ محاط شده، چقدر است؟

- (۱) $27\sqrt{3}$ (۲) $36\sqrt{3}$ (۳) $18\sqrt{3}$ (۴) $24\sqrt{3}$

۱۱۶. محیط مثلث متساوی الاضلاعی که بر دایره‌ای به شعاع واحد محیط شده، چقدر است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $6\sqrt{6}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۱۷. در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع $2\sqrt{3}$ شعاع دایره محیطی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۸. در مثلث متساوی الاضلاع ABC شعاع دایره محاطی ۲ است، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$ (۲) $12\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$



محاسبه قطعه‌های ایجاد شده توسط دایره محاطی داخلی

می‌دانیم «طول دو مماسی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود با هم برابر است». بنابراین

اگر دایره محاطی داخلی مثلث ABC را رسم کنیم، برای محاسبه اندازه قطعه‌های ایجاد شده توسط دایره محاطی روی اضلاع مثلث، در هر کدام از رأس‌ها، از این نکته استفاده می‌کنیم. یعنی اگر اندازه اضلاع مثلث ABC معلوم باشد و اندازه قطعه‌ها را بخواهند، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{cases} x+y=c \\ x+z=b \\ y+z=a \end{cases} \Rightarrow x=p-a, y=p-b, z=p-c$$

در روابط فوق p نصف محیط مثلث ABC است.

در مثلث‌های قائم‌الزاویه، شعاع دایره محاطی داخلی مطابق شکل به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$r = p - a$$

Test محیط یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۱۴ و طول وتر آن ۶ است. شعاع دایره محاطی داخلی آن چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۸ (۴) ۷

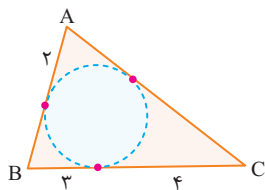
۱ چهارضلعی مشخص شده مربع است، بنابراین:

$$r = p - a = \frac{14}{2} - 6 = 1$$

۱۱۹. در شکل مقابل با توجه به اندازه‌های داده شده، شعاع دایره محاطی چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴
-

۱۲۰. با توجه به اندازه‌های داده شده در شکل مقابل، محیط مثلث ABC چقدر است؟



- ۱۵ (۱)
- ۱۸ (۲)
- ۲۱ (۳)
- ۲۴ (۴)

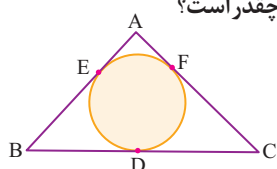
۱۲۱. در مثلثی با اضلاع ۴، ۵، ۷ دایره محاطی داخلی در نقاط تماس روی ضلع‌ها ۶ پاره خط به وجود آورده است. طول کوتاه‌ترین پاره خط چقدر است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱)
- $\frac{3}{2}$ (۲)
- $\frac{3}{2}$ (۳)
- $\frac{3}{2}$ (۴)

۱۲۲. دایره محاطی داخلی مثلثی به اضلاع ۱۳، ۹، ۸ کوچک‌ترین ضلع مثلث را در نقطه تماس، به دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت اندازه‌های این دو قطعه چقدر است؟

- ۳/۵ (۱)
- ۲/۵ (۲)
- ۲/۵ (۳)
- ۲/۴ (۴)

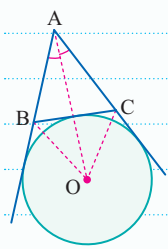
۱۲۳. در شکل مقابل D, E, F نقاط تماس دایره محاطی با اضلاع مثلث است. اگر $BC=7$, $AF=2$, $CF=4$ ، طول ضلع AB چقدر است؟



- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

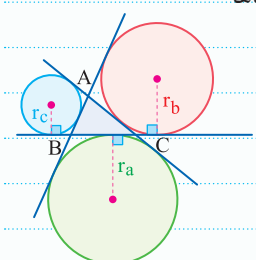


دایره محاطی خارجی



در هر مثلث، هر دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی هم‌رسانند. در شکل مقابل، نقطه O نقطه هم‌رسی نیمساز زاویه A و نیمسازهای زوایای خارجی B و C است. این نقطه از ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC به یک فاصله است، بنابراین مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. به این دایره، **دایره محاطی خارجی نظیر رأس A** می‌گویند.

هر مثلث مطابق شکل، سه دایره محاطی خارجی دارد. اگر p نصف محیط مثلث باشد، شعاع این دایره‌ها به صورت‌های زیر به دست می‌آید:



$$r_a = \frac{S}{p-a} \quad r_b = \frac{S}{p-b} \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

هر چه ضلع مثلث بزرگتر باشد $p-a$ کوچک‌تر شده و شعاع دایره محاطی خارجی بزرگتر می‌شود، پس بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی متناظر با بزرگ‌ترین ضلع یا روبه‌رو به بزرگ‌ترین زاویه از مثلث است و کوچک‌ترین دایره محاطی خارجی روبه‌رو به کوچک‌ترین زاویه مثلث است. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، شعاع دایره‌های محاطی خارجی با ارتفاع مثلث برابر است. [به عبارتی همه چیزهای اندیس‌دار در مثلث متساوی‌الاضلاع برابرند].

$$r_a = r_b = r_c = h_a = m_a = d_a$$

Test در مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت $4\sqrt{3}$ شعاع دایره محاطی خارجی کدام است؟

- $2\sqrt{3}$ (۱)
- 2 (۲)
- $4\sqrt{3}$ (۳)
- 2 (۴)

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$r_a = h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ به دست می‌آید، بنابراین: حال باید طول ارتفاع مثلث را به دست آوریم که برابر با شعاع دایره محاطی خارجی است:



Tweet



Caucher Birkar

@Caucher 1978

وقتی من نگاهم کردم به آنها در ایران و به خودم می‌گفتم: آیا من آن‌ها را روزی با آن‌ها از نزدیک ملاقات کنم؟

I looked at them [Fields medalists] in Iran and said to myself: 'will I ever meet one of these people?'

درس اول : تبدیل‌های هندسی

درس دوم : کاربرد تبدیل‌ها

[Translate Tweet](#)

07:31 . 5/31/20

[View Tweet activity](#)

پرفسور کوچر بیرکار متولد روستای نی در مریوان ، استاد دانشگاه کمبریج ، برنده مدال فیلدز در ۲۰۱۸ و نوبل‌برنده برتر سال ۲۰۱۹ جهان .

1,337

2,416

9,900,618,248



CHAPTER 2

Geometric

Add another Tweet



دو نقطه A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطه M روی خط d بلغزد برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکسته AMB کفایت بازتاب نقطه A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کنیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت:

$$\text{Min}(AMB) = |A'B|$$

این مسئله به مسئله هرون مشهور است. در این تیپ از مسائل اگر طول پاره‌های AM یا BM را بخواهیم باید از تشابه دو مثلث AHM و BMH' استفاده کنیم.

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BH'}{AH} = \frac{MH'}{MH}$$

در این حالت خط d نیمساز خارجی رأس M از مثلث ABM است و در ضمن زاویه‌های ساخته شده در طرفین نقطه M نیز با هم برابرند.

Test نقاط A و B مفروض‌اند، نقطه M روی محور X ها می‌لغزد، کم‌ترین اندازه خط شکسته AMB کدام است؟

۱۲ (۲)	۱ (۱)
۱۰ (۴)	۸ (۳)

کفایت بازتاب نقطه A نسبت به محور X ها یعنی A' را پیدا کنیم و اندازه A'B را به دست آوریم:

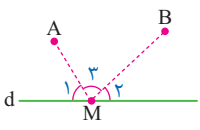
$$|A'B| = \sqrt{(8-2)^2 + (5-(-3))^2} = 10$$

بازتاب یک نقطه نسبت به چهار خط مشهور صفحه

- تصویر نقطه A(a, b) تحت بازتاب نسبت به محور X ها نقطه A'(a, -b) است.
- تصویر نقطه A(a, b) تحت بازتاب نسبت به محور Y ها نقطه A'(-a, b) است.
- تصویر نقطه A(a, b) تحت بازتاب نسبت به خط y=x نیمساز ربع اول و سوم است.
- تصویر نقطه A(a, b) تحت بازتاب نسبت به خط y=-x نیمساز ربع دوم و چهارم است.

۳۰۹. در شکل زیر اگر نقطه M طوری روی خط d قرار گرفته باشد که MA + MB کم‌ترین مقدار ممکن باشد، کدام گزینه درست است؟

- ۱) $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$ (۱)
- ۲) $\widehat{M}_2 = 2\widehat{M}_1$ (۲)
- ۳) $\widehat{M}_2 = 2\widehat{M}_3$ (۳)
- ۴) $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (۴)





۳۱۰. در صفحه خط d دو نقطه A و B در یک طرف خط مفروض اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه A و B کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب
(۲) تجانس
(۳) دوران
(۴) انتقال

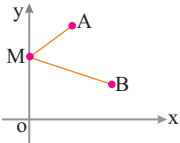
۳۱۱. در شکل زیر برای رسم مثلث ABC که رأس C از آن روی خط Δ باشد و محیط مثلث حداقل مقدار ممکن باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟



- (۱) بازتاب
(۲) تجانس
(۳) انتقال
(۴) دوران

۳۱۲. نقاط A و B در صفحه مختصات مفروض اند، نقطه M روی محور y ها می‌لغزد، کم‌ترین اندازه خط شکسته AMB کدام است؟

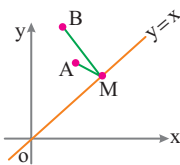
(مشابه داخل - ۹۸)



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۸

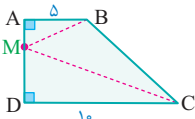
۳۱۳. نقاط A و B در صفحه مختصات مفروض اند، نقطه M روی نیمساز ناحیه اول می‌لغزد، کم‌ترین اندازه خط شکسته AMB کدام است؟

(مشابه داخل - ۹۸)



- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۵
(۴) ۱۰

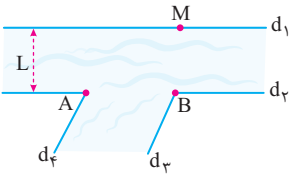
۳۱۴. در دوزنقه قائم شکل مقابل طول ساق قائم ۸ و قاعده‌ها ۵ و ۱۰ هستند. نقطه M روی ساق قائم می‌لغزد، کم‌ترین طول خط شکسته BMC کدام است؟



- (۱) ۱۷
(۲) ۱۶
(۳) ۱۵
(۴) ۱۴

۳۱۵. می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها سه اسکله بسازیم. جای دو اسکله A و B مطابق شکل مشخص است، برای پیدا کردن جایگاه اسکله M که قایق‌ها هنگام

طی مسیر $MABM$ کوتاه‌ترین مسیری را طی کنند، کدام تبدیل مناسب است؟



(۱) انتقال به اندازه بردار \vec{L}

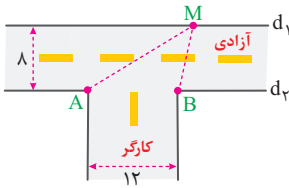
(۲) دوران 180° حول نقطه B

(۳) تجانس با نسبت ۱ - نقطه A نسبت به نقطه B

(۴) بازتاب نقطه A نسبت به خط d_1

۳۱۶. شکل زیر دو خیابان متقاطع آزادی و کارگر با عرض ۸ و ۱۲ را نشان می‌دهد، شخصی می‌خواهد از نقطه A به سمت دیگر خیابان آزادی رفته و سپس به نقطه

B برود، طول کوتاه‌ترین مسیری طی شده، توسط شخص کدام است؟

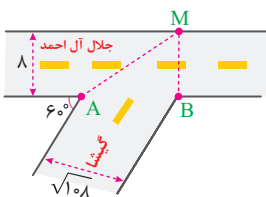


- (۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۱۵
(۴) ۲۵

۳۱۷. مطابق شکل دو خیابان گیشا و اتوبان جلال آل احمد با زاویه 60° همدیگر را قطع کرده‌اند، شخصی می‌خواهد از نقطه A در انتهای خیابان گیشا به آن طرف

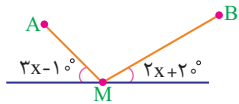
اتوبان جلال آل احمد در نقطه M رفته و سپس به نقطه B در انتهای دیگر خیابان گیشا برود. اگر عرض اتوبان جلال آل احمد ۸ و عرض خیابان گیشا $\sqrt{108}$ باشد،

کم‌ترین طول مسیری که این شخص می‌تواند طی کند، کدام است؟



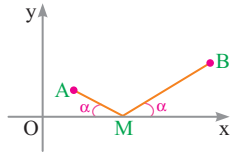
- (۱) ۲۰
(۲) ۲۵
(۳) ۱۵
(۴) ۲۴

۳۱۸. دو نقطه A و B در یک طرف خط d مفروض اند، اگر نقطه M طوری قرار گرفته باشد که خط شکسته AMB کمترین طول را داشته باشد، زاویه \widehat{AMB} کدام است؟



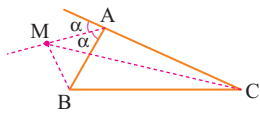
- ۴۰° (۱)
۵° (۲)
۶۰° (۳)
۲۰° (۴)

۳۱۹. اگر $A(2, 1)$ و $B(5, 3)$ و نقطه M مطابق شکل روی محور xها قرار گرفته باشد، اندازه خط شکسته AMB کدام است؟



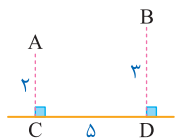
- ۵ (۱)
۴ (۲)
۶ (۳)
۸ (۴)

۳۲۰. در شکل مقابل، نقطه M روی نیمساز خارجی \widehat{A} قرار دارد. نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟



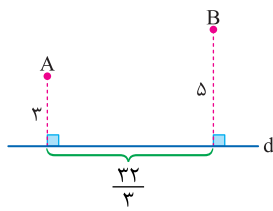
- ۱) بزرگتر از ۱
۲) کوچکتر از ۱
۳) برابر با ۱
۴) نامشخص

۳۲۱. در شکل زیر $BD=3, AC=2, CD=5$ فرض کنیم نقطه M روی خط d واقع است. کمترین مقدار $AM+MB$ کدام است؟



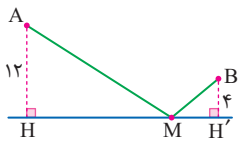
- ۲) $3\sqrt{2}$
۱) $2\sqrt{5}$
۳) $5\sqrt{2}$
۴) $5\sqrt{5}$

۳۲۲. در شکل زیر نقطه M را روی خط d طوری به دست می آوریم که $AM+BM$ کمترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟



- ۷ (۱)
۶ (۲)
۴ (۳)
۵ (۴)

۳۲۳. در شکل مقابل، نقاط A و B ثابت هستند. اگر کمترین مقدار $AM+MB$ برابر ۳۲ باشد، زاویه \widehat{HAM} کدام است؟



- ۱۵° (۱)
۳۰° (۲)
۴۵° (۳)
۶۰° (۴)



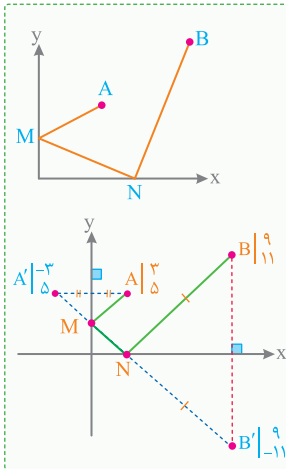
دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند، اگر نقطه M روی خط d_1 و نقطه N روی خط d_2 به طوری پیدا کردیم که طول خط شکسته AMNB کمترین طول خط شکسته AMNB کافیست قرینه A را نسبت به d_1 پیدا کرده و A_1 بنامیم، حال اگر قرینه A_1 را نسبت به خط d_2 پیدا کرده و A_2 بنامیم، A_2B_1 برابر با کمترین طول خط شکسته AMNB است.

$$\text{Min}(AMNB) = |A_2B_1|$$

یک راه دیگر برای حل این مسئله این است که بازتاب A نسبت به d_1 و بازتاب B نسبت به d_2 یعنی نقاط A' و B' را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا این دو خط را در M و N قطع کنند. در این صورت خط شکسته AMNB کوتاهترین طول را دارد و اندازه آن با $|A'B'|$ برابر است.

در هر یک از دو روش فوق وقتی AMNB کوتاهترین طول را دارد زاویه‌های طرفین M و زاویه‌های طرفین N باید با هم برابر باشد و برعکس [هرگاه این زاویه‌ها با هم برابر باشد، این کوتاهترین طول است. در ضمن در این حالت زاویه دو خط d_1 و d_2 برابر با میانگین زوایای داخلی خط شکسته AMNB است یعنی $x = \frac{y+z}{2}$

قضیه فوق را برای بیش از دو خط d_1 و d_2 نیز می‌توان تعمیم داد.



Test نقاط $A \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 9 \\ 11 \end{vmatrix}$ در صفحه مختصات مفروض اند، دو نقطه M و N همواره روی دو محور می لغزند.

(داخل - ۹۸)

کمترین اندازه خط شکسته $AMNB$ ، کدام است؟

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

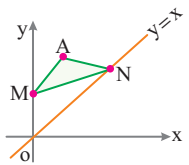
۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۳ اگر نقطه A را نسبت به محور y و نقطه B را نسبت به محور x قرینه کنیم و نقاط A' و B' را به هم وصل کنیم تا محور x ها و y ها را در M و N قطع کند، در این صورت خط شکسته $AMNB$ کمترین اندازه را خواهد داشت چون برابر $A'B'$ است.

$$\text{Min } |AMNB| = |A'B'| = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

۳۲۴. نقطه $A \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ مفروض است، نقطه M روی محور y ها و نقطه N روی نیمساز ناحیه اول می لغزند، کمترین محیط مثلث AMN کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)



۴√۲ (۱)

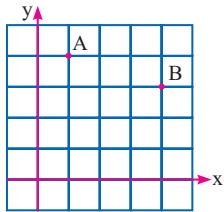
۲√۳ (۲)

√۱۰ (۳)

۲√۵ (۴)

۳۲۵. در شبکه شطرنجی زیر دو نقطه ثابت A و B مفروض اند. اندازه کوتاه ترین مسیر حرکت از نقطه A به طوری که پس از برخورد با محورهای x و y به نقطه B برسیم، برابر کدام است؟

(مشابه داخل - ۹۸)



√۷۱ (۱)

√۷۲ (۲)

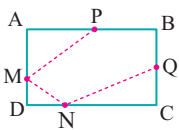
√۷۳ (۳)

√۷۴ (۴)

۳۲۶. مستطیل $ABCD$ به اضلاع ۸ و ۶ مفروض است. اگر نقاط P و Q وسط اضلاع AB و BC باشند و نقاط M و N بر اضلاع AD و DC بلغزند، کمترین

(مشابه داخل - ۹۸)

طول خط شکسته $PMNQ$ کدام است؟



۱۶ (۱)

۲۰ (۲)

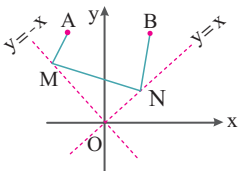
۱۸ (۳)

۱۵ (۴)

۳۲۷. نقاط $A \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 7 \\ 9 \end{vmatrix}$ در صفحه مختصات مفروض اند، نقطه M روی نیمساز ناحیه دوم و نقطه N روی نیمساز ناحیه اول در حال لغزش هستند، کمترین

(مشابه داخل - ۹۸)

طول خط شکسته $AMNB$ کدام است؟



۲۰ (۱)

۱۳ (۲)

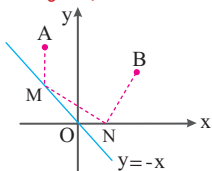
۱۰ (۳)

۸ (۴)

۳۲۸. نقاط $A \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 1 \\ 9 \end{vmatrix}$ در صفحه مختصات مفروض اند، نقطه M روی نیمساز ناحیه دوم و نقطه N روی قسمت مثبت محور x ها می لغزند، کمترین طول خط

(مشابه داخل - ۹۸)

شکسته $AMNB$ کدام است؟



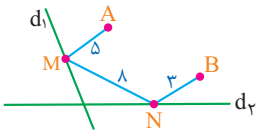
۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

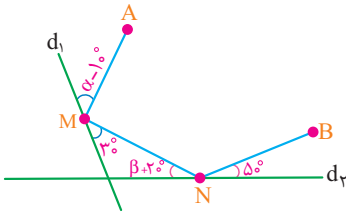
۱۰ (۴)

۳۲۹. نقاط ثابت A و B مفروض اند، نقطه M روی خط d_1 و نقطه N روی خط d_2 طوری می‌گذرد که خط شکسته AMNB کمترین طول را دارد. اگر A' بازتاب A نسبت به d_1 و B' بازتاب B نسبت به خط d_2 باشد، اندازه پاره خط $A'B'$ کدام است؟



- ۱۴ (۱)
۱۶ (۳)
۱۲ (۲)
۱۸ (۴)

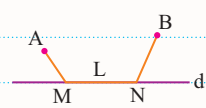
۳۳۰. نقاط A و B مطابق شکل مفروض اند، اگر فقط M و N روی خطوط d_1 و d_2 به طوری که خط شکسته AMNB کمترین طول را داشته باشد، زاویه $\alpha + \beta$ کدام است؟



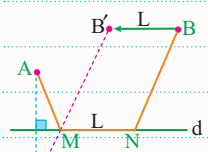
- ۷۵° (۱)
۸۵° (۳)
۷۰° (۲)
۸۵° (۴)



کاربرد مسئله هرون [نیم سوم]



نقاط A و B در یک طرف خط d مفروض اند، نقاط M و N روی خط d به فاصله L از هم قرار دارند، برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول خط شکسته AMNB به صورت زیر عمل می‌کنیم:

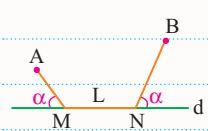


۱ بازتاب نقطه A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا می‌کنیم.
۲ نقطه B را به اندازه بردار \vec{L} به سمت A انتقال می‌دهیم تا نقطه B' به دست آید.

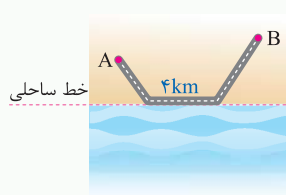


۳ از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند با معلوم شدن M به اندازه L به سمت راست می‌رویم و به نقطه N می‌رسیم در این صورت حداقل طول خط شکسته AMNB برابر است با:

$$\text{Min}(AMNB) = |A'B'| + L$$

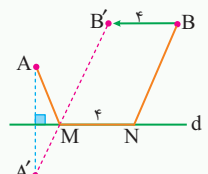


در این حالت زاویه \widehat{M} و زاویه \widehat{N} باید با هم برابر باشند.



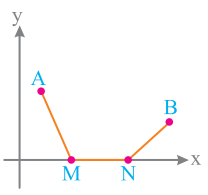
Test در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده باید در کنار ساحل باشد. برای پیدا کردن موقعیت محدوده جاده ساحلی به طوری که کل جاده کوتاه‌ترین طول ممکن را داشته باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- ۱) بازتاب و دوران
۲) بازتاب و انتقال
۳) انتقال و تجانس
۴) دوران و تجانس



۲ باید نقطه B را به اندازه ۴ واحد به سمت A انتقال دهیم و همچنین بازتاب A نسبت به خط ساحلی را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا نقطه M به دست آید اگر به اندازه ۴ واحد از M به سمت راست حرکت کنیم به N می‌رسیم و از N به B وصل می‌کنیم، مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسی‌راست.

۳۳۱. نقاط A و B در صفحه مختصات مفروض اند، اگر نقاط M و N با فاصله ۳ واحد روی محور X قرار گرفته باشند، حداقل طول خط شکسته AMNB کدام است؟



- ۵ (۱)
۶ (۲)
۷ (۳)
۸ (۴)

(مشابه داخل - ۹۹)



Tweet



Pythagorsa
@Pythagorsa 570 bc

اعداد بر جهان فرمان میروند.

Number rules the univeres

درس اول : قضیه سینوسها

درس دوم : قضیه کسینوسها

درس سوم : قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

درس چهارم : قضیه هرولن (محاسبه ارتفاعها و مساحت مثلث)

[Translate Tweet](#)

07:32 . 5/31/20

[View Tweet activity](#)

برتراند راسل درباره او می نویسد: هیچکس را نمی شناسم که در عالم اندیشه به اندازه فیثاغورس تأثیرگذار بوده باشد.

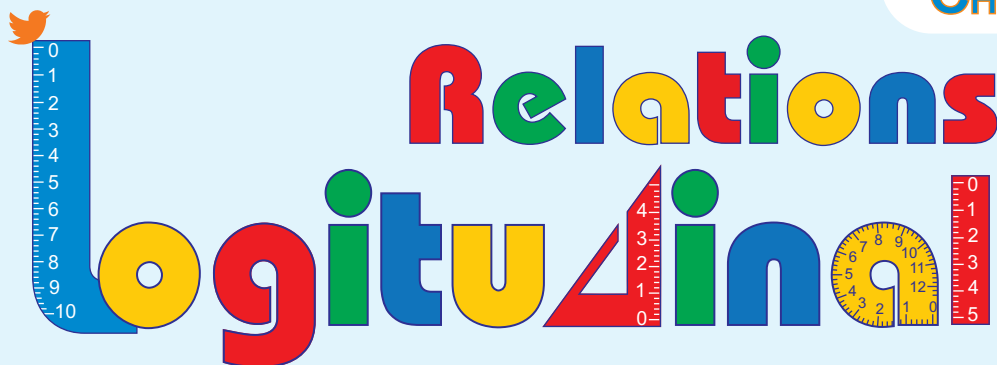
91,337

5,847

10,130,950,908



CHAPTER 3



Add another Tweet



۴۰۳. طول اضلاع مثلثی ۷، ۷، ۱۰ است. طول کوتاه‌ترین میانه چقدر است؟

۶ (۱) $\sqrt{6}$ (۲)

۵ (۴) $2\sqrt{6}$ (۳)

۴۰۴. در مثلثی با اضلاع x ، 5 ، $2x$ اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{105}{2}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱۷ (۱) 15 (۲)

۱۲ (۳) 14 (۴)

۴۰۵. در مثلثی مجموع مربعات اضلاع برابر با ۱۸۴ می‌باشد. اگر میانه‌های مثلث برابر با x ، $x+1$ باشند، طول بزرگ‌ترین میانه مثلث چقدر است؟

۵ (۱) 6 (۲) 7 (۳) 8 (۴)

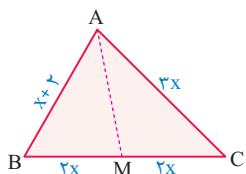
۴۰۶. در مثلث شکل مقابل، اگر میانه AM برابر با $\sqrt{37}$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

۴۰ (۱)

۴۱ (۲)

۴۲ (۳)

۴۳ (۴)



۴۰۷. اگر اندازه‌های سه میانه مثلثی ۵، ۷، ۱۰ باشد مجموع مربعات اضلاع این مثلث چقدر است؟

۲۸۴ (۱) 232 (۲) 256 (۳) 174 (۴)

۴۰۸. طول اضلاع یک متوازی‌الاضلاع ۴ و ۵ است. مجموع مربعات قطرها در این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

۱۰۰ (۱) 82 (۲) 90 (۳) 72 (۴)



رابطه استوارت

رابطه استوارت

رابطه استوارت

رابطه استوارت

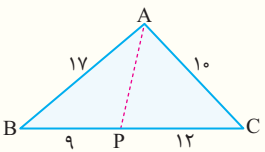
رابطه استوارت

در مثلث ABC اگر نقطه دلخواه P ضلع BC را به دو قطعه x و y تقسیم کند، با توجه به شکل، رابطه استوارت به صورت زیر برقرار است:

$$AP^2 = \frac{xb^2 + yc^2}{x+y} - xy$$

بنابراین به کمک رابطه استوارت می‌توانیم طول هر پاره خطی که رأس مثلث را به نقطه‌ای از ضلع مقابل وصل می‌کند، به دست آوریم.

Test در شکل مقابل، طول AP چقدر است؟



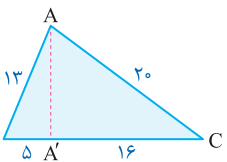
- ۹ (۲)
- ۱۱ (۱)
- ۱۰ (۴)
- ۱۲ (۳)

ف به کمک رابطه استوارت، طول AP را به دست می‌آوریم:

$$AP^2 = \frac{xb^2 + yc^2}{x+y} - xy \Rightarrow AP^2 = \frac{(9 \times 10^2) + (12 \times 17^2)}{9+12} - 9 \times 12$$

$$\Rightarrow AP^2 = \frac{(9 \times 10^2) + (12 \times 17^2)}{21} - 108 = \frac{(3 \times 100) + (4 \times 289)}{7} - 108 \Rightarrow AP^2 = \frac{1456}{7} - 108 \Rightarrow AP^2 = 208 - 108 = 100 \Rightarrow AP = 10$$

۴۰۹. در شکل زیر طول AA' چقدر است؟



۹ (۱)

$5\sqrt{6}$ (۲)

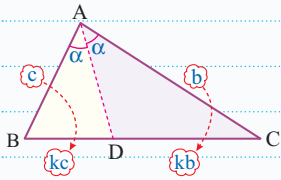
$6\sqrt{5}$ (۳)

۱۲ (۴)



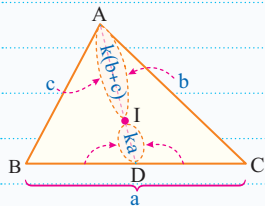
Lesson.3

در هر مثلث، نیمساز یک زاویه داخلی، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت اضلاع مجاورش تقسیم می‌کند.



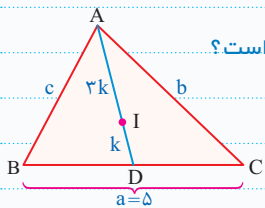
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

هر نیمساز داخلی مثلث، در محل هم‌رسی نیمسازها به نسبت «مجموع اندازه‌های دو ضلع مجاور» به «مجموع اندازه‌های دو پاره خط مقابل» [یعنی اندازه ضلع سوم] تقسیم می‌شود. به عبارت دیگر، در شکل مقابل اگر نقطه I هم‌رسی سه نیمساز باشد، پاره خط AI مضربی از $b+c$ و پاره خط DI، همان مضرب از ضلع a است:



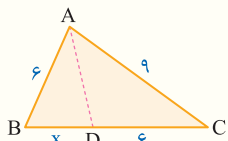
$$\frac{AI}{DI} = \frac{b+c}{a}$$

در شکل مقابل، اگر نقطه I نقطه هم‌رسی نیمسازهای مثلث ABC و $AI = 3DI$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



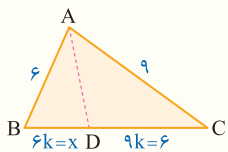
$$\frac{AI}{DI} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{b+c}{5} \Rightarrow b+c = 15 \Rightarrow \text{محیط} = a+b+c = 20$$

Test در شکل زیر AD نیمساز است، x کدام است؟



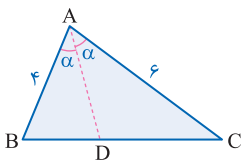
- ۴ (۱) ۵ (۲)
۳/۵ (۳) ۲/۵ (۴)

طبق قضیه نیمساز، نسبت پاره خط‌های ایجاد شده را می‌نویسیم:



$$9k = 6 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 6k = 4$$

۴۱۸. در مثلث ABC مطابق شکل اگر $AB = 4$, $AC = 6$, $BC = 5$ باشد، حاصل $DC - BD$ کدام است؟

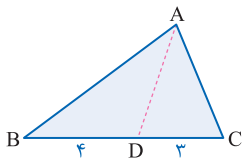


- ۰/۵ (۱) ۱ (۲)
۱/۵ (۳) ۲/۵ (۴)

۴۱۹. در مثلثی با اضلاع ۹، ۶، ۵ طول کوتاه‌ترین پاره خطی که نیمساز وارد بر ضلع کوچکتر ایجاد می‌کند، چقدر است؟

- ۵/۳ (۱) ۲ (۲)
۵/۶ (۳) ۱۰/۹ (۴)

۴۲۰. در شکل مقابل AD نیمساز است و محیط مثلث برابر ۲۱ می‌باشد، طول AC چقدر است؟



- ۶ (۱) ۹ (۲)
۸ (۳) ۱۲ (۴)

۴۲۱. در مثلث ABC به اضلاع ۳، ۷، ۸ ارتفاع و نیمساز نظیر بزرگ‌ترین ضلع، آن را به ترتیب در H و D قطع می‌کنند، اندازه DH کدام است؟ (مشابه داخل - ۹۸)

- ۱/۲ (۱) ۱ (۲)
۰/۸ (۳) ۰/۹ (۴)

۴۲۷. اضلاع مثلثی با اعداد ۲, ۳, ۴ متناسب است. نیمساز داخلی زاویه متوسط را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی

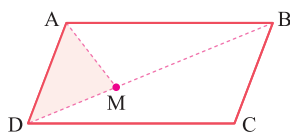
(خارج ریاضی - ۸۵)

است؟

۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۴۲۸. در متوازی‌الاضلاع شکل زیر $AB = 2AD$. نیمساز زاویه A قطر BD را در M قطع می‌کند. مساحت مثلث ADM چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



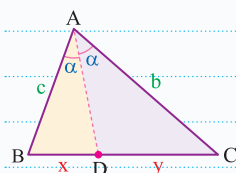
۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{6}$

۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{3}{10}$



رابطه طول نیمساز

در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی، برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع مجاور منهای حاصل ضرب اندازه‌های دو پاره خط که روی ضلع سوم ایجاد شده است. به عبارت دیگر اگر در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A باشد آنگاه **رابطه طول نیمساز** به صورت زیر خواهد بود:



حاصل ضرب قطعه‌ها ← حاصل ضرب اضلاع زاویه

$$AD^2 = bc - xy$$

اگر سه ضلع مثلث را داشته باشیم، برای استفاده از رابطه بالا، ابتدا به کمک قضیه نیمساز، طول پاره خط‌ها [X و Y] را به دست می‌آوریم، سپس به سراغ طول نیمساز می‌رویم.

در مثلث ABC، اگر دو ضلع و زاویه بین آن‌ها معلوم باشد، طول نیمساز وارد بر ضلع سوم از رابطه $d_a = \cos \frac{A}{2} \times \frac{2bc}{b+c}$ قابل محاسبه است، که در این رابطه d_a طول نیمساز زاویه A است.

سه حالت خاص مهم در محاسبه طول نیمساز

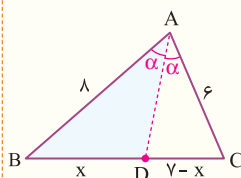
$d_a = \cos \frac{A}{2} \times \frac{2bc}{b+c}$	$\hat{A} = 60^\circ$	$\hat{A} = 90^\circ$	$\hat{A} = 120^\circ$
	$d_a = \sqrt{3} \times \frac{bc}{b+c}$	$d_a = \sqrt{2} \times \frac{bc}{b+c}$	$d_a = \frac{bc}{b+c}$

Test در مثلثی با اضلاع ۶, ۷, ۸ طول نیمساز وارد بر ضلع متوسط چقدر است؟

۱) ۶ (۲) $\sqrt{30}$

۳) ۵ (۴) $4\sqrt{2}$

ابتدا به کمک قضیه نیمساز، طول پاره خط‌های ایجاد شده روی ضلع متوسط را به دست می‌آوریم، سپس از رابطه طول نیمساز استفاده می‌کنیم:



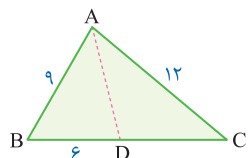
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{7-x} = \frac{6}{8} \Rightarrow 8x = 42 - 6x \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3$$

$$AD^2 = bc - BD \cdot DC \Rightarrow AD^2 = 6 \times 8 - 3 \times 4 = 36 \Rightarrow AD = 6$$

۴۲۹. در شکل زیر طول نیمساز AD کدام است؟

۱) $6\sqrt{2}$ (۲) ۷

۳) ۸ (۴) $2\sqrt{15}$



پاسخنامه
تمام تشریحی
و تمام رنگی

ANSWERS

Password

سُو گند به قَلَم و آن چه می نویسند



www.gaj.ir



Other user

ENG





57 از تساوی طول کمان‌ها نسبت شعاع‌های دو دایره معلوم می‌شود:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} (2\pi R) = \frac{45^\circ}{360^\circ} (2\pi R') \Rightarrow R' = 2R$$

بنابراین نسبت مساحت دو دایره مجذور نسبت شعاع‌ها است:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \left(\frac{2R}{R}\right)^2 = 4$$

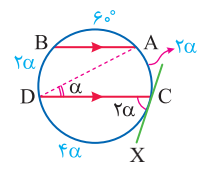
58 کمان‌های $R, \sqrt{2}R, \sqrt{3}R$ متناظر با زاویه‌های $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ هستند، بنابراین:

$$\widehat{AD} = 60^\circ, \widehat{CD} = 90^\circ, \widehat{BC} = 120^\circ$$

$$\widehat{AB} = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 90^\circ$$

59 با فرض $\beta = 2\alpha$ کمان \widehat{DC} روبه زاویهٔ ظلی \widehat{DCX} است، بنابراین

$\widehat{DC} = 4\alpha$ و همچنین کمان \widehat{AC} روبه زاویهٔ محاطی \widehat{ADC} است، در نتیجه



$\widehat{AC} = 2\alpha$ در ضمن از موازی بودن AB و DC

نتیجه می‌گیریم $\widehat{BD} = 2\alpha$ خواهد بود، از طرفی

اگر اندازهٔ یک وتر برابر باشعاع دایره باشد کمان

روبه آن 60° است، بنابراین:

$$2\alpha + 60^\circ + 2\alpha + 4\alpha = 360^\circ \Rightarrow 8\alpha = 300^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 2\alpha = 75^\circ$$

60 اگر طول پاره‌های AM و MB را برابر X و $4x$ در نظر بگیریم

داریم: $AM \cdot MB = CM \cdot MD \Rightarrow x(4x) = 4x \cdot 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

با معلوم شدن مقدار x اندازهٔ پاره‌های AM و MB و در نتیجه AB معلوم می‌شود:

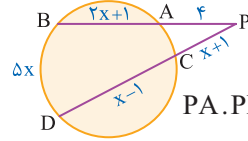
$$AM = x = 3, MB = 4x = 12 \Rightarrow AB = 3 + 12 = 15$$

61 اگر طول پاره خط MB را برابر X فرض کنیم طول پاره خط AM برابر $11 - X$ خواهد بود و با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

$$3 \times 6 = x(11 - x) \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 9 \end{cases}$$

بنابراین تفاضل $MB - MA$ برابر $9 - 2 = 7$ به دست می‌آید.

62 روابط طولی را برای نقطهٔ P می‌نویسیم:

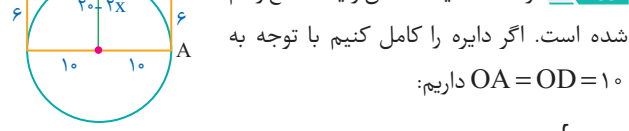


$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow \underbrace{4(2x+1)}_{8x+4} = \underbrace{(x+1)(x-1)}_{x^2-1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

حال می‌توانیم طول AB را به دست آوریم: $AB = 2x + 1 = 11$

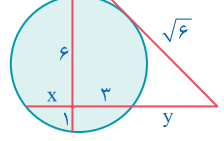
63 از نقطهٔ B یک مماس و یک قاطع رسم شده است. اگر دایره را کامل کنیم با توجه به



داریم: $OA = OD = 10$

$$BA^2 = BE \cdot BF \Rightarrow 6^2 = x(20 - 2x + x) \Rightarrow x^2 - 20x + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 18 \end{cases}$$

64 از روابط طولی برای دو نقطه در دایره داریم:

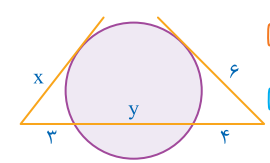


$$1) x(3) = 1 \times 6 \Rightarrow x = 2$$

$$2) y(y+5) = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -6 \end{cases}$$

بنابراین $y - x = -1$ خواهد بود.

65 برای دو نقطه روابط طولی در دایره را استفاده می‌کنیم:



$$1) 6^2 = 4(4+y) \Rightarrow y = 5$$

$$2) x^2 = 3(3+y) = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

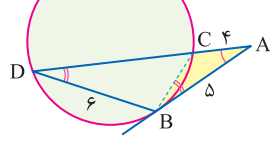
66 ابتدا برای دو وتر AB و CD که در M متقاطع‌اند، رابطهٔ طولی را

می‌نویسیم: $MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow 3x = 1 \times 6 \Rightarrow x = 2$

حال برای امتداد دو وتر AB و DE که در F متقاطع‌اند، رابطهٔ طولی را می‌نویسیم:

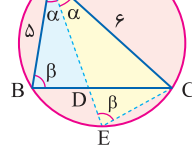
$$2) FB \cdot FA = FE \cdot FD \Rightarrow \underbrace{4(4+2+3)}_{4 \times 9} = \underbrace{y(y+3y)}_{4y^2} \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$$

67 با توجه به زاویه‌های مشخص شده در شکل، دو مثلث ABC و ABD متشابه‌اند؛ اگر نسبت اضلاع متناظر را برای آن‌ها بنویسیم، خواهیم داشت:



$$\triangle ABC \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{BC}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow BC = \frac{24}{5} = 4.8$$

68 از E به C وصل می‌کنیم، مثلث‌های ACE و ABD با دو زاویهٔ برابر متشابه‌اند. بنابراین:



$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AC \Rightarrow AD \cdot AE = 5 \times 6 = 30$$

69 برای این‌که دو دایره متخارج باشند باید $d > R + R'$ باشد. در

$$8 > R + 5 \Rightarrow R < 3$$

نتیجه داریم:

70 دو دایره دارای 3 مماس مشترک هستند، پس مماس خارج‌اند و رابطهٔ $d = R + R'$ برقرار است، یعنی:

$$d = R + R' \Rightarrow 7 = x + 2 + x - 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

71 دو دایره دارای چهار مماس مشترک هستند، پس متخارج‌اند، بنابراین باید $O_1 O_2 > R_1 + R_2$ باشد:

$$1) O_1 O_2 = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = 4 \Rightarrow 4 > 2 + \sqrt{16-a} \Rightarrow \sqrt{16-a} < 2$$

$$\Rightarrow 16-a < 4 \Rightarrow a > 12$$

از طرفی شعاع دایره‌ها نیز باید عدد حقیقی باشد، بنابراین:

$$2) 16-a > 0 \Rightarrow a < 16$$

با اشتراک‌گیری از روابط 1 و 2 خواهیم داشت: $12 < a < 16$



78 از روابط طولی برای نقطه O خارج از دایره بزرگتر استفاده می‌کنیم:

$OT^2 = OP \cdot OQ = 4(25) = 100 \Rightarrow OT = 10$

79 برای به دست آوردن طول مماس بر دایره بزرگتر ابتدا در مثلث OAP مقدار OP را پیدا می‌کنیم:

$OP = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$

حال به سراغ مثلث OPB می‌رویم و به کمک فیثاغورس PB را به دست می‌آوریم:

$PB = \sqrt{PO^2 - OB^2} = \sqrt{40 - 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

80 بلندترین وتر، وتری است که به مرکز دایره نزدیکتر باشد، پس وتری که در P بر دایره کوچکتر مماس باشد، بلندترین وتر است.

$AP = \sqrt{AO^2 - OP^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AB = 4\sqrt{6}$

81 طول مماس مشترک داخلی از رابطه $L = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$ به دست می‌آید:

$TT' = \sqrt{17^2 - (10+5)^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8$

82 اگر طول خط‌المركزين را با d نمایش دهیم، داریم:

$9 = \sqrt{d^2 - (7+5)^2} \Rightarrow 81 = d^2 - 144 \Rightarrow d^2 = 225 \Rightarrow d = 15$

83 اگر زاویه بین مماس مشترک‌های داخلی را با θ نشان دهیم، داریم:

$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{R+R'}{OO'} \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{7+5}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 30^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$

84 طول مماس مشترک خارجی از رابطه $L = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$ به دست می‌آید:

$12 = \sqrt{d^2 - (9-4)^2} \Rightarrow d = 13$

بنابراین بیشترین فاصله نقاط دو دایره برابر است با:

$d + R + r = 13 + 9 + 4 = 26$

85 باید طول خط‌المركزين را با مجموع و تفاضل دو شعاع مقایسه کنیم:

$TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow 4R = \sqrt{d^2 - (4R-R)^2} \Rightarrow d = 5R$

چون $d = 4R + R$ است، [طول خط‌المركزين با مجموع شعاع‌ها برابر است]، پس دو دایره مماس خارج هستند.

86 از رابطه داده شده برای طول مماس مشترک خارجی دو دایره استفاده می‌کنیم:

$L = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow 15 = \sqrt{d^2 - (14-6)^2} \Rightarrow d = 17$

87 به کمک زاویه بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره، طول خط‌المركزين را پیدا می‌کنیم:

$\sin \frac{60^\circ}{2} = \frac{R-R'}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{13-3}{d} \Rightarrow d = 20$

72 قطر بزرگ‌ترین دایره مماس بر دو دایره همواره برابر با $MN = d + R + r$ است:

$MN = 1 + 7 + 2 = 10$

بنابراین شعاع بزرگ‌ترین دایره مماس بر هر دو دایره برابر 5 است.

73 قطر کوچک‌ترین دایره مماس بر دو دایره همواره برابر با است:

$MN = |d - R| - r = |1 - 7| - 2 = 4$

بنابراین شعاع کوچک‌ترین دایره مماس بر هر دو دایره برابر 2 است.

74 دو دایره مماس خارج‌اند، بنابراین طول خط‌المركزين برابر مجموع شعاع دو دایره است:

$OO' = r + 3 \Rightarrow 2r + 1 = r + 3 \Rightarrow r = 2$

بیشترین فاصله بین نقاط دو دایره برابر است با:

$AB = d + R + r = 5 + 3 + 2 = 10$

75 مطابق شکل مثلث OAT یک مثلث قائم‌الزاویه است به طوری که $OA = 5$ و $OT = 3$ پس $AT = 4$ است، از طرفی TH ارتفاع وارد بر وتر است، بنابراین:

$TH \cdot OA = AT \cdot OT \Rightarrow TH \times 5 = 4 \times 3 \Rightarrow TH = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

حال اندازه پاره خط واصل بین نقاط تماس قابل محاسبه است:

$TT' = 2TH = 4\frac{4}{5}$

76 مساحت دایره برابر 3π است، پس شعاع دایره $\sqrt{3}$ است. حال در مثلث قائم‌الزاویه رنگ شده خواهیم داشت:

$\tan(\frac{\widehat{M}}{2}) = \frac{OT}{MT} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\widehat{M}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{M} = 60^\circ$

$\triangle MTT'$ متساوی‌الاضلاع است، بنابراین داریم:

$TT' = MT = MT' = 3$

77 می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره برابرند پس به مماس‌هایی که از نقاط M, N, P بر دایره رسم شده توجه می‌کنیم:

$PF = PC, NE = ND, MA = ME, MB = MF$

پس محیط مثلث MNP با مجموع $AB + CD$ برابر است.

$AB = CD = 17 \Rightarrow AB + CD = 34$



177 بررسی تک تک موارد:

- A همه اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر موازی نیست، پس تبدیل T شیب پا نیست.
- B دو مثلث همنهشت اند، یعنی تبدیل T طول پا است.
- C شکل 1 پادساعتگرد و شکل 2 ساعتگرد است پس تبدیل T جهت پا نیست.

178 4 دو شکل F, F' الزاماً هم مساحت یا هم جهت نیستند و حتی ممکن است اضلاع آن ها موازی نباشد اما در هر شرایطی زوایای دو شکل با هم برابر است.

179 تبدیل T ایزومتری نیست و شیب اضلاع را نیز ثابت نگه نداشته است، ولی در تبدیل T جهت شکل F, F' عوض شده است.

180 4 اندازه شکل 1 توسط تبدیل T تغییر کرده، بنابراین این تبدیل ایزومتری یا طول پا نیست، همچنین جهت شکل نیز توسط این تبدیل عوض شده بنابراین این تبدیل جهت پا نیست در ضمن شیب اضلاع نظیر در دو شکل با هم یکسان نیست، در نتیجه این تبدیل شیب پا نیز محسوب نمی شود. پس گزینه 4 صحیح می باشد.

181 3 در تبدیل طول پا، اندازه پاره خط، فاصله بین نقاط و مساحت شکل ثابت می ماند ولی در مورد شیب خط نمی توان اظهار نظر کرد.

182 3 اضلاع مثلث M₁ با اضلاع نظیرشان در مثلث M₂ موازی نیستند، پس تبدیل T شیب پا نیست.

183 4 مطابق شکل، نقطه A با بازتاب نسبت به قطر BD روی C تصویر می شود یعنی داریم:
 $AH=HC \Rightarrow \begin{cases} AB=BC \\ AD=DC \end{cases}$
 بنابراین چهار ضلعی ABCD محیطی است.

184 3 باید توجه کنیم که محور بازتاب باید عمود منصف پاره خطی باشد که هر نقطه و تصویرش را به هم وصل می کند. در گزینه 3 چنین چیزی رعایت نشده است.

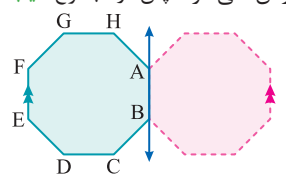
185 2 باید نقطه A روی B تصویر شود، پس خط بازتاب باید عمود منصف AB باشد. این خط از مرکز دو دایره می گذرد.

186 3 مطابق شکل نقطه A را به A' وصل می کنیم، چون بازتاب ایزومتری است و اندازه زاویه را حفظ می کند پس:

$$\begin{cases} A'B=AB=4 \\ \widehat{BA'A} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow S_{ABA'} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

187 3 مطابق شکل، 8 ضلعی منتظم را نسبت به امتداد ضلع AB بازتاب می دهیم، بنابراین ضلع AB بر خودش منطبق است و شیب آن عوض نمی شود،

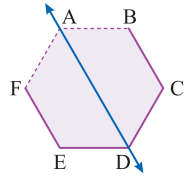
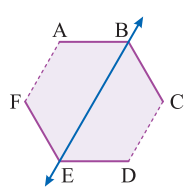
ضلع EF نیز بر خطی موازی با خودش تصویر می شود، دو ضلع CD و GH بر محور بازتاب عمودند پس در تصویر آن ها شیب عوض نمی شود، پس در مجموع شیب دقیقاً 4 تا از اضلاع تحت بازتاب، ثابت می ماند.
 [بازتاب تنها در صورتی شیب خط را حفظ می کند که خط موازی محور بازتاب یا عمود بر آن باشد.]



188 بررسی هر دو حالت:

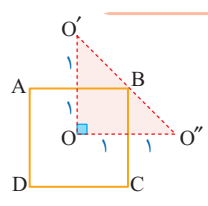
1 در شکل مقابل دو ضلع AF و CD اضلاع مقابل از شش ضلعی منتظم هستند که با بازتاب نسبت به قطر بزرگ BE روی یکدیگر تصویر می شوند.

2 در شکل مقابل نیز دو ضلع مجاور AB و AF نسبت به قطر بزرگ AD [که نیمساز زاویه بین این دو ضلع مجاور است]، روی یکدیگر تصویر می شوند.

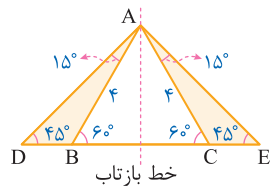


189 3 محور بازتاب باید عمود منصف پاره خطی باشد که هر نقطه را به تصویرش وصل می کند، همچنین دو شکل دارای جهت های تغییر یافته هستند بنابراین خط بازتاب باید در امتداد AO باشد.

190 2 شکل را رسم می کنیم که با توجه به اندازه ها، مثلث OO'O'' قائم الزاویه متساوی الساقین به ضلع 2 است، بنابراین:
 $S_{OO'O''} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$



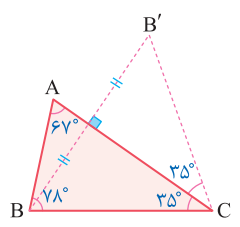
191 2 مطابق شکل خط بازتاب عمود منصف BC است که از A می گذرد همچنین دو مثلث ABD و ACE هم نهشت اند بنابراین داریم:



$$\begin{cases} AB=AC=4 \\ \widehat{D} = \widehat{E} = 45^\circ \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 15^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$$

بنابراین مثلث ABC متساوی الاضلاع است و طول ضلع BC نیز برابر 4 است.

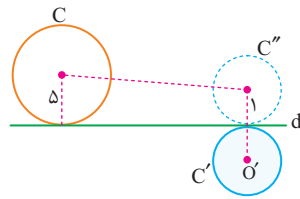
192 1 می دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است، بنابراین:



$\widehat{ACB} = 180^\circ - 67^\circ - 78^\circ = 35^\circ$
 از طرفی محور بازتاب نیمساز زاویه بین خط و تصویرش است، پس AC نیمساز زاویه بین BC و B'C است و داریم:

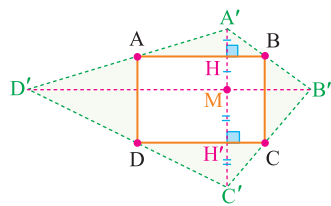
$$\widehat{ACB'} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{BB'C} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

193 خط d اکنون مماس مشترک خارجی دو دایره C, C'' محسوب می‌شود، بنابراین به سراغ رابطه طول مماس مشترک می‌رویم: [شکل فرضی است]



$$L = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{d^2 - (\Delta - 1)^2} \Rightarrow d^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow d = 5$$

194 نقطه M با بازتاب نسبت به AB و CD روی A' و C' تصویر شده است، پس AB عمود منصف MA' و همچنین پاره خط CD عمود منصف MC' است، بنابراین:



$$A'C' = A'M + MC' = 2MH + 2MH' = 2(MH + MH') = 2AD$$

به همین ترتیب $B'D' = 2AB$ است، حال می‌توانیم نسبت مساحت‌ها را به دست آوریم:

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}A'C' \cdot B'D'}{AB \cdot AD} = \frac{\frac{1}{2}(2AD)(2AB)}{AB \cdot AD} = 2$$

مساحت هر چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم، با نصف حاصل ضرب اندازه قطرها برابر است.

195 بازتاب $A(3, 4)$ نسبت به محور x ها $A'(3, -4)$ و بازتاب $A'(3, -4)$ نسبت به محور y ها $A''(-3, -4)$ است. حال باید طول سه ضلع مثلث را به دست آوریم:

$$AA' = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$$

$$A'A'' = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6 \Rightarrow \text{محیط} = 8 + 6 + 10 = 24$$

$$AA'' = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

196 بازتاب $A(2, 1)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $A'(1, 2)$ و بازتاب $B(2, -4)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم $B'(-4, -2)$ است، بنابراین:

$$|A'B'| = \sqrt{(-4-1)^2 + (-2-2)^2} = 5$$

$$B'(-4, -2)$$

197 چون عرض دو نقطه قرینه هم است، بنابراین نقطه A تحت بازتاب نسبت به محور x ها روی نقطه A' تصویر می‌شود.

198 خط d عمود بر پاره خط AA' است، بنابراین شیب آن عکس قرینه شیب AA' است:

$$m_{AA'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6+4}{3-2} = -2 \Rightarrow m_d = \frac{1}{2}$$

199 محور بازتاب عمود منصف پاره خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-1)}{1-\Delta} = -1$$

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1, 3) + (\Delta, -1)}{2} = (3, 1)$$

شیب خط d عکس و قرینه شیب AB است و از نقطه M می‌گذرد، بنابراین معادله آن به صورت مقابل است:

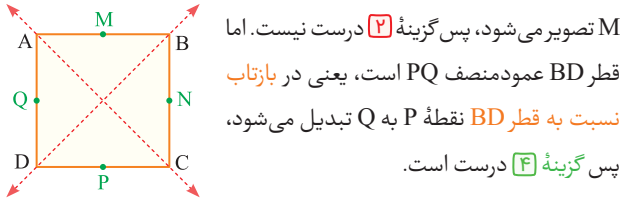
$$y-1 = 1(x-3) \Rightarrow y = x-2$$

200 باید وسط پاره خط AB بر خط D منطبق شود.

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3, a) + (-a, \Delta)}{2} = \left(\frac{3-a}{2}, \frac{a+\Delta}{2}\right)$$

$$\frac{a+\Delta}{2} = \frac{3-a}{2} + 2 \Rightarrow a+\Delta = 3-a+4 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

201 در بازتاب نسبت به قطر AC نقطه M به Q تبدیل می‌شود، پس گزینه‌های **1**، **3**، درست نیست. در بازتاب نسبت به قطر BD نقطه N به نقطه

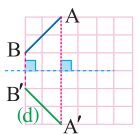


M تصویر می‌شود، پس گزینه **2** درست نیست. اما قطر BD عمود منصف PQ است، یعنی در بازتاب نسبت به قطر BD نقطه P به Q تبدیل می‌شود، پس گزینه **4** درست است.

202 خطوط L_1 و L_2 ممکن است متقاطع نیز باشند، بنابراین گزینه **1** نادرست است. در ضمن در حالتی که L_1 و L_2 موازی هستند، خط d

نیمساز زاویه L_1 و L_2 نیست، یعنی گزینه **2** نیز نادرست است. از طرفی گزینه **4** تنها در حالتی می‌تواند درست باشد که L_1 و L_2 بر هم منطبق باشند؛ پس گزینه **4** نیز نادرست است. اما اگر یکی از دو خط L_1 یا L_2 با خط d موازی باشد، خط دیگر نیز با آن موازی است، بنابراین تنها گزینه قابل قبول، گزینه **3** است.

203 پاره خط AB با پاره خط (b) هم اندازه نیست، پس گزینه **2** نادرست است. در سایر گزینه‌ها نیز فقط پاره خط (d) می‌تواند تصویر پاره خط AB باشد،



زیرا با توجه به شکل اگر دو سر پاره خط (d) را با A' و B' نام‌گذاری کنیم، عمود منصف‌های دو پاره خط AA' و BB' بر هم منطبق هستند ولی برای بقیه پاره خط‌ها، این اتفاق نمی‌افتد.

204 فقط خطی که وسط d و d' قرار دارد و با آن‌ها موازی است می‌تواند خط بازتاب باشد. بنابراین فقط یک محور بازتاب وجود دارد.

205 هرکدام از نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط می‌توانند خط بازتاب باشند. پس دو خط بازتاب وجود دارد.

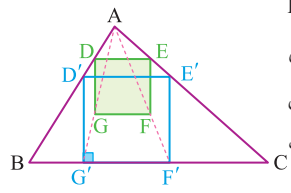
206 دو خط داده شده دارای شیب‌های مختلف هستند، بنابراین متقاطع هستند، در نتیجه تحت بازتاب نسبت به نیمسازهای دو خط به هم تصویر می‌شوند. یعنی دو خط مختلف.

207 شیب دو خط $y = 3x + 5$ ، $y = 3x - 1$ یکسان است و تحت بازتاب نسبت به خط $y = 3x + \frac{5+(-1)}{2}$ بر هم تصویر می‌شود. یعنی یک محور بازتاب وجود دارد.



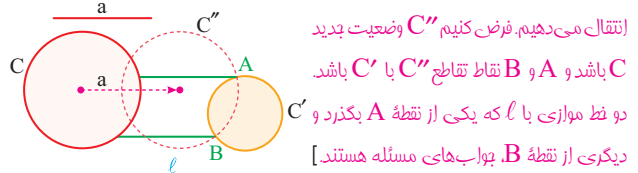
359 برای رسم پاره‌خطی که به نسبت k تقسیم شده باشد، از تجانس استفاده می‌شود.

360 مربع دلخواه $DEFG$ را درون مثلث چنان در نظر می‌گیریم که دو رأس E و D روی اضلاع AB و AC باشد و ضلع DE موازی قاعده BC باشد



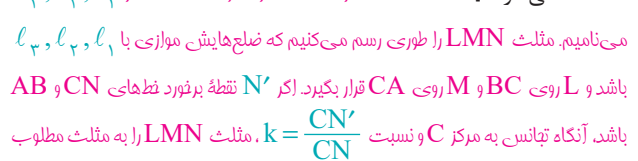
این مربع را با ضریب مناسبی مانند k منبسط می‌کنیم تا دو رأس F و G به روی قاعده BC منطبق شود، در واقع در این فرآیند ما از تجانس به مرکز A و با نسبت $k = \frac{G'F'}{GF}$ استفاده کرده‌ایم.

361 چون صحبت از رسم یک پاره‌خط با اندازه مشخص و موازی راستای بخصوص است، انتقال جواب است. [دایره C را به طول داده شده a در امتداد l



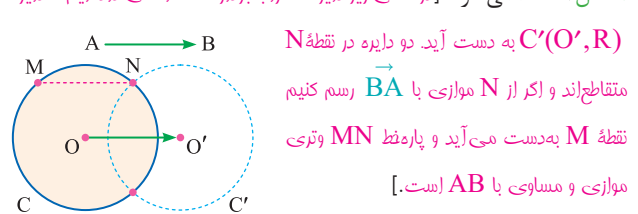
انتقال می‌دهیم. فرض کنیم C'' وضعیت جدید C باشد و A و B نقاط تقاطع C'' با C' باشد. دو خط موازی با l که یکی از نقطه A بگذرد و دیگری از نقطه B ، پاره‌های مسئله هستند]

362 برای رسم یک شکل محاط در یک شکل دیگر از تبدیل تجانس استفاده می‌شود. [مثلث داده شده را ABC و خطوط داده شده را l_1, l_2, l_3 می‌نامیم. مثلث LMN را طوری رسم می‌کنیم که ضلع‌هایش موازی با l_1, l_2, l_3 باشد و L روی BC و M روی CA قرار بگیرد. اگر نقطه برخورد خط‌های AB و CN باشد، آنگاه تجانس به مرکز C و نسبت $k = \frac{CN'}{CN}$ مثلث LMN را به مثلث مطلوب $L'M'N'$ تبدیل می‌کند.]

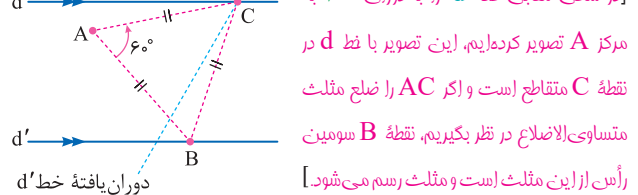


انتقال استفاده می‌شود. [در شکل زیر دایره C را با بردار \vec{AB} انتقال داده‌ایم تا دایره $C'(O', R)$ به دست آید. دو دایره در نقطه N متقاطع‌اند و اگر از N موازی با \vec{BA} رسم کنیم نقطه M به دست می‌آید و پاره‌خط MN وتره موازی و مساوی با AB است.]

363 برای رسم پاره‌خط به طول معلوم و موازی راستای به خصوص از انتقال استفاده می‌شود. [در شکل زیر دایره C را با بردار \vec{AB} انتقال داده‌ایم تا دایره $C'(O', R)$ به دست آید. دو دایره در نقطه N متقاطع‌اند و اگر از N موازی با \vec{BA} رسم کنیم نقطه M به دست می‌آید و پاره‌خط MN وتره موازی و مساوی با AB است.]



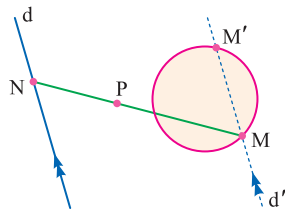
364 برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاع از دوران 60° استفاده می‌شود. [در شکل مقابل خط d' را با دوران 60° به مرکز A تصویر کرده‌ایم. این تصویر با خط d در نقطه C متقاطع است و اگر AC را ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر بگیریم، نقطه B سومین رأس [از این مثلث است و مثلث رسم می‌شود.]



365 برای رسم پاره‌خط به طول معلوم و موازی راستای به خصوص از انتقال استفاده می‌شود.

366 برای رسم یک شکل محاط در یک شکل دیگر از تبدیل تجانس استفاده می‌شود.

367 برای رسم پاره‌خطی که به نسبت k تقسیم شده باشد، از تجانس استفاده می‌شود. [خط d را در تجانس به مرکز P و نسبت k تصویر می‌کنیم تا خط d' به دست آید. خط d' و دایره در نقطه M متقاطع‌اند. اگر MP را امتداد دهیم تا خط d در نقطه N قطع کند، طبق ویژگی‌های تجانس داریم:]



استفاده می‌شود. [خط d را در تجانس به مرکز P و نسبت k تصویر می‌کنیم تا خط d' به دست آید. خط d' و دایره در نقطه M متقاطع‌اند. اگر MP را امتداد دهیم تا خط d در نقطه N قطع کند، طبق ویژگی‌های تجانس داریم:]

$$\frac{MP}{NP} = k \Rightarrow MP = kNP$$

اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که در شکل فوق خط d' ، دایره را در نقطه دیگری مانند M' نیز قطع می‌کند که همه داستان‌ها برای M' هم دقیقاً صادق است. در مورد تعداد جواب‌های مسئله به وضعیت خط d' و دایره نگاه می‌کنیم. اگر خط d' و دایره متقاطع باشند، مسئله دارای دو جواب و اگر خط d' و دایره مماس باشند، مسئله دارای یک جواب است و اگر خط d' دایره را قطع نکند، مسئله بدون جواب است.

368 چون قرار است پاره‌خطی رسم کنیم که نقطه وسط آن معلوم است از تجانس معکوس با نسبت $k = -1$ استفاده می‌شود. البته این تبدیل دوران 180° نیز به حساب می‌آید.

Relations Logitudinal

روابط طولی

369 مطابق شکل، C زاویه کوچکتر است. برای پیدا کردن آن باید ابتدا AH را به دست آوریم سپس تانژانت زاویه C را در مثلث AHC محاسبه کنیم:

$$AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow AH^2 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

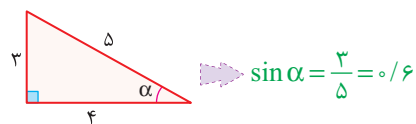
حال در مثلث AHC اضلاع مقابل و مجاور به زاویه C معلوم است، بنابراین:

$$\tan \hat{C} = \frac{AH}{CH} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

370 ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس طول اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

به ازای $x = 3$ طول اضلاع مثلث برابر ۳، ۴، ۵ خواهد بود و داریم:



$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0.6$$

371 ابتدا زاویه C را به دست می آوریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + 75^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

حال با استفاده از قضیه سینوس ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$$

372 چون نسبت دو ضلع و یک زاویه معلوم است، برای پیدا کردن زاویه دیگر از قضیه سینوس ها استفاده می کنیم:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\sin C}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = 105^\circ \\ \hat{C} = 135^\circ \Rightarrow \hat{A} = 15^\circ \end{cases}$$

373 یک ضلع و تمام زاویه های مثلث معلوم است، برای پیدا کردن دو ضلع دیگر می توانیم از قضیه سینوس ها استفاده کنیم:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 30^\circ}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{6}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

374 با معلوم بودن دو زاویه، زاویه سوم قابل

به دست آوردن است:

$$\hat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$$

حال طبق قضیه سینوس ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{6}$$

375 با معلوم بودن دو زاویه، زاویه سوم قابل به دست آوردن است:

$$\hat{A} = 120^\circ, \hat{C} = 15^\circ \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

حال طبق قضیه سینوس ها داریم:

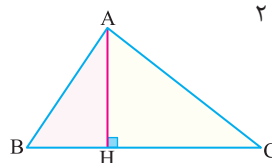
$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

376 ابتدا به کمک قضیه سینوس ها طول ضلع AC را به دست می آوریم:

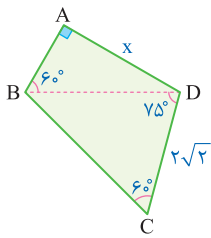
$$\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

حال چون $\hat{A} = 105^\circ$ است، ارتفاع AH را

رسم می کنیم:



$$\begin{aligned} \triangle AHB: BH &= AB \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} \\ \triangle AHC: CH &= AC \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{6} \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{2} + \sqrt{6} \end{aligned}$$



377 برای محاسبه x نیاز به معلوم بودن

ضلع BD از مثلث ABD داریم. بنابراین ابتدا به سراغ مثلث BDC می رویم و ضلع BD را به دست می آوریم:

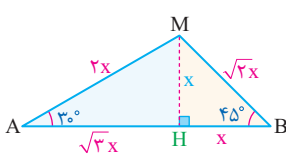
$$\hat{D}BC = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$$

طبق قضیه سینوس ها در مثلث BDC داریم:

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = \frac{CD}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{BD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow BD = 2\sqrt{3}$$

حال در مثلث ABD داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{BD} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$$



378 زاویه M در این مثلث 105°

است، پس ارتفاع MH را رسم می کنیم،

حال اگر فرض کنیم $MH = x$ باشد،

در این صورت:

$$MH = x \Rightarrow \begin{cases} \triangle AMH: AH = \sqrt{3}x, AM = 2x \\ \triangle BMH: BH = x, MB = \sqrt{2}x \end{cases}$$

با توجه به روابط فوق طول ضلع AB بر حسب x قابل محاسبه است:

$$AB = \sqrt{3}x + x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 10(\sqrt{3} - 1)$$

بنابراین فاصله هواپیما تا نزدیک ترین ایستگاه برابر است با:

$$MB = 10(\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{2} = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

379 ابتدا اندازه زاویه A را به دست می آوریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 45^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ$$

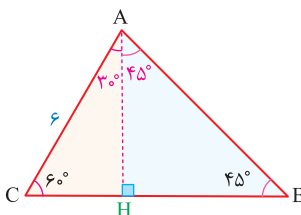
حال با توجه به این که $\hat{A} = 75^\circ$ است از رأس A، ارتفاع AH را رسم می کنیم.

در مثلث قائم الزاویه ACH، ضلع CH رو به زاویه 30° است و ضلع AH رو به

زاویه 60° است، بنابراین:

$$\text{1) } CH = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\text{2) } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$



از طرفی دیگر مثلث ABH، مثلثی قائم الزاویه و متساوی الساقین است. بنابراین:

$$BH = AH = 3\sqrt{3} \Rightarrow BC = CH + BH = 3 + 3\sqrt{3} = 3(\sqrt{3} + 1)$$

380 چون رابطه بین اضلاع و زوایای مقابل آن ها داده شده به سراغ

قضیه سینوس ها می رویم:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow b \sin \hat{C} = c \sin \hat{B}$$

از طرفی طبق فرض مسئله رابطه $b \cos \hat{C} = c \sin \hat{B}$ برقرار است، بنابراین:

$$b \sin \hat{C} = b \cos \hat{C} \Rightarrow \sin \hat{C} = \cos \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$