جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع هندسه

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی

نشرالگو

مجموعه کتاب‌های ریاضی رشتهٔ ریاضی نشر الگو:

- ریاضی ۱ (تست و سه‌بعدی)
- حسابان ۱ (تست و سه‌بعدی)
- حسابان ۲ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۱ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۲ (تست و سه‌بعدی)
- هندسه ۳ (تست و سه‌بعدی)
- آمار و احتمال (تست و سه‌بعدی)
- هندسه پایه
- ریاضیات پایه
- موج آزمون ریاضی
- موج آزمون هندسه
- جامع ریاضی + موج آزمون
- ریاضیات گسسته (تست و سه‌بعدی)
- موج آزمون ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

- درس‌نامهٔ کامل با بیان تمام نکات مهم
- ۵۲۵ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۱۰۹۱ پرسش چهارگزینه‌ای در آزمون‌ها
- ۸۲۹ پرسش چهارگزینه‌ای ایستگاه یادگیری
- ۱۰۰ آزمون مبحثی و جامع از کتاب‌های هندسه ۱، هندسه ۲ و هندسه ۳
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای (در جلد دوم)

در این کتاب «پاسخ‌های تشریحی» تست‌های جلد اول آمده است. همچنین، می‌توانید فایل PDF رایگان پاسخ‌های تشریحی را از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

(رشتهٔ ریاضی) https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشتهٔ تجربی) https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

نشر الگو
www.olgoobooks.ir

پیشگفتار

به نام خدا

با توجه به کنکورهای برگزار شده در دو سال اخیر در داخل و خارج کشور، اهمیت درس هندسه به‌وضوح از دید طراحان سؤال مشخص است. پس لازم است شما دانش‌آموزان عزیز و گرانقدر با تست‌های گوناگون هر سه درس هندسه ۱، ۲ و ۳ آشنا شوید.

هدف‌مان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب هندسه ۳ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ را مرور کنید. این کتاب یازده فصل دارد. به‌جز فصل یازدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل یازدهم ویژهٔ «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب هندسه ۳ را در سه فصل گنجانده‌ایم. هفت فصل دیگر مربوط به کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «ایستگاه یادگیری» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. همهٔ آزمون‌ها به‌جز آزمون‌های جامع کلی ده پرسش دارند. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همهٔ مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هرچه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم.

پاسخ پرسش‌های ایستگاه یادگیری و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخهٔ چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را از سایت انتشارات الگو دریافت کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: پاسخ تشریحی ایستگاه‌های یادگیری

فصل دوم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها

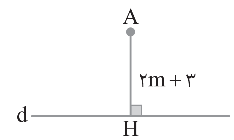
فصل اول

پاسخ تشریحی
ایستگاه‌های یادگیری

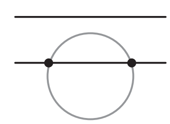
۱ (۴) فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر $۲m+۳$ است و نقاطی که از A به فاصلهٔ ۹ هستند، روی دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۹ قرار دارند. بنابر فرض سؤال این دایره خط d را نباید قطع کند. پس باید شعاع دایره از فاصلهٔ AH کوچک‌تر باشد. بنابراین

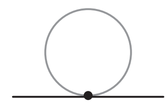
$$AH>۹\Rightarrow ۲m+۳>۹\Rightarrow ۲m>۶\Rightarrow m>۳$$

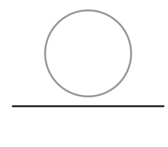
در بین گزینه‌ها فقط $۲\sqrt{۳}$ در نامساوی $m>۳$ صدق می‌کند.

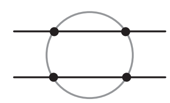


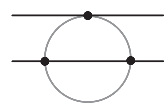
۲ (۳) مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ هستند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع ۴ (قطر ۸). همچنین مجموعهٔ نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط موازی L هستند که فاصلهٔ آن‌ها از L برابر ۲ است (دقت کنید که این دو خط از یکدیگر به فاصلهٔ ۴ هستند). نقاط مشترک دایره و این دو خطِ موازی جواب هستند. حالت‌های زیر رُخ می‌دهد.


دو جواب

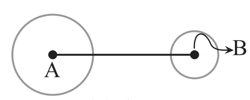

یک جواب


بدون جواب

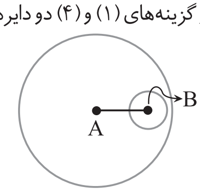

چهار جواب


سه جواب

۳ (۲) نقاطی که از A به فاصلهٔ m و از B به فاصلهٔ n هستند به‌ترتیب روی دو دایره به مراکز A و B و شعاع‌های m و n قرار دارند. اگر این دو دایره یکدیگر را قطع نکنند، نقطه‌ای با ویژگی مورد نظر وجود نخواهد داشت (شکل‌های زیر را ببینید). اگر $m=۱۱$ و $n=۱$، شکل (۲) ایجاد می‌شود و مسئله جواب ندارد. توجه کنید در گزینه‌های (۱) و (۴) دو دایره مماس و در گزینهٔ (۳) دو دایره متقاطع‌اند.

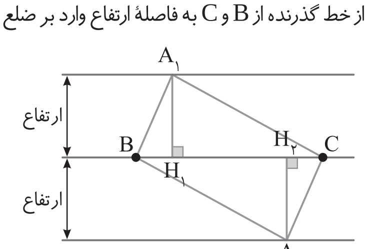


شکل (۱)

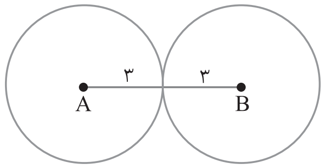


شکل (۲)

۴ (۴) چون طول ارتفاع (AH) ثابت است و رأس‌های B و C هم ثابت هستند، پس A روی دو خطِ موازیِ خط گذرنده از نقطه‌های B و C است که فاصلهٔ آن‌ها از خط گذرنده از B و C به فاصلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC است.



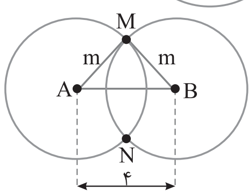
۵ (۲) مجموعهٔ نقطه‌هایی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع $r_۱=۳$. به همین صورت مجموعهٔ نقطه‌هایی که از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای است به مرکز B و شعاع $r_۲=۳$. چون $AB=r_۱+r_۲$، پس یک نقطه با ویژگی مورد نظر به‌دست می‌آید.



۶ (۱) باید دو دایره به مرکزهای A و B و شعاع m یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند. بنابراین با توجه به شکل باید

$$AB<AM+BM\Rightarrow ۴<m+m$$

$$۴<۲m\Rightarrow ۲<m$$



در بین گزینه‌ها فقط $m=۳$ در این نابرابری صدق می‌کند.

۷ (۱) باید مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بیشتر باشد:

$$۲x-۱<x+۴+۵x+۱\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x\ ,\quad x+۴<۲x-۱+۵x+۱\Rightarrow \frac{۲}{۳}<x$$

$$۵x+۱<x+۴+۲x-۱\Rightarrow x<۱$$

اکنون از جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم. در این صورت حدود تغییرات x به‌صورت $\frac{۲}{۳}<x<۱$ است. یعنی برای x هیچ مقدار صحیحی به‌دست نمی‌آید. توجه کنید که در محدودهٔ به‌دست آمده $۲x-۱$، $x+۴$ و $۵x+۱$ مثبت هستند.

۸ (۱) مثلث با طول اضلاع ۵، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ وجود ندارد زیرا $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\not>۵$. مثلث با طول اضلاع $۲\sqrt{۳}$، $۲\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۱۰}$ نیز وجود ندارد زیرا $۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}\not>۲\sqrt{۱۰}$. مثلث با طول اضلاع $۲a$، $a-۲$ و $a+۲$ نیز وجود ندارد زیرا $۲a\not<(a+۲)+(a-۲)$. ولی مثلث با طول اضلاع $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۲}$ و ۱ وجود دارد زیرا $\sqrt{۳}<\sqrt{۲}+۱$، $\sqrt{۲}<۱+\sqrt{۳}$ و $۱<\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$.

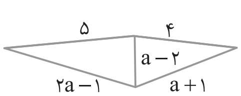
۹ (۲) شکل از دو مثلث تشکیل شده است. در هر دو مثلث نابرابری‌های مثلث را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a-۲<۵+۲a-۱ \\ ۵<۲a-۱+a-۲ \\ ۲a-۱<۵+a-۲ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -۶<a \\ \frac{۸}{۳}<a \\ a<۴ \end{cases}\Rightarrow \frac{۸}{۳}<a<۴ \quad (۱)$$

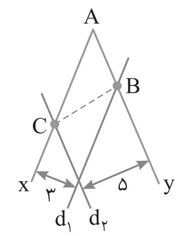
در مثلث دیگر نیز باید هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد:

$$\begin{cases} a-۲<۴+a+۱ \\ a+۱<۴+a-۲ \\ ۴<a-۲+a+۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -۲<۵ \\ ۱<۲ \\ \frac{۵}{۲}<a \end{cases}\Rightarrow \frac{۵}{۲}<a \quad (۲)$$

حدود تغییرات a، اشتراک نابرابری‌های (۱) و (۲) است که می‌شود $\frac{۸}{۳}<a<۴$. توجه کنید که در این محدوده $a-۲$، $a+۱$ و $۲a-۱$ مثبت هستند. بنابراین تنها عدد صحیح که در این نابرابری صدق می‌کند $a=۳$ است.



۱۰ (۳) ابتدا زاویهٔ xAy را به اندازهٔ ۴۵° رسم می‌کنیم. خط $d_۱$ را موازی Ax و به فاصلهٔ ۳ از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط با Ay رأس B است (خط $d_۱$ در شکل مقابل را ببینید). اکنون خط $d_۲$ را موازی Ay و به فاصلهٔ ۵ از آن رسم کرده، محل برخورد آن با Ax را رأس C می‌نامیم (خط $d_۲$ را در شکل مقابل ببینید). مثلث ABC جواب است و این مثلث منحصربه‌فرد است.



۱۱ (۳) بنابر فرض سؤال،

$$AB<AC\Rightarrow x<۲x-۳\Rightarrow ۳<x$$

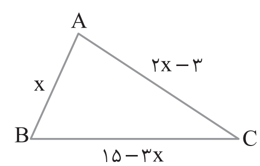
از طرف دیگر اضلاع این مثلث باید در نابرابری مثلث صدق کنند. پس

$$AB<AC+BC\Rightarrow x<۲x-۳+۱۵-۳x\Rightarrow ۲x<۱۲\Rightarrow x<۶$$

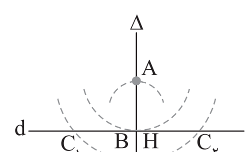
$$AC<AB+BC\Rightarrow ۲x-۳<x+۱۵-۳x\Rightarrow ۴x<۱۸\Rightarrow x<\frac{۹}{۲}$$

$$BC<AC+AB\Rightarrow ۱۵-۳x<x+۲x-۳\Rightarrow ۱۸<۶x\Rightarrow ۳<x$$

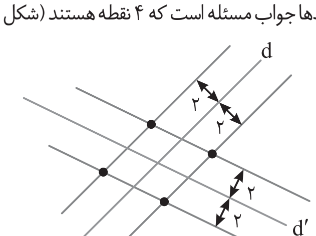
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های بالا به‌صورت $۳<x<\frac{۹}{۲}$ است و در بین گزینه‌ها تنها عدد $۳\sqrt{۲}$ در این فاصله قرار دارد.



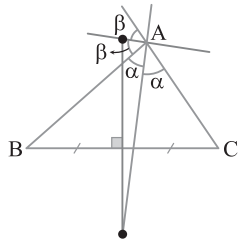
۱۲ (۲) خط دلخواه d را رسم می‌کنیم و خط دلخواه Δ را بر آن عمود می‌کنیم محل تقاطع Δ و d را H می‌نامیم. از نقطهٔ H کمانی به شعاع h_a رسم می‌کنیم. محل برخورد این کمان با Δ را A در نظر می‌گیریم. از A کمان‌هایی به شعاع $AB=۴$ و $AC=۷$ رسم می‌کنیم. با توجه به نقاط برخورد این کمان‌ها و خط d تعداد مثلث‌های متمایز مورد نظر معلوم می‌شود. اگر کمان به شعاع کوچک‌تر یعنی AB مماس بر d و کمان دیگر خط d را قطع کند، آن‌گاه تنها یک مثلث با این معلومات قابل رسم است. توجه کنید که مطابق شکل نقطهٔ H و B منطبق هستند و چون دو مثلث $AC_۱B$ و $AC_۲B$ همنهشت هستند آن‌ها را یک مثلث در نظر می‌گیریم. بنابراین برای رسم چنین مثلثی اگر بخواهیم جواب منحصربه‌فرد داشته باشیم، باید ارتفاع داده شده برابر طول ضلع کوچک‌تر، از بین دو ضلع داده شده باشد. در نتیجه $h_a=c$، یعنی $h_a=۴$.



۱۳ (۳) خطوطی موازی دو خط d و d' و به فاصلهٔ ۲ از آن‌ها را رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌ها جواب مسئله است که ۴ نقطه هستند (شکل زیر را ببینید).



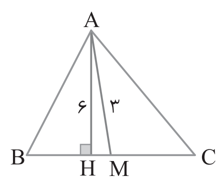
۱۴ (۳) مجموعهٔ نقطه‌هایی که از دو ضلع AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله هستند، نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A است. همچنین، مجموعهٔ نقطه‌هایی که از B و C به یک فاصله‌اند، عمودمنصف ضلع BC است. بنابراین نقاطی که از AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله و از دو رأس B و C نیز به یک فاصله هستند، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A و عمودمنصف ضلع BC هستند. چون مثلث متساوی‌الساقین نیست، جواب دو نقطهٔ مشخص شده در شکل زیر است.



۱۵ (۱) اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد، آن‌گاه

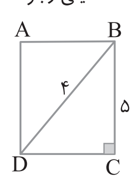
$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow ۱۲=\frac{۱}{۲}AH\times(۴)\Rightarrow AH=۶$$

بنابراین اگر مثلث ABC قابل رسم باشد، آن‌گاه مانند شکل فرضی زیر ارتفاع AH از میانهٔ AM در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH بزرگ‌تر است که این غیرممکن است، زیرا AM وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH است و باید از AH بزرگ‌تر باشد. پس چنین مثلثی وجود ندارد.



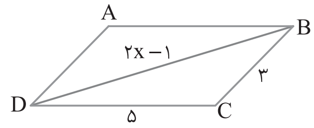
۱۶ (۱) می‌دانیم در مستطیل قطرها مساوی‌اند. پس مستطیلی به طول قطرهای ۶ و ۵ وجود ندارد.

۱۷ (۴) فرض کنید در مستطیل $ABCD$، $BD=۴$ و $BC=۵$. در این صورت در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC وتر کوچک‌تر از ضلع زاویهٔ قائمهٔ است و این ممکن نیست، پس چنین مستطیلی وجود ندارد.

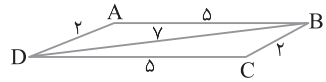


۱۸ (۲) با توجه به شکل زیر، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ قابل رسم است هرگاه مثلث BCD قابل رسم باشد. پس طول اضلاع مثلث BCD در نابرابری‌های مثلث یا نتیجهٔ آن صدق می‌کنند.

$$|۵-۳|<۲x-۱<۵+۳\Rightarrow ۲<۲x-۱<۸\Rightarrow ۳<۲x<۹\Rightarrow \frac{۳}{۲}<x<\frac{۹}{۲}$$

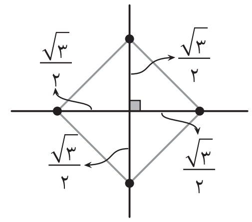


۱۹ (۱) با توجه به شکل زیر برای رسم این متوازی‌الاضلاع باید مثلث ABD، قابل رسم باشد، ولی اضلاع این مثلث در نابرابری مثلث صدق نمی‌کنند: $۲+۵\not>۷$. پس با این معلومات متوازی‌الاضلاعی وجود ندارد.

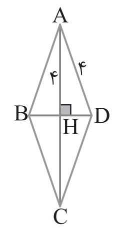


۲۰ **۴** زاویهٔ بین دو قطر متوازی‌الاضلاع می‌تواند تغییر کند. پس با تغییر این زاویه نامتناهی متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ قابل رسم است.

۲۱ **۲** دو قطر مربع مساوی و عمودمنصف یکدیگرند. پس مطابق شکل زیر یک مربع به قطر $\sqrt{۳}$ قابل رسم است.



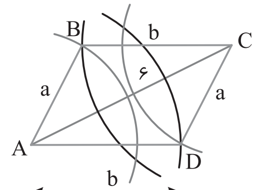
۲۲ **۱** در لوزی قطرها منصف یکدیگر و عمود بر هم هستند. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD هم وتر و هم ضلع زاویهٔ قائمه برابر ۴ هستند و این ممکن نیست. پس چنین لوزی‌ای وجود ندارد.



۲۳ **۲** در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، پس $BC=AD=b$. بنابراین متوازی‌الاضلاع ABCD در صورتی ایجاد می‌شود که مثلث ABC به وجود بیاید. پس باید سه عدد a، b و ۶ در نامساوی‌های زیر صدق کنند

$$a<b+۶,\quad b<a+۶,\quad ۶<a+b$$

در بین گزینه‌ها فقط $a=۳$ و $b=۴$ در این نامساوی‌ها صدق می‌کنند.



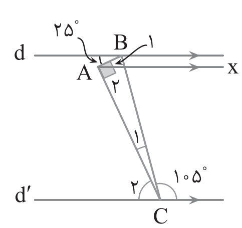
۲۴ **۲** از رأس A خط Ax را موازی با دو خط d و d' رسم می‌کنیم. در این‌صورت از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} d\|Ax \\ \text{مورب } AB \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱=۲۵^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۹۰^\circ} \hat{A}_۲=۶۵^\circ$$

$$\begin{cases} Ax\|d' \\ \text{مورب } AC \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}_۲ \Rightarrow \hat{C}_۲=۶۵^\circ$$

از طرف دیگر

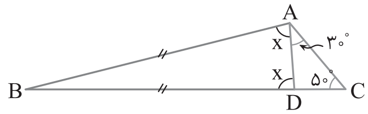
$$\hat{C}_۱+\hat{C}_۲+۱۰۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱+۶۵^\circ+۱۰۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱=۱۰^\circ$$



۲۵ **۳** مثلث ABD متساوی‌الساقین است، اندازهٔ دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن را x در نظر می‌گیریم. $A\hat{D}B$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، پس

$$x=۳۰^\circ+۵۰^\circ=۸۰^\circ$$

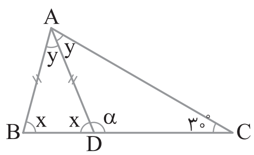
بنابراین $\triangle ABD: \hat{B}+x+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+۸۰^\circ+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۲۰^\circ$



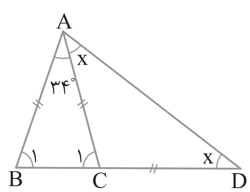
۲۶ **۲** مثلث ABD متساوی‌الساقین است. اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ آن را x در نظر می‌گیریم. از طرف دیگر AD نیمساز است، پس $B\hat{A}D=D\hat{A}C$ و اندازهٔ هر کدام را y انتخاب می‌کنیم. $A\hat{D}B$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، پس $x=y+۳۰^\circ$. در ضمن در مثلث ABD مجموع زاویه‌ها ۱۸۰° است، پس $۲x+y=۱۸۰^\circ$. در نتیجه

$$\begin{cases} x=y+۳۰^\circ \\ ۲x+y=۱۸۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۳x+y=y+۲۱۰^\circ \Rightarrow x=۷۰^\circ$$

$$\alpha=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$$



۲۷ **۴** با استفاده از داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. مثلث‌های ACD و ABC متساوی‌الساقین هستند. اگر اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ACD را x بنامیم، چون $C_۱$ زاویهٔ خارجی این مثلث است، پس $\hat{C}_۱=۲x$، در نتیجه $\hat{B}_۱=۲x$. بنابراین



$$\triangle ABC: ۳۴^\circ+۲x+۲x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴x=۱۴۶^\circ \Rightarrow x=۳۶/۵^\circ$$

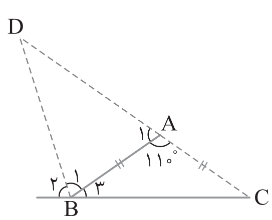
پس $A\hat{D}C=۳۶/۵^\circ$.

۲۸ **۴** زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ این مثلث نمی‌تواند ۱۱۰° باشد چون در این‌صورت مجموع زاویه‌های آن از ۱۸۰° بیشتر می‌شود. پس زاویهٔ رأس آن ۱۱۰° است. در ضمن نیمساز خارجی رأس مثلث متساوی‌الساقین با قاعده موازی است. پس نیمساز خارجی زاویه‌های مجاور به قاعده (در اینجا B یا C) را رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع مقابل را در D قطع کند. پس

$$\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ$$

$$\hat{B}_۳=\frac{۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-۳۵^\circ}{۲}=\frac{۱۴۵^\circ}{۲}=۷۲/۵^\circ$$

بنابراین $\hat{D}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱)=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۷۲/۵^\circ)=۳۷/۵^\circ$.



۲۹ **۴** مثلث ABC متساوی‌الساقین است و AM میانهٔ وارد بر قاعدهٔ آن است، پس AM هم نیمساز و هم ارتفاع است. با توجه به شکل

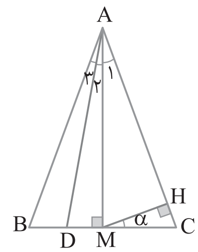
$$\triangle MHC: \hat{C}=۹۰^\circ-\alpha$$

$$\triangle AMC: \hat{A}_۱=۹۰^\circ-\hat{C}=۹۰^\circ-(۹۰^\circ-\alpha)\Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۳=\alpha$$

چون AD نیمساز زاویهٔ BAM است، پس $۲\hat{A}_۲=\alpha\Rightarrow \hat{A}_۲=\frac{\alpha}{۲}$

در ضمن زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث ADM است، پس

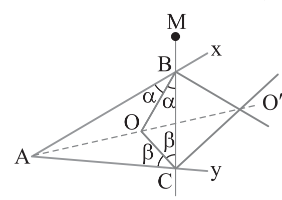
$$A\hat{D}B=\hat{A}_۲+۹۰^\circ=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$$



۳۰ **۱** چون ارتفاع‌های مثلث بیرون مثلث یکدیگر را قطع کرده‌اند، پس مثلث منفرجه‌الزاویه است. بنابراین نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های این مثلث نیز خارج مثلث قرار دارد.

۳۱ **۲** مجموع زاویه‌های مثلث ABC برابر ۱۸۰° است. چون $\hat{B}+\hat{C}=۸۰^\circ$، پس $\hat{A}=۱۰۰^\circ$. بنابراین مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است. در نتیجه نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های این مثلث بیرون مثلث قرار دارد.

۳۲ **۲** نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های B و C، یعنی نقطه‌های O و O' در شکل، روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارند، زیرا نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث همرس‌اند و هر دو نیمساز خارجی با نیمساز زاویهٔ رأس سوم همرس هستند. پس جواب روی نیمساز زاویهٔ xAy است.



۳۳ **۱** **راه‌حل اول**: نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث از سه رأس آن به یک فاصله‌اند، پس

$$SA=SB=SC$$

پس مثلث‌های SAB، SAC و SBC متساوی‌الساقین هستند. با توجه به شکل

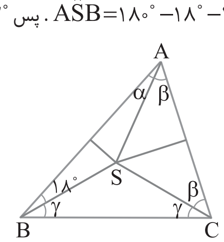
$$\alpha=S\hat{B}A=۱۸^\circ$$

$$\triangle ABC: \alpha+۲\beta+۲\gamma+۱۸^\circ=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\alpha=۱۸^\circ}۲\beta+۲\gamma=۱۴۴^\circ$$

$$\beta+\gamma=۷۲\Rightarrow B\hat{C}A=۷۲^\circ$$

راه‌حل دوم طبق درسنامه چون S محل تلاقی عمودمنصف‌هاست، پس $A\hat{S}B=۲\hat{C}$.

از طرف دیگر $A\hat{S}B=۱۸۰^\circ-۱۸^\circ-۱۸^\circ=۱۴۴^\circ$. پس $B\hat{C}A=\frac{۱۴۴^\circ}{۲}=۷۲^\circ$.



۳۴ **۲** در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است. بنابراین

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \hat{A}+\hat{C}=۲\hat{B}\end{cases}\Rightarrow \hat{B}+۲\hat{B}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\hat{B}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{B}=۶۰^\circ$$

پس $\hat{A}+\hat{C}=۱۲۰^\circ$ و $\hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ$. بنابراین

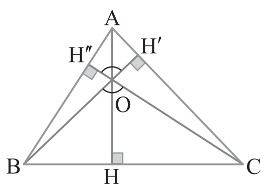
$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=۱۲۰^\circ\\ \hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲\hat{A}+۲\hat{C}=۲۴۰^\circ\\ \hat{A}-۲\hat{C}=۶۰^\circ\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}}۳\hat{A}=۳۰۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۱۰۰^\circ,\quad \hat{C}=۲۰^\circ$$

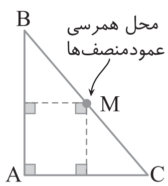
بنابراین مثلث ABC با داشتن زاویه‌ای ۱۰۰° مثلثی منفرجه‌الزاویه است. پس نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های آن خارج مثلث قرار دارد.

۳۵ **۱** در شکل زیر دو زاویهٔ BOC و $H''OH'$ مساوی‌اند. در ضمن چهارضلعی $AH'OH''$ دو زاویهٔ قائمه دارد و چون مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی ۳۶۰° است، پس

$$\hat{A}+H''\hat{O}H'=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{A}=۸۰^\circ}H''\hat{O}H'=۱۰۰^\circ\Rightarrow B\hat{O}C=۱۰۰^\circ$$



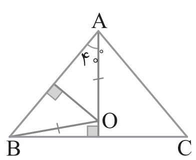
۳۶ **۳** با توجه به شکل مقابل چون عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و AC بر هم عمود هستند، پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است و عمودمنصف‌های آن در وسط وتر BC همرس هستند (نقطهٔ M را در شکل مقابل ببینید). اکنون به‌دست می‌آید



$$MB+MC=BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰$$

۳۷ **۲** در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف قاعده، نیمساز رأس است. یعنی

$$O\hat{A}B=\frac{\hat{A}}{۲}=۴۰^\circ$$



از طرف دیگر، $OA=OB$، پس مثلث AOB متساوی‌الساقین است و $O\hat{B}A=O\hat{A}B=۴۰^\circ$. بنابراین

$$A\hat{O}B=۱۸۰^\circ-۲\times۴۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

۳۸ **۳** ابتدا اندازهٔ زاویه‌های این مثلث را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$، پس

$$\begin{cases}۲\hat{A}-\hat{B}=۵۰^\circ\\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \frac{۳}{۲}\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۴}=۱۷۵^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو معادلهٔ اول}}\begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ \times۴\ \ \frac{۳}{۲}\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۴}=۱۷۵^\circ\end{cases}$$

$$\begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ \times(-۳)\ \ ۶\hat{C}+\hat{A}=۷۰۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳\hat{A}+\hat{C}=۲۳۰^\circ\\ -۱۸\hat{C}-۳\hat{A}=-۲۱۰۰^\circ\end{cases}$$

$$-۱۷\hat{C}=-۱۸۷۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۱۱۰^\circ,\ \hat{A}=۴۰^\circ,\ \hat{B}=۳۰^\circ$$

پس این مثلث منفرجه‌الزاویه است. بنابراین نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های آن بیرون مثلث است.

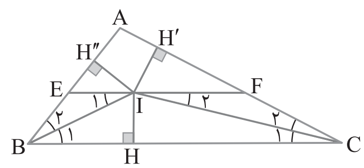
۳۹ (۲) نقطهٔ I روی EF از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است ($IH=IH'=IH''$). بنابراین I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است. پس IB و IC به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های B و C هستند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\begin{cases} IE \| BC \\ IB \ \text{مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_1=\hat{B}_1 \Rightarrow \hat{I}_1=\hat{B}_2 \Rightarrow IE=BE \qquad (1)$$

$$\begin{cases} IF \| BC \\ IC \ \text{مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_2=\hat{C}_1 \Rightarrow \hat{I}_2=\hat{C}_2 \Rightarrow IF=CF \qquad (2)$$

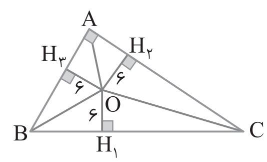
از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$IE+IF=BE+CF \Rightarrow EF=4$$



۴۰ (۳) نقطهٔ O محل همرسی نیمسازها است، بنابراین از ضلع‌های مثلث به یک فاصله است، پس $OH_1=OH_2=OH_3=6$ (شکل زیر را ببینید). می‌توان نوشت

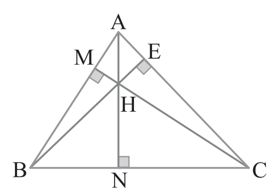
$$S_{ABC}=S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=\frac{1}{2}\times 6\times BC+\frac{1}{2}\times 6\times AC+\frac{1}{2}\times 6\times AB$$
$$=3(BC+AC+AB)=3\times 14=42$$



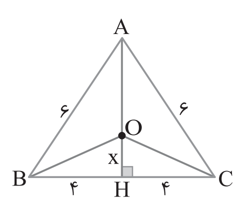
۴۱ (۲) با توجه به شکل، $A\hat{H}C$ مساوی $M\hat{H}N$ است و $M\hat{H}N$ مکمل زاویهٔ B است. در ضمن $B\hat{H}C$ مساوی $M\hat{H}E$ است و $M\hat{H}E$ مکمل زاویهٔ A است. پس

$$A\hat{H}C-B\hat{H}C=(180^\circ-\hat{B})-(180^\circ-\hat{A})=\hat{A}-\hat{B}$$

$$\xrightarrow{\hat{B}=60^\circ} A\hat{H}C-B\hat{H}C=70^\circ-60^\circ=10^\circ$$



۴۲ (۳) مثلث ABC به طول اضلاع ۶، ۶ و ۸ متساوی‌الساقین است. پس عمودمنصف قاعدهٔ BC از رأس A می‌گذرد. در ضمن $OA=OB=OC$. از طرف دیگر،



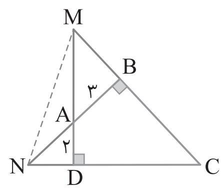
$$\triangle AHC: AH^2=AC^2-CH^2=6^2-4^2=36-16=20 \Rightarrow AH=2\sqrt{5}$$

با فرض $OH=x$ نتیجه می‌گیریم $OA=2\sqrt{5}-x$، پس $OC=2\sqrt{5}-x$. در نتیجه

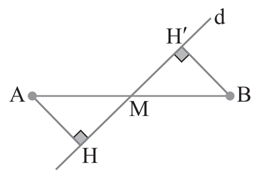
$$\triangle OHC: OC^2=OH^2+CH^2 \Rightarrow (2\sqrt{5}-x)^2=x^2+4^2$$

$$20+x^2-4\sqrt{5}x=x^2+16 \Rightarrow 4\sqrt{5}x=4 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

۴۳ (۲) از فرض‌های تست شکل زیر ایجاد می‌شود. اگر از M به N وصل کنیم، آن‌گاه نقطهٔ A در مثلث MNC نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها است. پس اگر از C به A وصل کنیم و امتداد دهیم، ارتفاع سوم مثلث MNC به‌دست می‌آید. بنابراین خط گذرنده از A و C بر MN عمود است.



۴۴ (۲) گزارهٔ (الف) درست است. زیرا اگر خط d از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB عبور کند، آن‌گاه طول عمودهای AH و BH' برابر است. زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه AMH و BMH' به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت‌اند (به شکل زیر توجه کنید).



گزارهٔ (ب) درست است، زیرا مساحت لوزی برابر نصف حاصل ضرب دو قطر آن است پس در لوزی با مساحت ۷/۵ و طول یک قطر ۳، طول قطر دیگر آن ۵ است و با داشتن طول دو قطر ۳ و ۵ در لوزی فقط یک لوزی قابل رسم است.
گزارهٔ (پ) نادرست است. زیرا مثال نقض نادرستی یک حکم کلی را مشخص می‌کند.
گزارهٔ (ت) نادرست است. به عنوان مثال نقض مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۲۵، ۲۴ و ۷ عدد محیط از عدد مساحت کوچک‌تر است.
بنابراین دو تا از این گزاره‌ها درست است.

۴۵ (۳) عکس قضیهٔ «اگر در یک مثلث یک زاویه قائمه باشد، آن‌گاه ضلع روبه‌روی آن بزرگ‌ترین ضلع مثلث است» به‌صورت «اگر در یک مثلث یک ضلع بزرگ‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه زاویهٔ مقابل به آن قائمه است» بیان می‌شود که در حالت کلی درست نیست. زیرا زاویهٔ روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع مثلث لزومی ندارد قائمه باشد. پس قضیهٔ گزینهٔ (۳) به‌صورت دوشرطی بیان نمی‌شود.

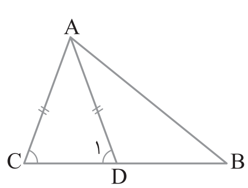
۴۶ (۳) در نقیض گزارهٔ داده شده کلمهٔ «هر» را به «وجود دارد» تغییر می‌دهیم و سپس فعل جمله را نقیض می‌کنیم. پس به گزارهٔ زیر می‌رسیم:
«مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

۴۷ (۳) چهارضلعی‌ای که چهار ضلع برابر دارد لوزی است ولی لزومی ندارد مربع باشد. پس به عنوان مثال لوزی‌ای که یک زاویهٔ آن 30° باشد مثال نقض برای گزارهٔ مطرح شده در گزینهٔ (۳) است. سایر گزینه‌ها یک حکم کلی همواره درست هستند، پس برای آن‌ها مثال نقض وجود ندارد.

۴۸ (۴) در «اگر $AC>AB$، آن‌گاه $\hat{B}>\hat{C}$»، حکم $\hat{B}>\hat{C}$ است و در برهان خلف، فرض اولیه همان نقیض حکم است و نقیض $\hat{B}>\hat{C}$ عبارت $\hat{B}<\hat{C}$ یا $\hat{B}=\hat{C}$ است.

۴۹ (۲) با توجه به شکل،

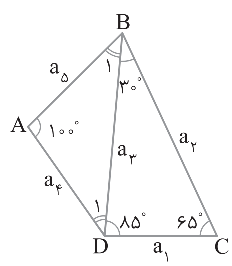
$$\left.\begin{cases} AD=AC \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{C} \\ \hat{D}_1 \ \text{زاویهٔ خارجی مثلث}\ ADB \Rightarrow \hat{D}_1>\hat{B} \end{cases}\right\} \Rightarrow \hat{C}>\hat{B}$$



۵۰ (۳) در مثلث ADB زاویهٔ ADC زاویهٔ خارجی این مثلث است، پس بزرگ‌تر از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش است. بنابراین $A\hat{D}C>۴۰^\circ$. پس در مثلث ADC، $AC>AD$.

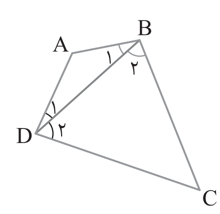
۵۱ (۲) چون $BC=\frac{AB+AC}{۲}$ ، پس طول ضلع BC میانگین حسابی طول دو ضلع AB و AC است. بنابراین اگر $AB=AC$ ، آن‌گاه طول ضلع BC هم با طول ضلع AB و AC برابر است، یعنی $AB=AC=BC$. پس مثلث متساوی‌الاضلاع است و $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$ (درستی گزینهٔ (۱)). از طرف دیگر اگر $AB\neq AC$ ، طول ضلع BC بین طول این دو ضلع است، یعنی اگر $AB>AC$ ، آن‌گاه $AB>BC>AC$ ، پس $\hat{C}>\hat{A}>\hat{B}$ (درستی گزینهٔ (۴)) و اگر $AC>AB$ ، آن‌گاه $AC>BC>AB$ ، در نتیجه $\hat{B}>\hat{A}>\hat{C}$ (درستی گزینهٔ (۳)). بنابراین گزینهٔ (۲) نمی‌تواند درست باشد.

۵۲ (۳) در مثلث BCD چون $\hat{B}<\hat{C}<\hat{D}$ ، پس (۱) $a_۱<a_۳<a_۲$
از طرف دیگر در مثلث ABD زاویهٔ A منفرجه است، پس $\hat{A}>\hat{D}_۱$ و $\hat{A}>\hat{B}_۱$. در نتیجه $a_۳>a_۵$ و $a_۳>a_۴$. با مقایسهٔ این نابرابری‌ها و نابرابری (۱) به‌دست می‌آید $a_۲>a_۳>a_۵$ و $a_۲>a_۳>a_۴$.



۵۳ (۱) چون $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۷۰^\circ$ ، پس
$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۷۰^\circ)=۸۰^\circ$$
در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. بنابراین
$$\begin{cases}\hat{B}>\hat{A}\Rightarrow AC>BC\\ \hat{C}>\hat{B}\Rightarrow AB>AC\end{cases}\Rightarrow AB>AC>BC$$
یعنی $y>x>۳$.

۵۴ (۳) در شکل زیر AB کوچک‌ترین و DC بزرگ‌ترین ضلع است. قطر BD را رسم می‌کنیم. بنابراین در مثلث ABD،
$$AB<AD\Rightarrow \hat{D}_۱<\hat{B}_۱ \quad (۱)$$
همچنین در مثلث BCD،
$$BC<DC\Rightarrow \hat{D}_۲<\hat{B}_۲ \quad (۲)$$
با جمع کردن نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم
$$\hat{D}_۱+\hat{D}_۲<\hat{B}_۱+\hat{B}_۲\Rightarrow \hat{D}<\hat{B}$$



۵۵ (۳) از فرض تست نتیجه می‌گیریم
$$\frac{۳a}{۲a+۳b}=-۳\Rightarrow ۳a=-۶a-۹b\Rightarrow ۹a=-۹b\Rightarrow a=-b$$
در نسبت خواسته شده $a=-b$ را جایگزین می‌کنیم:
$$\frac{۲a+b}{a-b}=\frac{-۲b+b}{-b-b}=\frac{-b}{-۲b}=\frac{۱}{۲}$$

۵۶ (۲) با طرفین، وسطین کردنِ تناسبِ داده شده نتیجه می‌شود
$$۳ma+۳nb=na+mb\Rightarrow (۳m-n)a=(m-۳n)b\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{m-۳n}{۳m-n}$$
اکنون، بنابر ویژگی‌های تناسب، می‌توان نوشت
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{(m-۳n)+(۳m-n)}{(m-۳n)-(۳m-n)}=\frac{۲(m-n)}{-(m+n)}$$
پس $\frac{a+b}{a-b}=\frac{۲(n-m)}{m+n}$.

۵۷ (۴) **راه‌حل اول** از ویژگی‌های تناسب نتیجه می‌گیریم
$$\frac{۳x}{۲}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{۲z+۱}{۴}=\frac{۳x+y-۳+۲z+۱}{۲+۳+۴}=\frac{۳x+y+۲z-۲}{۹}$$
چون $۳x+y+۲z=۱۱$ ، $\frac{۳x}{۲}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{۲z+۱}{۴}=۱$ ، پس $x=\frac{۲}{۳}$ ، $y=۶$ و $z=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه $xyz=\frac{۲}{۳}\times۶\times\frac{۳}{۲}=۶$.

راه‌حل دوم اگر $\frac{۳x}{۲}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{۲z+۱}{۴}=k$ ، آن‌گاه $x=\frac{۲k}{۳}$ ، $y=۳k+۳$ و $z=\frac{۴k-۱}{۲}$. از طرف دیگر چون $۳x+y+۲z=۱۱$ ، در نتیجه
$$۲k+۳k+۳+۴k-۱=۱۱\Rightarrow ۹k=۹\Rightarrow k=۱$$
بنابراین $x=\frac{۲}{۳}$ ، $y=۶$ و $z=\frac{۳}{۲}$ و $xyz=۶$.

۵۸ (۴) چون b واسطهٔ هندسی a و c است، پس $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$. در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ترکیب در صورت انجام می‌دهیم:
$$\frac{a+b}{b}=\frac{b+c}{c}$$
(درستی گزینهٔ (۱))

در تناسب $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ ترکیب در صورت انجام می‌دهیم:
$$\frac{a+b}{a}=\frac{b+c}{b}$$
(درستی گزینهٔ (۲))

در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ طبق ویژگی‌های تناسب می‌توان نوشت
$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{b-a}{c-b}$$
(درستی گزینهٔ (۳))

اکنون برای رد گزینهٔ (۴) می‌توان $a=۱$ ، $b=۲$ و $c=۴$ را در نظر گرفت:
$$\begin{cases}\frac{b}{c}=\frac{۱}{۲}\\ \frac{b-c}{a-b}=\frac{۲-۴}{۱-۲}=۲\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{c}\neq\frac{b-c}{a-b}$$

۵۹ (۴) با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم:
$$\frac{x}{۵}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{k}{۷}\Rightarrow \frac{x+y+z}{۵+۳+۶}=\frac{k}{۷}\Rightarrow x+y+z=۲k$$

۶۰ (۱) بااستفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{1+2+3+4}=\frac{a_5}{5}\Rightarrow\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{10}=\frac{a_5}{5}$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_5}=\frac{10}{5}=2$$

۶۱ (۱) **راه‌حل اول** تناسب داده شده را برابر m قرار داده، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a}{6}=\frac{b}{5}=\frac{c}{8}=m\Rightarrow\begin{cases}a=6m\\ b=5m\\ c=8m\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{a+c}=\frac{5m}{6m+8m}=\frac{5}{14}$$

راه‌حل دوم با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a}{6}=\frac{b}{5}=\frac{c}{8}\Rightarrow\frac{a+c}{6+8}=\frac{b}{5}\Rightarrow\frac{b}{a+c}=\frac{5}{14}$$

۶۲ (۲) طول یکی از اضلاع مثلث واسطهٔ هندسی طول دو ضلع دیگر است، پس سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر x واسطهٔ هندسی بین ۲ و ۵ باشد، آن‌گاه

$$x^2=2\times5=10\Rightarrow x=\sqrt{10}$$

با سه عدد ۲، ۵ و $\sqrt{10}$ یک مثلث قابل رسم است چون این اعداد در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند، یعنی $5+2>\sqrt{10}$، $\sqrt{10}+2>5$ و $\sqrt{10}+5>2$.

حالت دوم اگر ۵ واسطهٔ هندسی بین ۲ و x باشد، آن‌گاه

$$5^2=2x\Rightarrow x=\frac{25}{2}=12/5$$

با سه عدد ۲، ۵ و ۱۲/۵ مثلث قابل رسم نیست زیرا نابرابری $2+5>12/5$ برقرار نیست.

حالت سوم اگر ۲ واسطهٔ هندسی بین ۵ و x باشد، آن‌گاه

$$2^2=5x\Rightarrow x=\frac{4}{5}=0/8$$

با سه عدد ۰/۸، ۵ و ۲ مثلث قابل رسم نیست زیرا نابرابری $0/8+2>5$ برقرار نیست. بنابراین فقط یک مثلث با ویژگی مورد نظر وجود دارد.

۶۳ (۲) **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم زاویه‌های چهارضلعی، $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ و $\hat{D}$ باشند و $\frac{\hat{A}}{5}=\frac{\hat{B}}{6}=\frac{\hat{C}}{6}=\frac{\hat{D}}{7}$. در این‌صورت بنابر ویژگی‌های تناسب

$$\frac{\hat{A}}{5}=\frac{\hat{B}}{6}=\frac{\hat{C}}{6}=\frac{\hat{D}}{7}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{5+6+6+7}=\frac{360^\circ}{24}=15^\circ$$

. در نتیجه

$$\hat{A}=5\times15^\circ=75^\circ,\quad \hat{B}=\hat{C}=6\times15^\circ=90^\circ,\quad \hat{D}=7\times15^\circ=105^\circ$$

پس بزرگ‌ترین زاویه − کوچک‌ترین زاویه $=105^\circ-75^\circ=30^\circ$.

راه‌حل دوم چون زاویه‌های چهارضلعی متناسب با اعداد ۵، ۶، ۶ و ۷ هستند، آن‌ها را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{A}=5t,\quad \hat{B}=6t,\quad \hat{C}=6t,\quad \hat{D}=7t$$

چون مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی 360° است، پس

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ\Rightarrow 5t+6t+6t+7t=360^\circ$$

$$24t=360^\circ\Rightarrow t=15^\circ$$

بزرگ‌ترین زاویه، $\hat{D}=7t$ و کوچک‌ترین زاویه $\hat{A}=5t$ است. در نتیجه

$$\hat{D}-\hat{A}=(7-5)t=2t=2\times15^\circ=30^\circ$$

۶۴ (۳) چون $\frac{MB}{AM}=\frac{AN}{BN}=\frac{1}{2}$، با ترکیب در مخرج کردن این تناسب‌ها به‌دست می‌آید

$$\frac{MB}{AM+MB}=\frac{AN}{BN+AN}=\frac{1}{2+1}\Rightarrow\frac{MB}{AB}=\frac{AN}{AB}=\frac{1}{3}$$

پس $\frac{MB}{12}=\frac{AN}{12}=\frac{1}{3}$، یعنی $MB=AN=4$. اکنون می‌توان نوشت

$$MN=AB-(AN+MB)=12-(4+4)=4$$

۶۵ (۴) با توجه به فرض داده شده، جای نقطه‌های M و N مانند شکل زیر است. در تناسب $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$ ترکیب در مخرج انجام می‌دهیم:

$$\frac{MA}{MA+MB}=\frac{2}{3+2}\Rightarrow\frac{MA}{AB}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{MA}{15}=\frac{2}{5}$$

بنابراین $MA=6$. اکنون در تناسب $\frac{NA}{NB}=\frac{2}{3}$ تفضیل در مخرج انجام می‌دهیم:

$$\frac{NA}{NB-NA}=\frac{2}{3-2}\Rightarrow\frac{NA}{AB}=\frac{2}{1}\Rightarrow\frac{NA}{15}=\frac{2}{1}$$

بنابراین $NA=30$. اکنون می‌توان طول MN را به‌دست آورد:

$$MN=MA+AN=6+30=36$$

۶۶ (۳) بنابر فرض تست $AC^2=AB\times BC$، پس $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$.

چون $AB=AC+BC$ (شکل را ببینید)، در نتیجه $\frac{AC+BC}{AC}=\frac{AC}{BC}$ و $\frac{AC}{BC}=1+\frac{BC}{AC}$. اکنون فرض می‌کنیم نسبت $\frac{AC}{BC}$ برابر x باشد. در این‌صورت تساوی $\frac{AC}{BC}=1+\frac{BC}{AC}$ به $x=1+\frac{1}{x}$ تبدیل می‌شود و در نهایت به معادلهٔ $x^2-x-1=0$ می‌رسیم. بنابراین

$$x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

چون $x>0$، پس $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.

۶۷ (۴) در مثلث بزرگ‌ترین ارتفاع بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود. پس در اینجا اگر $a=4\sqrt{2}$ کوچک‌ترین ضلع مثلث باشد، آن‌گاه $h_a=5$. پس

$$S=\frac{1}{2}a\times h_a=\frac{1}{2}(4\sqrt{2})(5)=10\sqrt{2}$$

اکنون اگر $h_b=4$ و $h_c=3$، آن‌گاه

$$S=\frac{1}{2}b\times h_b\Rightarrow b=\frac{2S}{h_b}=\frac{20\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{2}$$

چون $h_c=3$ کوچک‌ترین ارتفاع است، پس c بزرگ‌ترین ضلع است. در نتیجه ضلع متوسط $b=5\sqrt{2}$ است.

۶۸ **۴** تمام مثلث‌ها در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که ارتفاع رأس A بر آن‌ها وارد می‌شود، یعنی

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}+\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}}-\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}}=\frac{BC}{CD}+\frac{CD}{EF}-\frac{CE}{BF}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر از تناسب‌های $\frac{BC}{۱}=\frac{CD}{۲}=\frac{DE}{۳}=\frac{EF}{۳}$ به‌دست می‌آید

$$\frac{BC}{۱}=\frac{CD}{۲}=\frac{DE}{۳}=\frac{EF}{۳}=\frac{BC+CD+DE+EF}{۱+۲+۳+۳}$$

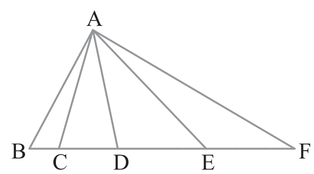
$$\frac{CD}{۲}=\frac{DE}{۳}=\frac{CD+DE}{۲+۳}$$

بنابراین $\frac{BC}{۱}=\frac{CD}{۲}=\frac{DE}{۳}=\frac{EF}{۳}=\frac{BF}{۹}=\frac{CE}{۵}$. در نتیجه

$$\frac{BC}{CD}=\frac{۱}{۲},\quad \frac{CD}{EF}=\frac{۲}{۳},\quad \frac{CE}{BF}=\frac{۵}{۹}\qquad(۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}+\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}}-\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}-\frac{۵}{۹}=\frac{۹+۱۲-۱۰}{۱۸}=\frac{۱۱}{۱۸}$$



۶۹ **۲** دو مثلث OBP و ABO در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند. پس $\frac{S_{ABO}}{S_{OBP}}=\frac{AO}{OP}$، یعنی $\frac{AO}{OP}=\frac{۶}{۲}=\frac{۳}{۱}$. در ضمن دو مثلث OMP و AMO در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{AMO}}{S_{OMP}}=\frac{AO}{OP}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow\frac{S_{AMO}}{۱}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow S_{AMO}=۳\qquad(۱)$$

از طرف دیگر دو مثلث MPC و MBP در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{MBP}}{S_{MPC}}=\frac{BP}{PC}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{BP}{PC}$$

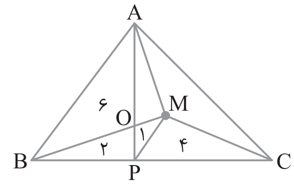
دو مثلث ABP و APC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. در نتیجه

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{BP}{PC}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{S_{ABP}=۸}\frac{۸}{S_{APC}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S_{APC}=\frac{۳۲}{۳}$$

بنابراین

$$S_{APC}=\frac{۳۲}{۳}\Rightarrow ۳+۱+۴+S_{AMC}=\frac{۳۲}{۳}\Rightarrow S_{AMC}=\frac{۸}{۳}\qquad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $۳S_{AMC}-S_{AMO}=۸-۳=۵$.



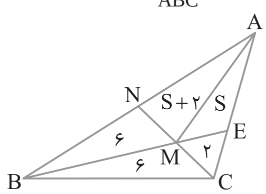
۷۰ **۴** می‌دانیم میانه، هر مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند و برعکس. چون دو مثلث BMN و BMC هم‌مساحت‌اند، پس M وسط ضلع NC است. در نتیجه در مثلث ANC پاره‌خط AM میانه است. بنابراین دو مثلث AMC و AMN هم‌مساحت‌اند. با فرض اینکه مساحت مثلث AME برابر S باشد، نتیجه می‌گیریم $S_{AMN}=S_{AMC}=S+۲$. در ضمن دو مثلث MEC و BMC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{MEC}}{S_{BMC}}=\frac{ME}{BM}\Rightarrow\frac{۲}{۶}=\frac{ME}{BM}\qquad(۱)$$

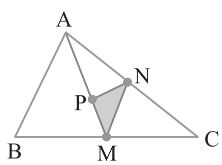
از طرف دیگر چون دو مثلث AME و ABM در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود $\frac{S_{AME}}{S_{ABM}}=\frac{ME}{BM}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$، بنابراین

$$\frac{۱}{۳}=\frac{S}{S+۲+۶}\Rightarrow ۳S=S+۸\Rightarrow S=۴$$

پس $S_{ABC}=۶+۶+۲+۴+۶=۲۴$.



۷۱ **۲** چون در دو مثلث ABM و ACM، قاعده‌های BM و CM با هم برابرند و ارتفاع نظیر رأس A در این دو مثلث مشترک است، پس



$$S_{ACM}=S_{ABM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

در نتیجه $S_{ACM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}=۱۲$. با استدلالی مشابه می‌نویسیم:

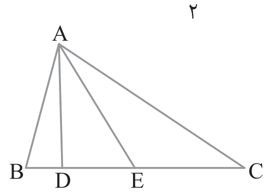
$$S_{MAN}=\frac{۱}{۲}S_{MAC}=\frac{۱}{۲}\times۱۲=۶$$

توجه کنید که چون $AP=۲PM$، پس $PM=\frac{۱}{۳}AM$ و در نتیجه چون مثلث‌های NMP و NAM در ارتفاع نظیر رأس N مشترک هستند، پس

$$\frac{S_{NMP}}{S_{NAM}}=\frac{PM}{AM}\Rightarrow S_{NMP}=\frac{۱}{۳}S_{NAM}=\frac{۱}{۳}\times۶=۲$$

۷۲ **۲** مثلث‌های ADE، ACE و ABD در ارتفاع رسم شده از رأس A مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع برابر هستند، یعنی $CE=۲DE=۳BD$. توجه کنید که از این برابری نتیجه می‌گیریم عددی مانند k وجود دارد که به ازای آن $CE=k$، $DE=\frac{k}{۲}$ و $BD=\frac{k}{۳}$. می‌نویسیم $BC=BD+DE+EC=\frac{k}{۳}+\frac{k}{۲}+k=\frac{۱۱k}{۶}$.

اکنون به‌دست می‌آید $\frac{BC}{DE}=\frac{\frac{۱۱k}{۶}}{\frac{k}{۲}}=\frac{۱۱}{۳}$.



۷۳ **۲** مثلث‌های BDE و BAE در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی $\frac{S_{BAE}}{S_{BDE}}=\frac{AE}{ED}=۳$. اکنون با ترکیب در صورت کردن این تناسب، نتیجه می‌شود

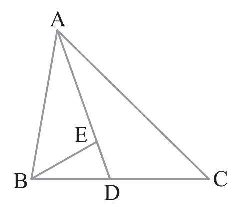
$$\frac{S_{BAE}+S_{BDE}}{S_{BDE}}=\frac{۳+۱}{۱}\Rightarrow\frac{S_{ABD}}{۳}=۴$$

پس $S_{ABD}=۱۲$. در نتیجه، چون $S_{ABC}=۲۷$، پس

$$S_{ADC}=۲۷-۱۲=۱۵$$

از طرف دیگر مثلث‌های ABD و ADC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}$$

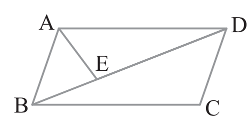


۷۴ **۲** فرض می‌کنیم $BE=x$، پس $ED=۲x$. دو مثلث AED و ABD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، بنابراین

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABD}}=\frac{DE}{BD}=\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر مساحت مثلث ABD نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است، بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$S_{AED}=\frac{۲}{۳}S_{ABD}=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\right)=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$$



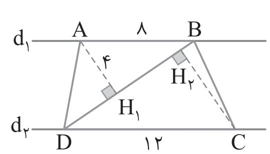
۷۵ **۱** طول ارتفاع نظیر رأس D در مثلث DAB با طول ارتفاع نظیر رأس B در مثلث BCD برابر است. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت طول قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها است، یعنی

$$\frac{S_{DAB}}{S_{BCD}}=\frac{AB}{DC}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، در این دو مثلث قاعدهٔ BD مشترک است (شکل زیر را ببینید). پس

$$\frac{S_{DAB}}{S_{BCD}}=\frac{AH_۱}{CH_۲}=\frac{۴}{CH_۲}\qquad(۲)$$

از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{CH_۲}$، پس $CH_۲=۶$.



۷۶ **۴** چون M وسط BC است، پس

$$S_{ABC}=۲S_{AMC}\qquad(۱)$$

D وسط AE است، پس $AE=۲DE$. چون بنابر فرض مسئله، $CE=۲DE$، پس $AE=CE$، یعنی E وسط AC است. در نتیجه

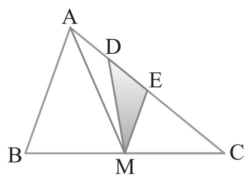
$$S_{AMC}=۲S_{AME}\qquad(۲)$$

چون D وسط AE است، پس

$$S_{AME}=۲S_{MDE}\qquad(۳)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$S_{ABC}=۲S_{AMC}=۲(۲S_{AME})=۴(۲S_{MDE})=۸S_{MDE}=۸\times۳=۲۴$$

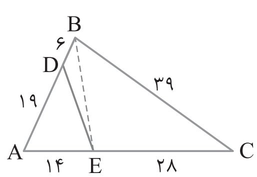


۷۷ **۲** توجه کنید که مطابق شکل زیر دو مثلث ADE و ABE در ارتفاع نظیر رأس E مشترک هستند. همچنین دو مثلث ABE و ABC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند. بنابراین

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABE}}=\frac{AD}{AB}=\frac{۱۹}{۲۵},\qquad\frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱۴}{۴۲}=\frac{۱}{۳}$$

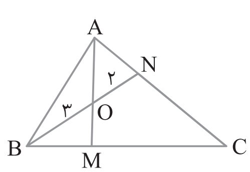
بنابراین، اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{۱۹}{۷۵}$. اکنون اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}-S_{ADE}}=\frac{۱۹}{۷۵-۱۹}\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{BCED}}=\frac{۱۹}{۵۶}$$



۷۸ **۴** مثلث‌های ABN و AOB در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی $\frac{S_{ABN}}{S_{AOB}}=\frac{BN}{OB}=\frac{BO+ON}{OB}=\frac{۵}{۳}$. چون $S_{AOB}=۶$، پس $S_{ABN}=\frac{۵}{۳}S_{AOB}=\frac{۵}{۳}\times۶=۱۰$. از طرف دیگر دو مثلث BAN و BNC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، در نتیجه $\frac{S_{BNC}}{S_{BAN}}=\frac{NC}{AN}=۲$. پس $\frac{S_{BNC}}{۱۰}=۲$، یعنی $S_{BNC}=۲۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$S_{ABC}=S_{ABN}+S_{BNC}=۱۰+۲۰=۳۰$$



۷۹ (۱) از M به رأس‌های B و D وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم قطر BD قطر AC را در O قطع می‌کند. می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع دو قطر منصف یکدیگرند، پس $OB=OD$. از طرف دیگر دو مثلث OMB و OMD در ارتفاع نظیر رأس M مشترک‌اند. بنابراین

$$\frac{S_{OMB}}{S_{OMD}}=\frac{OB}{OD}=۱\Rightarrow S_{OMB}=S_{OMD} \qquad (۱)$$

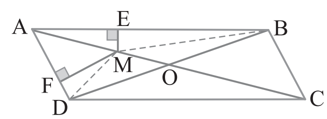
در ضمن، دو مثلث AOD و AOB در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، بنابراین

$$\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}}=\frac{OD}{OB}=۱\Rightarrow S_{AOB}=S_{AOD} \qquad (۲)$$

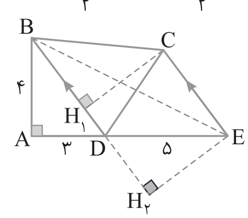
اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$S_{AMB}=S_{AMD}\Rightarrow \frac{۱}{۲}ME\times AB=\frac{۱}{۲}MF\times AD$$

بنابراین $\frac{ME}{MF}=\frac{AD}{AB}$ و چون $AB=۳BC$ و $BC=AD$، پس $\frac{AD}{AB}=\frac{۱}{۳}$. در نتیجه $\frac{ME}{MF}=\frac{۱}{۳}$.



۸۰ (۳) نقطه‌های B و E را به هم وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). چون $EC||BD$، پس ارتفاع‌های نظیر رأس‌های C و E در مثلث‌های CBD و EBD برابرند، یعنی $CH_۱=EH_۲$. از طرف دیگر BD قاعدهٔ مشترک نظیر این دو ارتفاع است، پس $S_{CBD}=S_{EBD}$. در نتیجه $S_{ABD}+S_{CBD}=S_{ABD}+S_{EBD}$، یعنی $S_{ABCD}=S_{ABE}$. اکنون می‌توان نوشت $S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AB\times AE=\frac{۱}{۲}\times۴\times۸=۱۶$.



۸۱ (۱) با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌نویسیم

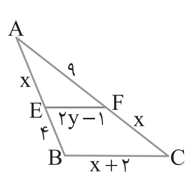
$$EF||BC\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+۴}=\frac{۹}{۹+x}=\frac{۲y-۱}{x+۲}$$

بنابراین
$$\frac{x}{x+۴}=\frac{۹}{۹+x}\Rightarrow ۹x+x^۲=۹x+۳۶\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=۶$$

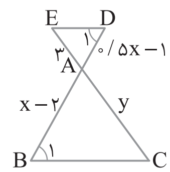
پس
$$\frac{۹}{۹+x}=\frac{۲y-۱}{x+۲}\Rightarrow\frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۲۴}{۵}\Rightarrow y=\frac{۲۹}{۱۰}$$

در نتیجه

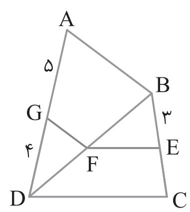
$$\frac{\text{محیط } AEF}{\text{محیط ذوزنقه}}=\frac{x+۹+۲y-۱}{۴+۲y-۱+x+x+۲}=\frac{x+۲y+۸}{۲x+۲y+۵}=\frac{۶+\frac{۵۸}{۱۰}+۸}{۱۲+\frac{۵۸}{۱۰}+۵}=\frac{۳۳}{۳۸}$$



۸۲ (۱) چون $\hat{B}_۱=\hat{D}_۱$، بنابر عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب، DE با BC موازی است. اکنون بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$، یعنی $\frac{۳}{y}=\frac{۰/۵x-۱}{x-۲}$، پس $\frac{۳}{y}=\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $y=۶$.



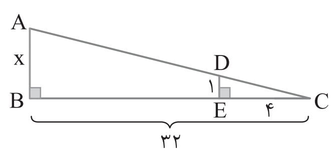
۸۳ (۲) در مثلث DAB، چون FG با BA موازی است، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{DG}{GA}=\frac{DF}{FB}$. از طرف دیگر در مثلث BCD، EF با CD موازی است، پس $\frac{DF}{FB}=\frac{CE}{EB}$. با مقایسهٔ دو تناسب به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم $\frac{DG}{GA}=\frac{CE}{EB}$، یعنی $\frac{۴}{۵}=\frac{CE}{۳}$، بنابراین $CE=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$.



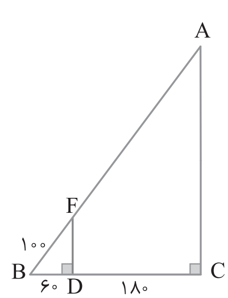
۸۴ (۲) اگر درخت را با یک پاره‌خط نشان دهیم، شکل مسئله به‌صورت زیر است. چون $AB||DE$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{CE}{CB}=\frac{ED}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۳۲}=\frac{۱}{x}$$

پس x که همان طول درخت است برابر ۸ متر است.



۸۵ (۳) شکل زیر را در نظر می‌گیریم. چون FD و AC بر BC عمودند، پس با هم موازی‌اند. در نتیجه بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{BD}{BC}=\frac{BF}{BA}$، یعنی $\frac{۶۰}{۲۴۰}=\frac{۱۰۰}{AB}$، پس $AB=۴۰۰$.



۸۶ (۱) در مثلث ABC، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^{۲}=۳۶$$

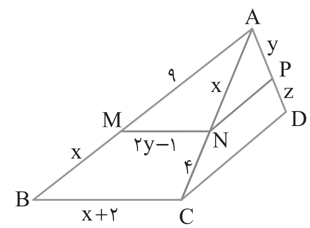
پس $x=۶$. از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}$$

پس $y=\frac{۲۹}{۱۰}$. در مثلث ACD، بنابر قضیهٔ تالس،

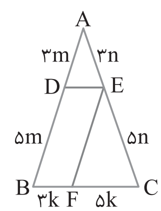
$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{PD}\Rightarrow\frac{۶}{۴}=\frac{\frac{۲۹}{۱۰}}{z}$$

در نتیجه $z=\frac{۲۹}{۱۵}$. در نهایت $\frac{x+۱۰y}{۱۵z}=\frac{۶+۲۹}{۲۹}=\frac{۳۵}{۲۹}$.



۸۷ (۱) چون $DE||BC$ ، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۵}$. بنابراین عددهایی حقیقی مانند m و n وجود دارند به طوری که

$$AD=۳m\ ,\quad DB=۵m$$
$$AE=۳n\ ,\quad EC=۵n$$



از طرف دیگر چون $EF||AB$ ، بنابر قضیهٔ تالس $\frac{CF}{FB}=\frac{CE}{EA}=\frac{۵}{۳}$. پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد به طوری که $CF=۵k$ و $FB=۳k$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{AC}{CE}+\frac{BF}{FC}=\frac{۸n}{۵n}+\frac{۳k}{۵k}=\frac{۸}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۱}{۵}=۲/۲$$

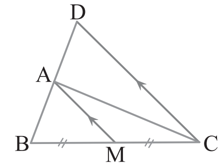
۸۸ (۲) شکل سؤال را به صورت زیر رسم می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$AM||DC\Rightarrow\frac{BM}{BC}=\frac{BA}{BD}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{BA}{BD}\qquad(۱)$$

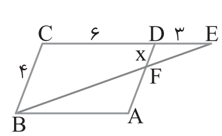
از طرف دیگر در مثلث ABC پاره‌خط AM میانه است، پس مساحت مثلث ABM نصف مساحت مثلث ABC است. در ضمن دو مثلث ABC و BDC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BDC}}=\frac{AB}{BD}\xrightarrow{\text{از (۱)}}\frac{S_{ABC}}{S_{BDC}}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{۲S_{ABM}=S_{ABC}}\frac{۲S_{ABM}}{S_{BDC}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\frac{S_{BDC}}{S_{ABM}}=۴$.

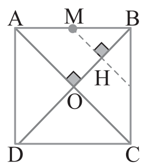


۸۹ (۳) چون ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس ضلع‌های مقابل در آن موازی و برابرند. در نتیجه بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث EBC،



$$\frac{FD}{BC}=\frac{DE}{CE}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۳}{۹}\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

۹۰ (۲) در مربع ABCD نقطهٔ M وسط ضلع AB است. طول عمود MH مورد نظر این سؤال است. قطر AC را رسم می‌کنیم. در مربع قطرها بر هم عمودند. پس $MH||AO$. بنابراین چون M وسط AB است، MH میان‌خط مثلث BAO است. پس بنابر قضیهٔ میان‌خط،

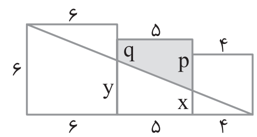


$$MH=\frac{OA}{۲}\xrightarrow{OA=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۸\sqrt{۲}=۸}MH=\frac{۸}{۲}=۴$$

۹۱ (۲) قسمت رنگی یک ذوزنقه به ارتفاع ۵ است. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{x}{۶}=\frac{۴}{۱۵}\Rightarrow x=\frac{۸}{۵}\Rightarrow p=۵-\frac{۸}{۵}=\frac{۱۷}{۵}$$
$$\frac{y}{۶}=\frac{۹}{۱۵}\Rightarrow y=\frac{۱۸}{۵}\Rightarrow q=۵-\frac{۱۸}{۵}=\frac{۷}{۵}$$

بنابراین $=\frac{۱}{۲}\times۵(\frac{۱۷}{۵}+\frac{۷}{۵})=\frac{۲۴}{۲}=۱۲$ مساحت قسمت رنگی .



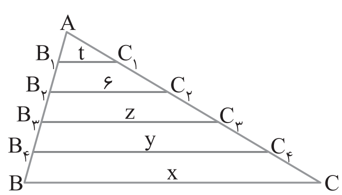
۹۲ (۳) بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

$$\frac{B_۲C_۲}{BC}=\frac{AB_۲}{AB}\Rightarrow\frac{۶}{x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=۱۵$$

به همین صورت به‌دست می‌آید

$$\frac{t}{x}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{x=۱۵}t=۳$$
$$\frac{z}{۱۵}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow z=۹,\qquad\frac{y}{۱۵}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow y=۱۲$$

اکنون به‌دست می‌آید $x-y+z-t=۱۵-۱۲+۹-۳=۹$.



۹۳ (۲) **راه‌حل اول** با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌نویسیم

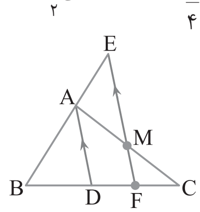
$$\triangle BEF: AD||EF\Rightarrow\frac{AD}{EF}=\frac{BD}{BF}\qquad(۱)$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\triangle ADC: MF||AD\Rightarrow\frac{AC}{AM}=\frac{CD}{DF}\xrightarrow{AC=۲AM}۲=\frac{CD}{DF}$$
$$DF=\frac{CD}{۲}\qquad(۲)$$

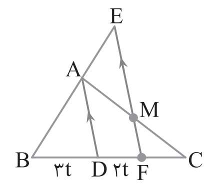
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{AD}{EF}=\frac{BD}{BD+DF}\xrightarrow[DF=\frac{۱}{۲}CD]{BD=\frac{۳}{۴}CD}\frac{AD}{EF}=\frac{\frac{۳}{۴}CD}{\frac{۳}{۴}CD+\frac{۱}{۲}CD}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۳}{۵}$$



راه‌حل دوم چون $MF||AD$ و M وسط AC است، پس پاره‌خط MF میان‌خط مثلث CAD و در نتیجه F وسط DC است، یعنی $DF=\frac{DC}{۲}$. از طرف دیگر بنابر فرض $\frac{BD}{CD}=\frac{۳}{۴}$. بنابراین عددی مانند t وجود دارد به‌طوری که $BD=۳t$ و $CD=۴t$. بنابراین $DF=\frac{DC}{۲}=۲t$. اکنون توجه کنید که چون $AD||EF$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BEF،

$$\frac{AD}{EF}=\frac{BD}{BF}=\frac{۳t}{۵t}=\frac{۳}{۵}$$

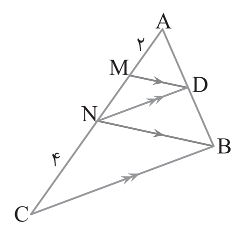


۹۴ (۱) دو بار از قضیهٔ تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

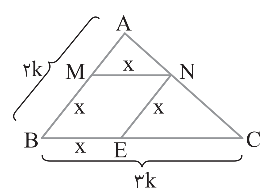
$$\left.\begin{array}{l}\triangle ANB: DM||BN\Rightarrow\frac{AM}{MN}=\frac{AD}{DB}\\ \triangle ABC: DN||BC\Rightarrow\frac{AN}{NC}=\frac{AD}{DB}\end{array}\right\}$$

$$\frac{AM}{MN}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{۲}{MN}=\frac{۲+MN}{۴}\Rightarrow MN^{۲}+۲MN-۸=۰$$

$$(MN+۴)(MN-۲)=۰\Rightarrow MN=۲$$



۹۵ (۲) در شکل روبه‌رو در مثلث ABC، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،



$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۲k-x}{۲k}=\frac{x}{۳k}$$

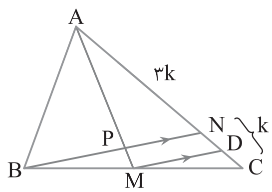
با ساده کردن تناسب بالا به‌دست می‌آید $\frac{x}{k}=\frac{۶}{۵}$. اکنون می‌نویسیم

$$\frac{\text{ضلع لوزی}}{BC}=\frac{x}{۳k}=\frac{۱}{۳}\times\frac{x}{k}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

۹۶ (۴) از نقطهٔ M خطی موازی BN رسم می‌کنیم تا AC را در D قطع کند (شکل را ببینید). چون $\frac{AN}{NC}=۳$، پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد که $NC=k$ و $AN=۳k$. از طرف دیگر در مثلث CBN، چون MD با BN موازی است، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{CD}{DN}=\frac{CM}{MB}=۱\Rightarrow CD=DN$$

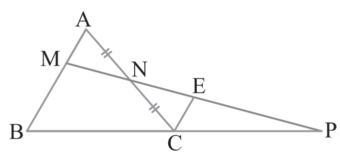
پس D وسط CN است و $ND=\frac{۱}{۲}NC=\frac{k}{۲}$. در مثلث AMD، چون PN با MD موازی است، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AP}{PM}=\frac{AN}{ND}=\frac{۳k}{\frac{k}{۲}}=۶$.



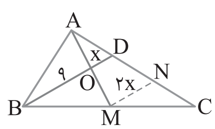
۹۷ (۲) از رأس C خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا پاره‌خط MP را در E قطع کند. در این صورت دو مثلث AMN و CEN به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند، پس $CE=AM$. در نتیجه $CE=\frac{۱}{۳}AB$، یعنی $\frac{CE}{AB}=\frac{۱}{۳}$. با تفضیل در مخرج کردن این تناسب به تساوی $\frac{CE}{BM}=\frac{۱}{۲}$ می‌رسیم. اکنون از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم

$$\triangle BMP: CE||MB\Rightarrow\frac{CP}{BP}=\frac{CE}{BM}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow CP=\frac{۱}{۲}BP\Rightarrow CP=BC$$

پس نسبت خواسته شده برابر با یک است.



۹۸ (۲) با توجه به فرض‌های مسئله، شکل مقابل رسم شده است که در آن از نقطهٔ M خطی موازی BD رسم کرده‌ایم و محل برخورد آن با AC را N نامیده‌ایم. در مثلث AMN، $OD||MN$ و O وسط AM است، پس OD در این مثلث میان‌خط است، در نتیجه



$$OD=\frac{MN}{۲}\xrightarrow{OD=x}MN=۲x\qquad(۱)$$

از طرف دیگر در مثلث CDB، $MN||BD$ و M وسط BC است، پس در این مثلث MN میان‌خط است. در نتیجه

$$MN=\frac{BD}{۲}\xrightarrow{(۱)}BD=۲MN=۲(۲x)=۴x\Rightarrow ۹+x=۴x$$

$$۹=۳x\Rightarrow x=۳$$

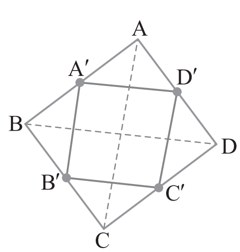
۹۹ (۱) از قضیهٔ میان‌خط به ترتیب در مثلث‌های CBD، ABD، ABC و ADC نتیجه می‌گیریم

$$A'D'=\frac{BD}{۲}\ ,\quad B'C'=\frac{BD}{۲}\ ,\quad A'B'=\frac{AC}{۲}\ ,\quad D'C'=\frac{AC}{۲}$$

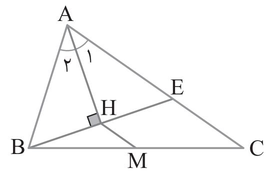
بنابراین

$$\text{محیط } A'B'C'D'=A'D'+B'C'+A'B'+D'C'$$

$$=\frac{BD}{۲}+\frac{BD}{۲}+\frac{AC}{۲}+\frac{AC}{۲}=BD+AC=a+a=۲a$$



۱۰۰ **۲** عمود BH را امتداد می‌دهیم تا AC را در E قطع کند. در این صورت مثلث ABE متساوی‌الساقین است زیرا ارتفاع AH در این مثلث نیمساز نیز هست، پس $AB=AE$. از طرف دیگر AH میانه نیز هست، پس H وسط BE قرار دارد. پس بنابر قضیهٔ میان‌خط، MH مساوی نصف EC است: $MH=\frac{EC}{۲}=\frac{AC-AE}{۲}=\frac{AC-AB}{۲}$. در ضمن $MH=\frac{۱}{۳}AB$. بنابراین



$$\frac{۱}{۳}AB=\frac{AC-AB}{۲}\Rightarrow ۲AB=۳AC-۳AB\Rightarrow ۵AB=۳AC$$

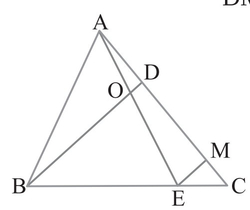
پس نسبت $\frac{AC}{AB}$ برابر $\frac{۵}{۳}$ است.

۱۰۱ **۱** از E خطی موازی BD رسم می‌کنیم تا AC را در M قطع کند. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\triangle BDC: ME\|BD\Rightarrow\frac{CE}{BE}=\frac{CM}{DM}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{CM}{DM}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{DC}{DM}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{۳}{۴}\qquad(۱)$$

$$\triangle AME: OD\|ME\Rightarrow\frac{AD}{DM}=\frac{AO}{OE}\qquad(۲)$$



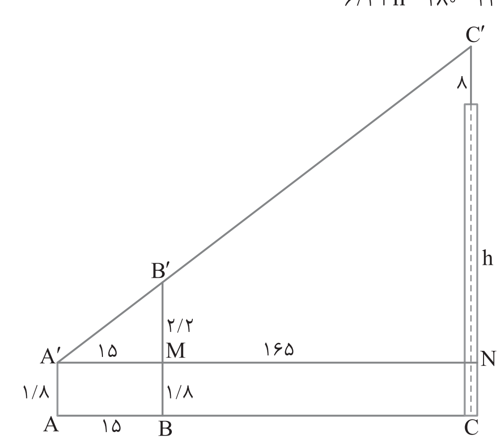
از طرف دیگر بنابر فرض،

$$\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{AD}{DC}=\frac{۱}{۲}\qquad(۳)$$

از تقسیم تساوی (۳) بر (۱) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\frac{AD}{DC}}{\frac{DM}{DC}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow\frac{AD}{DM}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{از (۲)}}\frac{AO}{OE}=\frac{AD}{DM}=\frac{۲}{۳}$$

۱۰۲ **۲** در شکل از A' خطی موازی AC (سطح زمین) رسم کرده‌ایم و محل‌های برخورد آن با BB' و CC' را به ترتیب M و N نامیده‌ایم. توجه کنید که $C'N=۸+h-۱/۸=۶/۲+h$. اکنون در مثلث $A'C'N$، چون $B'M$ با $C'N$ موازی است، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{B'M}{C'N}=\frac{A'M}{A'N}$، یعنی $\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۵}{۱۸۰}=\frac{۲/۲}{۶/۲+h}$، پس $۶/۲+h=۲۶/۴$، در نتیجه $h=۲۰/۲$.



۱۰۳ **۳** با استفاده از قضیهٔ میان‌خط در مثلث،

$$\triangle ABC:\left.\begin{array}{l}\text{M وسط AB}\\ \text{N وسط BC}\end{array}\right\}\Rightarrow MN=\frac{AC}{۲}\qquad(۱)$$

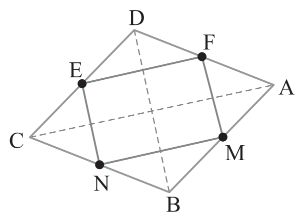
$$\triangle ADC:\left.\begin{array}{l}\text{F وسط AD}\\ \text{E وسط DC}\end{array}\right\}\Rightarrow EF=\frac{AC}{۲}\qquad(۲)$$

$$\triangle ABD:\left.\begin{array}{l}\text{M وسط AB}\\ \text{F وسط AD}\end{array}\right\}\Rightarrow MF=\frac{DB}{۲}\qquad(۳)$$

$$\triangle BDC:\left.\begin{array}{l}\text{N وسط BC}\\ \text{E وسط DC}\end{array}\right\}\Rightarrow NE=\frac{BD}{۲}\qquad(۴)$$

از طرف دیگر بنابر فرض، $۲AC=۳BD=۲۴$. پس $AC=۱۲$ و $BD=۸$. اکنون از جمع تساوی‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم

$$\text{محیط}(MNEF)=MN+EF+MF+NE=AC+BD=۱۲+۸=۲۰$$

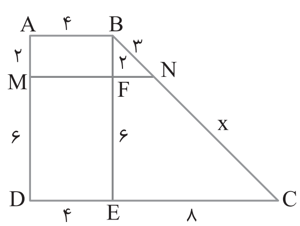


۱۰۴ **۴** از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به ترتیب در F و E قطع کند. چهارضلعی‌های ABFM و MFED متوازی‌الاضلاع هستند. پس $BF=AM=۲$، $FE=MD=۶$، $AB=MF=DE=۴$ و چون $DC=۱۲$، پس $EC=۸$. اکنون بنابر قضیهٔ تالس و تعمیم آن،

$$\triangle BEC: NF\|EC\Rightarrow\frac{BF}{FE}=\frac{BN}{NC}\Rightarrow\frac{۲}{۶}=\frac{۳}{x}\Rightarrow x=۹$$

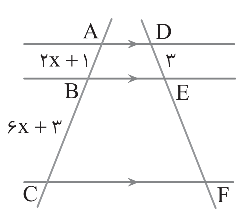
$$\triangle BEC: NF\|EC\Rightarrow\frac{FN}{EC}=\frac{BF}{BE}\Rightarrow\frac{FN}{۸}=\frac{۲}{۸}\Rightarrow FN=۲$$

بنابراین $x+y=NC+MF+FN=۹+۴+۲=۱۵$.

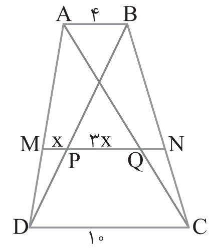


۱۰۵ **۳** طبق قضیهٔ تالس برای خطوط موازی، $\frac{۳}{EF}=\frac{۲x+۱}{۶x+۳}$. پس $\frac{۳}{EF}=\frac{۱}{۳}$، یعنی $EF=۹$. اکنون می‌توان نوشت

$$DF=DE+EF=۳+۹=۱۲$$



۱۰۶ (۲) در شکل روبه‌رو بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،



(۱) $\triangle DAB: MP||AB \Rightarrow \frac{DM}{AD}=\frac{x}{۴}$

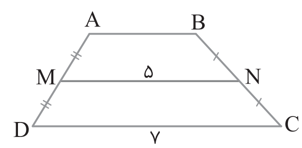
(۲) $\triangle ADC: MQ||DC \Rightarrow \frac{AM}{AD}=\frac{۴x}{۱۰}$

از تقسیم تناسب‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{\frac{DM}{AD}}{\frac{AM}{AD}}=\frac{\frac{x}{۴}}{\frac{۴x}{۱۰}} \Rightarrow \frac{DM}{AM}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow \frac{AM}{DM}=\frac{۸}{۵}$$

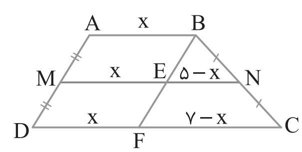
۱۰۷ (۲) **راه‌حل اول** بنابر قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه، اگر M و N وسط‌های دو ساق ذوزنقه باشند، آن‌گاه $MN=\frac{AB+DC}{۲}$. پس

$$۵=\frac{AB+۷}{۲}\Rightarrow AB=۳$$



راه‌حل دوم از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به‌ترتیب در نقاط E و F قطع کند. چهارضلعی‌های ABEM و MEFD متوازی‌الاضلاع هستند، در نتیجه اندازهٔ اضلاع مانند شکل زیر است. پس بنابر قضیهٔ میان‌خط در مثلث BFC،

$$۵-x=\frac{۷-x}{۲}\Rightarrow ۱۰-۲x=۷-x\Rightarrow x=۳$$



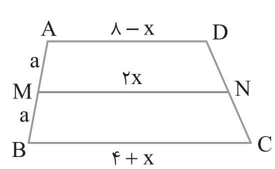
۱۰۸ (۲) از قضیهٔ تالس در ذوزنقه استفاده می‌کنیم

$$\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}\Rightarrow \frac{a}{a}=\frac{DN}{NC}$$

پس N وسط DC قرار دارد. بنابراین طبق قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه، طول پاره‌خط MN مساوی نصف مجموع دو قاعده است

$$MN=\frac{AD+BC}{۲}\Rightarrow ۲x=\frac{۸-x+۴+x}{۲}\Rightarrow ۴x=۱۲\Rightarrow x=۳$$

پس حاصل ضرب اندازهٔ دو قاعده برابر است با $۳۵=(۷)(۵)=(۴+x)(۸-x)$.



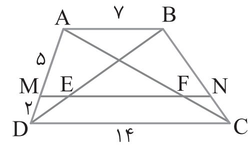
۱۰۹ (۳) از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم

(۱) $\triangle ADC: MF||DC\Rightarrow \frac{MF}{DC}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow\frac{MF}{۱۴}=\frac{۵}{۷}\Rightarrow MF=۱۰$

(۲) $\triangle ABD: ME||AB\Rightarrow \frac{ME}{AB}=\frac{DM}{DA}\Rightarrow \frac{ME}{۷}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow ME=۲$

از تفریق تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$MF-ME=۱۰-۲\Rightarrow EF=۸$$



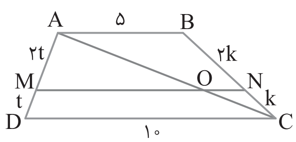
۱۱۰ (۳) بنابر عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقه، از تناسب $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=۲$ نتیجه می‌گیریم MN موازی با قاعده‌های ذوزنقه است. از A به C وصل می‌کنیم تا MN را در O قطع کند. از فرض $\frac{AM}{MD}=\frac{۲}{۱}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{AM}{AD}=\frac{۲}{۳}$ و از تناسب $\frac{BN}{NC}=\frac{۲}{۱}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{BC}{NC}=\frac{۳}{۱}$. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

(۱) $\triangle ADC: OM||DC\Rightarrow \frac{OM}{DC}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow\frac{OM}{۱۰}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow OM=\frac{۲۰}{۳}$

(۲) $\triangle ABC: ON||AB\Rightarrow\frac{CN}{BC}=\frac{ON}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{ON}{۵}\Rightarrow ON=\frac{۵}{۳}$

با جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$OM+ON=\frac{۲۵}{۳}\Rightarrow MN=\frac{۲۵}{۳}$$



۱۱۱ (۳) فرض می‌کنیم زاویه‌های داخلی مثلثی که با اعداد ۱، ۱ و ۲ متناسب‌اند، به صورت x، x و ۲x باشند. پس

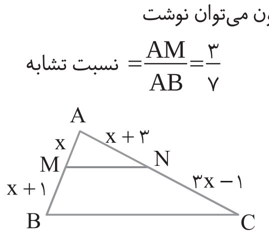
$$x+x+۲x=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۴x=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۴۵^\circ$$

بنابراین زاویه‌های این مثلث ۴۵°، ۴۵° و ۹۰° هستند، یعنی این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و در بین گزینه‌ها فقط مثلث با اضلاع ۱، ۱ و $\sqrt{۲}$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. پس این مثلث با مثلث به اضلاع داده شده در گزینهٔ (۳) متشابه است.

۱۱۲ (۲) چون MN با BC موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر نسبت اندازه‌های ضلع‌های نظیر است. ابتدا باید مقدار x را به‌دست آوریم. بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$، یعنی $\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۳}{۳x-۱}$. بنابراین $x(۳x-۱)=(x+۱)(x+۳)$، پس $۲x^۲-۵x-۳=۰$. دو مقدار برای x به‌دست می‌آید: $x=\frac{-۱}{۲}$ و $x=۳$.

چون طول پاره‌خط NC برابر $۳x-۱$ است و باید مثبت باشد، پس $x>\frac{۱}{۳}$. در نتیجه $x=۳$. اکنون می‌توان نوشت

$$\text{نسبت تشابه}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۷}$$



۱۱۳ (۳) چون AB با DE موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث ABC و EDC متشابه‌اند. بنابراین $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD}$، یعنی $\frac{y}{۱۶}=\frac{۴}{x}=\frac{۶}{۱۵}$. پس $x=۱۰$ و $y=۶/۴$. اکنون می‌توان نوشت $x-y=۱۰-۶/۴=۳/۶$.

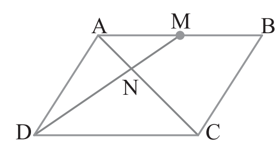
۱۱۴ (۳) چون AB با CD موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث OAB و OCD متشابه هستند. بنابراین $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{DC}$، یعنی $\frac{OA}{OC}=\frac{۱}{۳}$. از طرف دیگر، دو مثلث BAO و BOC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، یعنی $\frac{S_{BAO}}{S_{BOC}}=\frac{AO}{OC}$. بنابراین $\frac{S_{BAO}}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$. پس $S_{BAO}=۴$.

۱۱۵ (۱) چون $DC \parallel AM$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث DNC و MNA متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{DC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{AC}{NC}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{NC}{AC}=\frac{۲}{۳}$$

از طرف دیگر دو مثلث DNC و ADC در ارتفاع نظیر رأس D مشترک هستند، پس

$$\frac{S_{DNC}}{S_{ADC}}=\frac{NC}{AC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow S_{DNC}=\frac{۲}{۳}S_{ADC}=\frac{۲}{۳}(\frac{۱}{۲}S_{ABCD})=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$$

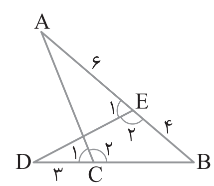


۱۱۶ (۳) دو مثلث ABC و DBE متشابه‌اند، زیرا با توجه به شکل زیر

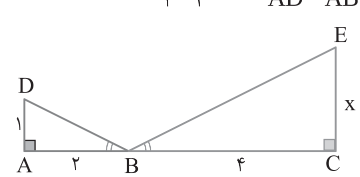
$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_۱=\hat{C}_۱\Rightarrow\hat{E}_۲=\hat{C}_۲\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{(ز ز)}\triangle ABC\sim\triangle DBE$$

$$\frac{BC}{BE}=\frac{AB}{BD}\Rightarrow\frac{BC}{۴}=\frac{۱۰}{BC+۳}\Rightarrow BC^۲+۳BC-۴۰=۰$$

$$(BC+۸)(BC-۵)=۰\Rightarrow BC=۵$$

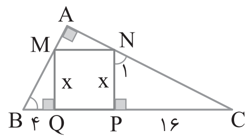


۱۱۷ (۱) می‌دانیم در آینه زاویهٔ بازتاب با زاویهٔ تابش برابر است، پس $D\hat{B}A=E\hat{B}C$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BAD و BCE متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{CE}{AD}=\frac{CB}{AB}$، یعنی $\frac{x}{۱}=\frac{۴}{۲}$. پس $x=۲$.



۱۱۸ (۴) مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$. از طرف دیگر در مثلث CPN، $\hat{N}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{N}_۱=\hat{B}$، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ NPC و BQM متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{BQ}{NP}=\frac{QM}{PC}\Rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{x}{۱۶}\Rightarrow x=۸$$



۱۱۹ (۱) مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACH و BAH متشابه‌اند (ز ز). پس

$$\frac{CH}{AH}=\frac{AH}{BH}=\frac{AC}{AB}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

در نتیجه

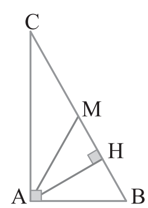
$$\left.\begin{array}{l}\frac{CH}{AH}=\sqrt{۳}\\ \frac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ضرب می‌کنیم}}\frac{CH}{BH}=۳$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{CH}{BC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow CH=\frac{۳}{۴}BC$$

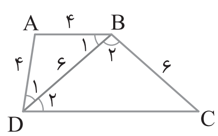
$$\xrightarrow{CM=\frac{BC}{۲}}MH=\frac{۳}{۴}BC-\frac{۱}{۲}BC=\frac{۱}{۴}BC$$

بنابراین

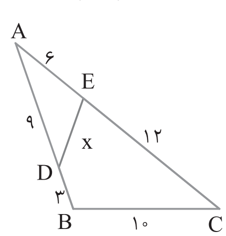
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BC}{\frac{۱}{۲}AH\times MH}=\frac{BC}{MH}=\frac{BC}{\frac{۱}{۴}BC}=۴$$



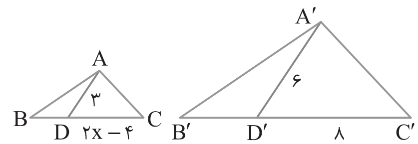
۱۲۰ (۴) مثلث‌های ADB و BDC متساوی‌الساقین هستند، پس $\hat{D}_۲=\hat{C}$ و $\hat{D}_۱=\hat{B}_۱$. از طرف دیگر $AB \parallel DC$ و BD مورب است، در نتیجه $\hat{B}_۱=\hat{D}_۲$. از این تساوی‌ها نتیجه می‌شود $\hat{B}_۱=\hat{C}=\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$. پس دو مثلث ABD و BCD متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{DC}{BD}=\frac{BD}{AD}$، یعنی $\frac{DC}{۶}=\frac{۶}{۴}$. پس $DC=۹$. اکنون می‌توان نوشت $\frac{DC}{AB}=\frac{۹}{۴}$.



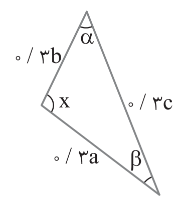
۱۲۱ (۴) با توجه به اندازه‌های مشخص شده روی شکل، $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\hat{A}=\hat{A}$، پس دو مثلث ADE و ACB به حالت (ض ز ض)، متشابه‌اند. بنابراین $\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲}$. یعنی $\frac{x}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$، پس $x=۵$.



۱۲۲ **۴** با ترکیب در صورت تناسب $\frac{BD}{DC}=\frac{B'D'}{D'C'}=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود $\frac{BC}{DC}=\frac{B'C'}{D'C'}=\frac{۳}{۲}$، یعنی $BC=\frac{۳}{۲}DC$ و $B'C'=\frac{۳}{۲}D'C'$. از طرف دیگر چون دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه‌اند، پس $\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{\frac{۳}{۲}DC}{\frac{۳}{۲}D'C'}=\frac{DC}{D'C'}$ و چون $\hat{C}=\hat{C}'$، پس دو مثلث CAD و C'A'D' هم متشابه‌اند (ض ز ض). در نتیجه $\frac{AD}{A'D'}=\frac{DC}{D'C'}$، یعنی $\frac{۳}{۶}=\frac{۲x-۴}{۸}$، پس $۲x-۴=۴$ و در نتیجه $x=۴$.

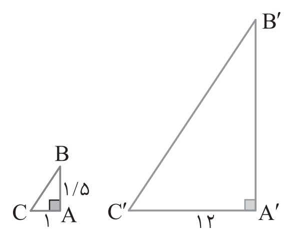


۱۲۳ **۳** اضلاع دو مثلث متناسب‌اند، زیرا $\frac{۰/۳c}{c}=\frac{۰/۳a}{a}=\frac{۰/۳b}{b}$، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ض ض ض). در نتیجه زاویه‌های نظیر این دو مثلث مساوی‌اند.
پس $\alpha=۴۷^\circ,\ \beta=۳۱^\circ\Rightarrow x=۱۸۰^\circ-(۴۷^\circ+۳۱^\circ)=۱۰۲^\circ$



۱۲۴ **۳** چون ضلع‌های دو مثلث موازی هستند، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز). بنابراین مطابق شکل‌های زیر،

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\Rightarrow\frac{۱/۵}{A'B'}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow A'B'=۱۸$$



۱۲۵ **۲** دو مثلث ABC و BDC متشابه‌اند، زیرا

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_۱=\hat{A}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ز ز)}}\triangle ABC\sim\triangle BDC\Rightarrow\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{BC}$$

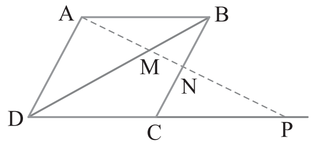
$BC^۲=AC\times CD$

پس BC واسطهٔ هندسی بین AC و CD است.

۱۲۶ **۴** چون BN و AD موازی‌اند، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث MBN و MDA متشابه‌اند. بنابراین $\frac{MB}{MD}=\frac{MN}{MA}$ (۱)

از موازی بودن AB و DP هم نتیجه می‌شود دو مثلث MAB و MPD متشابه‌اند و $\frac{MB}{MD}=\frac{MA}{MP}$ (۲)

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{MA}{MP}=\frac{MN}{MA}$، پس $MN\times MP=MA^۲$.



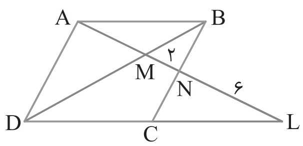
۱۲۷ **۱** از قضیهٔ اساسی تشابه نتیجه می‌شود که

$$AB\|DL\Rightarrow\triangle MBA\sim\triangle MDL\Rightarrow\frac{AM}{ML}=\frac{MB}{MD}\quad(۱)$$

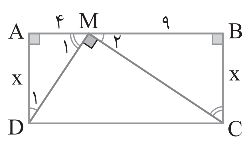
$$AD\|BN\Rightarrow\triangle MAD\sim\triangle MNB\Rightarrow\frac{MB}{MD}=\frac{MN}{AM}\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{AM}{ML}=\frac{MN}{AM}\Rightarrow\frac{AM}{۸}=\frac{۲}{AM}\Rightarrow AM^۲=۱۶\Rightarrow AM=۴$$



۱۲۸ **۲** در مثلث AMD، $\hat{M}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ$. از طرف دیگر، $\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۹۰^\circ$. پس $\hat{M}_۲=\hat{D}_۱$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMD و BCM متشابه‌اند (ز ز) و $\frac{AM}{BC}=\frac{AD}{BM}$، یعنی $\frac{۴}{x}=\frac{x}{۹}$، پس $x=۶$.

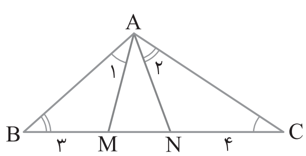


۱۲۹ **۳** دو مثلث BMA و ANC متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{AM}{NC}=\frac{BM}{AN}\quad(۱)$$

از طرف دیگر $A\hat{M}N=\hat{A}_۱+\hat{B}=\hat{C}+\hat{A}_۲=A\hat{N}M$. پس مثلث AMN متساوی‌الساقین است و $AM=AN$. اکنون با توجه به تساوی (۱)،

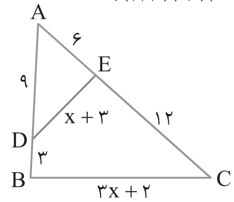
$$AM^۲=BM\times NC=۳\times۴\Rightarrow AM=۲\sqrt{۳}$$



۱۳۰ **۳** با توجه به اندازه‌های روی شکل $\frac{AD}{AC}=\frac{۹}{۱۸}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$. از طرف دیگر زاویهٔ بین این ضلع‌های متناسب زاویهٔ A است. پس دو مثلث AED و ABC متشابه‌اند (ض ز ض)، در نتیجه ضلع‌های نظیرشان متناسب‌اند:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x+۳}{۳x+۲}\Rightarrow x=۴$$

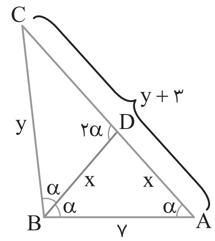
بنابراین ضلع‌های مثلث ABC برابر ۱۸، ۱۲ و ۱۴ هستند، پس محیط این مثلث برابر است با $۱۸+۱۲+۱۴=۴۴$.



۱۳۱ (۴) با توجه به فرض مسئله مثلث ABC را رسم می‌کنیم و محل برخورد نیمساز زاویهٔ B با ضلع AC را D می‌نامیم. در این صورت $C\hat{B}D=\hat{A}$ و $\hat{C}=\hat{C}$. در نتیجه دو مثلث ABC و BDC متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{BC}=\frac{BC}{AC}$، یعنی $\frac{x}{۷}=\frac{y+۳-x}{y}=\frac{y}{y+۳}$. اکنون با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

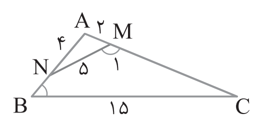
$$\frac{x+y+۳-x}{۷+y}=\frac{y}{y+۳}\Rightarrow\frac{y+۳}{۷+y}=\frac{y}{y+۳}$$

$$y^۲+۶y+۹=۷y+y^۲\Rightarrow y=۹\Rightarrow BC=۹$$



۱۳۲ (۴) با توجه به شکل $A\hat{M}N+\hat{M}_۱=۱۸۰^\circ$. همچنین بنابر فرض مسئله، $\hat{B}+\hat{M}_۱=۱۸۰^\circ$. پس $A\hat{M}N=\hat{B}$. از طرف دیگر $\hat{A}=\hat{A}$، پس دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$، یعنی $\frac{۵}{۱۵}=\frac{۴}{CM+۲}=\frac{۲}{۴+NB}$، پس $NB=۲$ و $CM=۱۰$. اکنون می‌توان نوشت

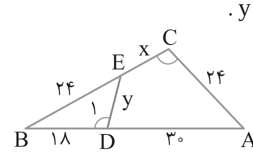
$$\text{محیط}(BCMN)=BC+CM+MN+NB=۱۵+۱۰+۵+۲=۳۲$$



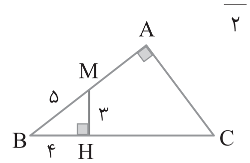
۱۳۳ (۲) چون $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{D}_۱=\hat{C}$، پس دو مثلث BDE و BCA متشابه‌اند (ز ز). بنابراین $\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA}=\frac{ED}{CA}$. پس $\frac{۱۸}{۲۴+x}=\frac{۲۴}{۴۸}=\frac{y}{۲۴}$. در نتیجه

$$\frac{y}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۱۲,\qquad \frac{۱}{۲}=\frac{۱۸}{۲۴+x}\Rightarrow x=۱۲$$

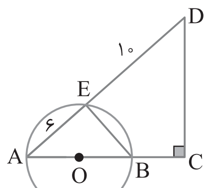
پس $y-x=۱۲-۱۲=۰$.



۱۳۴ (۱) چون $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{H}=\hat{A}$، پس دو مثلث BHM و BAC متشابه هستند (ز ز). بنابراین $\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{BM}$، یعنی $\frac{۱۰}{۴}=\frac{BC}{۵}$، پس $BC=\frac{۲۵}{۲}$. با توجه به شکل، $CH=BC-BH=\frac{۲۵}{۲}-۴=\frac{۱۷}{۲}$. اکنون می‌توان نوشت $\frac{MH}{CH}=\frac{۳}{\frac{۱۷}{۲}}=\frac{۶}{۱۷}$.

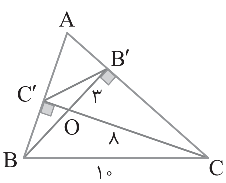


۱۳۵ (۲) زاویهٔ AEB روبه‌رو به قطر AB است، پس $A\hat{E}B=۹۰^\circ$. از طرف دیگر $\hat{A}=\hat{A}$، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AEB و ACD متشابه‌اند (ز ز) و در نتیجه $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$. اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، $AC=AB+BC=۲R+R=۳R$. پس $\frac{۲R}{AD}=\frac{AE}{۳R}$. در نتیجه $AE\times AD=۶R^۲$، یعنی $۶R^۲=۶\times۱۶$، پس $R=۴$.



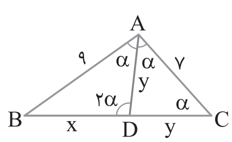
۱۳۶ (۲) با توجه به درسنامه، دو مثلث $AH_۱H_۲$ و ABC با یکدیگر متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{AH_۱}{AB}=\frac{H_۱H_۲}{BC}$. پس $\frac{H_۱H_۲}{۸}=\frac{۹}{۱۲}$ و در نتیجه $H_۱H_۲=۶$.

۱۳۷ (۴) چون $B\hat{O}C'=C\hat{O}B'$، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $OC'B$ و $OB'C$ متشابه‌اند (ز ز)، یعنی $\frac{OC'}{OB'}=\frac{OB}{OC}$، یعنی $\frac{OC'}{OB}=\frac{OB'}{OC}$. همچنین $B'\hat{O}C'=B\hat{O}C$، پس دو مثلث $OB'C'$ و OCB متشابه‌اند (ض ز ض). بنابراین $\frac{OB'}{OC}=\frac{B'C'}{BC}$، یعنی $\frac{B'C'}{۱۰}=\frac{۳}{۸}$ و در نتیجه $B'C'=\frac{۳۰}{۸}=۳/۷۵$.



۱۳۸ (۱) در شکل AD نیمساز زاویهٔ A است. چون $B\hat{A}D=\hat{C}$ و $\hat{B}=\hat{B}$، پس دو مثلث BAD و BCA متشابه‌اند (ز ز) و $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}=\frac{AD}{AC}$، یعنی $\frac{۹}{x+y}=\frac{x}{۹}=\frac{y}{۷}$. حال با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{۹}{x+y}=\frac{x+y}{۹+۷}\Rightarrow(x+y)^۲=۹\times۱۶\Rightarrow x+y=۳\times۴\Rightarrow BC=۱۲$$

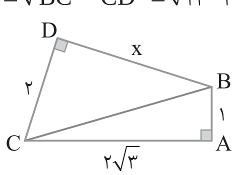


۱۳۹ (۲) با توجه به فرض‌های مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۱+۱۲}=\sqrt{۱۳}$$

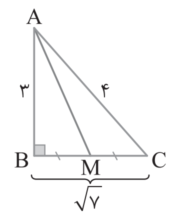
اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغوس در مثلث BCD،

$$BD=\sqrt{BC^۲-CD^۲}=\sqrt{۱۳-۴}=۳$$



۱۴۰ (۲) بنا بر عکس قضیهٔ فیثاغورس، مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا $۳^۲+(\sqrt{۷})^۲=۴^۲$، یعنی $AC^۲=AB^۲+BC^۲$. در هر مثلث میانهٔ وارد بر کوچک‌ترین ضلع بزرگ‌ترین میانه است. در اینجا باید طول میانهٔ AM را به‌دست آوریم. در مثلث ABM، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AM^۲=AB^۲+BM^۲=۳^۲+\left(\frac{\sqrt{۷}}{۲}\right)^۲=۹+\frac{۷}{۴}=\frac{۴۳}{۴}\Rightarrow AM=\frac{\sqrt{۴۳}}{۲}$$



۱۴۱ (۴) از E خطی موازی DC رسم می‌کنیم تا امتداد AD را در F قطع کند. چون $AE=۲AC$، پس C وسط AE است. بنابراین در مثلث AFE، پاره‌خط DC میان‌خط است. در نتیجه

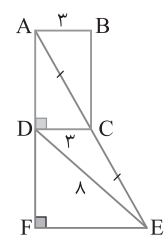
$$DC=\frac{۱}{۲}FE\Rightarrow FE=۲DC=۲\times۳=۶$$

در مثلث DEF، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$DF=\sqrt{DE^۲-EF^۲}=\sqrt{۶۴-۳۶}=۲\sqrt{۷}$$

از طرف دیگر $AD=DF$، پس

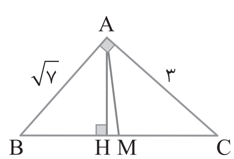
$$AD=۲\sqrt{۷},\quad S_{ABCD}=AD\times AB=۲\sqrt{۷}\times۳=۶\sqrt{۷}$$



۱۴۲ (۱) در شکل، AH و AM به ترتیب ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر هستند. باید طول MH را پیدا کنیم. در مثلث ABC، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۷+۹}=۴$$

و بنابر رابطه‌های طولی، $AB^۲=BH\times BC$، یعنی $۷=BH\times۴$، پس $BH=\frac{۷}{۴}$. به این ترتیب $MH=BM-BH=۲-\frac{۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$.



۱۴۳ (۲) بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AC^۲=CH\times CB\Rightarrow AC^۲=۴\times۱۳\Rightarrow AC=۲\sqrt{۱۳}$$

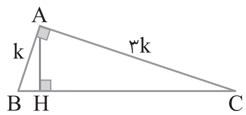
$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow AH^۲=۹\times۴\Rightarrow AH=۶$$

پس $\frac{AC}{AH}=\frac{۲\sqrt{۱۳}}{۶}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$.

۱۴۴ (۳) چون $\frac{AB}{AC}=\frac{۱}{۳}$، پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد که $AB=k$ و $AC=۳k$. توجه کنید که $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times k\times۳k=\frac{۳}{۲}k^۲=۶۰$ در نتیجه $k=۲\sqrt{۱۰}$، بنابراین $AC=۶\sqrt{۱۰}$ و $AB=۲\sqrt{۱۰}$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۴۰+۳۶۰}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰$$

از طرف دیگر طبق رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $BC\times AH=AB\times AC$، یعنی $۲۰AH=۱۲۰$. پس $AH=۶$.



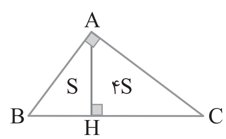
۱۴۵ (۳) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. فرض کنید $S_{AHC}=۴S_{ABH}$. دو مثلث AHC و ABH در ارتفاع AH مشترک هستند. پس $\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\frac{BH}{CH}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{BH}{CH}\Rightarrow CH=۴BH$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

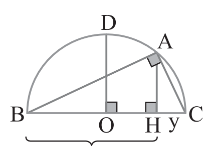
$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow ۸^۲=BH(۴BH)\Rightarrow BH^۲=۱۶\Rightarrow BH=۴$$

$$CH=۱۶$$

بنابراین $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}(۸)(۲۰)=۸۰$.



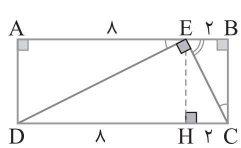
۱۴۶ (۱) زاویهٔ BAC زاویه‌ای محاطی مقابل به کمان ۱۸۰° است، پس $B\hat{A}C=۹۰^\circ$. اکنون، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، می‌توان نوشت $AH^۲=BH\times CH$، یعنی $AH=\sqrt{xy}$. از طرف دیگر OD برابر شعاع دایره است و $OD=OC=\frac{x+y}{۲}$. مطابق شکل واضح است که $AH\le OD$، پس $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{۲}$، یعنی $۲\sqrt{xy}\le x+y$.



۱۴۷ (۴) چون $A\hat{E}D=E\hat{C}B$ و $E\hat{C}B+C\hat{E}B=۹۰^\circ$، پس $A\hat{E}D+C\hat{E}B=۹۰^\circ$. در نتیجه $C\hat{E}D=۹۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC اگر از نقطهٔ E عمود EH را بر ضلع DC رسم کنیم، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$EH^۲=DH\times CH\Rightarrow EH^۲=۸\times۲=۱۶$$

پس $EH=۴$. اکنون می‌توان نوشت $S_{CDE}=\frac{۱}{۲}DC\times EH=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۴=۲۰$.



۱۴۸ ② راه‌حل اول با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\triangle ABC: AB^۲=BH\times BC \xrightarrow{BH=x} ۴^۲=x(x+۶)$$

$$x^۲+۶x-۱۶=۰\Rightarrow (x+۸)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow BH=۲$$

$$\triangle ABC: AH^۲=BH\times CH=۲\times۶=۱۲\Rightarrow AH=۲\sqrt{۳}$$

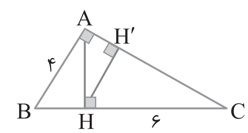
$$\triangle ABC: AC^۲=BC^۲-AB^۲\Rightarrow AC^۲=۸^۲-۴^۲=۶۴-۱۶=۴۸$$

$$AC=۴\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$\triangle AHC: HH'\times AC=AH\times CH\Rightarrow HH'\times۴\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}\times۶$$

$$HH'=۳$$

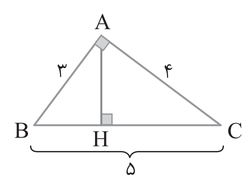


راه‌حل دوم پس از اینکه $BH=۲$ به‌دست آمد، توجه کنید که HH' و AB بر AC عمود هستند، بنابراین با هم موازی‌اند. پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CAB،

$$HH'\parallel AB\Rightarrow\frac{CH}{CB}=\frac{HH'}{AB}\Rightarrow\frac{۶}{۸}=\frac{HH'}{۴}\Rightarrow HH'=۳$$

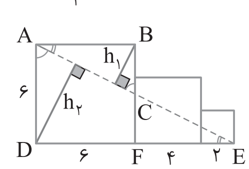
۱۴۹ ② مثلث داده شده را مانند شکل زیر رسم می‌کنیم. بین طول ضلع‌های مثلث داده شده رابطهٔ فیثاغورس برقرار است $(۳^۲+۴^۲=۵^۲)$، پس مثلث قائم‌الزاویه است و بنابر رابطه‌های طولی، $AB\times AC=BC\times AH$. پس $۵\times AH=۳\times۴$، در نتیجه $AH=\frac{۱۲}{۵}$. می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌های نظیر با نسبت تشابه برابر است، بنابراین

$$\text{نسبت تشابه}=\text{نسبت ارتفاع‌ها}=\frac{\frac{۱۲}{۵}}{۱۲}=\frac{۱}{۵}$$



۱۵۰ ① توجه کنید که $B\hat{A}C+E\hat{A}D=۹۰^\circ$ و $A\hat{E}D+E\hat{A}D=۹۰^\circ$. پس $B\hat{A}C=A\hat{E}D$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و EDA متشابه‌اند (ز ز). بنابراین نسبت ارتفاع‌های وارد بر وتر برابر است با نسبت تشابه آن‌ها:

$$\frac{h_۲}{h_۱}=\frac{DE}{AB}=\frac{۱۲}{۶}=۲$$



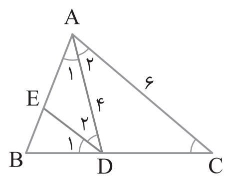
۱۵۱ ③ نیمساز زاویهٔ ADB را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با ضلع AB را E می‌نامیم. اکنون دو مثلث DBA و ABC را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{B}\end{cases}\xrightarrow{(ز ز)}\triangle DBA\sim\triangle ABC$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت نیمسازهای نظیر برابر نسبت ضلع‌های نظیر است. AD نیمساز زاویهٔ A در مثلث ABC و DE نیمساز زاویهٔ D مثلث DBA است. بنابراین

$$\begin{cases}\text{نسبت نیمسازها}=\frac{DE}{AD}\\ \text{نسبت ضلع‌های نظیر}=\frac{AD}{AC}\end{cases}\Rightarrow\frac{DE}{AD}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{DE}{۴}=\frac{۴}{۶}$$

$$DE=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳}$$

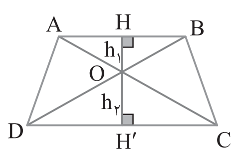


۱۵۲ ④ دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند، بنابراین $\frac{OH}{OH'}=\frac{AB}{DC}=\frac{۲}{۳}$. بنابر ویژگی‌های تناسب، $\frac{OH}{OH+OH'}=\frac{۲}{۳+۲}=\frac{۲}{۵}$، در نتیجه $\frac{OH}{HH'}=\frac{۲}{۵}$. می‌توان نوشت

$$\frac{S_{OAB}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times OH\times AB}{\frac{۱}{۲}\times HH'\times(AB+DC)}=\frac{\frac{۲}{۵}HH'\times AB}{HH'\times(AB+\frac{۳}{۲}AB)}$$

$$=\frac{۴}{۲۵}=۰/۱۶$$

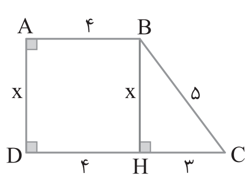
پس مساحت مثلث OAB، ۱۶ درصد مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ است.



۱۵۳ ② در شکل BH ارتفاع وارد بر DC است. پس $ABHD$ مستطیل است. اگر $AD=x$، آن‌گاه $BH=x$ و $DH=۴$، پس $CH=۳$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BCH،

$$BH=\sqrt{BC^۲-CH^۲}=\sqrt{۵^۲-۳^۲}=۴$$

در نتیجه $\text{محیط ذوزنقه}=AB+BC+CD+DA=۴+۵+۷+۴=۲۰$



۱۵۴ ① دو مثلث ABH و CAH با داشتن دو زاویهٔ مساوی متشابه‌اند. پس نسبت BM به AN، میانه‌های نظیر این دو مثلث با نسبت تشابه آن‌ها برابر است:

$$\triangle ABH\sim CAH\Rightarrow\frac{BM}{AN}=\frac{AH}{HC}=\tan۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۵۵ ② محیط مثلث اول برابر $(۷a-۲)+(۲a+۱)+(۴a)=۱۳a-۱$ و محیط مثلث دوم برابر ۲۴ است. می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها مساوی توان دوم نسبت محیط‌ها است. فرض می‌کنیم S و P به ترتیب مساحت و محیط مثلث اول و S' و P' به ترتیب مساحت و محیط مثلث دوم باشند. بنابراین

$$\frac{S}{S'}=(\frac{P}{P'})^۲\Rightarrow\frac{۶}{۲۴}=(\frac{۱۳a-۱}{۲۴})^۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱۳a-۱}{۲۴}\Rightarrow a=۱$$

۱۵۶ ۲ نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۳}{۴}$ یا $\frac{۳}{۵}$ است (توجه کنید که چون دو مثلث غیرهمنهشت هستند، نسبت تشابه را ۱ نگرفتیم). چون محیط مثلث دوم برابر $۱۲=۵+۴+۳$ است، پس محیط مثلث اول یکی از دو عدد $۹=\frac{۳}{۴}\times۱۲$ یا $۷/۲=\frac{۳}{۵}\times۱۲$ است. بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

۱۵۷ ۱ چون دو مثلث متساوی‌الاضلاع زاویه‌های برابر دارند، پس همواره متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌ها است: $\frac{S_۱}{S_۲}=k^۲=۹$، در نتیجه $k=۳$. نسبت محیط‌های این دو مثلث برابر نسبت تشابه آن‌ها است، پس محیط مثلث بزرگ‌تر ۳ برابر محیط مثلث کوچک‌تر است.

۱۵۸ ۱ زاویه‌های مثلث ABC برابر $\hat{A}=۷۰^\circ$ ، $\hat{B}=۵۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ و زاویه‌های مثلث MPN برابر $\hat{N}=۶۰^\circ$ ، $\hat{M}=۷۰^\circ$ و $\hat{P}=۵۰^\circ$ هستند. پس دو مثلث ABC و MPN متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه ضلع $AB=۱۸$ در مثلث ABC که روبه‌روی زاویهٔ $\hat{C}=۶۰^\circ$ است، با ضلع MP در مثلث MPN که روبه‌روی زاویهٔ $\hat{N}=۶۰^\circ$ است، متناظر است. بنابراین

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MPN}}=(\frac{AB}{MP})^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{AB}{MP}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{AB=۱۸}\frac{۱۸}{MP}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow MP=۱۲$$

۱۵۹ ۲ در شکل زیر با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه می‌نویسیم

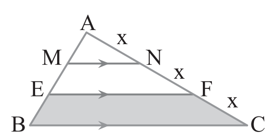
$$MN||BC\Rightarrow\triangle AMN\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=(\frac{x}{۳x})^۲=\frac{۱}{۹}$$

$$EF||BC\Rightarrow\triangle AEF\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=(\frac{۲x}{۳x})^۲=\frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل}}\frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}}=\frac{۵}{۹}$$

از تقسیم دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم

$$\frac{S_{AMN}}{S_{BEFC}}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{S_{AMN}=۵}\frac{۵}{S_{BEFC}}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow S_{BEFC}=۲۵$$



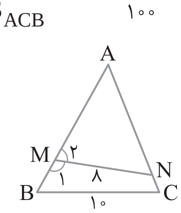
۱۶۰ ۲ در چهارضلعی BMNC زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند، پس

$$\hat{M}_۱+\hat{C}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۱۸۰^\circ}\hat{M}_۲=\hat{C}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}\hat{M}_۲=\hat{C}\\ \hat{A}=\hat{A}\end{cases}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle AMN\sim\triangle ACB\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ACB}}=(\frac{۸}{۱۰})^۲=\frac{۶۴}{۱۰۰}$$

$$\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل}}\frac{S_{ACB}-S_{AMN}}{S_{ACB}}=\frac{۱۰۰-۶۴}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{S_{BMNC}}{S_{ACB}}=\frac{۳۶}{۱۰۰}$$



۱۶۱ ۲ ابتدا به کمک قضیهٔ تالس مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

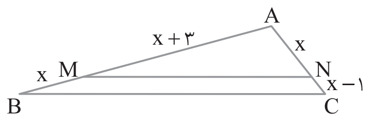
$$MN||BC\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{x+۳}{x}=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow x^۲+۲x-۳=x^۲\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

از طرف دیگر،

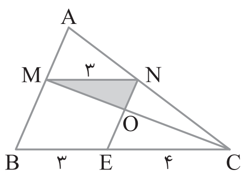
$$MN||BC\xrightarrow[\text{اساسی تشابه}]{\text{قضیهٔ}}\triangle AMN\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=(\frac{AM}{AB})^۲$$

$$=(\frac{x+۳}{۲x+۳})^۲=(\frac{\frac{۳}{۲}+۳}{۳+۳})^۲=(\frac{\frac{۹}{۲}}{۶})^۲=(\frac{۹}{۱۲})^۲=\frac{۹}{۱۶}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل}}$$

$$\frac{S_{ABC}-S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{۱۶-۹}{۱۶}\Rightarrow\frac{S_{MNCB}}{S_{ABC}}=\frac{۷}{۱۶}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱۶}{۷}S_{MNCB}$$



۱۶۲ ۳ چون $MN||EC$، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه دو مثلث OMN و OCE متشابه‌اند، بنابراین $\frac{S_{OMN}}{S_{OCE}}=(\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۹}{۱۶}$. از طرف دیگر



$$OE||BM\xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیهٔ اساسی}}\triangle OEC\sim\triangle MBC$$

$$\frac{S_{OEC}}{S_{MBC}}=(\frac{۴}{۷})^۲=\frac{۱۶}{۴۹}$$

در ضمن

$$MN||BC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{۳}{۷}$$

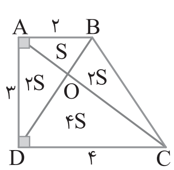
$$\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل در}}\frac{MB}{AB}=\frac{۴}{۷}$$

توجه کنید که دو مثلث BMC و ABC در ارتفاع نظیر از رأس C مشترک هستند. پس $\frac{S_{BMC}}{S_{ABC}}=\frac{BM}{AB}=\frac{۴}{۷}$ ، بنابراین

$$S_{OMN}=\frac{۹}{۱۶}S_{OEC}=\frac{۹}{۱۶}(\frac{۱۶}{۴۹}S_{BMC})=\frac{۹\times۱۶}{۱۶\times۴۹}\times\frac{۴}{۷}S_{ABC}$$

$$S_{OMN}=\frac{۳۶}{۳۴۳}S_{ABC}$$

۱۶۳ ۱ چون CD و AB بر AD عمودند، پس موازی‌اند. در نتیجه، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث AOB و COD متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{DC}{AB}=\frac{۴}{۲}=۲$. بنابراین اگر مساحت مثلث OAB برابر S باشد، مساحت مثلث ODC برابر ۴S است. از طرف دیگر از تشابه دو مثلث AOB و COD نتیجه می‌گیریم $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{DC}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین نسبت مساحت‌های دو مثلث OAB و OBC که در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند، برابر نسبت قاعده‌های آن‌ها، یعنی $\frac{OA}{OC}=\frac{۱}{۲}$ است. پس $S_{OBC}=۲S_{AOB}=۲S$. به همین ترتیب $S_{OAD}=۲S_{OAB}=۲S$ ، بنابراین



$$S_{ABCD}=۲S+S+۲S+۴S\Rightarrow\frac{۱}{۲}(۳)(۲+۴)=۹S\Rightarrow S=۱$$

پس مساحت مثلث OBC مساوی $۲S=۲$ است.

۱۶۴ (۲) هر دو هشت‌ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست. پس

$$\frac{S}{S'}=(\frac{a}{a'})^{۲}\Rightarrow\frac{۹}{۱۶}=(\frac{a}{a'})^{۲}\Rightarrow\frac{a}{a'}=\frac{۳}{۴}$$

اکنون اگر ضلع کوچک‌تر را ۱۲ در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{۱۲}{a'}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a'=\frac{۴\times ۱۲}{۳}=۱۶$$

و در صورتی که ضلع بزرگ‌تر را ۱۲ در نظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a}{۱۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱۲\times ۳}{۴}=۹$$

۱۶۵ (۲) هر دو ده‌ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی توان دوم نسبت تشابه آن‌ها و درنتیجه برابر توان دوم نسبت محیط‌های آن‌ها است. پس

$$\frac{\text{مساحت ده‌ضلعی کوچک}}{\text{مساحت ده‌ضلعی بزرگ}}=(\frac{۸}{۱۲})^{۲}=(\frac{۲}{۳})^{۲}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}$$

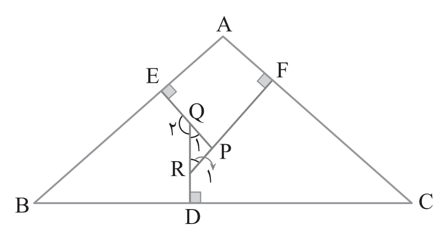
$$\frac{\text{مجموع مساحت‌ها}}{\text{مساحت ده‌ضلعی بزرگ}}=\frac{۴+۹}{۹}\Rightarrow\frac{۷۸}{\text{مساحت ده‌ضلعی بزرگ}}=\frac{۱۳}{۹}$$

۵۴=مساحت ده‌ضلعی بزرگ

۱۶۶ (۲) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه برابر است. پس اگر k نسبت تشابه باشد، $k=\sqrt{\frac{۴\sqrt{۵}}{۱۶\sqrt{۵}}}=\frac{۱}{۲}$. از طرف دیگر، نسبت محیط دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است. پس با فرض اینکه P محیط مثلث مورد نظر باشد، می‌توان نوشت $\frac{P}{۳۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P=۱۶$

پس $m+m+۳+۲m+۱=۱۶$. در نتیجه $m=۳$.

۱۶۷ (۱) دو مثلث PQR و ABC متشابه‌اند، زیرا در چهارضلعی BDQE دو زاویهٔ قائمه وجود دارد، پس $\hat{B}+\hat{Q}_{۲}=۱۸۰^{\circ}$. از طرف دیگر $\hat{Q}_{۱}+\hat{Q}_{۲}=۱۸۰^{\circ}$، پس $\hat{B}=\hat{Q}_{۱}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{R}_{۱}=\hat{C}$.
بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها است: $\frac{S_{ABC}}{S_{PQR}}=(\frac{AC}{PR})^{۲}=(\frac{۸PR}{PR})^{۲}=۶۴$.



۱۶۸ (۱) مساحت مثلث OME را برابر S در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). چون OM موازی BF است، پس دو مثلث OME و FBE بنابر قضیهٔ اساسی تشابه متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{ME}{BE}=\frac{۲k}{۴k}=\frac{۱}{۲}$ است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه، یعنی $\frac{۱}{۴}$ است:

$$\frac{S_{OME}}{S_{FBE}}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{OME}}{S_{BMOF}}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین مساحت چهارضلعی BMOF برابر ۳S است. از طرف دیگر چون OE موازی AN است، پس دو مثلث OME و NMA با نسبت $\frac{ME}{MA}=\frac{۲k}{۳k}=\frac{۲}{۳}$ متشابه‌اند و در نتیجه

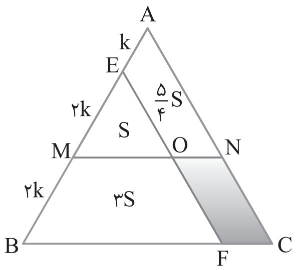
$$\frac{S_{OME}}{S_{NMA}}=(\frac{۲}{۳})^{۲}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{OME}}{S_{ANOE}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین مساحت چهارضلعی ANOE برابر $\frac{۵}{۴}S$ است. در ضمن EF موازی AC است، پس دو مثلث EBF و ABC با نسبت $\frac{BE}{AB}=\frac{۴}{۵}$ متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{S_{EBF}}{S_{ABC}}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\frac{۴S}{۴S+\frac{۵}{۴}S+S_{ONCF}}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

بنابراین $S_{ONCF}=S$، در نهایت $\frac{S_{ONCF}}{S_{ABC}}=\frac{S}{۴S+\frac{۵}{۴}S+S}=\frac{S}{\frac{۲۵}{۴}S}=\frac{۴}{۲۵}$،

یعنی مساحت متوازی‌الاضلاع رنگی $\frac{۴}{۲۵}=۱۶\%$ مساحت مثلث ABC است.

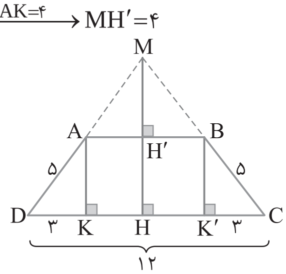


۱۶۹ (۲) با رسم ارتفاع‌های AK و BK′ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADK و BCK′ همنهشت می‌شوند. پس $DK=\frac{۱۲-۶}{۲}=۳$. در نتیجه با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADK طول ارتفاع AK برابر ۴ است. پس

$$AB||DC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle ABM\sim\triangle DCM$$

$$\frac{MH'}{MH}=\frac{AB}{DC}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{MH'}{HH'}=\frac{۱}{۱}$$

$$\xrightarrow{HH'=AK=۴}MH'=۴$$



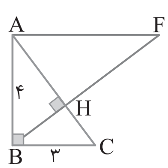
۱۷۰ (۱) در مثلث ABC، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AC=\sqrt{AB^{۲}+BC^{۲}}=\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}=۵$$

بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$BH=\frac{AB\times BC}{AC}=\frac{۴\times ۳}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

$$AB^{۲}=AH\times AC\Rightarrow AH=\frac{AB^{۲}}{AC}=\frac{۱۶}{۵}$$



اگر بخواهیم دو مثلث ABH و AFH متشابه باشند، دو حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: BH را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا F به‌دست آید (در این حالت دو مثلث همنهشت هستند، یعنی نسبت تشابه آن‌ها برابر ۱ است)، پس $HF=BH=\frac{۱۲}{۵}$. اما این جواب در گزینه‌ها نیست.

حالت دوم: در این حالت نسبت تشابه به صورت $\frac{AH}{BH}=\frac{HF}{AH}$ است. یعنی $\frac{HF}{\frac{۱۶}{۵}}=\frac{\frac{۱۶}{۵}}{\frac{۱۲}{۵}}$، در نتیجه $HF=\frac{۶۴}{۱۵}$.

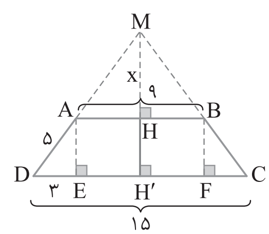
۱۷۱ **۲** مطابق شکل از M نقطهٔ تلاقی امتداد دو ساق ذوزنقه، خطی عمود بر قاعده‌های AB و DC رسم می‌کنیم تا قاعده‌های AB و DC را به‌ترتیب در H و H' قطع کند. سپس با رسم عمودهای AE و BF بر DC نتیجه می‌گیریم

$$EF=AB=۹\ ,\quad DE=CF=\frac{DC-AB}{۲}=\frac{۱۵-۹}{۲}=۳$$

در مثلث ADE ، بنابر رابطهٔ فیثاغورس،

$$AE=\sqrt{AD^۲-DE^۲}=\sqrt{۵^۲-۳^۲}=۴$$

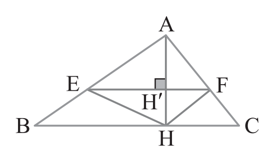
پس $HH'=۴$. بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث MAB و MDC متشابه‌اند، بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر نسبت تشابه است. پس $\frac{MH}{MH'}=\frac{AB}{DC}$، یعنی $\frac{MH}{MH+۴}=\frac{۹}{۱۵}$. در نتیجه $MH=۶$.



۱۷۲ **۱** نقطهٔ برخورد EF و AH را H' می‌نامیم. چون BC موازی EF است، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث AEF و ABC متشابه هستند. بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر با نسبت ضلع‌های نظیر برابر است: $\frac{AH'}{AH}=\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}$. از طرف دیگر $\frac{AE}{EB}=\frac{۳}{۲}$. با ترکیب در مخرج کردن به تناسب $\frac{AE}{AB}=\frac{۳}{۵}$ می‌رسیم. بنابراین $\frac{EF}{BC}=\frac{۳}{۵}$ و $\frac{AH'}{AH}=\frac{۳}{۵}$. با تفضیل در صورت کردن تناسب $\frac{AH'}{AH}=\frac{۳}{۵}$ به تناسب $\frac{HH'}{AH}=\frac{۲}{۵}$ می‌رسیم. اکنون می‌توانیم نسبت خواسته شده را به‌دست آوریم:

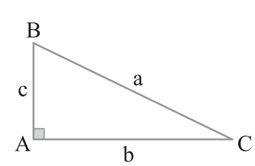
$$\frac{S_{EFH}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}HH'\times EF}{\frac{۱}{۲}AH\times BC}=\frac{HH'}{AH}\times\frac{EF}{BC}=\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۲۵}$$

بنابراین مساحت مثلث EFH، $\frac{۶}{۲۵}\times ۱۰۰=٪۲۴$ مساحت مثلث ABC است.



۱۷۳ **۴** چون هر دو شش‌ضلعی منتظم متشابه هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌ها است. اکنون اگر $S_۲$ مساحت شش‌ضلعی ایجاد شده، روی ضلع به طول b و $S_۳$ مساحت شش‌ضلعی ایجاد شده روی ضلع به طول c باشد، آن‌گاه به‌دست می‌آید: $\frac{S_۲}{S_۱}=(\frac{b}{a})^۲$ و $\frac{S_۳}{S_۱}=(\frac{c}{a})^۲$. در نتیجه

$$\frac{S_۲}{S_۱}+\frac{S_۳}{S_۱}=\frac{b^۲}{a^۲}+\frac{c^۲}{a^۲}=\frac{b^۲+c^۲}{a^۲}=\frac{a^۲}{a^۲}=۱\Rightarrow S_۲+S_۳=S_۱$$

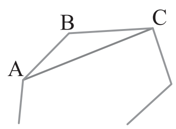


۱۷۴ **۴** از هر رأس n ضلعی محدب $n-۳$ قطر می‌گذرد و تعداد کل قطرها برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است. بنابر فرض سؤال

$$n-۳=\frac{۱}{۸}(\frac{۱}{۲}n(n-۳))\Rightarrow n=۱۶$$

پس $=\frac{۱}{۲}n(n-۳)=\frac{۱}{۲}(۱۶)(۱۶-۳)=۸\times ۱۳=۱۰۴$ تعداد قطرها

۱۷۵ **۳** از هر رأس n ضلعی محدب $n-۳$ قطر می‌گذرد. ظاهراً از سه رأس متوالی آن $۳(n-۳)$ قطر می‌گذرد. اما در این محاسبه ۱ قطر دوبار حساب شده است (شکل را ببینید. اگر A، B و C سه رأس متوالی مورد نظر باشند، قطر AC دو بار حساب شده است: یک بار در محاسبهٔ قطرهای نظیر رأس A و یک بار در محاسبهٔ قطرهای نظیر رأس C). پس تعداد قطرهای رسم شده از سه رأس متوالی n ضلعی محدب برابر $۳(n-۳)-۱$ است. اکنون، می‌توان نوشت $۳(n-۳)-۱=۱۷$ ، یعنی $n=۹$.



۱۷۶ **۴** در صورتی که به تعداد اضلاع n ضلعی محدب یکی اضافه کنیم یعنی آن را به $(n+۱)$ ضلعی محدب تبدیل کنیم، به تعداد قطرهای آن $n-۱$ قطر اضافه می‌شود. پس ۹۹ ضلعی محدب نسبت به ۹۸ ضلعی محدب تعداد ۹۷ قطر بیشتر دارد. بنابراین

$$\text{تعداد قطرهای ۹۸ ضلعی}+۹۷=\text{تعداد قطرهای ۹۹ ضلعی}$$

$$\text{تعداد قطرهای ۹۸ ضلعی}+۹۷=۲k+۳$$

$$\text{تعداد قطرهای ۹۸ ضلعی}=۲k+۳-۹۷=۲k-۹۴$$

۱۷۷ **۳** چون مجموع زاویه‌های خارجی n ضلعی محدب ۳۶۰° است، پس n ضلعی محدب بیش از ۳ زاویهٔ غیرمنفرجهٔ داخلی نمی‌تواند داشته باشد. از طرف دیگر چون در اینجا n ضلعی دقیقاً ۳ زاویهٔ منفرجه دارد و حداکثر هم ۳ زاویهٔ غیرمنفرجه داخلی می‌تواند داشته باشد، پس حداکثر شش‌ضلعی است. در نتیجه حداکثر تعداد قطرهای n ضلعی‌های با این ویژگی برابر است با $\frac{۶\times(۶-۳)}{۲}=۹$.

۱۷۸ **۳** اگر هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم k° باشد، که در این جا k عددی طبیعی است، آن‌گاه هر زاویهٔ خارجی آن نیز برحسب درجه عددی طبیعی است، زیرا اندازهٔ این زاویه برابر است با $۱۸۰^\circ-k^\circ$. چون n ضلعی منتظم است هر زاویهٔ خارجی آن برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است و در نتیجه

$$\frac{۳۶۰^\circ}{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow \text{حداکثر } n=۳۶۰$$

۱۷۹ **۳** می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب مضربی از ۱۸۰° است. بنابراین اگر x زاویهٔ کنار گذاشته شده باشد، آن‌گاه

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی}=۲۲۲۰^\circ+x=\underbrace{۱۲\times ۱۸۰^\circ+۶۰^\circ}_{۲۲۲۰^\circ}+x$$

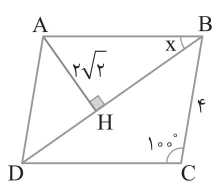
چون $۰^\circ<x<۱۸۰^\circ$ ، مقدار بالا زمانی مضرب ۱۸۰° است که $x=۱۲۰^\circ$.

۱۸۰ **۳** در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس

$$DH=\sqrt{AD^۲-AH^۲}=\sqrt{۱۶-۸}=۲\sqrt{۲}$$

یعنی مثلث ADH قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس $\hat{ADH}=۴۵^\circ$. در ضمن در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل مساوی‌اند، پس $\hat{A}=\hat{C}=۱۰۰^\circ$ و چون مجموع زاویه‌های مثلث ADB برابر ۱۸۰° است، پس

$$x=A\hat{B}D=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ-۴۵^\circ=۳۵^\circ$$



۱۸۱ **۲** می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین در شکل زیر، $OA=OC=\frac{AC}{۲}$، $OB=OD=\frac{BD}{۲}$

بنابر فرض مسئله $AC+BD=۲۰$، پس

$$\frac{AC+BD}{۲}=۱۰\Rightarrow\begin{cases}OA+OB=۱۰ & (۱)\\ OA+OD=۱۰ & (۲)\end{cases}$$

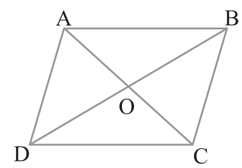
می‌دانیم

محیط مثلث $AOB=۱۸$ ، محیط مثلث $AOD=۱۶$

$$\begin{cases}OA+OB+AB=۱۸\xrightarrow{(۱)}AB=۸\\ OA+OD+AD=۱۶\xrightarrow{(۲)}AD=۶\end{cases}$$

در نهایت به‌دست می‌آید

محیط متوازی‌الاضلاع $=۲(AB+AD)=۲(۸+۶)=۲۸$

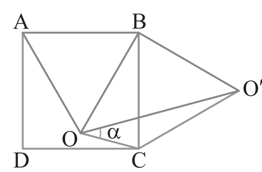


۱۸۲ **۲** چون ABCD مربع است و مثلث‌های OAB و BCO' متساوی‌الاضلاع هستند، پس $A\hat{B}O=C\hat{B}O'=۶۰^\circ$ و $O\hat{B}C=۳۰^\circ$ و طول ضلع‌های این مثلث‌ها برابر طول ضلع مربع هستند: $OB=O'B$
از طرف دیگر

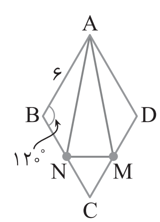
$$O\hat{B}O'=O\hat{B}C+C\hat{B}O'=۳۰^\circ+۶۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow B\hat{O}O'=۴۵^\circ$$

مثلث BOC متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۳۰° است، پس

$$B\hat{O}C=۷۵^\circ\Rightarrow\alpha+۴۵^\circ=۷۵^\circ\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$$



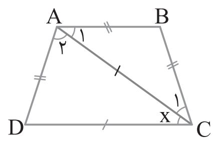
۱۸۳ **۲** در لوزی دو زاویهٔ مجاور مکمل یکدیگرند، پس $\hat{C}=۶۰^\circ$. در ضمن M و N وسط‌های دو ضلع لوزی هستند، پس $MC=NC=۳$. بنابراین مثلث MNC متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۶۰° است. پس دو زاویهٔ دیگر آن هم ۶۰° هستند. در نتیجه مثلث MNC متساوی‌الاضلاع است، پس
$$MN=NC=MC=۳$$



۱۸۴ **۳** اندازهٔ زاویهٔ DCA را برابر x در نظر می‌گیریم. در این صورت از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{A}_۱=x$. در ضمن مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C}_۱=\hat{A}_۱=x$. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین دو زاویهٔ مجاور به قاعده مساوی‌اند، پس $\hat{D}=B\hat{C}D=۲x$. چون مثلث ADC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}_۲=\hat{D}=۲x$، در مثلث ADC مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است، پس

$$\hat{A}_۲+\hat{D}+D\hat{C}A=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲x+۲x+x=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۳۶^\circ$$

بنابراین $D\hat{A}C+D\hat{C}A=۲x+x=۳x=۳\times۳۶^\circ=۱۰۸^\circ$.

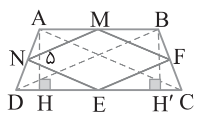


۱۸۵ **۳** در شکل زیر M، N، E و F وسط ضلع‌های ذوزنقهٔ ABCD هستند. دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. چون $HH'=AB=۱۰$، پس $DH+CH'=۱۴-۱۰=۴$. بنابراین $DH=CH'=\frac{۴}{۲}=۲$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH،

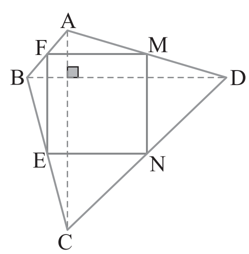
$$AC=\sqrt{AH^۲+CH^۲}=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=۱۳$$

محیط چهارضلعی MNEF مساوی مجموع طول دو قطر ذوزنقهٔ ABCD است. در نتیجه

محیط (MNEF) $=AC+BD=۱۳+۱۳=۲۶$

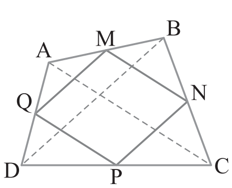


۱۸۶ **۴** می‌دانیم اگر وسط‌های ضلع‌های مجاور هر چهارضلعی محدب را به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع ایجاد می‌شود که ضلع‌های این متوازی‌الاضلاع موازی و مساوی نصف قطرهای چهارضلعی اولیه است. از آن‌جا که قطرهای چهارضلعی اولیه مساوی و بر هم عمودند، پس ضلع‌های متوازی‌الاضلاع ایجاد شده مساوی و بر هم عمودند. پس چهارضلعی حاصل مربع است. در شکل زیر قطرهای چهارضلعی ABCD بر هم عمودند و با هم مساوی‌اند و نقطه‌های M، N، E و F وسط‌های ضلع‌های ABCD هستند و چهارضلعی MNEF مربع است.



۱۸۷ **۳** در شکل نقاط M، N، P و Q وسط ضلع‌های ABCD هستند.
می‌دانیم محیط MNPQ برابر مجموع طول دو قطر ABCD است، پس

$$AC+BD=(MNPQ)\text{محیط}\Rightarrow AC+BD=۱۰$$



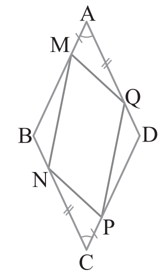
۱۸۸ **۴** در لوزی ضلع‌ها با هم مساوی‌اند و زاویه‌های مقابل برابرند. بنابراین

$$\begin{cases}AM=CP\\ \hat{A}=\hat{C}\\ AQ=CN\end{cases}\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\triangle AMQ\cong\triangle CPN\Rightarrow MQ=NP\quad(۱)$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت

$$\triangle QPD\cong\triangle NMB\Rightarrow QP=MN\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم ضلع‌های مقابل چهارضلعی MQPN مساوی‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در حالت‌های خاص اگر M ، N ، P و Q وسط ضلع‌های لوزی باشند، آن‌گاه MNPQ مستطیل می‌شود و دو قطر آن مساوی می‌شوند و اگر چهارضلعی ABCD مربع باشد، آن‌گاه قطرهای MNPQ بر هم عمود می‌شوند. پس متوازی‌الاضلاع بودن MQPN همواره برقرار است.

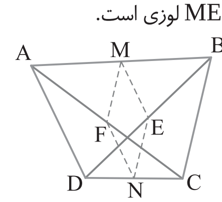


۱۸۹ (۱) با توجه به شکل زیر، در چهارضلعی ABCD فرض می‌کنیم $AD=BC$ و نقطه‌های M و N به ترتیب وسط‌های AB و CD و نقطه‌های E و F وسط‌های دو قطر آن باشند. بنابر قضیهٔ میان‌خط،

$$\triangle ABC: MF\|BC,\quad MF=\frac{BC}{۲}$$

$$\triangle BDC: EN\|BC,\quad EN=\frac{BC}{۲}$$

بنابراین $MF\|EN$ و $MF=EN=\frac{BC}{۲}$، پس چهارضلعی MENF متوازی‌الاضلاع است. به همین ترتیب از قضیهٔ میان‌خط نتیجه می‌شود $ME=FN=\frac{AD}{۲}$ و چون $BC=AD$، پس $MF=EN=ME=FN$. پس متوازی‌الاضلاع MENF لوزی است.

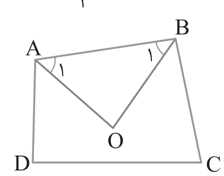


۱۹۰ (۴) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث $۱۸۰°$ و مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب $۳۶۰°$ است. بنابراین

$$A\hat{O}B=۱۸۰°-(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱) \quad (۱)$$

$$۲\hat{A}_۱+۲\hat{B}_۱+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰° \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰°-\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۲} \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $A\hat{O}B=\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۲}$.



۱۹۱ (۴) از برخورد نیمسازهای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD که یک زاویهٔ آن $۶۰°$ است چهارضلعی MNEF به وجود می‌آید به طوری که $\hat{N}=\hat{F}=۹۰°$ ، $MN=MF$ و $NE=EF$. به عبارتی چهارضلعی MNEF یک کایت است، پس ME نیمساز است. چون مثلث AEB متساوی‌الاضلاع است، پس $A\hat{E}B=۶۰°$. در نتیجه $\hat{E}_۱=۳۰°$ و $\hat{M}_۱=۶۰°$. از طرف دیگر اگر ارتفاع‌های AH و BH' را رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH و BCH' همنهشت خواهند شد. پس $۲x+۶=۱۰ \Rightarrow x=۲$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $BH'C$ چون CH' روبه‌رو به زاویهٔ $۳۰°$ است، اندازهٔ آن نصف طول وتر BC است:

$$\triangle BH'C: \hat{B}_۱=۳۰° \Rightarrow x=\frac{BC}{۲} \Rightarrow BC=۴$$

چون مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است، بنابراین $AB=AE=BE=۶$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ BNC، $B\hat{C}N=۳۰° \Rightarrow BN=\frac{BC}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$

پس $NE=BE-BN=۶-۲=۴$. بنابراین

$$\triangle MNE: \hat{M}_۱=۶۰° \Rightarrow NE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}ME \Rightarrow ۴=\frac{\sqrt{۳}}{۲}ME$$

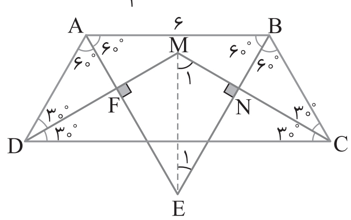
یعنی $ME=\frac{۸}{\sqrt{۳}}$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MNE،

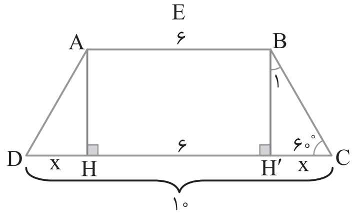
$$MN=\sqrt{ME^۲-NE^۲}=\sqrt{\frac{۶۴}{۳}-۱۶}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

اکنون می‌توان مساحت چهارضلعی MNEF را به‌دست آورد

$$S_{MNEF}=MN\times NE=\frac{۴}{\sqrt{۳}}\times ۴=\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین مساحت این چهارضلعی ۱۶ برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است.

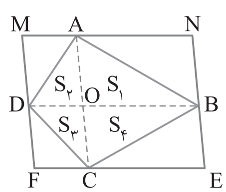




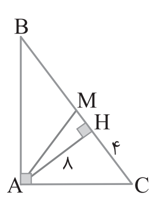
۱۹۲ (۱) اگر از رأس‌های چهارضلعی ABCD خط‌هایی موازی قطرهای آن رسم کنیم، چهارضلعی MNEF ایجاد می‌شود. چهارضلعی‌های AOBN و AODM و DOCF و BOCE متوازی‌الاضلاع هستند. پس

$$S_{BOCE}=۲S_۴,\ S_{DOCF}=۲S_۳,\ S_{AODM}=۲S_۲,\ S_{AOBN}=۲S_۱$$

در نتیجه $S_{MNEF}=۲S_{ABCD}$ ، پس $S_{MNEF}=۲\times۱۲=۲۴$.



۱۹۳ (۳) فرض می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC پاره‌خط AH ارتفاع وارد بر وتر و AM میانهٔ وارد بر وتر باشد. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،



$$AH^۲=BH\times CH \Rightarrow ۸^۲=۴BH$$

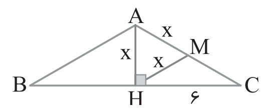
$$BH=\frac{۶۴}{۴}=۱۶$$

پس $BC=۱۶+۴=۲۰$ ، می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه طول میانهٔ وارد بر وتر نصف طول وتر است. بنابراین $AM=\frac{BC}{۲}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$

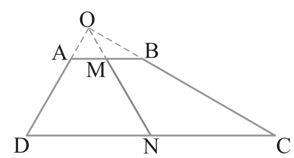
۱۹۴ ۴ در شکل زیر M وسط AC است. فرض می‌کنیم $AH=x$. بنابراین، با توجه به فرض مسئله، $MH=x$. چون مثلث AHC قائم‌الزاویه و MH میانهٔ وارد بر وتر است، پس طول آن نصف طول وتر است. در نتیجه $AM=MC=MH=x$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$AC^۲=AH^۲+HC^۲\Rightarrow ۴x^۲=x^۲+۳۶$$

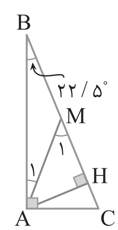
یعنی $x=۲\sqrt{۳}$، در نتیجه $S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۳}\times ۱۲=۱۲\sqrt{۳}$



۱۹۵ ۲ ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند (شکل زیر را ببینید). چون $\hat{D}+\hat{C}=۹۰^\circ$، پس $\hat{O}=۹۰^\circ$. بنابراین دو مثلث OAB و OCD قائم‌الزاویه هستند. اگر M و N به ترتیب وسط قاعده‌های AB و CD باشند، آن‌گاه OM و ON میانه‌های وارد بر وتر دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB و OCD هستند، پس اندازهٔ هر کدام از آن‌ها نصف طول وتر نظیر آن‌ها است. بنابراین $OM=\frac{AB}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$ و $ON=\frac{DC}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$. در نتیجه $MN=ON-OM=۶-۲=۴$



۱۹۶ ۲ میانهٔ AM و ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. چون میانهٔ AM نصف وتر است، پس $AM=BM$. بنابراین $\hat{A}_۱=۲۲/۵^\circ$. در نتیجه زاویهٔ خارجی $M_۱$ در مثلث ABM برابر ۴۵° است. بنابراین



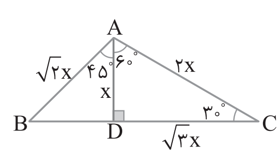
$$\triangle AHM: \hat{M}_۱=۴۵^\circ\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AM$$

$$\xrightarrow{AM=\frac{۱}{۲}BC} AH=\frac{\sqrt{۲}}{۴}BC$$

۱۹۷ ۴ فرض می‌کنیم $AD=x$، در نتیجه $AB=\sqrt{۲}x$، $AC=۲x$ و $CD=\sqrt{۳}x$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، چون $AD=\frac{۱}{۲}AC$ و $CD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC$، پس $A\hat{C}D=۳۰^\circ$، $C\hat{A}D=۶۰^\circ$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، چون $AD=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$، پس این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و $B\hat{A}D=۴۵^\circ$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{B\hat{A}C}{A\hat{C}D}=\frac{B\hat{A}D+C\hat{A}D}{A\hat{C}D}=\frac{۴۵^\circ+۶۰^\circ}{۳۰^\circ}=\frac{۱۰۵^\circ}{۳۰^\circ}=\frac{۷}{۲}$$



۱۹۸ ۱ مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۶۰^\circ)=۹۰^\circ$$

در نتیجه

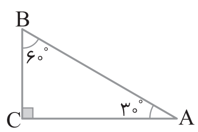
$$\hat{A}=۳۰^\circ\Rightarrow BC=\frac{AB}{۲}\quad(۱),\qquad \hat{B}=۶۰^\circ\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB\quad(۲)$$

از طرف دیگر، $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AC\quad(۳)$

مساحت مثلث ABC برابر $۲\sqrt{۳}$ است. بنابراین با جای‌گذاری BC و AC از تساوی‌های (۱) و (۲) در تساوی (۳) نتیجه می‌گیریم

$$۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times(\frac{AB}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB)\Rightarrow AB=۴$$

در دو مثلث متشابه، نسبت تشابه برابر نسبت طول ضلع‌های نظیرشان است. در اینجا AB بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC و ۸ طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث $A'B'C'$ است. بنابراین $\frac{۸}{۴}=۲$ = نسبت تشابه



۱۹۹ ۳ BH ارتفاع وارد بر ضلع AC است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ضلع BH روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، بنابراین

$$BH=\frac{AB}{۲}\Rightarrow ۴=\frac{AB}{۲}\Rightarrow AB=۸$$

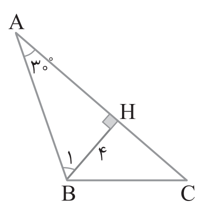
در ضمن در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH زاویهٔ $B_۱$ برابر ۶۰° است، پس طول ضلع AH، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول وتر AB است: $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۸)=۴\sqrt{۳}$.

از طرف دیگر مساحت مثلث ABC برابر $۱۲\sqrt{۳}$ است، بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH\times AC\Rightarrow ۱۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times AC\Rightarrow AC=۶\sqrt{۳}$$

پس $CH=AC-AH=۶\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$. از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BHC به‌دست می‌آید

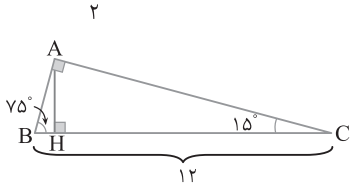
$$BC^۲=BH^۲+CH^۲=۴^۲+(۲\sqrt{۳})^۲=۱۶+۱۲=۲۸\Rightarrow BC=۲\sqrt{۷}$$



۲۰۰ ۱ در شکل زیر $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $\hat{B}=۷۵^\circ$.

چون $\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۷۵^\circ+۹۰^\circ)=۱۵^\circ$، پس در این مثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است، یعنی $AH=\frac{۱}{۴}BC=\frac{۱}{۴}\times ۱۲=۳$. اکنون می‌توان نوشت

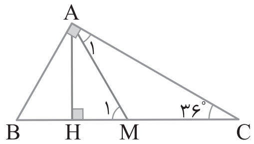
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۳=۱۸$$



۲۰۱ (۲) **راه‌حل اول** در شکل زیر AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. پس $AM=\frac{BC}{۲}$، یعنی $AM=MC$، پس $\hat{A}_۱=۳۶^\circ$. در نتیجه

$$\triangle AMC \text{ زاویهٔ خارجی } \hat{M}_۱ \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{A}_۱+\hat{C}=۳۶^\circ+۳۶^\circ=۷۲^\circ$$

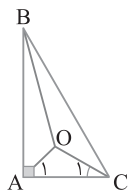
$$\triangle AHM: H\hat{A}M=۹۰^\circ-\hat{M}_۱=۹۰^\circ-۷۲^\circ=۱۸^\circ$$



راه‌حل دوم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر برابر است با $|\hat{B}-\hat{C}|$. در اینجا فرض می‌کنیم $\hat{C}=۳۶^\circ$، پس $\hat{B}=۹۰^\circ-۳۶^\circ=۵۴^\circ$. بنابراین

$$۱۸^\circ=|۵۴^\circ-۳۶^\circ|=|\hat{B}-\hat{C}|=\text{زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر}$$

۲۰۲ (۲) مثلث ABC قائم‌الزاویه است و $BC=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}AB$، پس $AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$. بنابراین $\hat{C}=۶۰^\circ$. در ضمن نقطهٔ O از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است. پس O نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است. در نتیجه



$$\begin{cases}\hat{C}_۱=۳۰^\circ\\ \hat{A}_۱=۴۵^\circ\end{cases}\Rightarrow A\hat{O}C=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۴۵^\circ)=۱۰۵^\circ$$

۲۰۳ (۴) با توجه به فرض‌های مسئله شکل زیر رسم می‌شود. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH متساوی‌الساقین است، پس $AH=BH=۳$.

$$S_{ABC}=\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times BH\times AC=\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})$$

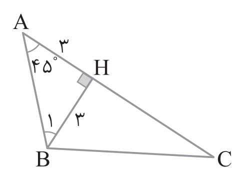
$$\frac{۳}{۲}AC=\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})\Rightarrow AC=۳+۳\sqrt{۳}\Rightarrow ۳+HC=۳+۳\sqrt{۳}$$

$$HC=۳\sqrt{۳}$$

بنابراین، طبق قضیهٔ فیثاغورس،

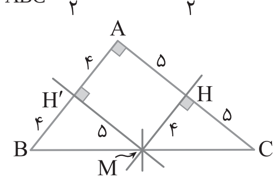
$$\triangle BHC: BC^۲=BH^۲+CH^۲=(۳)^۲+(۳\sqrt{۳})^۲=۳۶\Rightarrow BC=۶$$

$$a=۶$$



۲۰۴ (۳) عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC در نقطهٔ M روی ضلع BC همرس‌اند (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس $MA=MB=MC$ در نتیجه M وسط ضلع BC است و AM میانه و نصف BC است. پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است. یعنی چهارضلعی $AHMH'$ مستطیل است. بنابر فرض $MH=۴$ و $MH'=۵$. بنابراین $AB=۸$ و $AC=۱۰$. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times۸\times۱۰=۴۰$$



۲۰۵ (۴) در شکل زیر نقطهٔ M وسط کمان AB است. از مرکز O به نقطهٔ M وصل می‌کنیم. در این صورت OM بر وتر AB عمود است و OM نیمساز زاویهٔ O است. پس $\hat{O}_۱=۴۵^\circ$، در نتیجه $\hat{A}_۱=۴۵^\circ$. بنابراین

$$OA=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲)=\sqrt{۲}\Rightarrow \text{شعاع دایره}=\sqrt{۲}$$

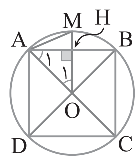
$$\triangle OAH: \hat{A}_۱=۴۵^\circ\Rightarrow OH=AH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}OA=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt{۲}=۱$$

$$MH=OM-OH=\sqrt{۲}-۱$$

پس

$$\triangle AMH: AM^۲=AH^۲+MH^۲=۱^۲+(\sqrt{۲}-۱)^۲=۱+۳-۲\sqrt{۲}$$

$$=۴-۲\sqrt{۲}\Rightarrow AM=\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}$$

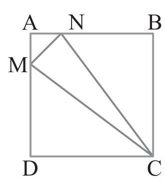


۲۰۶ (۲) طول ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم. چون $\frac{AM}{AD}=\frac{AN}{AB}=\frac{۱}{۴}$، پس $AM=AN=\frac{۱}{۴}a$ و $DM=BN=\frac{۳}{۴}a$. اکنون می‌توان نوشت

$$S_{CMN}=S_{ABCD}-(S_{AMN}+S_{BNC}+S_{DMC})$$

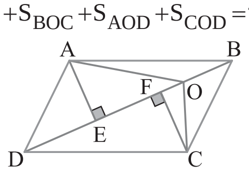
$$=a^۲-(\frac{۱}{۲}\times\frac{a^۲}{۱۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}a^۲+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}a^۲)=\frac{۷}{۳۲}a^۲$$

بنابراین $\frac{S_{ABCD}}{S_{CMN}}=\frac{a^۲}{\frac{۷}{۳۲}a^۲}=\frac{۳۲}{۷}$.

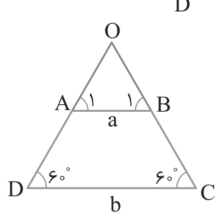


۲۰۷ (۲) در شکل زیر AE و CF به ترتیب ارتفاع‌های دو مثلث ADB و CBD هستند. چون دو مثلث ADB و CBD همنهشت هستند و در دو مثلث همنهشت ارتفاع‌های نظیر دو ضلع برابر، برابرند، پس $AE=CF$. در نتیجه در دو مثلث AOB و BOC که دارای قاعدهٔ مشترک OB هستند، ارتفاع‌های وارد بر این قاعده نیز برابرند. بنابراین $S_{AOB}=S_{BOC}=۴$. به‌طور مشابه می‌توان ثابت کرد $S_{COD}=S_{AOD}=۱۰$. درنتیجه

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{AOD}+S_{COD}=۴+۴+۱۰+۱۰=۲۸$$



۲۰۸ (۲) ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. در این صورت بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱=۶۰^\circ$. پس هر دو مثلث OAB و OCD متساوی‌الاضلاع هستند. بنابراین



$$S_{ABCD}=S_{OCD}-S_{OAB}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}b^۲-\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(b^۲-a^۲)$$

۲۰۹ (۲) اگر مساحت مثلث S باشد، آن‌گاه $2S=ah_a=bh_b=ch_c$ پس $h_a=\frac{2S}{a}$، $h_b=\frac{2S}{b}$ و $h_c=\frac{2S}{c}$. اکنون مقادیر h_a، h_b و h_c را برحسب S در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$bh_a+ch_b+ah_c=12\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

$$b\left(\frac{2S}{a}\right)+c\left(\frac{2S}{b}\right)+a\left(\frac{2S}{c}\right)=12\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

$$2S\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)=12\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\Rightarrow 2S=12\Rightarrow S=6$$

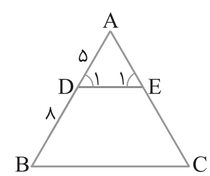
۲۱۰ (۳) در هر مثلث، نسبت طول دو ضلع، برابر با عکس نسبت طول ارتفاع‌های نظیر آن‌هاست، یعنی $\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b}$. از طرف دیگر، بنابر فرض مسئله، $\frac{a}{b}=\frac{h_a}{h_b}$. از تساوی‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$، یعنی $a^2=b^2$. بنابراین $a=b$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۱۱ (۴) در هر مثلث نسبت طول دو ضلع، برابر با عکس نسبت طول ارتفاع‌های نظیر آن‌ها است. پس $\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}$ و $\frac{h_a}{h_c}=\frac{c}{a}=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{5}$.

اکنون می‌توان نوشت $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

۲۱۲ (۴) در شکل زیر، از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{D}_1=\hat{E}_1=60^\circ$. پس ADE مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۵ است. بنابراین

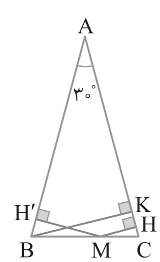
$$S_{BCED}=S_{ABC}-S_{ADE}=\frac{\sqrt{3}}{4}(13)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(5)^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(13^2-5^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2=36\sqrt{3}$$



۲۱۳ (۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{B}=\hat{C}=75^\circ$. در نتیجه

$$\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=180^\circ-(75^\circ+75^\circ)=30^\circ$$

از طرف دیگر می‌دانیم مجموع فاصله‌های نقطهٔ M روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است. بنابراین با توجه به شکل مقابل،



$$MH+MH'=BK\xrightarrow{MH+MH'=3\sqrt{2}}BK=3\sqrt{2}$$

در ضمن در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABK،

$$\hat{A}=30^\circ\Rightarrow BK=\frac{AB}{2}\Rightarrow 3\sqrt{2}=\frac{AB}{2}\Rightarrow AB=6\sqrt{2}\Rightarrow AC=6\sqrt{2}$$

پس

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BK\times AC=\frac{1}{2}(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})=18$$

۲۱۴ (۲) در مثلث متساوی‌الاضلاع مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث تا سه ضلع آن، برابر ارتفاع مثلث است. اگر x فاصلهٔ نقطهٔ O تا ضلع AB و h طول ارتفاع مثلث ABC باشد، آن‌گاه

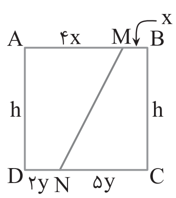
$$S_{ABC}=3\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=3\sqrt{3}\Rightarrow AB^2=12\Rightarrow AB=2\sqrt{3}$$

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3})=3$$

بنابراین $\frac{3}{8}+\frac{15}{8}+x=3\Rightarrow x=3-\frac{18}{8}=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

۲۱۵ (۴) بنابر فرض مسئله، چون $\frac{AM}{MB}=\frac{4}{1}$ و $\frac{DN}{CN}=\frac{2}{5}$، پس عددهایی مانند x و y وجود دارند به‌طوری‌که $AM=4x$، $MB=x$، $DN=2y$ و $CN=5y$. اکنون می‌توان نوشت

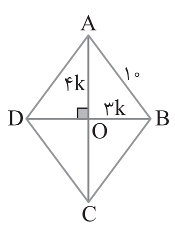
$$\frac{S_{AMND}}{S_{BMNC}}=\frac{\frac{1}{2}h(4x+2y)}{\frac{1}{2}h(x+5y)}=\frac{2(2x+y)}{x+5y}\qquad(1)$$



از طرف دیگر چون $AB=CD$، پس $5x=7y$. در نتیجه $x=\frac{7}{5}y$. اکنون تساوی (۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{S_{AMND}}{S_{BMNC}}=\frac{2(\frac{14}{5}y+y)}{\frac{7}{5}y+5y}=\frac{19}{16}$$

۲۱۶ (۱) می‌دانیم قطرهای لوزی بر هم عمود و منصف یکدیگرند. با توجه به شکل زیر و بنابرفرض، $\frac{BD}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{OB}{OA}=\frac{3}{4}$



بنابراین عددی مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $OA=4k$ و $OB=3k$. در مثلث OAB، بنابر قضیهٔ فیثاغورس

$$OA^2+OB^2=AB^2\Rightarrow 16k^2+9k^2=100$$

پس $k=2$. در نتیجه $OA=8$ و $OB=6$. اکنون طول دو قطر به‌دست می‌آید $AC=16$ و $BD=12$. در نهایت می‌نویسیم

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times 16\times 12=96$$

۲۱۷ (۲) طول و عرض اتاق را به‌ترتیب x و y و فاصلهٔ هر طرف فرش از کنار دیوار اتاق را d در نظر می‌گیریم. در این صورت

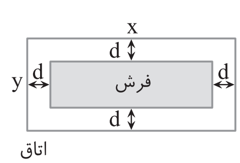
$$\text{مساحت اتاق}=36\Rightarrow xy=36$$

$$\text{محیط اتاق}=26\Rightarrow 2(x+y)=26\Rightarrow x+y=13$$

بنابراین $x=9$ و $y=4$. پس طول و عرض فرش به ترتیب برابر $9-2d$ و $4-2d$ است، پس

$$\text{محیط فرش}=18\Rightarrow 2(9-2d+4-2d)=18\Rightarrow 13-4d=9\Rightarrow 4d=4$$
$$d=1$$

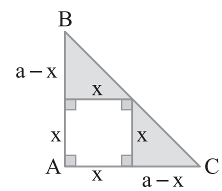
پس طول و عرض فرش برابر ۷ و ۲ است. بنابراین مساحت فرش برابر $7\times 2=14$ است.



۲۱۸ (۱) شکل سؤال به‌صورت زیر است. اگر ضلع مربع را x و هر ضلع زاویهٔ قائمه در مثلث ABC را a در نظر بگیریم، آن‌گاه مساحت مثلث برابر $\frac{۱}{۲}a^۲$ و مساحت مربع $x^۲$ است. با توجه به شکل مجموع مساحت‌های دو مثلث رنگی و مساحت مربع برابر مساحت مثلث بزرگ است. پس

$$x^۲+\frac{۱}{۲}x(a-x)+\frac{۱}{۲}x(a-x)=\frac{a^۲}{۲}\Rightarrow x^۲+ax-x^۲=\frac{a^۲}{۲}\Rightarrow x=\frac{a}{۲}$$

بنابراین $\frac{\text{مساحت (مثلث)}}{\text{مساحت (مربع)}}=\frac{\frac{۱}{۲}a^۲}{x^۲}=\frac{a^۲}{۲x^۲}=\frac{a^۲}{۲(\frac{a}{۲})^۲}=۲$.

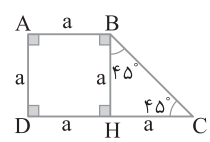


۲۱۹ (۲) در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ فرض می‌کنیم $AB=AD=a$. با رسم ارتفاع BH ذوزنقه به یک مربع به ضلع a و یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با اضلاع قائمهٔ a تقسیم می‌شود. پس

$$S_{ABCD}=۵۴\Rightarrow\frac{۱}{۲}a(a+۲a)=۵۴\Rightarrow\frac{۳a^۲}{۲}=۵۴\Rightarrow a^۲=۳۶\Rightarrow a=۶$$

بنابراین بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle BHC: BC^۲=BH^۲+CH^۲=۶^۲+۶^۲=۲\times۶^۲\Rightarrow BC=۶\sqrt{۲}$$



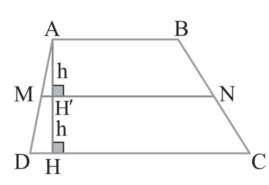
۲۲۰ (۳) می‌دانیم پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند مساوی نصف مجموع دو قاعده است، پس $MN=\frac{AB+DC}{۲}$. در ضمن MN موازی با دو قاعده است. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ADH، $\frac{AH'}{H'H}=\frac{AM}{MD}=۱$ یعنی $AH'=HH'$. با انتخاب $AH'=h$ می‌نویسیم

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}h(AB+MN)}{\frac{۱}{۲}h(DC+MN)}=\frac{۲}{۳}$$

$$۳AB+۳MN=۲DC+۲MN$$

$$MN=۲DC-۳AB\Rightarrow\frac{AB+DC}{۲}=۲DC-۳AB$$

$$AB+DC=۴DC-۶AB\Rightarrow ۳DC=۷AB\Rightarrow\frac{AB}{DC}=\frac{۳}{۷}$$



۲۲۱ (۴) چون $AD||BC$، بنابر فضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث OAD و OCB متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{AD}{BC}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$ است. پس

$$\frac{S_{OAD}}{S_{OBC}}=(\frac{۱}{۳})^۲\Rightarrow S_{OBC}=۹S_{OAD}$$

از طرف دیگر $S_{OAB}=S_{OCD}=\sqrt{S_{OAD}\times S_{OBC}}$، پس

$$S_{OAB}=S_{OCD}=\sqrt{S_{OAD}\times۹S_{OAD}}=۳S_{OAD}$$

اکنون می‌نویسیم

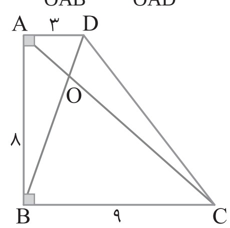
$$\text{مساحت ذوزنقه}=S_{OAD}+S_{OCD}+S_{OCB}+S_{OAB}$$

$$=S_{OAD}+۳S_{OAD}+۹S_{OAD}+۳S_{OAD}=۱۶S_{OAD}\qquad(۱)$$

همچنین $\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{۱}{۲}\times۸\times(۳+۹)=۴۸\qquad(۲)$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $S_{OAD}=۳$. در نتیجه

$$S_{OAB}=۳S_{OAD}=۹$$

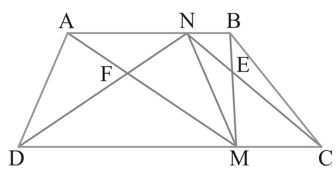


۲۲۲ (۳) در هر ذوزنقه با رسم دو قطر دو مثلثی که بین ساق و دو قطر قرار می‌گیرند هم‌مساحت‌اند. پس در ذوزنقهٔ $BNMC$ دو مثلث BEC و MNE هم‌مساحت‌اند و در ذوزنقهٔ $ANMD$ دو مثلث MNF و AFD هم‌مساحت‌اند. بنابراین

$$S_{BEC}=S_{MNE}\Rightarrow S=۳S-۴\Rightarrow S=۲\Rightarrow S_{MNE}=۲$$

$$S_{MNF}=S_{ADF}\Rightarrow ۵S'-۱۶=S'\Rightarrow S'=۴\Rightarrow S_{MNF}=۴$$

در نتیجه $S_{MENF}=S_{MNE}+S_{MNF}=۲+۴=۶$.



۲۲۳ (۴) در ذوزنقهٔ $ABCD$ تساوی زیر برقرار است:

$$S_{BEC}=S_{ADE}=\sqrt{S_{ABE}\times S_{DEC}}=۴\qquad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$AB||DC\xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیهٔ اساسی}}\triangle ABE\sim\triangle CDE$$

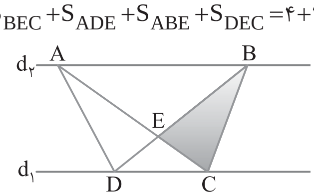
$$\frac{S_{ABE}}{S_{DEC}}=(\frac{BE}{DE})^۲=۲^۲=۴\qquad(۲)$$

در نتیجه بنابر تساوی (۱)،

$$\sqrt{S_{ABE}\times S_{DEC}}=۴\xrightarrow{(۲)}\sqrt{۴S_{DEC}\times S_{DEC}}=۴\Rightarrow S_{DEC}=۲$$

پس بنابر تساوی (۲)، $S_{ABE}=۸$. بنابراین

$$S_{ABCD}=S_{BEC}+S_{ADE}+S_{ABE}+S_{DEC}=۴+۴+۸+۲=۱۸$$

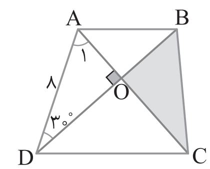


۲۲۴ ④ در ذوزنقهٔ $ABCD$ که در آن O نقطهٔ برخورد قطرها است، دو مثلث AOD و BOC هم‌مساحت هستند. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف اندازهٔ وتر و طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° مساوی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازهٔ وتر است. بنابراین

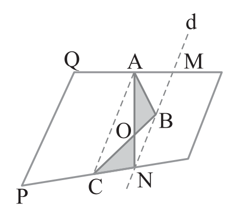
$$\triangle AOD: A\hat{D}O=۳۰^\circ \Rightarrow OA=\frac{AD}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

$$\triangle AOD: \hat{A}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow OD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۸)=۴\sqrt{۳}$$

بنابراین $S_{BOC}=S_{AOD}=\frac{۱}{۲}OA\times OD=\frac{۱}{۲}(۴)(۴\sqrt{۳})=۸\sqrt{۳}$.



۲۲۵ ③ از نقطهٔ B خط d را موازی AC رسم می‌کنیم. چون $d \| AC$، پس بنابر قضیهٔ شبه پروانه در ذوزنقهٔ $ABNC$، دو مثلث AOB و ONC هم‌مساحت‌اند. توجه کنید که مثلث ONC در مزرعهٔ I و مثلث AOB در مزرعهٔ II قرار دارد. اکنون اگر مرز جدید را پاره‌خط AN در نظر بگیریم، مثلث AOB در مزرعهٔ I و مثلث ONC در مزرعهٔ II قرار می‌گیرد و به این ترتیب مرز جدید خطی راست می‌شود و مساحت مزرعه‌ها تغییر نمی‌کند. به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت MC نیز می‌تواند مرز مورد نظر باشد.



۲۲۶ ③ از قضیهٔ اساسی تشابه نتیجه می‌شود

$$AB \| DC \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD$$

پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها است:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}}=\left(\frac{AB}{DC}\right)^۲=\left(\frac{a}{۲a}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{OCD}=۴S_{OAB} \quad (۱)$$

از طرف دیگر در ذوزنقهٔ $ABCD$ دو مثلث OBC و OAD هم‌مساحت هستند و مساحت آن‌ها واسطهٔ هندسی مساحت‌های دو مثلث OAB و OCD است. بنابراین

$$S_{OBC}=S_{OAD}=\sqrt{S_{OAB}\times S_{OCD}} \quad (۲)$$

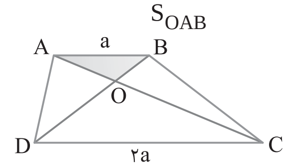
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$S_{OBC}=S_{OAD}=\sqrt{S_{OAB}\times ۴S_{OAB}}=۲S_{OAB}$$

اکنون می‌توانیم نسبت خواسته شده را به‌دست آوریم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{OAB}}=\frac{S_{OAB}+S_{OCD}+S_{OAD}+S_{OBC}}{S_{OAB}}$$

$$=\frac{S_{OAB}+۴S_{OAB}+۲S_{OAB}+۲S_{OAB}}{S_{OAB}}=۹$$



۲۲۷ ② ابتدا N را به M و A وصل می‌کنیم. می‌دانیم در هر مثلث، هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. در مثلث NPC پاره‌خط PQ میانه است، پس

$$S_{NPQ}=\frac{۱}{۲}S_{NPC} \quad (۱)$$

و در مثلث MNC پاره‌خط NP میانه است، پس

$$S_{NPC}=\frac{۱}{۲}S_{MNC} \quad (۲)$$

و در مثلث ANC پاره‌خط MN میانه است، پس

$$S_{MNC}=\frac{۱}{۲}S_{ANC} \quad (۳)$$

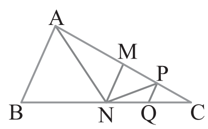
و در مثلث ABC پاره‌خط AN میانه است، پس

$$S_{ANC}=\frac{۱}{۲}S_{ABC} \quad (۴)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$S_{NPQ}=\frac{۱}{۲}S_{NPC}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}S_{MNC}\right)=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}S_{ANC}\right)$$

$$=\frac{۱}{۸}\left(\frac{۱}{۲}S_{ABC}\right)=\frac{۱}{۱۶}S_{ABC}$$



۲۲۸ ② مثلثی که طول دو میانهٔ آن با هم برابر هستند، متساوی‌الساقین است. در شکل زیر G محل برخورد میانه‌های مثلث است. پس

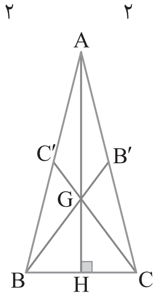
$$GH=\frac{۱}{۳}AH=\frac{۱}{۳}\times ۱۶=\frac{۱۶}{۳},\quad CG=\frac{۲}{۳}CC'=\frac{۲}{۳}\times ۱۰=\frac{۲۰}{۳}$$

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس AH ارتفاع هم هست. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث CGH،

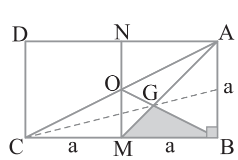
$$CH=\sqrt{CG^۲-GH^۲}=\sqrt{\left(\frac{۲۰}{۳}\right)^۲-\left(\frac{۱۶}{۳}\right)^۲}=۴$$

در نتیجه $BC=۲CH=۸$. اکنون می‌توان نوشت

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱۶=۶۴$$



۲۲۹ ① در شکل زیر MO میان‌خط مثلث ABC است، چون از وسط CB، موازی AB رسم شده است. پس O وسط AC است، یعنی OB میانهٔ وارد بر ضلع AC است. در نتیجه در مثلث ABC، نقطهٔ G محل برخورد میانه‌ها است. پس $S_{GBM}=\frac{۱}{۶}S_{ABC}=\frac{۱}{۶}\times\left(\frac{۱}{۲}\times a\times ۲a\right)=\frac{a^۲}{۶}$. در نتیجه $S_{GBM}=\frac{۱}{۶}S_{ABMN}$.

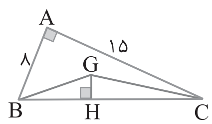


۲۳۰ ② در شکل زیر G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC است. در این صورت $S_{GBC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}=\frac{۱}{۳}\times(\frac{۱}{۲}\times۸\times۱۵)=۲۰$. از طرف دیگر بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC ،

$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۸^۲+۱۵^۲}=۱۷$$

چون $S_{GBC}=۲۰$ ، پس

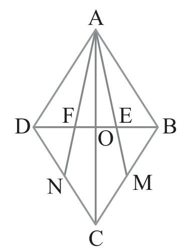
$$\frac{۱}{۲}BC\times GH=۲۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۱۷\times GH=۲۰\Rightarrow GH=\frac{۴۰}{۱۷}$$



۲۳۱ ② می‌دانیم در هر مثلث فاصلهٔ مرکز ثقل (نقطهٔ برخورد میانه‌ها) تا وسط هر ضلع $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر این ضلع و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است (شکل زیر را ببینید). در مثلث ADC، نقطهٔ F مرکز ثقل است، پس

$$OF=\frac{۱}{۳}OD\xrightarrow{OD=\frac{DB}{۲}=۳۰}OF=\frac{۱}{۳}\times۳۰=۱۰$$

به همین ترتیب $OE=۱۰$ ، بنابراین $EF=OF+OE=۲۰$.

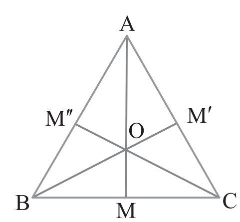


۲۳۲ ④ با رسم میانه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع این مثلث به شش مثلث همنهشت تقسیم می‌شود. چون در مثلث متساوی‌الاضلاع میانه، ارتفاع هم هست، پس با توجه به شکل زیر $AM=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$. از طرف دیگر نقطهٔ تلاقی میانه‌ها هر میانه را با نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، پس با توجه به شکل زیر

$$OA=\frac{۲}{۳}AM=\frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}BC$$

بنابراین

$$\frac{OA}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}BC}{BC}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



۲۳۳ ② ثابت می‌شود در متوازی‌الاضلاع ABCD پاره‌خط‌های DM و BN قطر AC را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، یعنی $AP=PQ=QC$. همچنین میانهٔ هر مثلث آن مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند، بنابراین

$$\triangle AMQ:\ \text{میانه } MP\Rightarrow S_{MPQ}=\frac{۱}{۲}S_{AMQ}\quad(۱)$$

$$\triangle AQB:\ \text{میانه } MQ\Rightarrow S_{AMQ}=\frac{۱}{۲}S_{AQB}\quad(۲)$$

در ضمن دو مثلث ABQ و ABC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است:

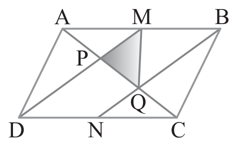
$$\frac{S_{ABQ}}{S_{ABC}}=\frac{AQ}{AC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow S_{ABQ}=\frac{۲}{۳}S_{ABC}$$

$$\xrightarrow{S_{ABC}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}}S_{ABQ}=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}\quad(۳)$$

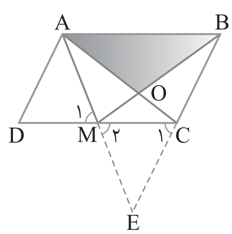
از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$S_{MPQ}=\frac{۱}{۲}S_{AMQ}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}S_{AQB})=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۳}S_{ABCD})$$

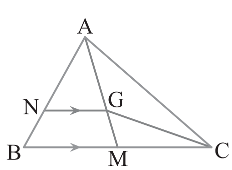
$$=\frac{۱}{۱۲}S_{ABCD}\xrightarrow{S_{MPQ}=۳}S_{ABCD}=۳۶$$



۲۳۴ ② پاره‌خط‌های AM و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در E قطع کنند. چون دو مثلث AMD و EMC همنهشت هستند ($\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ ، $\hat{D}=\hat{C}_۱$ و $DM=MC$)، پس $AM=ME$ و $AD=CE$. در نتیجه $BC=CE$. بنابراین M وسط AE و C وسط BE است. پس O مرکز ثقل (محل برخورد میانه‌ها) در مثلث ABE است. پس مساحت مثلث OAB مساوی $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABE است. از طرف دیگر چون دو مثلث ADM و ECM همنهشت هستند، پس هم‌مساحت‌اند. در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع با مساحت مثلث ABE برابر است. بنابراین مساحت مثلث AOB مساوی $\frac{۱}{۳}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است.



۲۳۵ ④ نقطهٔ G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است، پس مساحت مثلث MGC مساوی $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث ABC است. از طرف دیگر،



$$NG\|BM\xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیهٔ اساسی}}\triangle ANG\sim\triangle ABM$$

$$\frac{S_{ANG}}{S_{ABM}}=(\frac{AG}{AM})^۲=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}$$

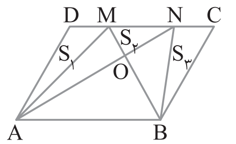
چون AM میانه است، پس $S_{ABM}=S_{AMC}$ ، پس $S_{ABM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$.

بنابراین

$$\frac{S_{ANG}}{S_{ABM}}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{S_{ANG}}{\frac{۱}{۲}S_{ABC}}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow S_{ANG}=\frac{۲}{۹}S_{ABC}$$

در نتیجه $\frac{S_{ANG}}{S_{MGC}}=\frac{\frac{۲}{۹}S_{ABC}}{\frac{۱}{۶}S_{ABC}}=\frac{۴}{۳}$.

۲۳۶ (۳) در ذوزنقهٔ ABNM دو مثلث AMO و BNO هم‌مساحت‌اند. فرض کنید مساحت آن‌ها برابر S باشد و مساحت مثلث AOB را برابر S' در نظر بگیرید. بنابراین



$$S_{AMO}\times S_{BNO}=S_{MNO}\times S_{AOB}\Rightarrow S^۲=S_۲S' \quad (۱)$$

از طرف دیگر

$$S_{ABCD}=۳۰\Rightarrow \underbrace{S_۱+S_۲+S_۳}_{۹}+۲S+S'=۳۰\Rightarrow ۲S+S'=۲۱ \quad (۲)$$

همچنین مثلث AMB و متوازی‌الاضلاع ABCD هم‌ارتفاع و هم‌قاعده هستند بنابراین

$$\frac{S_{AMB}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{AMB}=\frac{S_{ABCD}}{۲}\Rightarrow S+S'=\frac{۳۰}{۲}\Rightarrow S+S'=۱۵ \quad (۳)$$

$$(۲)\ و\ (۳)\Rightarrow \begin{cases} ۲S+S'=۲۱ \\ S+S'=۱۵ \end{cases}\Rightarrow S=۶,\ S'=۹$$

در نتیجه $(۱)\Rightarrow S^۲=S_۲S'\Rightarrow ۶^۲=۹S_۲\Rightarrow S_۲=۴$

۲۳۷ (۴) اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی این چندضلعی شبکه‌ای باشد، آن‌گاه بنابر فرمول پیک، $S=\frac{b}{۲}+i-۱\Rightarrow ۶=\frac{b}{۲}+i-۱\Rightarrow b=۱۴-۲i$

با توجه به اینکه بیشترین تعداد نقاط مرزی یعنی b زمانی اتفاق می‌افتد که کمترین تعداد نقاط درونی یعنی i را داشته باشیم و کمترین مقدار i برابر صفر است، پس بیشترین مقدار b مساوی ۱۴ است.

۲۳۸ (۳) مساحت چندضلعی شبکه‌ای از رابطهٔ $S=\frac{b}{۲}+i-۱$ به‌دست می‌آید:

$$۹/۵=\frac{b}{۲}+i-۱\Rightarrow \frac{b}{۲}+i=۱۰/۵\Rightarrow b+۲i=۲۱ \quad (۱)$$

در چندضلعی شبکه‌ای b، تعداد نقاط مرزی آن، به مجموعهٔ $\{۳,۴,۵,...\}$ متعلق است و i، تعداد نقاط درونی آن، عضو مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,۳,...\}$ است. پس با توجه به تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم b باید عددی فرد باشد تا i عددی صحیح شود:

$b=۳\Rightarrow i=۹,\quad b=۱۱\Rightarrow i=۵,\quad b=۱۹\Rightarrow i=۱$

$b=۵\Rightarrow i=۸,\quad b=۱۳\Rightarrow i=۴,\quad b=۲۱\Rightarrow i=۰$

$b=۷\Rightarrow i=۷,\quad b=۱۵\Rightarrow i=۳,\quad b=۲۳\Rightarrow i=-۱$ (غ. ق. ق.)

$b=۹\Rightarrow i=۶,\quad b=۱۷\Rightarrow i=۲,$

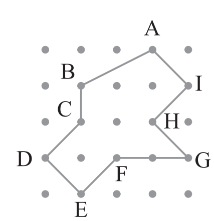
بنابراین i می‌تواند ۱۰ مقدار متفاوت داشته باشد تا شرایط این سؤال برقرار باشد.

۲۳۹ (۱) مساحت هر دو چندضلعی شبکه‌ای را به‌دست آورده، سپس تفاضل آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. در چندضلعی شبکه‌ای بزرگ‌تر $b=۱۸$ و $i=۱۱$ و در چندضلعی شبکه‌ای کوچک‌تر $b'=۷$ و $i'=۲$. بنابراین

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۱۸}{۲}+۱۱-۱=۱۹,\quad S'=\frac{b'}{۲}+i'-۱=\frac{۷}{۲}+۲-۱=\frac{۹}{۲}$$

در نتیجه مساحت خواسته شده $=S-S'=۱۹-\frac{۹}{۲}=\frac{۲۹}{۲}$.

۲۴۰ (۴) اگر این شکل روی صفحهٔ مختصات معمولی که فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ متوالی به صورت افقی و عمودی یک واحد است، رسم می‌شد، آن‌گاه می‌توانستیم با استفاده از قضیهٔ پیک مساحت آن را پیدا کنیم. توجه کنید که در آن شکل $b=۱۰$ و $i=۴$.



پس $S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۱۰}{۲}+۴-۱=۸$.

از طرف دیگر شکل داده شده در این سؤال با شکلی که در صفحهٔ مختصات معمولی رسم شده با نسبت $\sqrt{۲}$ متشابه است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها $(\sqrt{۲})^۲=۲$ است. بنابراین $\frac{S_{ABCDEFGHI}}{۸}=۲\Rightarrow S_{ABCDEFGHI}=۱۶$

۲۴۱ (۲) اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای باشد، آن‌گاه بنابر فرض $b\times i=۴۸$. پس حالت‌های مختلفی که حاصل‌ضرب b و i برابر ۴۸ می‌شود و مساحت چندضلعی شبکه‌ای به کمک رابطهٔ پیک به‌صورت زیر است:

$b\geq۳$	۳	۴	۶	۸	۱۲	۱۶	۲۴	۴۸
$i\geq۰$	۱۶	۱۲	۸	۶	۴	۳	۲	۱
S	$\frac{۳۳}{۲}$	۱۳	۱۰	۹	۹	۱۰	۱۳	۲۴

بنابراین کمترین مساحت ممکن برای این چندضلعی شبکه‌ای برابر ۹ است.

۲۴۲ (۳) فرض می‌کنیم b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، پس $S=\frac{b}{۲}+i-۱$. اکنون اگر تعداد نقاط مرزی و درونی را چهار برابر کنیم، یعنی ۴b تعداد نقاط مرزی و ۴i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای جدید باشد، آن‌گاه مساحت آن برابر می‌شود با $S'=\frac{۴b}{۲}+۴i-۱=۲b+۴i-۱$

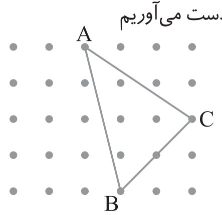
بنابراین

$$S'-S=(۲b+۴i-۱)-(\frac{b}{۲}+i-۱)=\frac{۳}{۲}b+۳i$$

$$S'-S=۳(\frac{b}{۲}+i)\xrightarrow{\frac{b}{۲}+i=S+۱}S'-S=۳(S+۱)\Rightarrow S'=۴S+۳$$

پس S' از چهار برابر S سه تا بیشتر است.

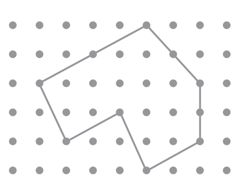
۲۴۳ (۳) بزرگ‌ترین ارتفاع بر کوچک‌ترین ضلع مثلث وارد می‌شود. طول ضلع‌های مثلث را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم



$$AB=\sqrt{۴^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۷}$$
$$AC=\sqrt{۳^۲+۲^۲}=\sqrt{۱۳}$$
$$BC=\sqrt{۲^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۲}$$

BC کوچک‌ترین ضلع مثلث است. اکنون به کمک قضیهٔ پیک مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم: $S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۴}{۲}+۴-۱=۵$. اگر h طول ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، آن‌گاه $S=\frac{۱}{۲}h\times BC\Rightarrow ۵=\frac{۱}{۲}\times h\times ۲\sqrt{۲}\Rightarrow h=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

۲۴۴ (۳) اگر این شکل روی صفحهٔ مختصات معمولی که فاصلهٔ نقطه‌های همسایه در آن برابر با یک واحد است، رسم می‌شد، می‌توانستیم با استفاده از قضیهٔ پیک مساحتش را پیدا کنیم. توجه کنید که در آن شکل $b=۱۰$ و $i=۱۳$. بنابراین مساحت شکل مورد نظر برابر می‌شد با



$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۱۰}{۲}+۱۳-۱=۱۷$$

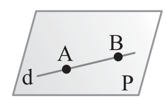
اکنون توجه کنید که شکل داده شده در صورت مسئله با شکلی که در صفحهٔ مختصات معمولی رسم شده، متشابه هستند، بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با مربع نسبت تشابه آن‌ها. نسبت تشابه هم برابر است با نسبت فاصلهٔ هر دو نقطهٔ افقی یا عمودی متوالی در آن‌ها. بنابراین اگر x مساحت چندضلعی شبکه‌ای مورد نظر باشد، نتیجه می‌شود $\frac{x}{۱۷}=(\frac{۲}{۱})^۲$. در نتیجه $x=۶۸$.

۲۴۵ (۳) تعداد خط‌هایی که این n نقطه مشخص می‌کنند برابر تعداد راه‌های انتخاب ۲ نقطه از این n نقطه است:

$$\binom{n}{2}=55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=55 \Rightarrow n=11$$

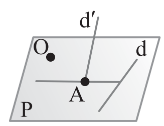
تعداد صفحه‌هایی که ۱۱ نقطه با شرایط بالا مشخص می‌کنند، حداکثر برابر $\binom{11}{3}=165$ است.

۲۴۶ (۳) خط d با صفحهٔ P در دو نقطه مشترک است، پس خط d بر صفحهٔ P واقع است.

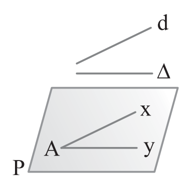


۲۴۷ (۲) دو خط AB و CD نه موازی‌اند و نه متقاطع، پس متنافرند. به همین ترتیب، دو خط AC و BD و دو خط AD و BC متنافرند. بنابراین سه جفت خط متنافر داریم.

۲۴۸ (۳) از نقطهٔ O و خط d صفحهٔ P را می‌گذرانیم. اگر خط d' صفحهٔ P را در نقطهٔ A قطع کند، آن‌گاه وضعیت خط AO و d نسبت به هم تعیین کنندهٔ جواب است. اگر OA و d موازی باشند، مسئله جواب ندارد و اگر OA خط d را قطع کند، خط OA جواب مسئله است. در ضمن، اگر خط d' صفحهٔ P را قطع نکند، باز هم مسئله جواب ندارد. بنابراین مسئله حداکثر یک جواب دارد.

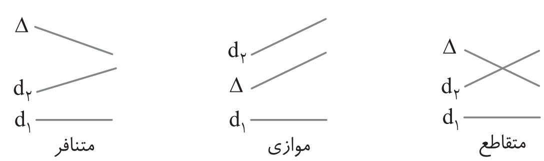


۲۴۹ (۲) از نقطهٔ A خط‌های Ax و Ay را به‌ترتیب به موازات دو خط d و Δ رسم می‌کنیم. از دو خط متقاطع Ax و Ay تنها یک صفحه می‌گذرد به‌طوری‌که دو خط متنافر d و Δ موازی این صفحه هستند.



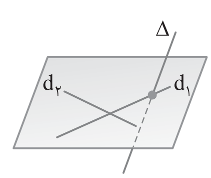
۲۵۰ (۴) اگر دو خط d و d' موازی یا متقاطع باشند، از آن‌ها تنها یک صفحه می‌گذرد و اگر این دو خط متنافر باشند، از آن‌ها صفحه‌ای نمی‌گذرد.

۲۵۱ (۴) خط‌های Δ و d_2 هریک از سه حالت را می‌توانند داشته باشند.

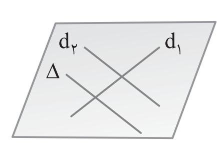


بنابراین وضع Δ و d_2 نامشخص است.

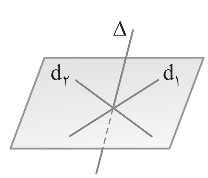
۲۵۲ (۴) خط‌های Δ و d_2 می‌توانند موازی، متقاطع یا متنافر باشند.



Δ و d_2 متنافرند.

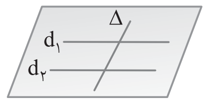


Δ و d_2 موازی‌اند.

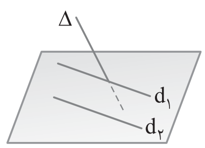


Δ و d_2 متقاطع‌اند.

۲۵۳ (۲) خط‌های Δ و d_2 متقاطع یا متنافر هستند.



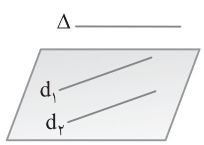
Δ و d_2 متقاطع‌اند.



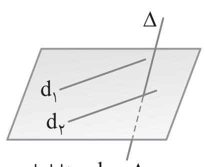
Δ و d_2 متنافرند.

توجه کنید که خط‌های Δ و d_2 نمی‌توانند موازی باشند چون در این صورت Δ و d_1 هم موازی می‌شوند و این با فرض مسئله در تناقض است.

۲۵۴ (۱) خط‌های Δ و d_2 نمی‌توانند موازی باشند، چون در این صورت Δ و d_1 هم موازی می‌شوند و این با فرض مسئله در تناقض است. اما Δ با d_2 می‌تواند متنافر یا متقاطع باشد.

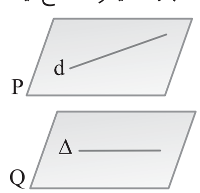


Δ و d_2 متنافر هستند.

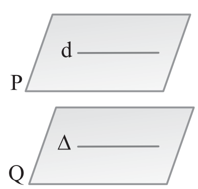


Δ و d_2 متقاطع‌اند.

۲۵۵ (۴) دو خط d و Δ هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، پس یا موازی‌اند یا متنافر، به عبارت دیگر متقاطع نیستند.



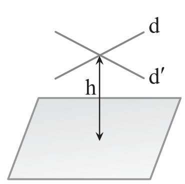
d و Δ متنافرند.

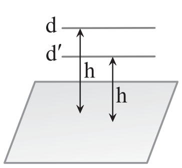


d و Δ موازی‌اند.

۲۵۶ (۴) d' نمی‌تواند بر P عمود باشد، چون اگر d' بر P عمود باشد، d و d' با هم موازی هستند.

۲۵۷ (۳) دو خط d و d' که هر دو از صفحهٔ P به فاصلهٔ h هستند می‌توانند یا موازی یا متقاطع باشند (به شکل‌های زیر دقت کنید)



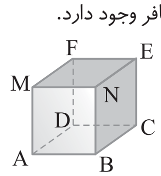


۲۵۸ (۴) در مکعب شکل زیر دو وجه متقاطع BCEN و MNEF را در نظر بگیرید. یال‌های دوبه‌دو متنافر در این دو وجه عبارت‌اند از:

$$\{MF, NB\}, \{MF, EC\}, \{FE, NB\},$$

$$\{FE, BC\}, \{MN, EC\}, \{MN, BC\}$$

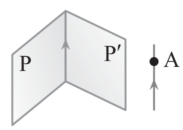
پس ۶ جفت یال دوبه‌دو متنافر وجود دارد.

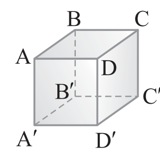


۲۵۹ (۴) در صورتی که سه نقطهٔ متمایز روی یک خط باشند، از آن‌ها نامتناهی صفحه می‌گذرد. پس گزینهٔ (۴) لزوماً درست نیست. سایر گزینه‌ها درست هستند.

۲۶۰ (۴) دو خط عمود بر یک خط در فضا می‌توانند متقاطع یا متنافر هم باشند، پس گزینهٔ (۱) نادرست است. دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه می‌توانند متقاطع باشند، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه فقط یک خط می‌توان بر آن صفحه عمود کرد، پس گزینهٔ (۳) هم نادرست است. ولی از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه بی‌شمار خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد.

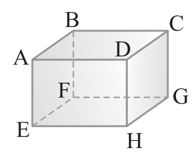
۲۶۱ (۲) خطی که از نقطهٔ A به موازات فصل مشترک دو صفحهٔ P و P' رسم می‌شود تنها خطی است که با این دو صفحه موازی است و از A می‌گذرد. در ضمن گزینهٔ (۱) نادرست است. بـه عنوان مثال نقض در مکعـب زیر دو صفحهٔ $ABCD$ و $DCC'D'$ متقاطع‌اند و صفحهٔ $A'B'C'D'$ صفحهٔ $DCC'D'$ را قطع کرده ولی با صفحه $ABCD$ موازی اسـت. گزینهٔ (۳) نادرسـت اسـت. به عنـوان مثال نقض در مکعب زیـر دو صفحهٔ $ABCD$ و $DCC'D'$ متقاطع‌اند. صفحهٔ $BCC'B'$ بر $ABCD$ عمود است ولی با $DCC'D'$ موازی نیست.



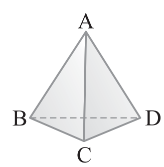


گزینهٔ (۴) نادرسـت اسـت. چون هر صفحه‌ای بر فصل مشـترک صفحات P و P' عمـود باشـد بر هر دو صفحهٔ P و P' عمود اسـت. پس بی‌شـمار صفحه عمود بر صفحات P و P' رسم می‌شود.

۲۶۲ (۲) در مکعب‌مستطیل شکل زیر خط AB با خط‌های GH، CD و EF موازی است (۳ خط). خط AB با خط‌های BC، AE، AD و BF متقاطع است (۴ خط). خط AB با خط‌های CG، EH، FG و DH متنافر است (۴ خط).



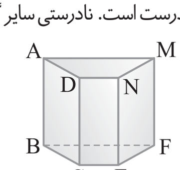
۲۶۳ (۲) خـط AB با خط‌هـای BD، AC، AD و BC متقاطع اسـت و فقط با خط CD متنافر است.



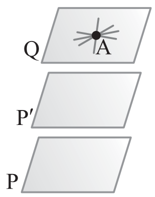
۲۶۴ (۳) از دو خـط متنافر هیـچ صفحه‌ای عبور نمی‌کند و نقطهٔ مشـترکی ندارند. به همین علت گزینهٔ (۱) نادرسـت اسـت. در ضمن دو خط موازی هم نقطهٔ اشتراکی ندارند و می‌توانند در دو صفحهٔ متمایز باشند. پس گزینه‌های (۲) و (۴) نیز نادرست است.

۲۶۵ (۱) چنیـن خطی وجـود ندارد. ایـن مطلب را ثابـت می‌کنیم. فرض می‌کنیـم خطی وجود داشـته باشـد که از A می‌گذرد و دو خـط D و D' را به ترتیب در M و N قطع می‌کند. چون دو نقطه از این خط در صفحهٔ شامل D و D' اسـت، پس این خط هم در صفحهٔ شـامل D و D' است. در نتیجه نقطهٔ A هم در این صفحه قرار دارد و این خلاف فرض است.

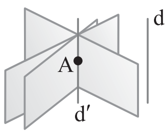
۲۶۶ (۴) دو خط EF و BC در صفحهٔ $BCEF$ قرار دارند و موازی نیستند، پس متقاطع‌اند. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است. نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.



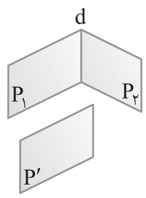
۲۶۷ (۲) از نقطهٔ A، صفحـهٔ Q را موازی دو صفحهٔ P و P' در نظر می‌گیریم (شـکل مقابل را ببینیـد). تمام خط‌هایی که از A می‌گذرند و درون صفحهٔ Q قـرار دارند با دو صفحهٔ P و P' موازی هستند. پس نامتناهی خط از A می‌گذرند و با P و P' موازی هستند.



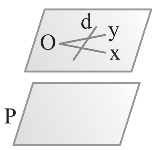
۲۶۸ (۴) از نقطـهٔ A یـک و تنهـا یـک خط موازی خط d می‌توان رسم کرد (خط d' در شکل مقابل). از خط d' نامتناهی صفحه می‌گذرد. خط d با تمام این صفحه‌ها موازی اسـت. چون d با یک خط از این صفحه‌ها (خط d') موازی است.



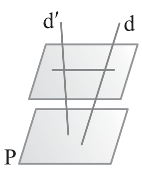
۲۶۹ (۲) صفحهٔ P' که بـا صفحهٔ P_1 موازی است، حتماً صفحهٔ P_2 را قطع می‌کند، زیرا اگر P' با P_2 موازی باشـد، آن‌گاه باید P_1 با P_2 موازی باشد که خلاف فرض متقاطع بودن آن‌ها اسـت. همچنین، P' نمی‌تواند بر P_2 منطبق باشد چون اگر باشـد، آن‌گاه P_1 و P_2 هم موازی خواهند بود و هم متقاطع.



۲۷۰ (۱) اگر دو خط Ox و Oy موازی صفحهٔ P باشند، آن‌گاه صفحهٔ گذرا از دو خط متقاطع Ox و Oy با صفحهٔ P موازی است. خط d که این دو خط متقاطـع را قطع می‌کنـد در این صفحه قرار می‌گیرد، پس خط d نیز موازی صفحهٔ P است.



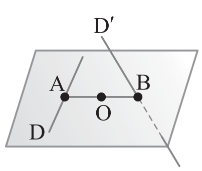
۲۷۱ (۴) تمـام صفحه‌هایـی که بـا صفحهٔ P موازی باشـند، دو خط d و d' را در دو نقطه قطع می‌کننـد. خطی کـه از این دو نقطه عبور می‌کند، خط مورد نظر اسـت. بنابراین نامتناهی خط با این شرایط وجود دارد.



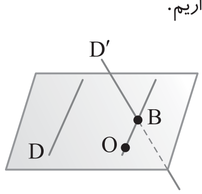
۲۷۲ (۳) می‌دانیـم خط و صفحهٔ عمود بر یـک صفحه یا با هم موازی‌اند یا خط درون صفحه قرار دارد، پس $d \| P'$ می‌تواند درست باشد.

۲۷۳ (۳) محـل برخورد D' بـا صفحه را B می‌نامیـم. در این صورت دو حالت وجود دارد:

۱) امتداد OB خط D را در A قطع می‌کند. در این حالت یک جواب داریم.



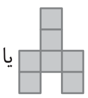
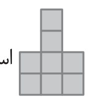
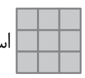
۲) امتداد OB در صفحه، با خط D موازی است و در این حالت جواب نداریم. پس حداکثر یک جواب داریم.



۲۷۴ (۴) شکل‌های گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ شکل داده شده هستند، ولی شکل گزینهٔ (۴) نمایی از این شکل را مشخص نمی‌کند.

۲۷۵ **۳** مکعب‌هایی که دو وجه رنگ شده دارند، فقط روی یال‌های این مکعب مستطیل قرار دارند. روی هشت یال آن هر یال دو مکعب و روی چهار یال آن هر یال سه مکعب کوچک دارای دو وجه رنگ شده وجود دارد. پس $۲۸=۳×۴+۲×۸$ مکعب با دو وجه رنگ شده وجود دارد یعنی $a=۲۸$. از طرف دیگر فقط مکعب‌های کوچک موجود در کنج‌های این مکعب مستطیل دارای سه وجه رنگ شده هستند. پس $b=۸$. در ضمن اگر از هر طرف یک لایه برداریم، آن‌گاه به تعداد $۱۲=(۲-۴)(۲-۵)(۲-۴)$ مکعب باقی می‌ماند که وجه رنگ شده ندارند. پس $c=۱۲$. بنابراین

$$۲a-۳b+c=۲×۲۸-۳×۸+۱۲=۴۴$$

۲۷۶ **۲** نمای روبه‌رو و چپ شکل داده شده به‌صورت  یا  است. ولی نمای بالای آن به‌صورت  است. بنابراین دو نمای روبه‌رو و چپ آن یکسان است.

۲۷۷ **۲**

۲۷۸ **۲**

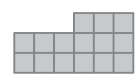
۲۷۹ **۳**

۲۸۰ **۳**

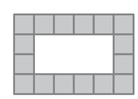
۲۸۱ **۲**

۲۸۲ **۲**

۲۸۳ **۲** نمای روبه‌روی شکل داده شده به‌صورت زیر است که در آن ۱۵ مربع وجود دارد.

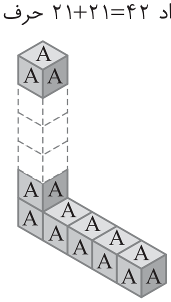


نمای بالای شکل به‌صورت زیر است که در آن ۱۶ مربع وجود دارد.



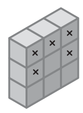
پس نسبت خواسته شده $\frac{۱۵}{۱۶}$ است.

۲۸۴ **۱** در ردیف افقی ۵ مکعب وجود دارد. روی اولین مکعب در سمت راست ۵ حرف A، روی سه تای بعدی هر کدام ۴ حرف A و روی مکعب آخر ۴ حرف A دیده می‌شود. پس در ردیف افقی در مجموع $۲۱=۴×۴+۵$ حرف A دیده می‌شود. در مکعب‌هایی که به‌صورت عمودی چیده شده‌اند، اولین مکعب پایینی را قبلاً شمرده‌ایم. از میان ۵تای دیگر چهار مکعب به شکل عمودی روی هم قرار دارند که روی وجه‌های آن‌ها ۴ حرف A دیده می‌شود و روی مکعب آخر ۵ حرف A. پس در مجموع $۲۱=۵+۴×۴$ حرف A دیده می‌شود. بنابراین در کل تعداد $۴۲=۲۱+۲۱$ حرف A وجود دارد.



۲۸۵ **۴**

۲۸۶ **۱** اگر از مکعب داده شده دو ردیف از نمای روبه‌رو را حذف کنیم، یعنی $۱۸=۳×۳×۲$ مکعب کوچک، به شکل زیر می‌رسیم و با حذف مکعب‌هایی که با علامت × مشخص شده‌اند نمای مقابل جسم حاصل همان نمای خواسته شده می‌شود. بنابراین حداکثر باید $۲۳=۵+۱۸$ مکعب از این شکل حذف کنیم.



۲۸۷ **۲** از وجه بالای مکعب مستطیل داده شده چهار مکعب حذف می‌کنیم و این حذف کردن را تا پایین ادامه می‌دهیم تا نمای بالای شکل باقیمانده به‌صورت آنچه مسئله می‌خواهد درآید. پس حداقل مکعب‌های حذف شده برابر است با $n=۴×۴=۱۶$. اکنون اگر ردیف بالا یعنی ردیف چهارم و بعد ردیف سوم و ردیف دوم را از این شکل حذف کنیم و فقط ردیف اول باقی بماند و از این ردیف چهار مکعب کوچک برداریم، آن‌گاه نمای بالای شکل باقیمانده به‌صورت آنچه مسئله می‌خواهد درمی‌آید. پس حداکثر مکعب‌های حذف شده برابر $m=۳×۱۲+۴=۴۰$ است. بنابراین

$$\frac{m}{۲}-n=۲۰-۱۶=۴$$

۲۸۸ **۳** تعداد مکعب‌های ۱×۱×۱ در مکعب اصلی $a^۳$ است. مکعب‌هایی که رنگ نشده‌اند، مکعب‌هایی هستند که درون مکعب بزرگ قرار دارند و با هم مکعبی تشکیل می‌دهند که اندازهٔ هر یال آن ۲تا کمتر از اندازهٔ یال مکعب بزرگ‌تر است. در نتیجه تعداد آن‌ها برابر $(a-۲)^۳$ است. بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد مکعب‌های ۱×۱×۱ رنگ شده باید تعداد کل مکعب‌های ۱×۱×۱ را منهای تعداد مکعب‌های ۱×۱×۱ رنگ نشده کنیم، پس

$$۹۸=a^۳-(a-۲)^۳\Rightarrow ۹۸=a^۳-a^۳+۶a^۲-۱۲a+۸$$

$$۶a^۲-۱۲a-۹۰=۰\Rightarrow a^۲-۲a-۱۵=۰\Rightarrow (a-۵)(a+۳)=۰\Rightarrow a=۵$$

از طرفی تعداد مکعب‌های ۱×۱×۱ که فقط دو وجه رنگی دارند روی یال‌های مکعب بزرگ هستند، به جز دو مکعب ۱×۱×۱ گوشه‌های یال‌ها. پس بر روی هر یال $۳=۲-۵$ مکعب کوچک با این ویژگی قرار دارند و چون مکعب دارای ۱۲ یال است، پس تعداد مکعب‌های ۱×۱×۱ با دو وجه رنگ شده برابر است با $۳۶=۳×۱۲$.

۲۸۹ **۱** مطابق شکل زیر صفحهٔ افقی این استوانه را که یک مخروط از آن جدا شده است در دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های $O'B$ و AH قطع می‌کند که مساحت بین این دو دایره مساحت مقطع حاصل است. توجه کنید که

$$\text{حجم مخروط}=۳۲\pi\Rightarrow \frac{۱}{۳}\pi(O'B)^۲(۶)=۳۲\pi\Rightarrow (O'B)^۲=۱۶$$

$$O'B=۴$$

از طرف دیگر،

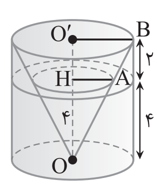
$$\triangle OO'B: AH\parallel O'B\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}$$

$$\frac{AH}{O'B}=\frac{OH}{OO'}\Rightarrow \frac{AH}{۴}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow AH=\frac{۸}{۳}$$

بنابراین

$$\text{مساحت مقطع}=\pi(O'B)^۲-\pi(AH)^۲=\pi(۴)^۲-\pi(\frac{۸}{۳})^۲=۱۶\pi-\frac{۶۴}{۹}\pi$$

$$=\frac{۸۰}{۹}\pi$$



۲۹۰ (۲) ارتفاع هرم و ارتفاع مثلث جانبی با هم مثلث قائم‌الزاویهٔ OHH' را می‌سازند. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

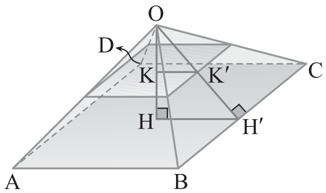
$$HH'^{۲}=OH'^{۲}-OH^{۲}=(۲\sqrt{۷})^{۲}-(۴)^{۲}=۲۸-۱۶=۱۲\Rightarrow HH'=۲\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر صفحهٔ موازی با قاعده که ارتفاع هرم را نصف می‌کند، این هرم را در یک مربع قطع می‌کند و KK' نصف ضلع این مربع است. توجه کنید که

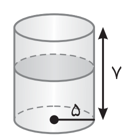
$$\triangle OHH': KK' \parallel HH' \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}$$

$$\frac{OK}{OH}=\frac{KK'}{HH'}\Rightarrow \frac{۲}{۴}=\frac{KK'}{۲\sqrt{۳}}\Rightarrow KK'=\sqrt{۳}$$

بنابراین طول ضلع مقطع $۲\sqrt{۳}$ است. پس $\text{مساحت مقطع}=(۲\sqrt{۳})^{۲}=۱۲$.

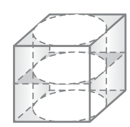


۲۹۱ (۱) اگر استوانهٔ قائم به شعاع قاعدهٔ ۵ را با یک صفحهٔ افقی قطع کنیم، سطح مقطع حاصل دایره‌ای به شعاع ۵ است. بنابراین



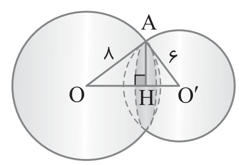
$$\text{مساحت سطح مقطع}=\pi(۵)^{۲}=۲۵\pi$$

۲۹۲ (۲) صفحهٔ افقی مکعب را در یک مربع به طول ضلع ۴ و استوانه را در یک دایره به شعاع ۲ قطع می‌کند. پس مساحت سطح مقطع حاصل تفاضل مساحت دایره از مساحت مربع است.



$$\text{مساحت سطح مقطع}=۴^{۲}-\pi(۲)^{۲}=۱۶-۴\pi$$

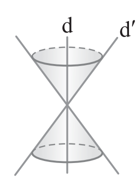
۲۹۳ (۳) سطح مقطع برخورد دو کره یک دایره است (شکل مقابل را ببینید). در مثلث OAO' طول ارتفاع AH برابر اندازهٔ شعاع این دایره است. مثلث OAO' قائم‌الزاویه است، زیرا $۶^{۲}+۸^{۲}=۱۰^{۲}$. پس بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،



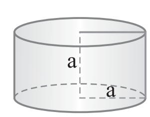
$$AH\times OO'=OA\times O'A\Rightarrow AH\times ۱۰=۸\times ۶\Rightarrow AH=۴/۸$$

بنابراین $\text{محیط سطح مقطع}=۲\pi R=۲\pi(AH)=۹/۶\pi$

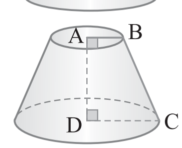
۲۹۴ (۳) از دوران خط d حول خط d' سطحی ایجاد می‌شود که شبیه به مخروط است که آن را سطح مخروطی می‌نامیم. دقت کنید این سطح از دو طرف نامحدود است، پس فکر نکنید که دو مخروط ایجاد شده است.



۲۹۵ (۳) از دوران مربع به طول ضلع a حول یکی از ضلع‌هایش استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ a و ارتفاع a به‌وجود می‌آید.



۲۹۶ (۳) از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD حول ساق قائم AD یک مخروط ناقص به‌وجود می‌آید.



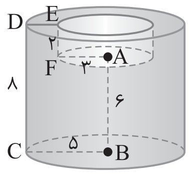
۲۹۷ (۱) جسم فضایی حاصل از دوران شکل داده شده حول AB استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۵ و ارتفاع ۸ است که استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۲ از آن حذف شده است. بنابراین حجم این جسم فضایی برابر است با

$$V=\pi(BC)^{۲}(CD)-\pi(AF)^{۲}(EF)=\pi(۵)^{۲}(۸)-\pi(۳)^{۲}(۲)=۱۸۲\pi$$

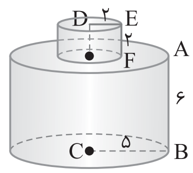
جسم فضایی حاصل از دوران شکل داده شده حول CD استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۵ و ارتفاع ۶ است که استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۲ روی آن قرار گرفته است. بنابراین حجم این جسم فضایی برابر است با

$$V'=\pi(BC)^{۲}(AB)+\pi(DE)^{۲}(EF)=\pi(۵)^{۲}(۶)+\pi(۲)^{۲}(۲)=۱۵۸\pi$$

بنابراین $\frac{V}{V'}=\frac{۱۸۲\pi}{۱۵۸\pi}=\frac{۹۱}{۷۹}$.



دوران حول AB



دوران حول CD

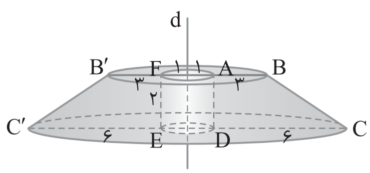
۲۹۸ (۴) از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD حول خط d یک مخروط ناقص به‌وجود می‌آید که از آن استوانه‌ای حذف شده است. اگر این شکل را با صفحهٔ عمودی شامل خط d قطع کنیم، سطح مقطع حاصل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $BCC'B'$ می‌شود که از آن مستطیل ADEF حذف شده است. طول ارتفاع ذوزنقهٔ $BCC'B$ برابر $AD=۲$ و قاعده‌های آن $BB'=۸$ و $CC'=۱۴$ است. پس

$$S_{BCC'B'}=\frac{۱}{۲}AD(BB'+CC')=\frac{۱}{۲}(۲)(۸+۱۴)=۲۲$$

$$S_{ADEF}=۲\times ۲=۴$$

پس مساحت سطح مقطع مورد نظر برابر است با

$$S=S_{BCC'B'}-S_{ADEF}=۲۲-۴=۱۸$$



۲۹۹ (۱) مثلث ABC متساوی‌الساقین است. اگر ارتفاع BH را رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و BHC ایجاد می‌شود که از دوران آن‌ها حول AC دو مخروط با شعاع قاعدهٔ BH و ارتفاع‌های AH و CH به‌وجود می‌آید. پس

$$\text{حجم شکل}=\frac{۱}{۳}\pi BH^{۲}\times AH+\frac{۱}{۳}\pi BH^{۲}\times CH=\frac{۱}{۳}\pi BH^{۲}(AH+CH)$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi BH^{۲}\times AC$$

پس لازم است طول ارتفاع BH را به‌دست آوریم. ابتدا طول ارتفاع AH' را به‌دست می‌آوریم:

$$\triangle AH'C: AH'^{۲}=AC^{۲}-CH'^{۲}=۸^{۲}-۳^{۲}=۵۵\Rightarrow AH'=\sqrt{۵۵}$$

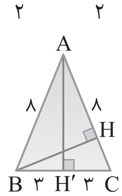
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH'\times BC=\frac{۱}{۲}BH\times AC\Rightarrow \sqrt{۵۵}\times ۶=BH\times ۸$$

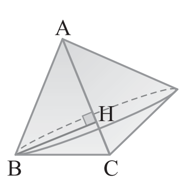
$$BH=\frac{۳\sqrt{۵۵}}{۴}$$

بنابراین

$$\text{حجم}=\frac{۱}{۳}\pi BH^{۲}\times AC=\frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۳\sqrt{۵۵}}{۴}\right)^{۲}\times ۸=\frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۹\times ۵۵}{۱۶}\right)\times ۸$$

$$=\frac{۳\times ۵۵}{۲}\pi=\frac{۱۶۵}{۲}\pi$$





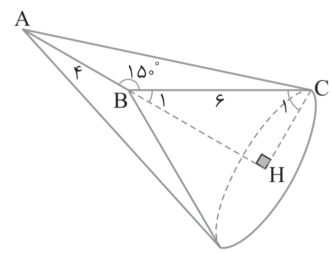
۳۰۰ **۴** ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در این صورت با توجه به شکل از دوران مثلث ABC حول AB دو مخروط با شعاع قاعدهٔ CH و ارتفاع‌های AH و BH به‌دست می‌آید که تفاضل حجم این دو مخروط حجم شکل خواسته شده است. چون $\hat{B}=۱۵۰^\circ$، پس $\hat{B}_۱=۳۰^\circ$. بنابراین

$$\triangle BHC: \hat{B}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow CH=\frac{BC}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

در نتیجه

$$\text{حجم شکل}=\frac{۱}{۳}\pi CH^۲\times AH-\frac{۱}{۳}\pi CH^۲\times BH=\frac{۱}{۳}\pi CH^۲(AH-BH)$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi CH^۲\times AB=\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۴)=۱۲\pi$$



۳۰۱ **۴** از دوران مستطیل ABCD حول طول DC، استوانه‌ای به ارتفاع $۴a+۲$ و شعاع قاعدهٔ $۲a$ به‌دست می‌آید. پس

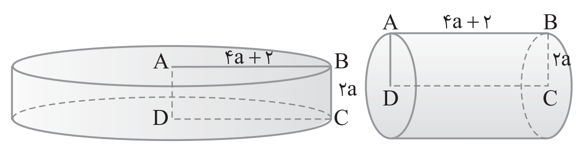
$$V_۱=\pi R^۲h=\pi(۲a)^۲(۴a+۲)$$

و از دوران مستطیل ABCD حول عرض AD، استوانه‌ای به ارتفاع $۲a$ و شعاع قاعدهٔ $۴a+۲$ به‌دست می‌آید. پس $V_۲=\pi R^۲h=\pi(۴a+۲)^۲(۲a)$.

بنابر فرض سؤال،

$$\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{\pi(۲a)^۲(۴a+۲)}{\pi(۴a+۲)^۲(۲a)}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۲a}{۴a+۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۶a=۴a+۲\Rightarrow a=۱$$

پس مستطیل به اضلاع ۲ و ۶ است و مساحت آن برابر ۱۲ است.

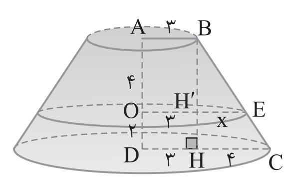


۳۰۲ **۱** از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD حول AD یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود و سطح مقطع حاصل از برخورد این مخروط ناقص با یک صفحهٔ موازی با قاعده‌های آن یک دایره است. اگر ارتفاع BH را رسم کنیم، آن‌گاه از تعمیم قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

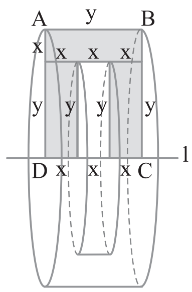
$$\triangle BHC: H'E \parallel HC\Rightarrow\frac{BH'}{BH}=\frac{H'E}{CH}\Rightarrow\frac{۴}{۶}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x=\frac{۸}{۳}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ مقطع برابر $۳+\frac{۸}{۳}=\frac{۱۷}{۳}$ است. پس

$$\text{محیط سطح مقطع}=۲\pi R=۲\pi(\frac{۱۷}{۳})=\frac{۳۴}{۳}\pi$$



۳۰۳ **۲** اگر x عرض و y طول هریک از مستطیل‌های همنهشت باشند، آن‌گاه از دوران قسمت رنگی حول خط l یک استوانه به ارتفاع y و شعاع قاعدهٔ $x+y$ ایجاد می‌شود، به‌طوری که یک استوانه به ارتفاع x و شعاع قاعدهٔ y از آن جدا شده باشد، پس



$$\pi(x+y)^۲y-\pi y^۲x=۳۹\pi\xrightarrow{y=۳x}$$

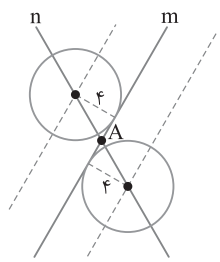
$$\pi(۴x)^۲(۳x)-\pi(۳x)^۲x=۳۹\pi\Rightarrow ۳۹x^۳\pi=۳۹\pi\Rightarrow x^۳=۱\Rightarrow x=۱$$

بنابراین $۳=۱\times۳=x\times y=$مساحت یک مستطیل کوچک.

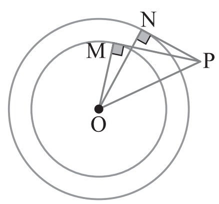
۳۰۴ **۲** فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d از مرکز دایرهٔ C طول عمودی است که از O بر d وارد می‌شود. اگر OH عمود از نقطهٔ O بر خط d باشد، آن‌گاه $OH=۳\sqrt{۲}$.

چون $۳\sqrt{۲}<۲\sqrt{۵}$، پس $OH<r$، بنابراین خط d دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

۳۰۵ **۳** مرکز دایره‌هایی که بر خط m مماس هستند و شعاع آن‌ها ۴ است، روی دو خط موازی با m و به فاصلهٔ ۴ از خط m قرار دارند. اگر این دو خط موازی را رسم کنیم، هر یک از آن‌ها خط n را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس دو نقطه روی خط n قرار دارند که مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ هستند و خط m بر این دایره‌ها مماس است.



۳۰۶ **۳** از مرکز O به نقطه‌های تماس M و N وصل می‌کنیم. در این صورت شعاع‌های OM و ON به‌ترتیب بر خط‌های مماس PM و PN عمود هستند. از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ایجاد شده به دست می‌آید



$$\triangle OPM:\ PM^۲+OM^۲=OP^۲\Rightarrow ۱۶+۹=OP^۲\Rightarrow OP=۵$$

بنابراین

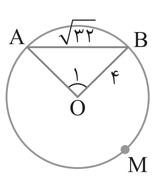
$$\triangle OPN: PN^۲+ON^۲=OP^۲\Rightarrow PN^۲+۱۶=۲۵\Rightarrow PN=۳$$

۳۰۷ **۲** از مرکز O به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. در این صورت طول ضلع‌های مثلث OAB در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند:

$$AB^۲=OA^۲+OB^۲=۳۲$$

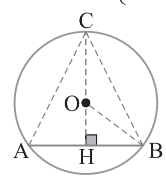
بنابراین مثلث OAB قائم‌الزاویه است و $\hat{O}_۱=۹۰^\circ$. در نتیجه اندازهٔ کمان AB برابر ۹۰° است. بنابراین اندازهٔ کمان AMB برابر $۳۶۰^\circ-۹۰^\circ=۲۷۰^\circ$ است. طول کمان AMB برابر است با

$$\text{طول کمان}=\frac{\text{اندازهٔ کمان}}{۳۶۰^\circ}(۲\pi r)\Rightarrow \text{طول کمان } AMB=\frac{۲۷۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi\times۴)=۶\pi$$



۳۰۸ (۱) مطابق شکل، در صورتی بیشترین مساحت به دست می‌آید که طول ارتفاع CH بیشترین مقدار ممکن باشد و این موضوع زمانی اتفاق می‌افتد که CH در راستای قطر دایره باشد. چون در این شرایط ارتفاع CH، AB را نصف می‌کند، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین می‌شود. بنابراین

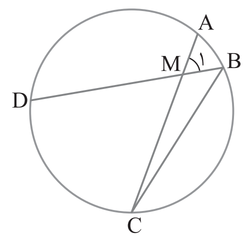
$$\begin{cases} OB=۵ \\ BH=۴ \end{cases} \Rightarrow OH=\sqrt{۲۵-۱۶}=۳$$



از طرف دیگر، $CH=OH+OC=۸$. بنابراین بیشترین مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times CH=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸=۳۲$$

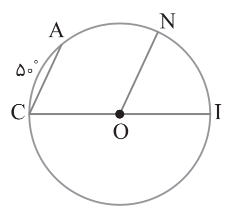
۳۰۹ (۱) **راه‌حل اول** زاویهٔ $M_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث MBC است. بنابراین $\hat{M}_۱=\hat{C}+\hat{B}$. از طرف دیگر $\hat{B}=۴\hat{C}$، در نتیجه $\hat{M}_۱=۵\hat{C}$. در ضمن زاویهٔ C زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان AB است، پس $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$. در نتیجه $\hat{M}_۱=\frac{۵}{۲}\overset{\frown}{AB}$.



راه‌حل دوم زاویهٔ C زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان AB است، پس $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$، همچنین $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}$، از طرف دیگر $\hat{B}=۴\hat{C}$، بنابراین $\overset{\frown}{DC}=۴\overset{\frown}{AB}$. چون $\hat{M}_۱$ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع از دایره است، پس

$$\hat{M}_۱=\frac{\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۴\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۵\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۳۱۰ (۳) چون CI قطر دایره است، پس



$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{ANI}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{AC}=۵۰^\circ} \overset{\frown}{ANI}=۱۳۰^\circ$$

بنابراین اندازهٔ زاویهٔ محاطی C برابر است با $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{ANI}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$. از طرف دیگر از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} CA||ON \\ \text{مورب } CI \end{cases} \Rightarrow N\hat{O}I=\hat{C}=۶۵^\circ$$

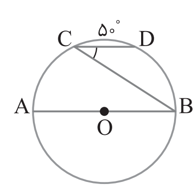
۳۱۱ (۲) کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره، مساوی‌اند. بنابراین

$$AB||CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

از طرف دیگر،

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\overset{\frown}{BD}+۵۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۶۵^\circ$$

چون زاویهٔ DCB محاطی روبه‌رو به کمان BD است، $D\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{۶۵^\circ}{۲}$.

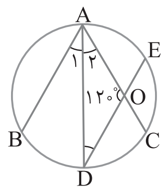


۳۱۲ (۲) بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\begin{cases} AB||DE \\ \text{مورب } AD \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{D} \xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲} \hat{A}_۲=\hat{D}$$

در مثلث AOD مجموع اندازهٔ زاویه‌ها برابر ۱۸۰° است، پس

$$\hat{A}_۲+\hat{D}+۱۲۰^\circ=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}_۲=\hat{D}} ۲\hat{A}_۲=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲=۳۰^\circ$$

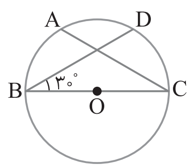


بنابراین $\hat{A}_۱=۳۰^\circ$ و زاویهٔ $A_۱$ زاویهٔ محاطی است، پس

$$\hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۶۰^\circ$$

۳۱۳ (۴) اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی مساوی نصف کمان مقابلش است، پس

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۶۰^\circ$$



چون D وسط کمان AC است، پس $\overset{\frown}{AD}=۶۰^\circ$ و چون BC قطر دایره است، پس

$$\overset{\frown}{BAC}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB}+۶۰^\circ+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$$

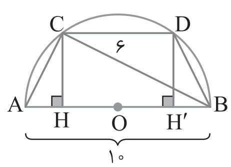
بنابراین $A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$.

۳۱۴ (۱) عمودهای CH و DH' را بر AB وارد می‌کنیم. کمان‌های AC و BD بین دو وتر موازی CD و AB محصور هستند، پس این دو کمان مساوی‌اند، در نتیجه $AC=BD$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACH و BDH' همنهشت‌اند (وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه)، پس $AH=BH'$. از طرف دیگر، چهارضلعی $CDH'H$ مستطیل است. بنابراین $HH'=CD=۶$. در نتیجه

$$AH+HH'+BH'=۱۰ \Rightarrow ۲AH+۶=۱۰ \Rightarrow AH=۲$$

در ضمن مثلث ABC قائم‌الزاویه است و زاویهٔ C در آن قائمه است، زیرا این زاویه، زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر است. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^۲=AH\times AB=۲\times ۱۰=۲۰ \Rightarrow AC=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

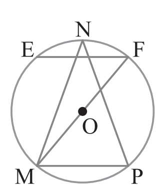


۳۱۵ (۲) زاویهٔ MNP زاویهٔ محاطی است، پس

$$M\hat{N}P=\frac{\overset{\frown}{MP}}{۲} \Rightarrow ۴۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{MP}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{MP}=۸۰^\circ$$

چون MF قطر دایره است، پس اندازهٔ کمان MPF برابر ۱۸۰° است. در نتیجه $\overset{\frown}{FP}=۱۰۰^\circ$. از طرف دیگر می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در دایره مساوی‌اند، پس $EF||MP \Rightarrow \overset{\frown}{EM}=\overset{\frown}{FP} \Rightarrow \overset{\frown}{EM}=۱۰۰^\circ$

بنابراین اندازهٔ زاویهٔ محاطی F برابر است با $\hat{F}=\frac{\overset{\frown}{EM}}{۲}=\frac{۱۰۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$.



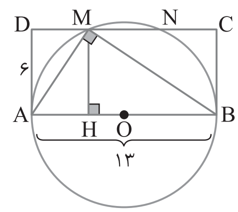
۳۱۶ **۳** شکل تست به صورت زیر است. از نقطهٔ M به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. چون زاویهٔ M محاطی روبه‌رو به قطر دایره است، پس قائمه است. پس مثلث AMB قائم‌الزاویه است. اگر ارتفاع MH را در این مثلث رسم کنیم و طول AH را برابر x بگیریم، آن‌گاه $BH=۱۳-x$. از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB نتیجه می‌شود

$$MH^{۲}=AH\times BH \xrightarrow{MH=AD=۶} ۳۶=x(۱۳-x)$$

$$x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰$$

جواب‌های این معادله $x=۴$ و $x=۹$ هستند. بنابراین اگر اندازهٔ قسمت کوچک‌تر یعنی AH برابر ۴ باشد، آن‌گاه $DM=۴$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $NC=۴$. بنابراین

$$MN=DC-(DM+NC)=۱۳-(۴+۴)=۵$$



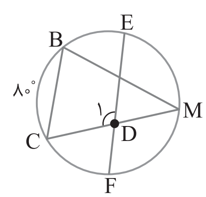
۳۱۷ **۳** زاویهٔ B زاویهٔ محاطی است، پس $\hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{FM}}{۲}$ (۱)

و زاویهٔ $D_۱$ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع است، پس (۲) $\hat{D}_۱=\dfrac{\overset{\frown}{EBC}+\overset{\frown}{FM}}{۲}$

با جمع تساوی‌های (۱) و (۲) و در نظر گرفتن $\overset{\frown}{EM}=\overset{\frown}{FM}$ نتیجه می‌شود

$$\hat{B}+\hat{D}_۱=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{FM}+\overset{\frown}{EBC}+\overset{\frown}{EM}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

همان‌طور که می‌بینید اندازهٔ کمان BC تأثیری در جواب ندارد و یک فرض اضافی است.



۳۱۸ **۳** چون $\hat{E}=۳۰^\circ$، پس

$$\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AND}-\overset{\frown}{BC})=۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AND}-\overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ \qquad (۱)$$

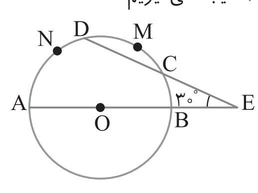
از طرف دیگر چون AB قطر دایره است، پس

$$\overset{\frown}{AND}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DMC}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AND}+\overset{\frown}{BC}+۳۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

در نتیجه

$$\overset{\frown}{AND}+\overset{\frown}{BC}=۱۵۰^\circ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{AND}=۱۰۵^\circ$.

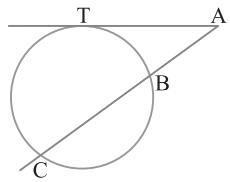


۳۱۹ **۳** هر دایره ۳۶۰° است، بنابراین

$$\overset{\frown}{TC}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BT}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲\overset{\frown}{BT}+۲\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{BT}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۵\overset{\frown}{BT}=۳۶۰^\circ$$

در نتیجه $\overset{\frown}{BT}=۷۲^\circ$ و $\overset{\frown}{TC}=۱۴۴^\circ$. پس اندازهٔ زاویهٔ A برابر است با

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{TC}-\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{۱۴۴^\circ-۷۲^\circ}{۲}=۳۶^\circ$$



۳۲۰ **۴** در مثلث ABC زاویهٔ C قائمه است، زیرا محاطی روبه‌رو به قطر دایره است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AB^{۲}=BC^{۲}+AC^{۲}=۱۲+۴=۱۶\Rightarrow AB=۴$$

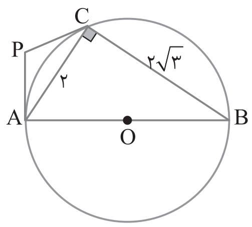
$$AC=۲,\ AB=۴\Rightarrow AC=\frac{۱}{۲}AB\Rightarrow \hat{B}=۳۰^\circ$$

زاویهٔ B محاطی روبه‌رو به کمان AC است، بنابراین

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow ۳۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۶۰^\circ$$

چون AB قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{BC}=۱۲۰^\circ$. از طرف دیگر P زاویهٔ بین دو مماس بر دایره است، پس اندازهٔ آن برابر است با

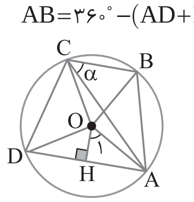
$$\hat{P}=\frac{\overset{\frown}{ABC}-\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{(۱۸۰^\circ+۱۲۰^\circ)-۶۰^\circ}{۲}=\frac{۲۴۰^\circ}{۲}=۱۲۰^\circ$$



۳۲۱ **۳** اگر از مرکز دایره به نقاط A، B، C و D وصل کنیم، مثلث OBC متساوی‌الاضلاع است، پس $\overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ$. مثلث OCD قائم‌الزاویه است، زیرا $(r\sqrt{۲})^{۲}=r^{۲}+r^{۲}$، پس بنابر عکس قضیهٔ فیثاغورس $C\hat{O}D=۹۰^\circ$. پس $\overset{\frown}{CD}=۹۰^\circ$. همچنین مثلث OAD متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° است، زیرا اگر ارتفاع OH را در آن رسم کنیم، $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}r$ ، پس $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA$ ، در نتیجه $\hat{O}_۱=۶۰^\circ$. چون در مثلث متساوی‌الساقین OAD، ارتفاع همان نیمساز است، پس $A\hat{O}D=۱۲۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AD}=۱۲۰^\circ$. در نتیجه

$$\overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ-(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{BC})=۳۶۰^\circ-(۱۲۰^\circ+۹۰^\circ+۶۰^\circ)=۹۰^\circ$$

بنابراین $\alpha=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\dfrac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$.



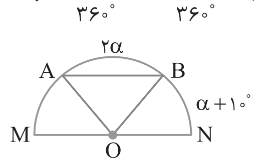
۳۲۲ **۳** می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BN}=\alpha+۱۰^\circ$. در نتیجه

$$\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BN}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \alpha+۱۰^\circ+۲\alpha+\alpha+۱۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$۴\alpha=۱۶۰^\circ\Rightarrow \alpha=۴۰^\circ$$

پس زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۸۰° است. بنابراین

$$\text{طول کمان } AB=\frac{۲\alpha}{۳۶۰^\circ}\,۲\pi r=\frac{۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\,۲\pi(۴)=\frac{۱۶}{۹}\pi$$



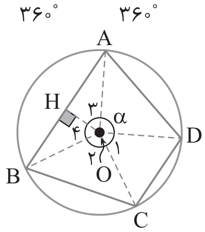
۳۲۳ (۱) از مرکز O به رأس‌های چهارضلعی ABCD وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است، پس $\hat{O}_1=۶۰^\circ$ در نتیجه $\widehat{CD}=۶۰^\circ$. در ضمن مثلث OBC قائم‌الزاویه است، زیرا اضلاع آن r، r و $r\sqrt{۲}$ هستند، $((r\sqrt{۲})^۲=r^۲+r^۲)$، پس $\hat{O}_۲=۹۰^\circ$، در نتیجه $\widehat{BC}=۹۰^\circ$. در مثلث متساوی‌الساقین OAB با رسم عمود OH به‌دست می‌آید

$$AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}r\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA\Rightarrow\hat{O}_۳=۶۰^\circ\Rightarrow A\hat{O}B=۱۲۰^\circ$$

$$\widehat{AB}=۱۲۰^\circ$$

بنابراین $\widehat{AD}=۳۶۰^\circ-(۱۲۰^\circ+۹۰^\circ+۶۰^\circ)=۹۰^\circ$. پس

$$\text{طول کمان } AD=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}۲\pi r=\frac{۹۰^\circ}{۳۶۰^\circ}۲\pi r=\frac{۱}{۴}(۲\pi r)=\frac{\pi r}{۲}$$



۳۲۴ (۱) ابتدا اندازهٔ کمان BC را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{P}=\frac{\widehat{AD}-\widehat{BC}}{۲}\xrightarrow{\hat{P}=۳۰^\circ}\widehat{AD}-\widehat{BC}=۶۰^\circ$$

$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{AD}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۱۳۰^\circ+\widehat{BC}+۱۲۰^\circ+\widehat{AD}=۳۶۰^\circ$$

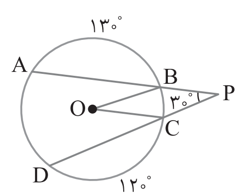
$$\widehat{AD}+\widehat{BC}=۱۱۰^\circ$$

بنابراین

$$\begin{cases}\widehat{AD}-\widehat{BC}=۶۰^\circ\\ \widehat{AD}+\widehat{BC}=۱۱۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۲\widehat{BC}=۵۰^\circ\Rightarrow\widehat{BC}=۲۵^\circ$$

پس اندازهٔ زاویهٔ مرکزی BOC برابر ۲۵° است. در نتیجه

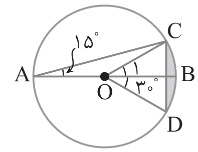
$$\text{طول کمان } BC=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}۲\pi r=\frac{۲۵^\circ}{۳۶۰^\circ}۲\pi(۳)=\frac{۲۵}{۶۰}\pi=\frac{۵}{۱۲}\pi$$



۳۲۵ (۱) محیط این قطعه برابر مجموع طول کمان CD و طول وتر CD است. زاویهٔ A محاطی است، پس $\widehat{BC}=۳۰^\circ$. در نتیجه زاویهٔ مرکزی $\hat{O}_1$ برابر ۳۰° است. در نتیجه مثلث OCD متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است، پس $CD=۳$. از طرف دیگر،

$$\text{طول کمان } CD=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}۲\pi r=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}۲\pi(۳)=\pi$$

بنابراین محیط قطعهٔ مورد نظر برابر $\pi+۳$ است.

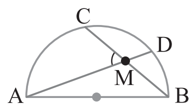


۳۲۶ (۳) کمان AB برابر ۱۸۰° است، با فرض $۳\widehat{AC}=۴\widehat{CD}=۶\widehat{DB}=x$، نتیجه می‌گیریم

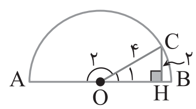
$$\widehat{AC}+\widehat{CD}+\widehat{DB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\frac{x}{۳}+\frac{x}{۴}+\frac{x}{۶}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\frac{۹x}{۱۲}=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۲۴۰^\circ$$

بنابراین $\widehat{AC}=\frac{۲۴۰^\circ}{۳}=۸۰^\circ$ و $\widehat{DB}=\frac{۲۴۰^\circ}{۶}=۴۰^\circ$. در نتیجه

$$A\hat{M}C=\frac{\widehat{AC}+\widehat{BD}}{۲}=\frac{۸۰^\circ+۴۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$



۳۲۷ (۲) بنابر فرض، طول عمود CH برابر ۲ است. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH ضلع CH نصف OC است. در نتیجه $\hat{O}_1=۳۰^\circ$. پس $\hat{O}_۲=۱۵۰^\circ$. بنابراین

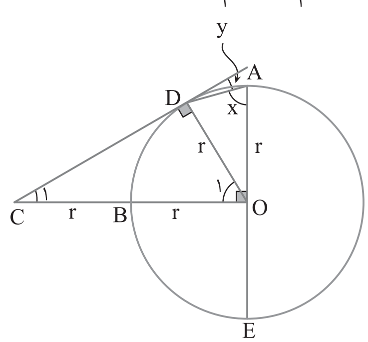


$$\text{طول کمان } AC=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}۲\pi r=\frac{۱۵۰^\circ}{۳۶۰^\circ}۲\pi(۴)=\frac{۱۰}{۳}\pi\simeq ۱۰$$

۳۲۸ (۲) اگر r شعاع دایره باشد، آن‌گاه $OA=OB=r$. از فرض $OA=\frac{۱}{۲}OC$ نتیجه می‌گیریم $OC=۲r$، پس $BC=r$. اکنون از مرکز O به نقطهٔ تماس D وصل می‌کنیم. زاویهٔ D قائمه است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODC،

$$OD=\frac{OC}{۲}\Rightarrow\hat{C}_1=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_1=۶۰^\circ$$

بنابراین زاویهٔ محاطی x برابر است با $x=\frac{\widehat{DBE}}{۲}=\frac{۶۰^\circ+۹۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$ و زاویهٔ ظلی y برابر است با $y=\frac{\widehat{AD}}{۲}=\frac{۹۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$. بنابراین $x-y=۷۵^\circ-۱۵^\circ=۶۰^\circ$.



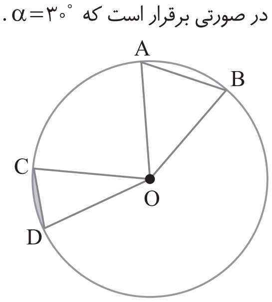
۳۲۹ (۲) فرض می‌کنیم $C\hat{O}D=\alpha$. در این صورت بنابر فرض

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}S_{OAB}+S_{\text{قطعه}}=\frac{\pi}{۱۲}$$

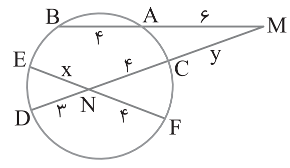
$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}(۱)(۱)\sin ۴۵^\circ+\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\pi(۱)^۲-\frac{۱}{۲}(۱)(۱)\sin\alpha=\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\frac{۱}{۴}+\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\pi-\frac{۱}{۲}\sin\alpha=\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\pi+\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\sin\alpha\right)=\frac{\pi}{۱۲}$$

تساوی به‌دست آمده در صورتی برقرار است که $\alpha=۳۰^\circ$.



۳۳۰ (۱) بنابر رابطه‌های طولی در دایره،



$NE\times NF=ND\times NC$

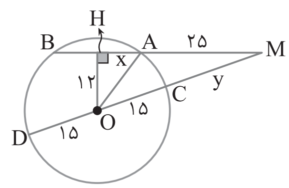
$x\times ۴=۳\times ۴$

یعنی $x=۳$. همچنین

$$MA\times MB=MC\times MD \Rightarrow ۶\times ۱۰=y(y+۷)$$

با حل این معادله به‌دست می‌آید $y=-۱۲$ و $y=۵$. چون $y>۰$، پس $y=۵$ قبول است. اکنون می‌توان نوشت $x+y=۳+۵=۸$.

۳۳۱ (۲) شعاع OA را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$x=\sqrt{OA^۲-OH^۲}=\sqrt{۱۵^۲-۱۲^۲}=۹$$

بنابراین $AB=۲x=۱۸$. اکنون بنابر روابط طولی در دایره می‌توان نوشت

$$MC\times MD=MA\times MB$$

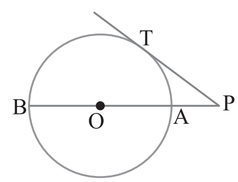
یعنی $y(y+۳۰)=۲۵\times ۴۳$. با حل این معادله به‌دست می‌آید

$$y=-۱۵\pm ۱۰\sqrt{۱۳}$$

چون $y=-۱۵-۱۰\sqrt{۱۳}<۰$، بنابراین غیر قابل قبول است، پس

$$y=۱۰\sqrt{۱۳}-۱۵$$

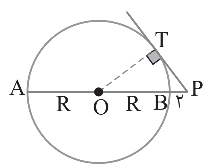
۳۳۲ (۴) با توجه به روابط طولی در دایره، $PT^۲=PA\times PB$. پس



$$PT^۲=PA(PA+AB)=۴\times(۴+۱۲)=۶۴$$

بنابراین $PT=۸$.

۳۳۳ (۳) بنابر روابط طولی در دایره،



$$PT^۲=PA\times PB=۱۸\times ۲=۳۶$$

پس $PT=۶$. اکنون اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، آن‌گاه

$$۲R=AB=PA-PB=۱۸-۲=۱۶$$

پس $R=۸$. در نتیجه $S_{OPT}=\frac{۱}{۲}OT\times PT=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶=۲۴$.

۳۳۴ (۳) راه‌حل اول بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$PA^۲=PB\times PC=۱\times(۱+۳)=۴\Rightarrow PA=۲$$

از طرف دیگر، زاویهٔ ظلی BAP و زاویهٔ محاطی C روبه‌رو به کمان AB هستند، پس مساوی‌اند:

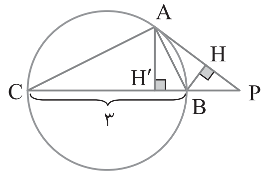
$$\begin{cases} B\hat{A}P=\hat{C} \\ \hat{P}=\hat{P}\end{cases} \xrightarrow{(زز)} \triangle ABP\sim\triangle CAP$$

$$\frac{S_{CAP}}{S_{ABP}}=(\frac{CP}{PA})^۲=(\frac{۴}{۲})^۲=۴$$

پس

$$\frac{\frac{۱}{۲}AH'\times CP}{\frac{۱}{۲}BH\times PA}=۴\Rightarrow \frac{AH'\times ۴}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۲}=۴\Rightarrow AH'=\sqrt{۲}$$

راه‌حل دوم بنابر روابط طولی در دایره،



$$PA^۲=PB\times PC$$

$$PA^۲=۱\times(۱+۳)=۴\Rightarrow PA=۲$$

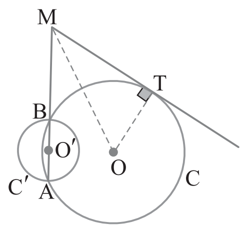
از طرف دیگر چون $BH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $BP=۱$، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHP،

$$\sin\hat{P}=\frac{BH}{BP}\Rightarrow \sin\hat{P}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \hat{P}=۴۵^\circ$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AH'P$،

$$AH'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AP \xrightarrow{AP=۲} AH'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۲=\sqrt{۲}$$

۳۳۵ (۴) بنابر رابطه‌های طولی در دایرهٔ C،



$$MT^۲=MA\times MB$$

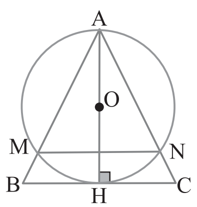
$$=(۹+۶)(۹)=۱۳۵$$

از طرف دیگر در مثلث MTO بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$MT^۲=OM^۲-R^۲ \xrightarrow{(۱)}$$

$$۱۳۵=۱۸۴-R^۲\Rightarrow R^۲=۴۹\Rightarrow R=۷$$

۳۳۶ (۴) در مثلث متساوی‌الساقین ABC ارتفاع AH میانه نیز هست، پس $BH=CH=۵$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHC،



$$CA^۲=AH^۲+CH^۲$$

$$=۱۰^۲+۵^۲=۱۲۵\Rightarrow CA=۵\sqrt{۵}$$

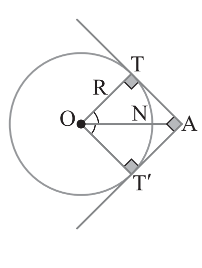
از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$CH^۲=CN\times CA\Rightarrow ۵^۲=CN\times ۵\sqrt{۵}\Rightarrow CN=\sqrt{۵}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $BM=\sqrt{۵}$. پس $BM=CN$. بنابراین $\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC}$. پس بنابر عکس قضیهٔ تالس، $MN||BC$. بنابرتعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$. چون $AM=AB-BM=۵\sqrt{۵}-\sqrt{۵}=۴\sqrt{۵}$ پس

$$\frac{۴\sqrt{۵}}{۵\sqrt{۵}}=\frac{MN}{۱۰}\Rightarrow MN=۸$$

۳۳۷ (۳) چهارضلعی $ATOT'$ یک مربع است، چون زاویه‌های آن ۹۰° هستند و دو ضلع مجاور آن، یعنی AT و AT' نیز باهم برابرند (زیرا دو مماس رسم شده از نقطهٔ A هستند). OA قطر این مربع است، پس $OA=R\sqrt{۲}$. اگر از A به مرکز O وصل کنیم تا دایره را در نقطهٔ N قطع کند، آن‌گاه N نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره به A است. بنابراین



$$AN=OA-R=R\sqrt{۲}-R=۴\sqrt{۲}-۴=۴(\sqrt{۲}-۱)=\frac{۴}{\sqrt{۲}+۱}$$

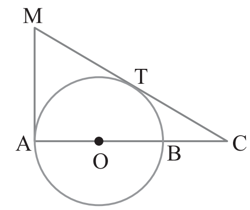
۳۳۸ **۳** می‌دانیم طول دو مماس رسم شده بر دایره از یک نقطه برابرند، پس $MA=MT$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$CT^۲=CB\times CA \xrightarrow[CA=۳]{CB=۱} CT^۲=۱\times ۳=۳ \Rightarrow CT=\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر قطر AB بر مماس AM عمود است، پس مثلث AMC قائم‌الزاویه است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در این مثلث،

$$MA^۲+AC^۲=MC^۲ \xrightarrow{MA=MT} MT^۲+۳^۲=(\sqrt{۳}+MT)^۲$$

$$MT^۲+۹=۳+MT^۲+۲\sqrt{۳}MT \Rightarrow ۲\sqrt{۳}MT=۶ \Rightarrow MT=\sqrt{۳}$$



۳۳۹ **۲** از مرکز O به نقطهٔ تماس B وصل می‌کنیم. در این صورت شعاع OB بر مماس MB عمود است. در ضمن می‌دانیم OA نیمساز زاویهٔ بین دو مماس AB و AC است. پس $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲=۳۰^\circ$. در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB ،

$$\hat{A}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA$$

$$\xrightarrow{AB=۹} ۹=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA \Rightarrow OA=۶\sqrt{۳}$$

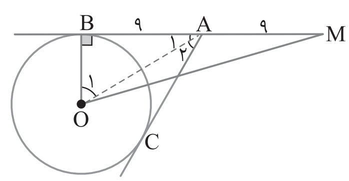
از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB،

$$\hat{A}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow OB=\frac{۱}{۲}OA \xrightarrow{OA=۶\sqrt{۳}} OB=۳\sqrt{۳}$$

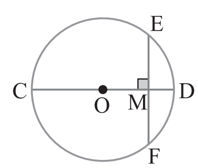
بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBM ،

$$OM^۲=MB^۲+OB^۲=۱۸^۲+(۳\sqrt{۳})^۲=۳۵۱$$

در نتیجه $OM=\sqrt{۳۵۱}=۳\sqrt{۳۹}$.



۳۴۰ **۱** کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ M وتر عمود بر CD است. فرض می‌کنیم EF وتر گذرنده از M و عمود بر قطر CD باشد. چون قطر CD بر وتر EF عمود است، پس M وسط EF قرار دارد، یعنی $ME=MF$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

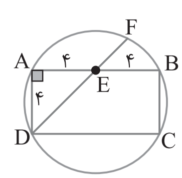


$$ME\times MF=MC\times MD \Rightarrow ME\times ME=۸$$

$$ME^۲=۸ \Rightarrow ME=۲\sqrt{۲}$$

پس $EF=۲ME=۴\sqrt{۲}$.

۳۴۱ **۳** بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$\triangle AED: ED^۲=AE^۲+AD^۲$$

$$ED^۲=۴^۲+۴^۲=۳۲ \Rightarrow ED=۴\sqrt{۲}$$

از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

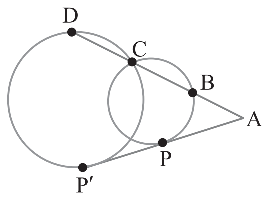
$$EF\times ED=EA\times EB \Rightarrow EF\times ۴\sqrt{۲}=۴\times ۴ \Rightarrow EF=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

۳۴۲ **۲** از رابطه‌های طولی در هر دو دایره استفاده می‌کنیم:

$$AP'^۲=AC\times AD \xrightarrow{AP'=۲AP} ۴AP^۲=AC\times AD \quad (۱)$$

همچنین $AP^۲=AB\times AC$ (۲) . از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$۴AB\times AC=AC\times AD \Rightarrow ۴AB=AD \Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{۱}{۴}$$

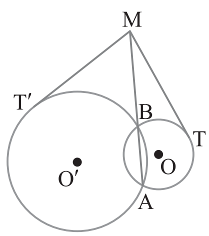


۳۴۳ **۱** از رابطه‌های طولی در هر دو دایره استفاده می‌کنیم:

$$MT^۲=MA\times MB\ ,\quad MT'^۲=MA\times MB$$

از مقایسه این تساوی‌ها نتیجه می‌گیریم

$$MT^۲=MT'^۲ \Rightarrow MT=MT' \Rightarrow \frac{MT'}{MT}=۱$$



۳۴۴ **۱** چون وتر AD' بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، پس شعاع OT بر AD' عمود است و آن را نصف می‌کند، یعنی $AT=D'T$. از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در دایرهٔ کوچک‌تر،

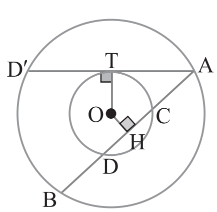
$$AT^۲=AC\times AD=۴(۴+۵)=۳۶ \Rightarrow AT=۶$$

پس $AD'=۲AT=۱۲$. در ضمن اگر از مرکز O عمود OH را بر وتر AB رسم کنیم، چون دو دایره هم‌مرکز هستند، هم وتر AB و هم وتر CD نصف می‌شود:

$$CH=\frac{CD}{۲}=\frac{۵}{۲},\quad AB=۲AH$$

از طرف دیگر، $AH=AC+CH=۴+\frac{۵}{۲}=\frac{۱۳}{۲}$. در نتیجه $AB=۱۳$.

بنابراین $AB-AD'=۱۳-۱۲=۱$. پس طول وتر AB یک واحد از طول وتر AD' بیشتر است.



۳۴۵ **۲** از مرکز O به نقطه‌های تماس T ، T' و T'' وصل می‌کنیم، شعاع دایره بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است، در چهارضلعی $MTOT'$

$$\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ$$

بنابراین چهارضلعی $MTOT'$ مربعی به طول ضلع R است. از طرف دیگر ON نیمساز زاویهٔ بین دو مماس NT' و NT'' است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OT'N$ ،

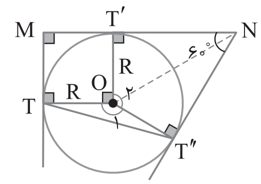
$$O\hat{N}T'=۳۰^\circ \Rightarrow OT'=\frac{۱}{۲}ON \xrightarrow{OT'=R} ON=۲R$$

همچنین

$$T'\hat{O}N=۶۰^\circ \Rightarrow NT'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}ON=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲R)=\sqrt{۳}R$$

درضمن مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی $OT'NT''$ برابر 360° است. پس $\hat{O}_2=120^\circ$. در نتیجه $\hat{O}_1=150^\circ$. چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ONT' و ONT'' به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند، پس مساحت چهارضلعی $OT'NT''$ دو برابر مساحت مثلث ONT' است. بنابراین

$$S_{MNT''T}=S_{MTOT'}+S_{OT'NT''}+S_{OTT''}$$
$$=R^2+2(\frac{1}{2}R\times\sqrt{3}R)+\frac{1}{2}(R\times R\times\sin 150^\circ)$$
$$=R^2+\sqrt{3}R^2+\frac{R^2}{4}=(\frac{5}{4}+\sqrt{3})R^2$$

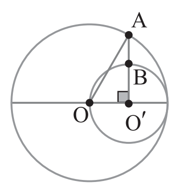


۳۴۶ (۱) با توجه به شکل قطر دایرهٔ کوچک‌تر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است، پس $OO'=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAO' بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$OA^2=OO'^2+O'A^2\Rightarrow(6\sqrt{3})^2=(3\sqrt{3})^2+O'A^2$$

از این تساوی نتیجه می‌شود $O'A=9$. بنابراین

$$AB=O'A-O'B=9-3\sqrt{3}=3(3-\sqrt{3})$$



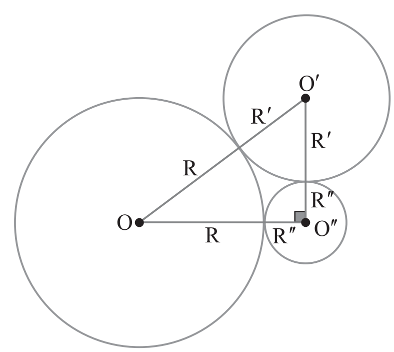
۳۴۷ (۴) شکل تست به صورت زیر است. مثلث به طول ضلع‌های ۶، ۸ و ۱۰ قائم‌الزاویه است، زیرا $6^2+8^2=10^2$. چون $OO'=10$، $O'O''=6$ و $OO''=8$، پس $R+R'=10,\quad R+R''=8,\quad R'+R''=6$

با جمع سه تساوی بالا به‌دست می‌آید

$$2(R+R'+R'')=24\Rightarrow R+R'+R''=12$$

چون $R+R'=10$، پس $R''+10=12$، در نتیجه $R''=2$. بنابراین $R'=4$، $R=6$ و مجموع مساحت‌های سه دایره برابر است با

$$\pi R^2+\pi R'^2+\pi R''^2=\pi(6^2+4^2+2^2)=56\pi$$



۳۴۸ (۳) مطابق شکل، اگر خط‌المرکزین OO' دایره‌ها را در نقطه‌های A و B قطع کند، آن‌گاه AB فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطه‌های دو دایره از یکدیگر است. پس $AB=5$. فرض کنید TT'، مماس مشترک داخلی دو دایره، خط‌المرکزین OO' را در P قطع کند. اگر از O به T و از O' به T' وصل کنیم، آن‌گاه دو مثلث OPT و $O'PT'$ قائم‌الزاویه هستند. بنابراین

$$\begin{cases}\hat{P}_1=\hat{P}_2\\ \hat{T}=\hat{T}'=90^\circ\end{cases}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle OPT\sim\triangle O'PT'$$

نسبت اضلاع نظیر این دو مثلث متشابه را می‌نویسیم:

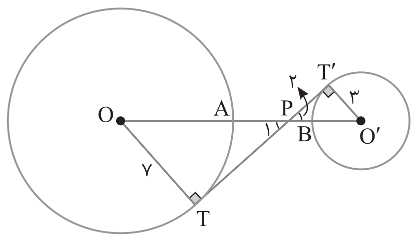
$$\frac{OP}{O'P}=\frac{OT}{O'T'}\Rightarrow\frac{OP}{O'P}=\frac{7}{3}$$

با ترکیب در مخرج کردن این تناسب به‌دست می‌آید $\frac{OP}{OO'}=\frac{7}{10}$. از طرف دیگر طول خط‌المرکزین OO' برابر است با

$$OO'=OA+AB+BO'=7+5+3=15$$

بنابراین $\frac{OP}{15}=\frac{7}{10}\Rightarrow OP=\frac{21}{2}$

در نتیجه $AP=OP-OA=\frac{21}{2}-7=\frac{7}{2}=3/5$.



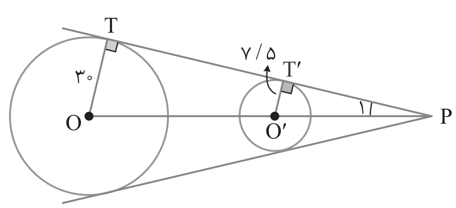
۳۴۹ (۲) بنابر فرض تست اندازهٔ زاویهٔ بین مماس مشترک خارجی TT' و خط‌المرکزین OO'، یعنی $\hat{P}_1$ برابر 30° است. چون شعاع‌های OT و $O'T'$ بر مماس مشترک عمودند، پس مثلث‌های OPT و $O'PT'$ قائم‌الزاویه هستند. بنابراین

$$\triangle OPT:\hat{P}_1=30^\circ\Rightarrow OT=\frac{1}{2}OP\Rightarrow 30=\frac{1}{2}OP\Rightarrow OP=60$$

$$\triangle O'PT':\hat{P}_1=30^\circ\Rightarrow O'T'=\frac{1}{2}O'P\Rightarrow 7/5=\frac{1}{2}O'P\Rightarrow O'P=15$$

اکنون می‌توان طول خط‌المرکزین OO' را به‌دست آورد

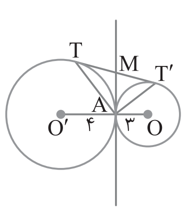
$$OO'=OP-O'P=60-15=45$$



۳۵۰ (۴) شکل سؤال به‌صورت زیر است. مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم تا TT' را در نقطهٔ M قطع کند. چون مماس‌های رسم شده بر دایره از یک نقطه، برابرند، پس

$$\left.\begin{matrix}MT=MA\\ MT'=MA\end{matrix}\right\}\Rightarrow MT=MT',\ MA=\frac{TT'}{2}$$

پس در مثلث ATT' پاره‌خط AM میانه است و نصف ضلع TT' است. بنابراین مثلث ATT' قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس از رابطهٔ $TT'=2\sqrt{rr'}$ به‌دست می‌آید. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ATT'،



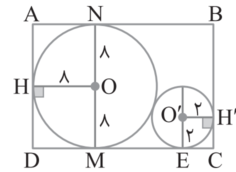
مماس مشترک داخلی

$$AT^2+AT'^2=TT'^2\xrightarrow{TT'=2\sqrt{rr'}}$$

$$AT^2+AT'^2=4rr'=4(4)(3)=48$$

۳۵۱ (۲) مطابق شکل قطر دایرهٔ بزرگ‌تر برابر عرض مستطیل است، پس $BC=۱۶$. از طرف دیگر ME مماس مشترک خارجی دو دایره است. پس طول آن برابر $۸=\sqrt{۸\times۲}۲$ است. در ضمن چهارضلعی‌های $OHDM$ و $O'H'CE$ به ترتیب مربع‌هایی به اضلاع ۸ و ۲ هستند. پس $CE=۲$ و $DM=۸$.

بنابراین $۶۸=(۱۶+۲+۸+۸)۲=(DC+BC)۲=$محیط مستطیل

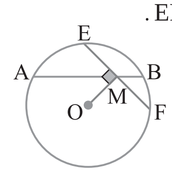


۳۵۲ (۴) نقطهٔ M روی AB است. با فرض $MB=۲x$ و $MA=۳x$ نتیجه می‌گیریم $AB=۵\Rightarrow ۲x+۳x=۵\Rightarrow x=۱\Rightarrow MB=۲, AM=۳$

از طرف دیگر کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M وتر عمود بر OM است. اگر EF وتر گذرنده از M و عمود بر OM باشد، آن‌گاه M وسط EF است. اکنون با استفاده از رابطه‌های طولی در دایره،

$$ME\times MF=MB\times MA\Rightarrow ME^۲=۲\times۳=۶\Rightarrow ME=\sqrt{۶}$$

بنابراین $EF=۲ME=۲\sqrt{۶}$.



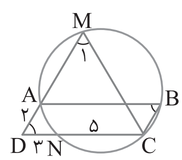
۳۵۳ (۳) همواره طول مماس مشترک خارجی دو دایره بزرگ‌تر از طول مماس مشترک داخلی آن‌ها است (در صورت وجود مماس مشترک). بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

$$\frac{\text{طول مماس مشترک خارجی}}{\text{طول مماس مشترک داخلی}}=\sqrt{۲}$$

$$\frac{\sqrt{OO'^۲-(r-r')^۲}}{\sqrt{OO'^۲-(r+r')^۲}}=\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{OO'^۲-(۳-۲)^۲}{OO'^۲-(۳+۲)^۲}=۲$$

$$OO'^۲-۱=۲OO'^۲-۵۰\Rightarrow OO'^۲=۴۹\Rightarrow OO'=۷$$

۳۵۴ (۴) دو زاویهٔ B و D مساوی‌اند، زیرا دو زاویهٔ روبه‌رو در متوازی‌الا
در ضمن دو زاویهٔ $M_۱$ و B محاطی روبه رو به کمان AC هستند. پس مساوی‌اند. در نتیجه



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}\\ \hat{M}_۱=\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{D}\Rightarrow MC=DC=۳+۵=۸$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه‌های طولی در دایره،

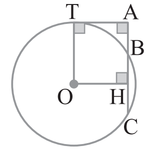
$$DN\times DC=DA\times DM\Rightarrow ۳\times۸=۲\times DM\Rightarrow DM=۱۲$$

بنابراین $MDC\,\text{محیط}=MD+MC+DC=۱۲+۸+۸=۲۸$

۳۵۵ (۴) پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ دیگری مثل C قطع کند. با استفاده از رابطه‌های طولی در دایره،

$$AT^۲=AB\times AC\Rightarrow ۱۰^۲=۵AC\Rightarrow AC=۲۰\Rightarrow BC=۲۰-۵=۱۵$$

اکنون اگر عمود OH را از مرکز O بر وتر BC وارد کنیم، این وتر نصف می‌شود. پس $BH=\frac{BC}{۲}=\frac{۱۵}{۲}$. در ضمن چهارضلعی $OTAH$ مستطیل است. بنابراین شعاع OT برابر AH است:



$$R=OT=AH=AB+BH=۵+\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۵}{۲}=۱۲/۵$$

۳۵۶ (۱) اگر R شعاع دایرهٔ کوچک‌تر باشد، آن‌گاه $OO'=R$. پس $O'O''=۲R$ و $AO''=۴R$. از مرکز O به نقطهٔ تماس T وصل می‌کنیم. در این صورت شعاع OT بر خط مماس AT عمود است. توجه کنید که بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$AT^۲=AO'\times AB\Rightarrow AT^۲=۶R\times۸R$$

$$AT^۲=۴۸R^۲\Rightarrow AT=۴\sqrt{۳}R$$

بنابراین $\triangle AOT:\sin\hat{O}_۱=\frac{AT}{AO}=\frac{۴\sqrt{۳}R}{۷R}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۷}$

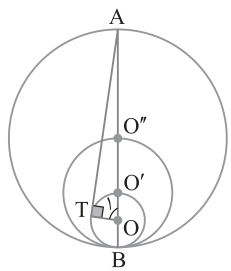
از طرف دیگر،

$$S_{TOO'}=۱۴\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}OT\times OO'\sin\hat{O}_۱=۱۴\sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{۲}R\times R\times\frac{۴\sqrt{۳}}{۷}=۱۴\sqrt{۳}\Rightarrow R^۲=۴۹\Rightarrow R=۷$$

پس محیط دایره بزرگ‌تر به شعاع $۴R$ برابر است با

$$\text{محیط}=۲\pi(۴R)=۸\pi R=۸\pi(۷)=۵۶\pi$$



۳۵۷ (۱) اندازهٔ هر ضلع nضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R برابر $C_n=۲R\sin(\frac{۱۸۰}{n})^\circ$ و اندازهٔ هر ضلع nضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R برابر $C'_n=۲R\tan(\frac{۱۸۰}{n})^\circ$ است. چون هر دو nضلعی منتظم متشابه‌اند، پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{C_n}{C'_n}=\frac{۲R\sin(\frac{۱۸۰}{n})^\circ}{۲R\tan(\frac{۱۸۰}{n})^\circ}=\cos(\frac{۱۸۰}{n})^\circ$.

بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها $\cos^۲(\frac{۱۸۰}{n})^\circ$ است.

۳۵۸ (۳) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی ۳۶۰° است:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}+\hat{C}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۱۱۲^\circ+۱۳۸^\circ+\hat{D}+\hat{C}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{D}+\hat{C}=۱۱۰^\circ$$

از طرف دیگر چون طول مماس‌های رسم شده از هر نقطه بر یک دایره برابرند، پس

$$CM=CN\Rightarrow\hat{M}_۱=\hat{N}_۱\,,\quad DN=DP\Rightarrow\hat{N}_۲=\hat{P}_۲$$

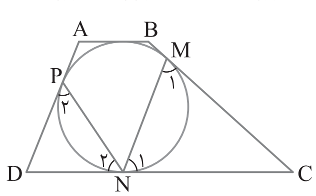
در ضمن مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث MNC و DPN روی هم برابر ۳۶۰° است. بنابراین

$$\hat{D}+\hat{C}+\hat{P}_۲+\hat{N}_۲+\hat{M}_۱+\hat{N}_۱=۳۶۰^\circ$$

$$۱۱۰^\circ+۲\hat{N}_۲+۲\hat{N}_۱=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{N}_۱+\hat{N}_۲=۱۲۵^\circ$$

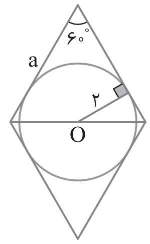
بنابراین با توجه به شکل،

$$\hat{N}_۱+\hat{N}_۲+M\hat{N}P=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۱۲۵^\circ+M\hat{N}P=۱۸۰^\circ\Rightarrow M\hat{N}P=۵۵^\circ$$



۳۵۹ (۴) می‌دانیم شعاع دایرهٔ محاطی هر چندضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P برابر است با $r=\frac{S}{P}$. اگر a طول ضلع لوزی باشد، آن‌گاه

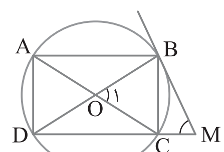
$$۲=\frac{a^۲\times \sin ۶۰^\circ}{۲a}=\frac{a^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲a}$$ ، در نتیجه $a=\frac{۸}{\sqrt{۳}}$.



اکنون می‌توان نوشت

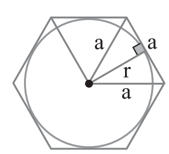
$$S=a^۲\sin ۶۰^\circ=\frac{۶۴}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳۲\sqrt{۳}}{۳}$$

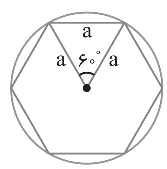
۳۶۰ (۳) اگر O نقطهٔ تلاقی قطرهای مستطیل ABCD باشد، آن‌گاه چون زاویهٔ A قائمه است، پس BD قطر دایره است. با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود AC قطر دایره است. بنابراین نقطهٔ تلاقی قطرهای مستطیل ABCD، یعنی O مرکز دایره است. از طرف دیگر، مثلث BMC قائم‌الزاویه است. چون $B\hat{M}C=۶۵^\circ$، پس $C\hat{B}M=۹۰^\circ-۶۵^\circ=۲۵^\circ$. زاویهٔ CBM زاویهٔ ظلی روبه‌رو به کمان BC است، پس $\overset{\frown}{BC}=۵۰^\circ$. در ضمن زاویهٔ $O_۱$ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان BC است، پس $\hat{O}_۱=۵۰^\circ$، یعنی اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر مستطیل ۵۰° است.



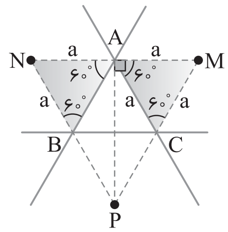
۳۶۱ (۴) هر n ضلعی منتظم در یک دایره محاط است، یعنی دایره‌ای از رأس‌های آن می‌گذرد، به طوری که دایره به n قسمت مساوی تقسیم می‌شود و اندازهٔ هر قسمت برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است. زاویهٔ بین دو قطر متوالی کوچک‌ترین زاویهٔ بین دو قطر است و این زاویه محاطی روبه‌رو به کمان $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است، پس اندازهٔ آن $\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ است. بنابراین زاویهٔ بین دو قطر متوالی $=\frac{۱۸۰^\circ}{۱۲}=۱۵^\circ$

۳۶۲ (۱) در شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع a، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر a است (شکل سمت چپ را ببینید)، پس R=a. از طرف دیگر اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی آن برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است (شکل سمت راست را ببینید)، پس $r=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$. اکنون می‌توان نوشت $\frac{r}{R}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.





۳۶۳ (۳) در شکل، N، M و P مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند. توجه کنید که مثلث AMC متساوی‌الاضلاع است. پس AM=a. به طور مشابه AN=a، در نتیجه MN=۲a. با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود MP=NP=۲a. بنابراین مثلث MNP مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲a است و مساحت آن برابر است با $S_{MNP}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲a)^۲=\sqrt{۳}\,a^۲$.



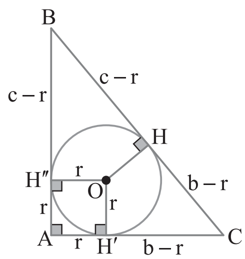
۳۶۴ (۱) از شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که چهارضلعی $OH'AH''$ مربع است، پس $AH'=AH''=r$. در نتیجه

$$BH''=AB-AH''=c-r\,,\quad CH'=AC-AH'=b-r$$

از طرف دیگر، چون مماس‌های رسم شده بر دایره از یک نقطه، مساوی‌اند، پس $BH=BH''=c-r$ و $CH=CH'=b-r$. اکنون می‌توان نوشت

$$BC=a\Rightarrow BH+CH=a\Rightarrow c-r+b-r=a$$

در نتیجه $b+c=۲r+a$.



۳۶۵ (۳) می‌دانیم مساحت و محیط مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a به ترتیب برابر است با $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ و $۲P=۳a$. اکنون با توجه به رابطهٔ $r=\frac{S}{P}$، می‌توان نوشت $r=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳a}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$.

۳۶۶ (۴) شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$ است. چون $a=m-۴$، پس $r=\frac{\sqrt{۳}}{۶}(m-۴)$. اکنون اگر طول ضلع مربع محاط در این دایره را b فرض کنیم، آن‌گاه

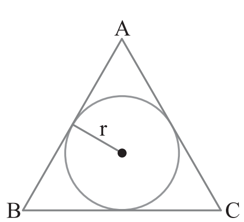
$$\text{قطر دایره}=\sqrt{۲}b\Rightarrow ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۶}(m-۴)=\sqrt{۲}b$$

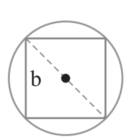
پس $b=\frac{\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}}(m-۴)$. مساحت این مربع برابر $b^۲$ است. در نتیجه

$$\frac{۱}{۶}(m-۴)^۲=\frac{m}{۲}+۱\Rightarrow m^۲-۸m+۱۶=۳m+۶$$

$$m^۲-۱۱m+۱۰=۰\Rightarrow(m-۱۰)(m-۱)=۰$$

در نتیجه m=۱ یا m=۱۰. چون m>۴، پس m=۱۰ جواب است.





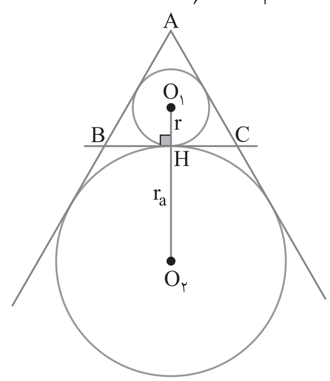
۳۶۷ **۲** می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است. اکنون می‌توان از رابطهٔ $r_a=\frac{S}{P-a}$ که در آن S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث است، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را به دست آورد:

$$r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳a}{۲}-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{a}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

۳۶۸ **۴** از شکل زیر استفاده می‌کنیم.

$$r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳a}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a\,,\quad r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{a}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

در نتیجه $O_۱O_۲=r+r_a=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a+\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a$.



۳۶۹ **۱** عبارت $\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{\frac{S}{P-a}}+\frac{۱}{\frac{S}{P-b}}+\frac{۱}{\frac{S}{P-c}}=\frac{P-a+P-b+P-c}{S}$$

$$=\frac{۳P-(a+b+c)}{S}=\frac{۳P-۲P}{S}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{\frac{S}{P}}=\frac{۱}{r}=\frac{۱}{۴}$$

۳۷۰ **۱** **راه‌حل اول** با توجه به شکل زیر، ضلع AB کوچک‌ترین ضلع است، اگر $AH=x$ و $BH=y$ ، آن‌گاه $x+y=۸$ و چون طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره برابرند، پس

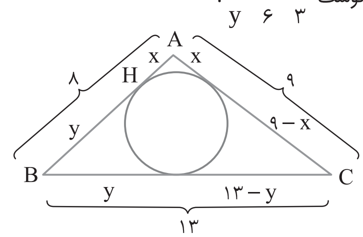
$$۹-x=۱۳-y\Rightarrow y-x=۴$$

$$\begin{cases}x+y=۸\\ y-x=۴\end{cases}\Rightarrow x=۲\,,\ y=۶\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $x=AH=P-a=\frac{۸+۹+۱۳}{۲}-۱۳=۱۵-۱۳=۲$.

و $y=BH=P-b=\frac{۸+۹+۱۳}{۲}-۹=۱۵-۹=۶$

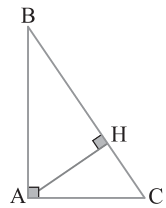
اکنون می‌توان نوشت $\frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$.



۳۷۱ **۱** در مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محیطی نصف وتر است:

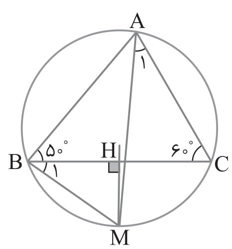
$$R=\frac{BC}{۲},\quad R'=\frac{AB}{۲},\quad R''=\frac{AC}{۲}$$

بنابراین $R+R'+R''=\frac{BC+AB+AC}{۲}=\frac{۲P}{۲}=P$.



۳۷۲ **۳** دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نیمساز زاویهٔ A از وسط کمان BC عبور می‌کند. از طرف دیگر عمودمنصف ضلع BC نیز از وسط کمان BC می‌گذرد. بنابراین نقطهٔ تلاقی عمودمنصف BC و نیمساز زاویهٔ داخلی A وسط کمان BC (نقطهٔ M) است. چون $\hat{A}=۱۸۰^\circ-(۵۰^\circ+۶۰^\circ)=۷۰^\circ$ ، پس $\hat{A}_۱=\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$ ، در ضمن دو زاویهٔ $A_۱$ و $B_۱$ هر دو محاطی روبه‌رو به کمان MC هستند، پس مساوی‌اند.

بنابراین $M\hat{B}C=\hat{A}_۱=۳۵^\circ$.

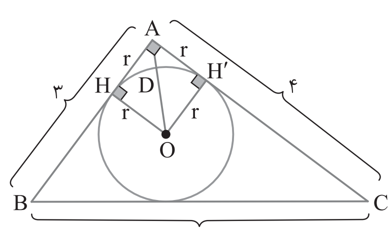


۳۷۳ **۳** فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و r شعاع آن باشد. از مرکز دایره به نقطه‌های تماس H و H' وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). در این صورت چهارضلعی $AHOH'$ مربعی به طول ضلع r است. می‌دانیم اگر S مساحت مثلث و 2P محیط آن باشد، آن‌گاه $r=\frac{S}{P}$. بنابراین در مثلث ABC ، $r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{۱}{۲}(۳)(۴)}{\frac{۳+۴+۵}{۲}}=\frac{۶}{۶}=۱$. اگر از O به رأس A وصل کنیم تا دایرهٔ محاطی داخلی را در نقطهٔ D قطع کند، آن‌گاه طول AD برابر فاصلهٔ A تا نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAH ،

$$OA^{۲}=AH^{۲}+OH^{۲}=۱+۱=۲\Rightarrow OA=\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$AD=OA-OD\xrightarrow{OD=r=۱}AD=\sqrt{۲}-۱$$



۳۷۴ **۲** ثابت می‌کنیم $AM=AP=\frac{\text{محیط(مثلث }ABC)}{۲}$. فرض کنید $BN=x$، پس $CN=a-x$. از طرف دیگر طول مماس‌های رسم شده بر دایره از یک نقطه برابراند. پس $BM=BN=x$ و $CP=CN=a-x$. در نتیجه

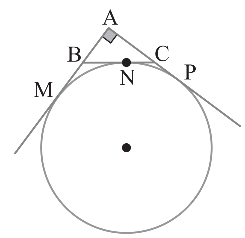
$$AM=AB+BM=AB+BN=c+x$$

$$AP=AC+CP=AC+CN=b+a-x$$

از جمع طرفین دو برابری بالا نتیجه می‌گیریم $AM+AP=a+b+c$. چون $AM=AP$، پس $۲AM=a+b+c$. بنابراین

$$AM=\frac{a+b+c}{۲}=P\Rightarrow AM=\text{نصف محیط}$$

در مثلث ABC بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=۱۰$، در نتیجه $۲P=a+b+c=۲۴$. بنابراین $AM=P=\frac{۲۴}{۲}=۱۲$.



۳۷۵ **۲** دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). اگر از مرکز دایره به نقطه‌های تماس H و H' وصل کنیم، آن‌گاه چهارضلعی $AHOH'$ مربع به طول ضلع r است. چون طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره برابرند، پس

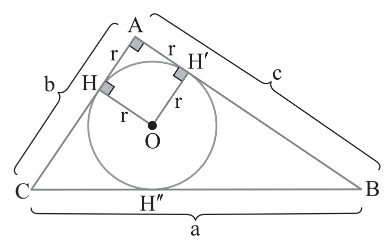
$$BH''=BH'=c-r\ ,\quad CH''=CH=b-r$$

چون $BC=BH''+CH''$، بنابراین

$$a=c-r+b-r\Rightarrow ۲r=b+c-a$$

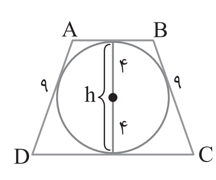
$$۲r=a+b+c-۲a\Rightarrow ۲r=۲P-۲a$$

یعنی $r=P-a$.



۳۷۶ **۳** اگر $ABCD$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیط بر دایره‌ای به شعاع ۴ باشد، آن‌گاه طول ارتفاع ذوزنقه برابر قطر دایرهٔ محاطی، یعنی ۸ است. در ضمن در چهارضلعی محیطی مجموع طول ضلع‌های مقابل برابر یکدیگرند، پس $AB+CD=AD+BC=۹+۹=۱۸$، بنابراین

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}h(AB+CD)=\frac{۱}{۲}(۸)(۱۸)=۷۲$$



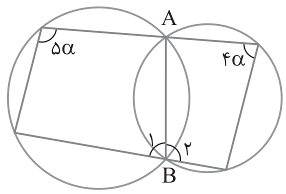
۳۷۷ **۲** با توجه به شکل زیر، وتر AB را رسم می‌کنیم. در این صورت دو چهارضلعی محاطی در دو دایره ایجاد می‌شود. در هر چهارضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکمل یکدیگرند. بنابراین

$$۵\alpha+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ\ ,\quad ۴\alpha+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ$$

از جمع طرفین تساوی‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم

$$۹\alpha+\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۳۶۰^\circ\xrightarrow{\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ}۹\alpha=۱۸۰^\circ$$

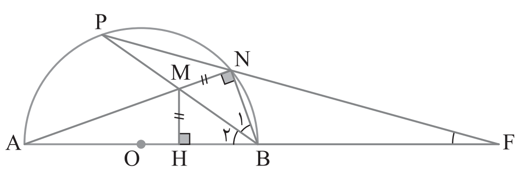
در نتیجه $\alpha=۲۰^\circ$.



۳۷۸ **۳** از N به B وصل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ ANB محاطی روبه‌رو به قطر AB است، پس $A\hat{N}B=۹۰^\circ$. در نتیجه نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ HBN به یک فاصله است (چون $MH=MN$). پس MB نیمساز زاویهٔ HBN است، یعنی $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$. از طرف دیگر چهارضلعی $MNBH$ محاطی است، بنابراین

$$H\hat{B}N+N\hat{M}H=۱۸۰^\circ\Rightarrow H\hat{B}N+۱۱۸^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow H\hat{B}N=۶۲^\circ$$

پس $\hat{B}_۲=۳۱^\circ$. زاویهٔ $B_۲$ محاطی روبه‌رو به کمان AP است، پس $\widehat{AP}=۶۲^\circ$. در ضمن در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABN چون $A\hat{B}N=۶۲^\circ$، پس $\hat{A}=۹۰^\circ-۶۲^\circ=۲۸^\circ$. بنابراین اندازهٔ کمان BN برابر $۲\hat{A}$، یعنی مساوی ۵۶° است. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ F که بین امتداد دو وتر دایره قرار دارد برابر است با $\hat{F}=\frac{\widehat{AP}-\widehat{BN}}{۲}=\frac{۶۲^\circ-۵۶^\circ}{۲}=۳^\circ$.



۳۷۹ **۴** با توجه به شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس دو زاویهٔ مقابل آن مکمل یکدیگرند: $\hat{A}+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ$. در ضمن $\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ$، بنابراین

$$\hat{C}_۱=\hat{A}\xrightarrow{\hat{A}=۳x}\hat{C}_۱=۳x$$

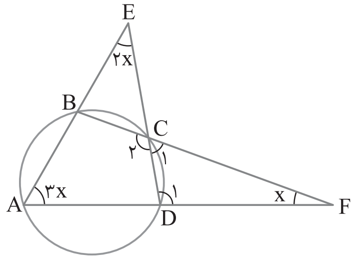
از طرف دیگر، زاویهٔ $D_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ADE است، پس

$$\hat{D}_۱=\hat{A}+\hat{E}=۳x+۲x=۵x$$

چون مجموع زاویه‌های داخلی مثلث DCF برابر ۱۸۰° است، پس

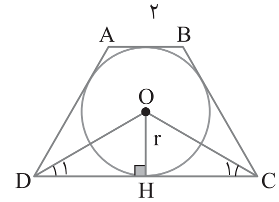
$$\hat{D}_۱+\hat{C}_۱+\hat{F}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۵x+۳x+x=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۹x=۱۸۰^\circ$$

بنابراین $x=۲۰^\circ$.



۳۸۰ **۲** در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، خطی که مرکز دایرهٔ محاطی را به رأسی از ذوزنقه وصل می‌کند، نیمساز زاویهٔ این رأس است. زیرا مرکز دایرهٔ محاطی هر چهارضلعی محیطی نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن چهارضلعی است. در نتیجه با توجه به شکل زیر، $\hat{D}_1=\frac{\hat{D}}{۲}=۳۰^\circ$ و $\hat{C}_1=\frac{\hat{C}}{۲}=۳۰^\circ$. بنابراین مثلث ODC متساوی‌الساقین است. در ضمن OH شعاع وارد بر نقطهٔ تماس است، پس بر CD عمود است. بنابراین در مثلث متساوی‌الساقین ODC، OH هم ارتفاع و هم میانه است، در نتیجه $DH=\frac{CD}{۲}$. از طرف دیگر،

$$\tan \hat{D}_1=\frac{OH}{DH}\Rightarrow \tan ۳۰^\circ=\frac{r}{\frac{CD}{۲}}\Rightarrow CD=\frac{۲r}{\tan ۳۰^\circ}=۲r\sqrt{۳}$$

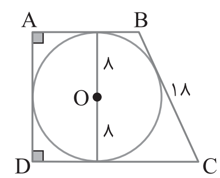


۳۸۱ **۳** در شکل زیر، ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD بر دایرهٔ به شعاع ۸ و مرکز O محیط است. پس ساق قائم این ذوزنقه برابر ۱۶ است، یعنی $AD=۱۶$. از طرف دیگر ذوزنقهٔ ABCD محیطی است، پس مجموع اضلاع مقابلش برابرند:

$$AB+CD=AD+BC=۱۶+۱۸=۳۴$$

بنابراین

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AD(AB+CD)=\frac{۱}{۲}(۱۶)(۳۴)=۲۷۲$$



۳۸۲ **۲** در شکل، O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است. طول وتر BC برابر $\sqrt{(۴\sqrt{۲})^۲+(۳\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$ است. اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه

$$r=OH=\frac{S}{P}=\frac{\frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۲})(۳\sqrt{۲})}{\frac{۳\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲۴}{۱۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

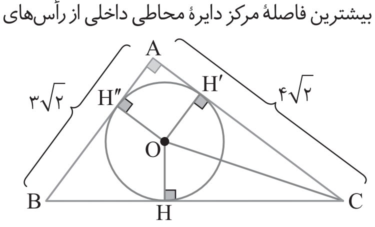
از طرف دیگر،

$$CH=P-c=\frac{۳\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲}}{۲}-۳\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC،

$$OC^۲=OH^۲+CH^۲=(\sqrt{۲})^۲+(۳\sqrt{۲})^۲=۲+۱۸=۲۰\Rightarrow OC=۲\sqrt{۵}$$

به طور مشابه $BH=P-b=۶\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$ و $BO=\sqrt{BH^۲+OH^۲}=\sqrt{۱۰}$. در ضمن چهارضلعی $AH'OH''$ مربع و AO قطر آن است. پس $AO=OH'\sqrt{۲}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۲$. بنابراین $CO=۲\sqrt{۵}$ بیشترین فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی از رأس‌های مثلث است.



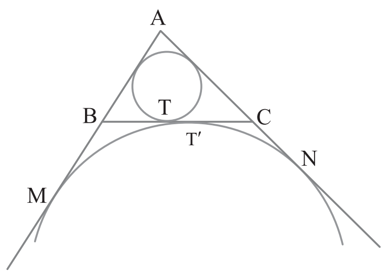
۳۸۳ **۲** در شکل، دایرهٔ محاطی داخلی و بخشی از دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع بزرگ‌تر BC را رسم کرده‌ایم. در این صورت TT' مماس مشترک داخلی این دو دایره است. اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه $BT=P-b$ ، $AM=AN=P$ و $CT'=CN$. بنابراین

$$P=\frac{۵+۶+۷}{۲}=۹,\quad BT=P-b=۹-۶=۳$$

$$CT'=CN=AN-AC=P-AC=۹-۶=۳$$

پس

$$TT'=BC-BT-CT'=۷-۳-۳=۱$$



۳۸۴ **۲** کوچک‌ترین ارتفاع مثلث بر بزرگ‌ترین ضلع آن وارد می‌شود. پس ۱۲ طول ارتفاع وارد بر وتر است، بنابراین با توجه به شکل زیر، $h_a=۱۲$. بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث بر کوچک‌ترین ضلع آن وارد می‌شود. در شکل، ضلع AB را بزرگ‌تر از AC انتخاب کرده‌ایم. پس $h_b=۲۰$. اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle ABH: AB^۲=BH^۲+AH^۲\Rightarrow ۲۰^۲-۱۲^۲=BH^۲\Rightarrow BH^۲=۲۵۶$$

$$BH=۱۶$$

$$\triangle ABC: AH^۲=BH\times CH\Rightarrow ۱۲^۲=۱۶CH\Rightarrow CH=۹$$

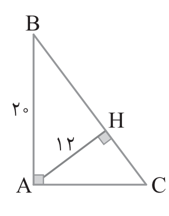
$$\triangle ACH: AC^۲=AH^۲+CH^۲\Rightarrow AC^۲=۱۲^۲+۹^۲=۲۲۵$$

$$AC=۱۵\Rightarrow h_c=۱۵$$

از طرف دیگر،

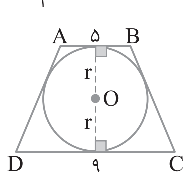
$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}\Rightarrow\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{r}$$

$$\frac{۵+۳+۴}{۶۰}=\frac{۱}{r}\Rightarrow\frac{۱۲}{۶۰}=\frac{۱}{r}\Rightarrow r=۵$$



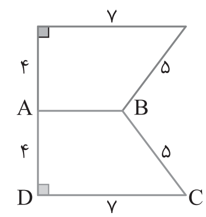
۳۸۵ **۲** هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، محاطی است، پس این ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هم محاطی و هم محیطی است و مساحت این نوع ذوزنقه مساوی حاصل‌ضرب میانگین حسابی در میانگین هندسی دو قاعده است. اگر a و b طول دو قاعدهٔ این ذوزنقه باشند، آن‌گاه

$$S=\frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{ab}=\frac{۱}{۲}(۹+۵)\sqrt{۹\times۵}=۷\times۳\sqrt{۵}=۲۱\sqrt{۵}$$

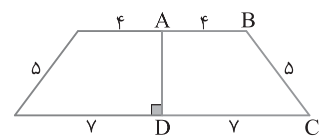


۳۸۶ ۳ با توجه به تعریف بازتاب، حکم‌های (الف) و (ب) درست هستند. اگر خط L بر خط d عمود باشد، آن‌گاه بازتاب L بر خودش منطبق می‌شود، پس شیب خط حفظ می‌شود و اگر نقطه‌ای روی خط d باشد، بازتاب آن نقطه خودش است. دو نقطهٔ A و B بازتاب یکدیگر نسبت به خط d هستند هرگاه d عمودمنصف AB باشد. اگر خط L با d موازی باشد، بازتاب خط L موازی d است. در صورتی بازتاب L بر خودش منطبق است که L بر خط d منطبق باشد.

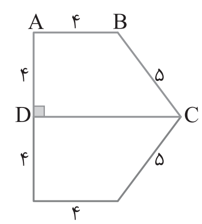
۳۸۷ ۳ بازتاب ذوزنقهٔ ABCD نسبت به خط AB شکلی به صورت زیر است، که محیط این شکل برابر $۳۲=۵+۵+۷+۷+۴+۴$ است.



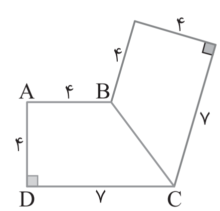
بازتاب ذوزنقهٔ ABCD نسبت به خط AD شکلی به صورت زیر است، که محیط این شکل $۳۲=۷+۷+۵+۵+۴+۴$ است.



بازتاب ذوزنقهٔ ABCD نسبت به خط DC شکلی به صورت زیر است، که محیط این شکل $۲۶=۵+۵+۴+۴+۴+۴$ است.



بازتاب ذوزنقهٔ ABCD نسبت به خط BC شکلی به صورت زیر است، که محیط این شکل $۳۰=۷+۷+۴+۴+۴+۴$ است.



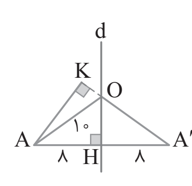
بنابراین شکلی که از بازتاب نسبت به خط DC به‌دست می‌آید کمترین محیط را دارد.

۳۸۸ ۴ بنابر تعریف بازتاب، خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' است. چون $AA'=۱۶$، پس مطابق شکل زیر، $AH=A'H=۸$. درضمن مثلث OAA' متساوی‌الساقین است و باید طول عمود AK را به‌دست آوریم، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle OAH: OH^۲=OA^۲-AH^۲=۱۰^۲-۸^۲=۳۶ \Rightarrow OH=۶$$

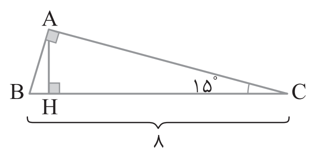
$$S_{OAA'}=\frac{۱}{۲}OH\times AA'=\frac{۱}{۲}AK\times OA' \Rightarrow ۶\times۱۶=AK\times۱۰$$

$$AK=\frac{۶\times۱۶}{۱۰}=۹/۶$$

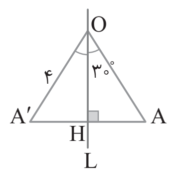


۳۸۹ ۲ چون بازتاب تبدیل طولپا است، پس تصویر مثلث ABC با خودش همنهشت و مساحتش با مساحت مثلث ABC برابر است. از برابری‌های $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$، $\hat{B}=۵\hat{C}$ و $\hat{C}=\frac{۱}{۶}\hat{A}$ نتیجه می‌گیریم $\hat{A}=۹۰^\circ$، $\hat{B}=۷۵^\circ$ و $\hat{C}=۱۵^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویه ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است، پس $AH=\frac{۱}{۴}BC=\frac{۱}{۴}\times۸=۲$. اکنون می‌نویسیم

$$S_{A'B'C'}=S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times۸\times۲=۸$$



۳۹۰ ۱ **راه‌حل اول** چون O روی خط L است، OA' بازتاب OA است و چون بازتاب ایزومتری است، $OA=OA'$. در بازتاب اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود، پس $A'\hat{O}H=A\hat{O}H=۳۰^\circ$. بنابراین مثلث OAA' در رأس O متساوی‌الساقین است و $A\hat{O}A'=۶۰^\circ$. پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است و $AA'=OA'=۴$.

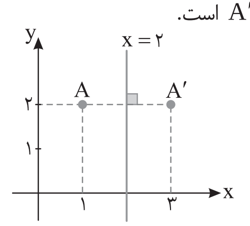


راه‌حل دوم بنابر تعریف بازتاب، L عمودمنصف AA' است، پس $A'H=AH=\frac{AA'}{۲}$. همچنین چون O روی خط L قرار دارد، بنابر خاصیت عمودمنصف، $OA=OA'=۴$. اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle OAH: A\hat{O}H=۳۰^\circ \Rightarrow AH=\frac{OA}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

بنابراین $AA'=۲AH=۴$.

۳۹۱ ۲ شکل مربوط به مسئله را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل تصویر نقطهٔ A نقطهٔ $A'(۳,۲)$ است.



۳۹۲ ۳ تصویر نقطهٔ تلاقی خط $۱+۳y=۲x$ با محور بازتاب $x+y=۳$، خودش است. در نتیجه

$$\times۳\begin{cases}۱+۳y=۲x\\ x+y=۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲x-۳y=۱\\ ۳x+۳y=۹\end{cases} \Rightarrow ۵x=۱۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=۱$$

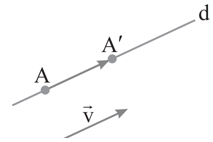
۳۹۳ ۱ خط $y=۲x-۱$ با محور بازتاب، یعنی خط $y=۲x+m$ موازی است، پس باید تصویرش موازی خودش باشد، یعنی باید دو خط $y=(a+۱)x-۳a$ و $y=۲x-۱$ نیز با هم موازی باشند. بنابراین $a+۱=۲$، یعنی $a=۱$.

۳۹۴ ۳ بنابر تعریف بازتاب، خط d عمودمنصف پاره‌خط AB است. پس شیب خط d عکس و قرینهٔ شیب AB است و d از نقطهٔ M وسط AB می‌گذرد:

$$m_{AB}=\frac{۳-۵}{۱+۱}=-۱ \Rightarrow m_d=۱,\quad M=\frac{A+B}{۲}=(۰,۴)$$

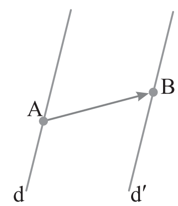
$$\text{معادلهٔ خط } d: y-۴=۱(x-۰) \Rightarrow y-x=۴$$

۳۹۵ **۳** اگـر خط d با بردار انتقال $\vec{v}$ موازی باشـد، آن‌گاه انتقال‌یافتهٔ هر نقطه مثل A از خط d تحت بردار $\vec{v}$ نقطه‌ای مثل A' روی خط d است، پس در این حالت انتقال‌یافتهٔ خط d بر خودش منطبق می‌شود. البته اگر بردار انتقال بردار صفر باشـد، تصویر خط d تحت این انتقال بر خودش منطبق می‌شود، ولی لازم نیست حتماً بردار انتقال بردار صفر باشد.

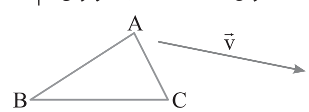


۳۹۶ **۳** انتقـال شـیب خط را حفظ می‌کند، پس خط d بـا انتقال‌یافتهٔ آن، یعنی خط Δ موازی اسـت. البته ممکن اسـت d بر Δ در حالت خاص منطبق شود که در این حالت هم d با Δ موازی است.

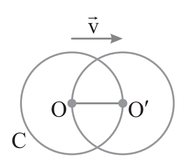
۳۹۷ **۴** اگر دو خط متقاطع باشند، هیچ برداری نمی‌تواند آن‌ها را به یکدیگر نظیـر کنـد، اما اگر دو خط موازی باشـند، نامتناهی بردار وجـود دارد که آن‌ها را به یکدیگر تصویر می‌کند. اگر A نقطه‌ای دلخواه روی خط d و B نقطه‌ای دلخواه روی خط d' باشد، آن‌گاه خط d' تصویر d تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{AB}$ است.



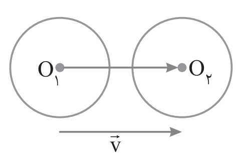
۳۹۸ **۲** انتقال تبدیلی طولپا است، پس مثلث ABC با تصویرش تحت تبدیل انتقال همنهشت است. بنابراین مثلث ABC و تصویرش هم‌مساحت هستند.



۳۹۹ **۳** در این سؤال جهت بردار $\vec{v}$ تأثیری در راه‌حل ندارد. اندازهٔ بردار $\vec{v}$ با شعاع دایره برابر است. پس انتقال‌یافتهٔ مرکز O تحت بردار $\vec{v}$ نقطهٔ O' روی دایرهٔ C اسـت. اگر به مرکز O' و شـعاع ۸ دایره‌ای رسم کنیم، این دایره متقاطع با دایرهٔ C و انتقال‌یافتهٔ دایرهٔ C خواهد بود.



۴۰۰ **۱** اگـر دو دایره شـعاع‌های برابر داشـته باشـند، آن‌گاه انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند و بردار انتقال $\overrightarrow{O_1O_2}$ است.

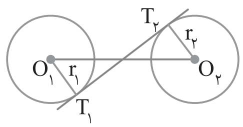


۴۰۱ **۳** دقـت کنید که طول بـردار انتقال برابر طول پاره‌خط O_1O_2 در شکل زیر است. از طرف دیگر،

$$T_1T_2=\sqrt{O_1O_2^2-(r_1+r_2)^2}\xrightarrow{r_1=r_2=۳}۸=\sqrt{O_1O_2^2-(۳+۳)^2}$$

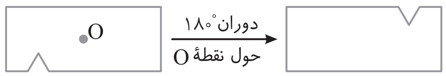
$$۶۴=O_1O_2^2-۳۶\Rightarrow O_1O_2^2=۱۰۰\Rightarrow O_1O_2=۱۰$$

یعنی طول بردار انتقال برابر ۱۰ است.



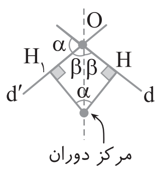
۴۰۲ **۳** انتقال‌یافتهٔ هر خط با خودش موازی اسـت و در بین گزینه‌ها تنها خط $۲y+۳x=۷$ با خط $۲y+۳x=۵$ موازی است.

۴۰۳ **۴** اگر شـکل داده شده را حول هر نقطهٔ دلخواه در صفحه، به اندازهٔ ۱۸۰° دوران دهیم، شکل گزینهٔ (۴) به‌دست می‌آید.



۴۰۴ **۳** در حالـت کلی $\underbrace{R(R(R...(R}_{n\text{ مرتبه}}(A))...))$، یعنـی نقطهٔ A را حـول O بـه انـدازهٔ $n\alpha$ دوران دهیـم. چـون $R(R(R(A)))=A$، پـس $۳\alpha=۳۶۰^\circ$، یعنی $\alpha=۱۲۰^\circ$.

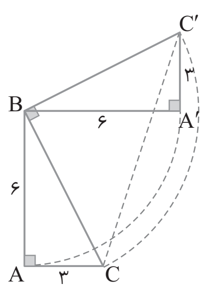
۴۰۵ **۴** هر نقطـه روی نیمسـازهای زاویهٔ بین دو خط مرکز دورانی اسـت که در آن d' تصویر خط d است (شکل مقابل را ببینید).



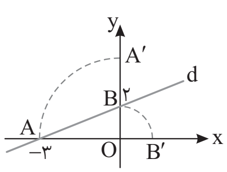
۴۰۶ **۱** دوران و انتقال تبدیل‌های طولپا هستند، پس مساحت تصویر این مثلث برابر مساحت شکل اولیه است. $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^2=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲\sqrt{۳})^2=۳\sqrt{۳}$.

۴۰۷ **۳** در شـکل زیر مثلث $A'BC'$ دوران‌یافتهٔ مثلث ABC به مرکز B با زاویهٔ ۹۰° است. می‌دانیم دوران تبدیلی طولپا است، پس $A'B=AB=۶$ و $A'C'=AC=۳$. زاویـهٔ بیـن هر خـط و دوران‌یافتـهٔ آن برابـر زاویهٔ دوران است. پس BC بر BC' عمود است، یعنی مثلث BCC' قائم‌الزاویه است. درضمن $BC=BC'=\sqrt{۳^2+۶^2}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$. بنابراین

$$\triangle BCC': CC'^2=BC^2+BC'^2=۴۵+۴۵=۹۰\Rightarrow CC'=۳\sqrt{۱۰}$$



۴۰۸ **۴** دوران‌یافتـهٔ نقطهٔ A به مرکز O با زاویهٔ ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت نقطهٔ $A'(۰,۳)$ و دوران یافته نقطهٔ B به مرکز O با زاویهٔ ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های سـاعت نقطهٔ $B'(۲,۰)$ اسـت. اکنون برای به‌دست آوردن تصویر d معادلهٔ خط گذرا از نقاط A' و B' را می‌نویسیم:

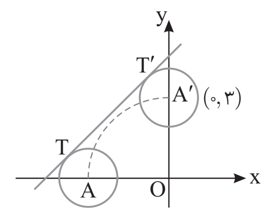


$$m_{A'B'}=\frac{y_{A'}-y_{B'}}{x_{A'}-x_{B'}}=\frac{۳-۰}{۰-۲}=-\frac{۳}{۲}$$

$$\text{معادلهٔ تصویر } d: y-۰=-\frac{۳}{۲}(x-۲)\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x+۳\Rightarrow ۲y+۳x=۶$$

۴۰۹ (۳) اگر نقطهٔ A را به مرکز O با زاویهٔ ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطهٔ $A'(۰,۳)$ می‌رسیم. دایرهٔ به مرکز A' و شعاع ۱ تصویر دایرهٔ اولیه است. طول خط‌المرکزین این دو دایره برابر است با $AA'=۳\sqrt{۲}$. پس طول مماس مشترک خارجی TT' برابر است با

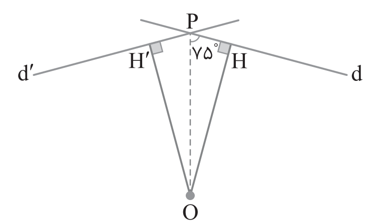
$$TT'=\sqrt{AA'^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۱۸-(۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$



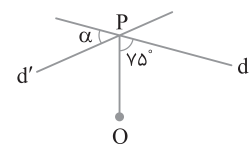
۴۱۰ (۳) راه‌حل اول از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر تعریف دوران، $H\hat{O}H'=\alpha$. اکنون توجه کنید که در چهارضلعی $OHPH'$،

$$H\hat{P}H'=۱۸۰^\circ-H\hat{O}H'=۱۸۰^\circ-\alpha \qquad (۱)$$

همچنین PO نیمساز زاویهٔ HPH' است، در نتیجه با استفاده از برابری (۱)، $O\hat{P}H=\frac{۱}{۲}H\hat{P}H'=۹۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}$. پس $۷۵^\circ=۹۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}$، یعنی $\alpha=۳۰^\circ$.



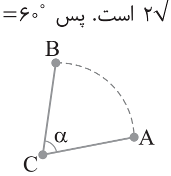
راه‌حل دوم می‌دانیم زاویهٔ بین خط d و دوران‌یافته‌اش (d') برابر زاویهٔ دوران است، البته آن زاویه‌ای که مرکز دوران درون آن نیست. O مرکز دوران است، پس روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط d و d' قرار دارد. بنابراین OP نیمساز زاویهٔ بین دو خط d و d' است. در نتیجه $\alpha=۱۸۰^\circ-۲\times۷۵^\circ=۳۰^\circ$.



۴۱۱ (۳) طول پاره‌خط AB برابر است با

$$AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۴)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

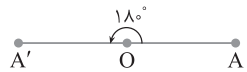
از طرف دیگر چون B دوران‌یافتهٔ A به مرکز C است، پس بنابر تعریف دوران $CA=CB$. بنابر فرض سؤال $CA=۲\sqrt{۲}$، بنابراین مثلث ABC مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۲}$ است. پس $\alpha=۶۰^\circ$.



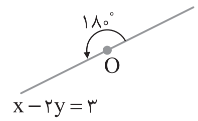
۴۱۲ (۱) اگر $A'(۱,-۳)$ دوران‌یافتهٔ $A(-۲,۱)$ به مرکز O با زاویهٔ ۱۸۰° باشد، آن‌گاه O وسط AA' است. پس $O=\frac{A+A'}{۲}=(-\frac{۱}{۲},-۱)$.

اگر دوران‌یافتهٔ نقطهٔ $B(۲,۱)$ به مرکز O با زاویهٔ ۱۸۰° نقطهٔ B' باشد، نتیجه می‌گیریم O وسط BB' است. پس

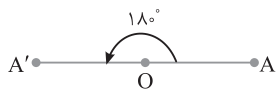
$$O=\frac{B+B'}{۲}\Rightarrow B'=۲O-B=۲(-\frac{۱}{۲},-۱)-(۲,۱)=(-۳,-۳)$$



۴۱۳ (۳) توجه کنید که O روی خط $x-۲y=۳$ است، پس تصویر این خط حول O به اندازهٔ ۱۸۰° خودش است، یعنی $x-۲y=۳$: معادلهٔ خط تصویر



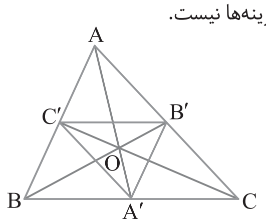
۴۱۴ (۲) اگر نقطهٔ A' دوران‌یافتهٔ ۱۸۰° نقطهٔ A به مرکز O باشد، آن‌گاه $OA=OA'$ و $A\hat{O}A'=۱۸۰^\circ$. پس A' مجانس A به مرکز O با نسبت -۱ است و چون نسبت تجانس منفی است، پس این تجانس معکوس است.



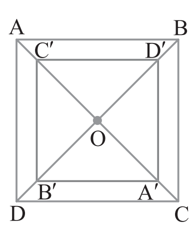
۴۱۵ (۲) نقاط A' و B' مجانس نقاط A و B به مرکز O با نسبت $\frac{۴}{۵}$ هستند. پس پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB به مرکز O با نسبت $\frac{۴}{۵}$ است، پس

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{A'B'}{۲۰}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow A'B'=۱۶$$

۴۱۶ (۳) چون نقطه‌های A'، B' و C' وسط‌های ضلع‌های مثلث ABC هستند، پس مرکز تجانس O نقطهٔ برخورد میانه‌های AA'، BB' و CC' است. بنابر ویژگی نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث نتیجه می‌گیریم $OA=۲OA'$، $OB=۲OB'$ و $OC=۲OC'$. چون نقطه‌های A و A' در دو طرف مرکز O قرار دارند، پس A مجانس A' در تجانس به مرکز O با نسبت -۲ است. به همین ترتیب B مجانس B' و C مجانس C' به مرکز O با نسبت -۲ است. بنابراین مثلث ABC مجانس مثلث $A'B'C'$ به مرکز O با نسبت -۲ است. توجه کنید که مثلث $A'B'C'$ نیز مجانس مثلث ABC با نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است که در گزینه‌ها نیست.

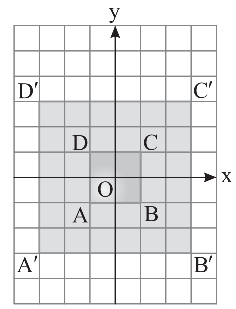


۴۱۷ (۱) چون نسبت تجانس $-\frac{۳}{۴}$ است، پس این تجانس معکوس و انقباض است. بنابراین مجانس این مربع، مربعی کوچک‌تر از آن است و درون مربع اول قرار می‌گیرد. مجانس مربع ABCD به مرکز O با نسبت $-\frac{۳}{۴}$ مربع $A'B'C'D'$ است.



۴۱۸ ۲ **راه‌حل اول** چون مربع ABCD مجانس مربع $A'B'C'D'$ است، پس مربع ABCD با مربع $A'B'C'D'$ با نسبت تشابه $|k|$ متشابه است، بنابراین $|k|=\frac{AB}{A'B'}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow k=\pm\frac{۱}{۳}$

توجه کنید که $k=\frac{۱}{۳}$ در گزینه‌ها هست.

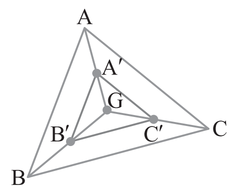


راه‌حل دوم با توجه به شکل، نقاط A، O، C، C' و A' روی یک خط هستند. بنابراین اگر تجانس را مستقیم در نظر بگیریم، A مجانس A' و C مجانس C' است، که در این حالت $OA=\frac{۱}{۳}OA',\quad OC=\frac{۱}{۳}OC'$

و اگر تجانس را معکوس در نظر بگیریم، C مجانس A' و A مجانس C' است که در این حالت $OC=-\frac{۱}{۳}OA',\quad OA=-\frac{۱}{۳}OC'$

بنابراین نسبت تجانس $k=\frac{۱}{۳}$ یا $k=-\frac{۱}{۳}$ است که $k=\frac{۱}{۳}$ در گزینه‌ها آمده است.

۴۱۹ ۲ نقطهٔ G مرکز ثقل (محل تلاقی میانه‌ها) در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC به مرکز G با نسبت $\frac{۱}{۲}$ است. پس مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت $\frac{۱}{۲}$ متشابه است. بنابراین

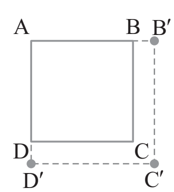


$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow[\text{درصورت}]{\text{تفضیل}}\frac{S_{ABC}-S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{۴-۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^{۲}=۴\sqrt{۳}}\frac{S_{ABC}-S_{A'B'C'}}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

$$S_{ABC}-S_{A'B'C'}=۳\sqrt{۳}$$

۴۲۰ ۱ مجانس مربع ABCD به مرکز A با نسبت $\frac{۵}{۴}$ مربع $AB'C'D'$ است (شکل مقابل را ببینید). می‌دانیم مربع $AB'C'D'$ با مربع ABCD با نسبت تشابه $k=\frac{۵}{۴}$ متشابه است، پس نسبت مساحت‌های این دو مربع برابر توان دوم نسبت تجانس است. پس



$$\frac{S_{AB'C'D'}}{S_{ABCD}}=(\frac{۵}{۴})^{۲}=\frac{۲۵}{۱۶}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{S_{AB'C'D'}-S_{ABCD}}{S_{ABCD}}$$

$$=\frac{۲۵-۱۶}{۱۶}\xrightarrow{S_{AB'C'D'}-S_{ABCD}=۱۸}\frac{۱۸}{S_{ABCD}}=\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow S_{ABCD}=۳۲$$

۴۲۱ ۴ $O_۱$ مرکز تجانس مستقیم و $O_۲$ مرکز تجانس معکوس است (شکل زیر را ببینید). توجه کنید که مثلث‌های $O_۱AB$ و $O_۱CD$ متساوی‌الاضلاع هستند، پس

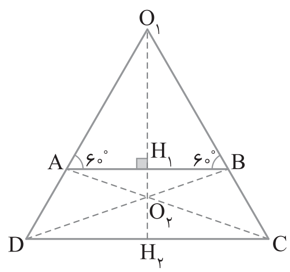
$$O_۱H_۱=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۴=۲\sqrt{۳}$$

$$O_۱H_۲=\frac{\sqrt{۳}}{۲}CD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۶=۳\sqrt{۳}$$

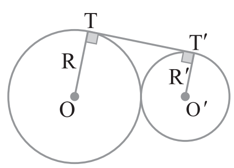
در نتیجه $H_۱H_۲=O_۱H_۲-O_۱H_۱=۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$

چون CD مجانس AB به مرکز $O_۲$ است، پس $\frac{O_۲H_۲}{O_۲H_۱}=\frac{CD}{AB}=\frac{۳}{۲}$، یعنی $\frac{O_۲H_۲}{H_۱H_۲-O_۲H_۲}=\frac{۳}{۲}$ یا $\frac{O_۲H_۲}{\sqrt{۳}-O_۲H_۲}=\frac{۳}{۲}$. پس $O_۲H_۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۵}$.

اکنون می‌توان نوشت $O_۱O_۲=O_۱H_۲-O_۲H_۲=۳\sqrt{۳}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۵}=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۵}$.



۴۲۲ ۳ دو دایره که فقط سه مماس مشترک دارند، مماس خارج‌اند (شکل زیر را ببینید). همچنین نسبت تجانس دو دایره برابر نسبت شعاع‌های آن‌هاست، پس $R+R'=۱۰$ و $\frac{R'}{R}=\frac{۲}{۳}$. در نتیجه $R=۶$ و $R'=۴$. طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج برابر $۲\sqrt{RR'}$ است، بنابراین $TT'=۲\sqrt{۶\times۴}=۴\sqrt{۶}$.



۴۲۳ ۱ در شکل $A'B'$ مجانس AB به مرکز O با نسبت $\frac{۷}{۴}$ است.

باید مساحت قسمت رنگی را به‌دست آوریم. بنابر تعریف تجانس،

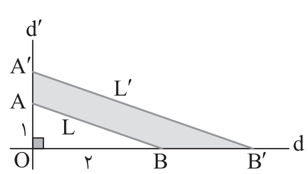
$$OA'=\frac{۷}{۴}OA=\frac{۷}{۴}(۱)=\frac{۷}{۴}\ ,\quad OB'=\frac{۷}{۴}OB=\frac{۷}{۴}(۲)=\frac{۷}{۲}$$

پس

$$\text{مساحت قسمت رنگی}=S_{OA'B'}-S_{OAB}$$

$$=\frac{۱}{۲}(OA')(OB')-\frac{۱}{۲}(OA)(OB)$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{۷}{۴})(\frac{۷}{۲})-\frac{۱}{۲}(۱)(۲)=\frac{۴۹}{۱۶}-۱=\frac{۳۳}{۱۶}$$



۴۲۴ **۲** فرض می‌کنیم نقطهٔ تماس دو دایره نقطهٔ A باشد. در این صورت مجانس نقطهٔ A بر خودش تصویر شده است. پس A نقطهٔ ثابت این تجانس است، یعنی A مرکز تجانس است. بنابراین مرکز O' مجانس مرکز O با نسبت ۴ است. پس

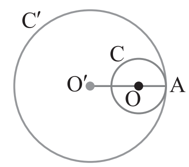
$$AO'=۴AO \Rightarrow AO+OO'=۴AO \xrightarrow{OO'=۶}$$

$$AO+۶=۴AO \Rightarrow AO=۲ \Rightarrow R=۲$$

در نتیجه $R'=O'A=۴AO=۴\times۲=۸$. بنابراین

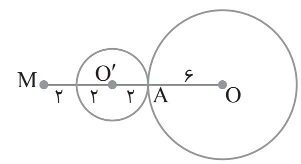
$$\text{مساحت محدود بین دو دایره}=\pi(O'A)^۲-\pi(OA)^۲$$

$$=\pi(۸)^۲-\pi(۲)^۲=۶۴\pi-۴\pi=۶۰\pi$$



۴۲۵ **۳** برای پیدا کردن مجانس دایرهٔ $C(O,۶)$ به مرکز M و نسبت $\frac{۱}{۳}$ ابتدا مجانس O را به‌دست می‌آوریم: $MO'=\frac{۱}{۳}MO=\frac{۱}{۳}(۱۲)=۴$.

اکنون دایرهٔ به مرکز O' و شعاع $\frac{۱}{۳}(۶)=۲$ را رسم می‌کنیم که مجانس دایرهٔ C است. مطابق شکل دیده می‌شود دایره‌های C' و C مماس بیرونی هستند، زیرا طول خط‌المرکزین OO' برابر مجموع شعاع‌های این دو دایره است.

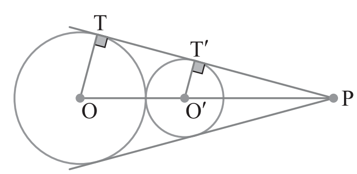


۴۲۶ **۴** نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره و خط‌المرکزین آن‌ها مرکز تجانس مستقیم آن‌ها است. در اینجا طول خط‌المرکزین دو دایره برابر جمع شعاع‌های آن‌ها است پس دو دایره مماس خارجی‌اند. در شکل، P مرکز تجانس مستقیم دو دایره است. شعاع‌های OT و $O'T'$ بر مماس مشترک خارجی TT' عمود هستند، پس موازی‌اند، در نتیجه بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\triangle POT: OT||O'T' \Rightarrow \frac{PO'}{PO}=\frac{O'T'}{OT}=\frac{۳}{۷}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{PO-PO'}{PO}=\frac{۷-۳}{۷}$$

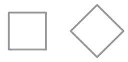
$$\frac{OO'}{PO}=\frac{۴}{۷} \xrightarrow{OO'=۱۰} \frac{۱۰}{PO}=\frac{۴}{۷} \Rightarrow PO=\frac{۳۵}{۲}=۱۷/۵$$



۴۲۷ **۴** در تبدیل همانی تمام نقاط صفحه برخودشان تصویر می‌شوند. پس اگر در تبدیلی تمام نقاط صفحه نقطهٔ ثابت آن باشند در حقیقت تمام نقاط بر خودشان تصویر شده‌اند پس این تبدیل همانی است.

گزینهٔ (۱) نادرست است، به‌عنوان مثال نقض، تبدیل تجانس اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند ولی در حالت کلی طولپا نیست.

گزینهٔ (۲) نادرست است چون دو مربع متشابه‌اند ولی لزومی ندارد مجانس هم باشند.



گزینهٔ (۳) نادرست است، به عنوان مثال نقض، دوران جهت شکل را حفظ می‌کند ولی در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کند.

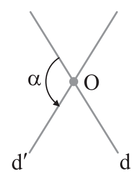
۴۲۸ **۳** دو خط موازی می‌توانند دوران‌یافتهٔ ۱۸۰° یکدیگر باشند.

دو خط موازی تحت برداری که شروعش روی یکی از دو خط و پایانش روی خط دیگر باشد، انتقال‌یافتهٔ یکدیگر هستند.

دو خط موازی نسبت به خطی که موازی آن‌ها و به یک فاصله از آن‌هاست بازتاب هم هستند.

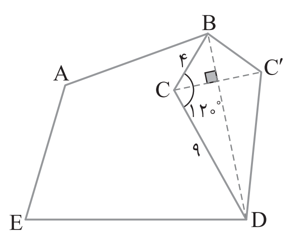
دو خط موازی می‌توانند مجانس یکدیگر در تجانس به مرکز هر نقطهٔ دلخواه (به جز نقاط روی این دو خط) در صفحه باشند.

۴۲۹ **۳** در شکل زیر خط d' تصویر خط d تحت دوران حول نقطهٔ O با زاویهٔ دوران α است.



۴۳۰ **۲** بازتاب نقطهٔ C را نسبت به خط BD نقطهٔ C' می‌نامیم. چون بازتاب تبدیلی طولپاست، پس دو مثلث BCD و $BC'D$ همنهشت و در نتیجه هم‌مساحت می‌شوند. بنابراین به مساحت زمین اولیه مساحت چهارضلعی $BCDC'$ اضافه می‌شود، در صورتی که محیط زمین جدید $ABC'DE$ با محیط زمین اولیهٔ $ABCDE$ برابر است. پس کافی است مساحت چهارضلعی $BCDC'$ را به‌دست آوریم:

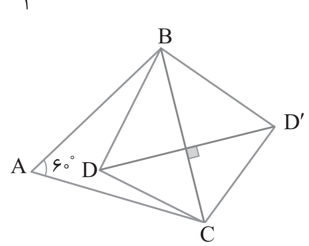
$$S_{BCDC'}=۲S_{BCD}=۲(\frac{۱}{۲}BC\times CD\sin ۱۲۰^\circ)=۴\times۹\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۸\sqrt{۳}$$



۴۳۱ **۴** از B به C وصل می‌کنیم. چون $AB=AC$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$، پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس $BC=۱۷$. از طرف دیگر $۱۷^۲=۱۱^۲+(۲\sqrt{۴۲})^۲$، در نتیجه مثلث BDC قائم‌الزاویه است. اکنون بازتاب نقطهٔ D نسبت به خط BC را D' می‌نامیم. در این صورت چهارضلعی $ABD'C$ در تعداد اضلاع، طول اضلاع و اندازهٔ $\hat{A}=۶۰^\circ$ با چهارضلعی $ABDC$ برابر است و مساحتش به اندازهٔ مساحت چهارضلعی $BDCD'$ بیشتر است. بنابراین

$$\text{میزان افزایش مساحت}=S_{BDCD'}=۲S_{BDC}$$

$$=۲(\frac{۱}{۲}BD\times DC)=۲\sqrt{۴۲}\times۱۱=۲۲\sqrt{۴۲}$$



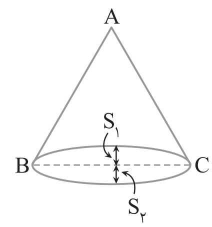
۴۳۲ (۴) به کمک مسئلهٔ هم‌پیرامونی، اگر بازتاب کمان BC را نسبت به خط BC پیدا کنیم، شکل جدید ویژگی گفته شده در سؤال را دارد و $S_۱=S_۲$ (شکل زیر را ببینید). بنابر فرض سؤال،

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}-S_۱=۱۲\sqrt{۳}\\ S_{ABC}+S_۲=۲\times۱۲\sqrt{۳}=۲۴\sqrt{۳}\end{array}\right\}\xrightarrow[S_۱=S_۲]{+}$$

$$۲S_{ABC}=۳۶\sqrt{۳}\Rightarrow S_{ABC}=۱۸\sqrt{۳}$$

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}BC^۲$ است، پس

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}BC^۲=۱۸\sqrt{۳}\Rightarrow BC^۲=۴\times۹\times۲\Rightarrow BC=۶\sqrt{۲}$$

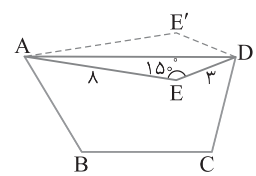


۴۳۳ (۲) به کمک مسئلهٔ هم‌پیرامونی، اگر بازتاب E را نسبت به خط AD نقطهٔ E' بنامیم، مساحت چهارضلعی $AEDE'$ میزان افزایش مساحت خواسته شده است:

$$S_{AEDE'}=۲S_{ADE}=۲(\frac{۱}{۲}AE\times DE\sin ۱۵۰^\circ)=۸\times۳\times\frac{۱}{۲}=۱۲$$

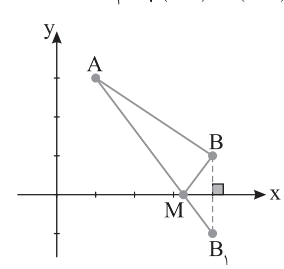
بنابراین

$$\text{مساحت زمین جدید}=\text{مساحت زمین اولیه}+S_{AEDE'}=۲۶+۱۲=۳۸$$



۴۳۴ (۱) فرض کنید $B_۱$ بازتاب B نسبت به محور x باشد، در این صورت محل برخورد پاره‌خط $AB_۱$ با محور x نقطهٔ M است و به ازای آن MA+MB کمترین مقدار است. اکنون توجه کنید که در این حالت $MA+MB=AB_۱$. چون $A(۱,۳)$ و $B_۱(۴,-۱)$، پس

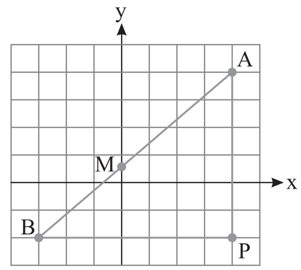
$$MA+MB=AB_۱=\sqrt{(۱-۴)^۲+(۳+۱)^۲}=۵$$



۴۳۵ (۴) دو نقطهٔ A و B در دو طرف محور y قرار دارند. پس طول پاره‌خط AB کمترین فاصلهٔ بین این دو نقطه است (شکل زیر را ببینید). بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABP،

$$AB^۲=AP^۲+BP^۲\xrightarrow[BP=۷]{AP=۶}AB^۲=۶^۲+۷^۲=۸۵$$

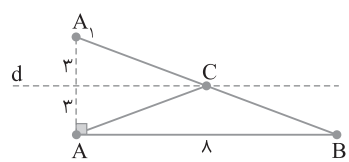
بنابراین $AB=\sqrt{۸۵}$.



۴۳۶ (۴) چون $S=۱۲$ و $AB=۸$، پس طول ارتفاع وارد بر ضلع AB برابر مقدار ثابت $h=\frac{۲S}{AB}=۳$ است، یعنی رأس C روی خطی موازی AB و به فاصلهٔ ۳ از آن قرار دارد (شکل زیر را ببینید که در آن C روی خط d در حرکت است). می‌خواهیم جای C را به گونه‌ای به‌دست آوریم که CA+CB مینیمم باشد. بازتاب A را نسبت به خط d، $A_۱$ می‌نامیم. محل برخورد $A_۱B$ با این خط نقطهٔ مطلوب برای C است. اکنون توجه کنید که در این حالت $CA+CB=A_۱B$. همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A_۱AB$ بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$A_۱B=\sqrt{A_۱A^۲+AB^۲}=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$$

بنابراین $۱۸=۱۰+۸=CA+CB+AB=$ کمترین (محیط ABC).



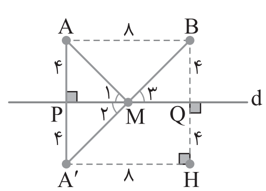
۴۳۷ (۱) شکل سؤال به‌صورت زیر است. بنابر مسئلهٔ هرون، اگر بازتاب A نسبت به خط d نقطهٔ A' باشد و از نقطهٔ A' به B وصل کنیم تا d را در M قطع کند، آن‌گاه AM+MB کمترین مقدار ممکن را دارد. چون بازتاب ایزومتری است، پس $AM=A'M$. بنابراین AM+MB برابر $A'B$ است. از A' خطی عمود بر امتداد BQ رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle A'BH: A'B=\sqrt{۸^۲+۸^۲}=۸\sqrt{۲}$$

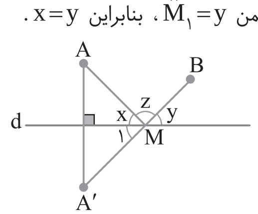
درضمن مطابق شکل $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ و $\hat{M}_۲=\hat{M}_۳$، پس $\hat{M}_۱=\hat{M}_۳$ بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMP و BMQ همنهشت هستند. در نتیجه

$$PM=MQ\xrightarrow{PQ=۸}PM=۴$$

$$\triangle APM: AM^۲=AP^۲+PM^۲=۴^۲+۴^۲=۲\times۴^۲\Rightarrow AM=۴\sqrt{۲}$$



۴۳۸ (۳) بنابر مسئلهٔ هرون اگر بازتاب A را نسبت به d نقطهٔ A' بنامیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، آن‌گاه MA+MB مینیمم است. چون بازتاب ایزومتری است، پس اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند، پس $\hat{M}_۱=x$. درضمن $\hat{M}_۱=y$، بنابراین $x=y$.

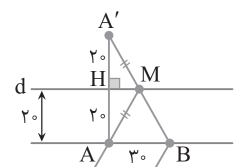


۴۳۹ **۳** فرض کنید A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d باشد (شکل زیر را ببینید). از A' به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطهٔ M قطع کند. در این صورت مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و طول این مسیر برابر $A'B$ است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle AA'B: A'B^۲ = AA'^۲ + AB^۲$$

$$A'B^۲ = ۴۰^۲ + ۳۰^۲ = ۲۵۰۰ \Rightarrow A'B = ۵۰$$

در این صورت طول مسیر $AMBA$ برابر $۸۰ = ۳۰ + ۵۰$ است.



۴۴۰ **۲** مطابق شکل زیر، نقطهٔ A را در راستای ساحل رودخانه به اندازهٔ ۱۳ کیلومتر به راست منتقل می‌کنیم تا به نقطهٔ A' برسیم. سپس A' را نسبت به خط ساحل رودخانه بازتاب می‌کنیم تا به نقطهٔ A'' برسیم. از A'' به B وصل می‌کنیم تا خط ساحل به رودخانه را در C قطع کند. نقطهٔ C را ۱۳ کیلومتر مطابق شکل در راستای خط ساحل به چپ منتقل می‌کنیم تا به نقطهٔ D برسیم، در این صورت مسیر $ADCB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و طول آن برابر $AD+DC+BC$ است. چون $AD = A'C$ و بنابر ویژگی‌های بازتاب $A'C = A''C$، پس $AD = A''C$. در نتیجه طول مسیر برابر است با

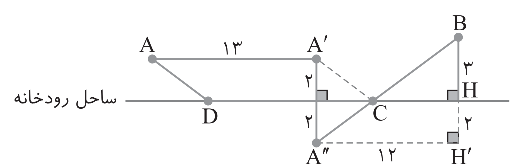
$$A''C + DC + BC = DC + A''B = ۱۳ + A''B$$

بنابراین باید طول $A''B$ را به‌دست آوریم. مطابق شکل از A'' خطی موازی ساحل رودخانه رسم می‌کنیم تا امتداد BH را در H' قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A''BH'$، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\left.\begin{array}{l} A''H' = ۱۲ \\ BH' = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow A''B = \sqrt{A''H'^۲ + BH'^۲} = \sqrt{۱۲^۲ + ۵^۲} = ۱۳$$

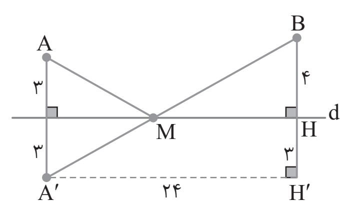
بنابراین

$$ADCB\ \text{طول مسیر} = ۱۳ + A''B = ۱۳ + ۱۳ = ۲۶$$



۴۴۱ **۱** بنابر مسئلهٔ هرون، بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d، A' می‌نامیم و از A' به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطهٔ M قطع کند. در این صورت مسیر AMB کوتاهترین مسیر ممکن است و طول این مسیر برابر $A'B$ است (شکل زیر را ببینید). از A' خطی موازی d رسم می‌کنیم تا امتداد BH را در H' قطع کند. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle A'BH': A'B^۲ = A'H'^۲ + BH'^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow A'B = ۲۵$$



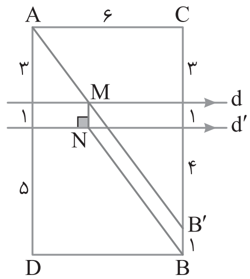
۴۴۲ **۲** نقطهٔ B را به اندازهٔ یک واحد (فاصلهٔ بین d و d') روی BC به بالا منتقل می‌کنیم تا به B' برسیم. از B' به A وصل می‌کنیم تا d را در M قطع کند. از M خطی عمود بر d و d' رسم می‌کنیم تا d' را در N قطع کند. در این صورت مسیر $AMNB$ مسیر خواسته شده است و طول این مسیر برابر $AB'+BB'$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AB'C$ طول AB' را به‌دست می‌آوریم:

$$AB' = \sqrt{AC^۲ + B'C^۲} = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰$$

بنابراین

$$AMNB\ \text{طول مسیر} = AM + MN + NB = AM + BB' + MB'$$

$$= AB' + BB' = ۱۰ + ۱ = ۱۱$$

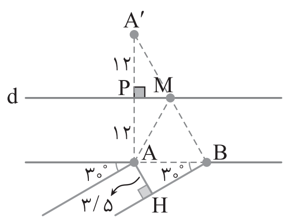


۴۴۳ **۳** برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر، بنابر روش هرون، بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d نقطهٔ A' می‌نامیم (شکل زیر را ببینید). از A' به B وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند. در این صورت AMB مسیر مینیمم است و طول این مسیر مینیمم برابر $A'B$ است. در شکل از نقطهٔ A خطی عمود بر راستای خیابان فرعی رسم کرده‌ایم و نقطهٔ H به‌دست آمده است. پس

$$\triangle ABH: \hat{B} = ۳۰^\circ \Rightarrow AH = \frac{۱}{۲}AB \Rightarrow ۳/۵ = \frac{۱}{۲}AB \Rightarrow AB = ۷$$

بنابراین

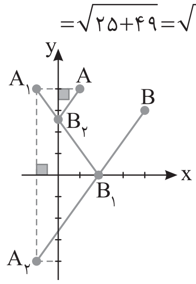
$$\triangle AA'B: A'B^۲ = AB^۲ + AA'^۲ = ۷^۲ + ۲۴^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow A'B = ۲۵$$



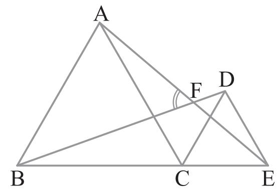
۴۴۴ **۳** قرینهٔ A نسبت به محور y را نقطهٔ $A_۱$ و قرینهٔ نقطهٔ $A_۱$ نسبت به محور x را نقطهٔ $A_۲$ می‌نامیم. از $A_۲$ به B وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با محور x را $B_۱$ می‌نامیم. همچنین از $B_۱$ به $A_۱$ وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با محور y را $B_۲$ می‌نامیم. مسیر مورد نظر $AB_۲B_۱B$ است. اکنون توجه کنید که طول این مسیر برابر طول پاره‌خط $BA_۲$ است. چون B نقطهٔ $(۴,۳)$ و $A_۲$ نقطهٔ $(-۱,-۴)$ است، پس

$$AB_۲B_۱B\ \text{طول مسیر} = A_۲B = \sqrt{(۴+۱)^۲ + (۳+۴)^۲}$$

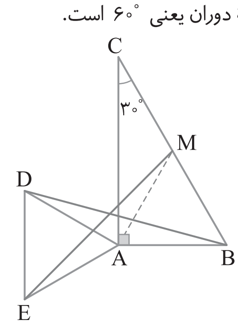
$$= \sqrt{۲۵ + ۴۹} = \sqrt{۷۴}$$



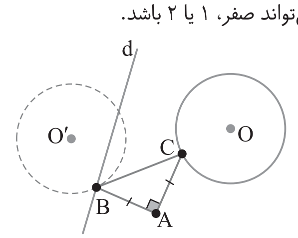
۴۴۵ ۳ توجه کنید که $CE=CD$ و $E\hat{C}D=60^\circ$. همچنین $CA=CB$ و $A\hat{C}B=60^\circ$. پس D دوران‌یافتهٔ E حول C به اندازهٔ 60° و B هم دوران‌یافتهٔ A تحت همین تبدیل دوران است. در نتیجه پاره‌خط DB دوران‌یافتهٔ پاره‌خط EA حول C و زاویهٔ 60° است. می‌دانیم اگر دو خط، دوران‌یافتهٔ یکدیگر باشند، زاویهٔ بین دو خط با زاویهٔ دوران برابر است، پس $A\hat{F}B=60^\circ$.



۴۴۶ ۳ در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30° نصف طول وتر است. همچنین اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر هم نصف طول وتر است، پس $AB=AM=\frac{BC}{2}$. اکنون توجه کنید که مثلث ABM متساوی‌الاضلاع است. اگر R تبدیل دوران 60° حول نقطهٔ A باشد، آن‌گاه $R(B)=M$ و $R(D)=E$. در نتیجه $R(BD)=ME$. پس اندازهٔ زاویهٔ بین دو پاره‌خط BD و ME همان زاویهٔ دوران یعنی 60° است.



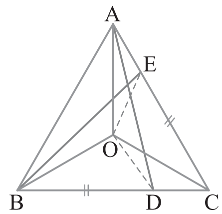
۴۴۷ ۴ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. اگر مثلث ABC مثلث مورد نظر باشد، آن‌گاه $AB=AC$ و $B\hat{A}C=90^\circ$. پس B دوران‌یافتهٔ C تحت دوران 90° حول A است. بنابراین برای رسم، دایرهٔ $C(O,R)$ را حول A به اندازهٔ 90° دوران می‌دهیم تا دایرهٔ $C'(O',R)$ به‌دست آید. محل برخورد این دایره با خط d را B می‌نامیم. اکنون اگر B را حول A به اندازهٔ -90° دوران دهیم، C به‌دست می‌آید. تعداد نقطه‌های مشترک خط d و دایرهٔ C' تعداد جواب‌های مسئله است که می‌تواند صفر، ۱ یا ۲ باشد.



۴۴۸ ۱ از شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن O مرکز ثقل (محل برخورد میانه‌ها) در مثلث ABC است. اکنون توجه کنید که

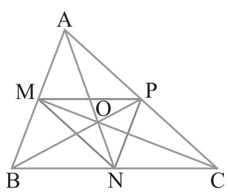
$$OB=OC=OA\,,\quad B\hat{O}C=C\hat{O}A=A\hat{O}B=120^\circ$$

اگر R تبدیل دوران 120° حول نقطهٔ O باشد، آن‌گاه $R(B)=C$ و $R(C)=A$، یعنی $R(BC)=CA$. پس اگر هر نقطه‌ای روی BC را تحت تبدیل R دوران دهیم، آن‌گاه نقطه‌ای روی CA به‌دست می‌آید. چون $BD=CE$، پس $R(D)=E$. همچنین $R(A)=B$. در نتیجه $R(AD)=BE$. بنابراین چون BE دوران‌یافتهٔ AD است، یک زاویهٔ بین BE و AD برابر زاویهٔ دوران و زاویهٔ دیگر برابر مکمل آن است. پس اندازهٔ زاویهٔ بین دو پاره‌خط AD و BE برابر 60° یا 120° است.

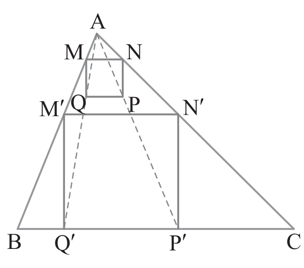


۴۴۹ ۴ چهار مثلث مجانس مثلث ABC وجود دارد:

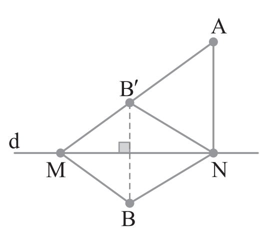
- مثلث MNP در تجانس به مرکز O و نسبت $k=-\frac{1}{2}$.
- مثلث AMP در تجانس به مرکز A و نسبت $k=\frac{1}{2}$.
- مثلث BMN در تجانس به مرکز B و نسبت $k=\frac{1}{2}$.
- مثلث CNP در تجانس به مرکز C و نسبت $k=\frac{1}{2}$.



۴۵۰ ۴ در مثلث ABC، مربع $MNPQ$ را طوری رسم کرده‌ایم که MN موازی ضلع BC است (شکل زیر را ببینید). AP و AQ را امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را به‌ترتیب در نقطه‌های P' و Q' قطع کنند. از P' و Q' عمودهایی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AC و AB را به ترتیب در N' و M' قطع کنند. توجه کنید که مربع‌های $MNPQ$ و $M'N'P'Q'$ مجانس یکدیگرند.



۴۵۱ ۳ بازتاب نقطهٔ B را نسبت به خط d نقطهٔ B' می‌نامیم. از A به B' وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط d را در M قطع کند. در این صورت $|MA-MB|$ بیشترین مقدار ممکن است، زیرا اگر نقطهٔ دیگری مثل N روی d در نظر بگیریم، آن‌گاه



$$|AN-NB|=|AN-NB'| \qquad (1)$$

با توجه به نامساوی مثلث در مثلث ANB' می‌نویسیم:

$$|AN-NB'|<AB' \quad (2)$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

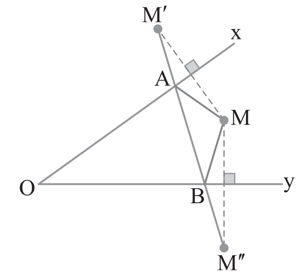
$$|AN-NB|<AB'=|AM-MB'|=|AM-MB|$$

بنابراین $|AM-MB|$ بیشترین مقدار را دارد. پس تبدیل به کار رفته در حل این مسئله بازتاب است.

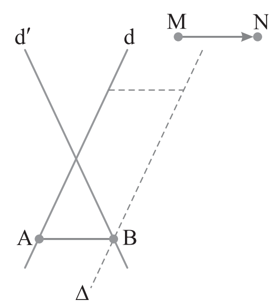
۴۵۲ (۳) از شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن M' بازتاب M نسبت به Ox و M'' بازتاب M نسبت به Oy است. محل برخورد $M'M''$ با Ox و Oy رأس‌های A و B از مثلث مورد نظر هستند. زیرا محیط مثلث ABM برابر است با $MA+AB+MB$ و چون $MB=M''B$ و $MA=M'A$، نتیجه می‌گیریم

$$M'A+AB+M''B = \text{محیط (مثلث } ABC)$$

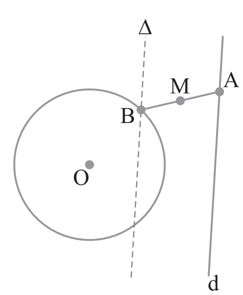
همچنین چون A و B روی خط $M'M''$ قرار دارند، $M'A+AB+M''B$ کمترین است. پس تبدیل به کار رفته در حل این مسئله بازتاب است.



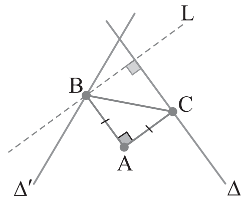
۴۵۳ (۲) خط d را تحت بردار $\overrightarrow{MN}$ انتقال می‌دهیم تا به خط Δ برسیم. نقطهٔ برخورد خط Δ با خط d' را B می‌نامیم. از B خطی موازی MN رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ A قطع کند. در این صورت B انتقال‌یافتهٔ A تحت بردار $\overrightarrow{MN}$ است و چون انتقال تبدیلی طولپا است و شیب خط را حفظ می‌کند، پس $AB=MN$ و $AB||MN$. بنابراین برای پیدا کردن پاره‌خط AB از تبدیل انتقال استفاده می‌کنیم.



۴۵۴ (۱) خط d را به مرکز M با زاویهٔ ۱۸۰° دوران می‌دهیم تا خط Δ به‌دست آید. نقطهٔ برخورد Δ با دایره را B می‌نامیم. از B به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط d را در A قطع کند. B دوران‌یافتهٔ A به مرکز M با زاویهٔ ۱۸۰° است، پس $AM=BM$. بنابراین برای حل این سؤال از تبدیل دوران استفاده می‌کنیم.

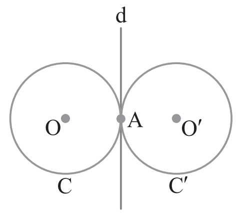


۴۵۵ (۲) از شکل زیر استفاده می‌کنیم. خط Δ را حول A به اندازهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم تا خط L در شکل به‌دست آید. محل برخورد خط L با Δ' را B می‌نامیم. اکنون اگر نقطهٔ B را حول نقطهٔ A به اندازهٔ -۹۰° دوران دهیم، نقطهٔ C روی خط Δ به‌دست می‌آید. مثلث ABC جواب مسئله است. بنابراین برای حل این سؤال از تبدیل دوران استفاده می‌کنیم. توجه کنید که چون دوران تبدیلی طولپاست، پس $AB=AC$.

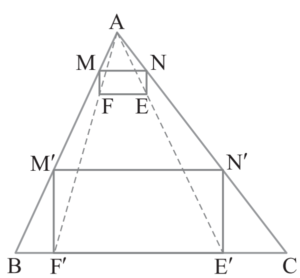


۴۵۶ (۴) چون $OO'=۲R$، پس دو دایره مماس خارج هستند (شکل زیر را ببینید).

- بازتاب دایرهٔ C نسبت به خط d (مماس مشترک داخلی دو دایره) دایرهٔ C' است.
- دایرهٔ C' دوران‌یافتهٔ دایرهٔ C به مرکز A و زاویهٔ دوران ۱۸۰° است.
- مجانس دایرهٔ C در تجانس به مرکز A و نسبت $k=-۱$ دایرهٔ C' است.



۴۵۷ (۴) در مثلث ABC، پاره‌خط MN را موازی BC رسم می‌کنیم. روی MN مستطیل $MNEF$ را رسم می‌کنیم به‌گونه‌ای که $MN=۲MF$. از A به نقطه‌های E و F وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را به ترتیب در E' و F' قطع کنند. از E' و F' عمودهایی بر BC رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AC و AB را به ترتیب در نقطه‌های N' و M' قطع کنند. در این صورت چهارضلعی $M'N'E'F'$ مجانس مستطیل $MNEF$ به مرکز A و نسبت $\frac{AM'}{AM}$ است. چون مجانس هر شکل با خودش متشابه است، پس چهارضلعی $M'N'E'F'$ مستطیل مورد نظر سؤال است. پس برای حل این سؤال از تبدیل تجانس استفاده می‌کنیم.



۴۵۸ (۲) چون $۲x+۱$ بزرگ‌ترین عدد است، پس این عدد اندازهٔ وتر مثلث است. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$(۲x+۱)^۲=(۲x-۱)^۲+x^۲ \Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۴x^۲-۴x+۱+x^۲$$

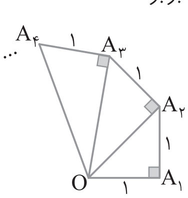
$$x^۲-۸x=۰$$

پس $x=۰$ یا $x=۸$ و چون $x\neq۰$، پس $x=۸$. در نتیجه طول ضلع‌های این مثلث ۸، ۱۵ و ۱۷ است و طول ضلع متوسط آن برابر ۱۵ است.

۴۵۹ (۴) با توجه به شکل روبه‌رو و استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید

$$OA_۲=\sqrt{OA_۱^۲+A_۱A_۲^۲}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$OA_۳=\sqrt{OA_۲^۲+A_۲A_۳^۲}=\sqrt{۲+۱}=\sqrt{۳}$$

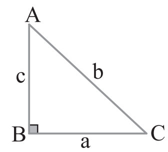


به همین صورت می‌توان نتیجه گرفت که $OA_۹=\sqrt{۹}=۳$. در نتیجه مساحت نهمین مثلث، که همان مثلث $OA_۹A_{۱۰}$ است، برابر است با

$$\frac{۱}{۲}OA_۹\times A_۹A_{۱۰}=\frac{۱}{۲}\times۳\times۱=\frac{۳}{۲}$$

۴۶۰ (۲) بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AC^2=BC^2+AB^2$$



یعنی $b^2=a^2+c^2$. از طرف دیگر بنابر فرض مسئله، $b^2=2ac$. در نتیجه $a^2+c^2=2ac$، یعنی $a^2+c^2-2ac=0$. پس $(a-c)^2=0$. بنابراین $a=c$. در نتیجه $\hat{A}=\hat{C}=45^\circ$.

۴۶۱ (۴) توجه کنید که

$$P-b=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+c-b}{2}$$

$$P-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$$

بنابراین

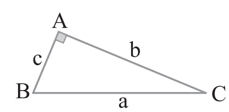
$$(P-b)(P-c)=\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)=\frac{(a+(c-b))}{2}\frac{(a-(c-b))}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(a^2-(c-b)^2)=\frac{1}{4}(a^2-(b^2+c^2-2bc))$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس $a^2=b^2+c^2$، پس

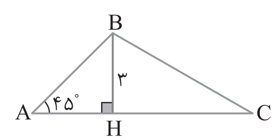
$$(P-b)(P-c)=\frac{1}{4}(b^2+c^2-b^2-c^2+2bc)=\frac{1}{2}bc$$

چون $S=\frac{1}{2}bc$، پس $(P-b)(P-c)=S$.



۴۶۲ (۴) چون $\hat{A}=45^\circ$، پس $A\hat{B}H=45^\circ$، در نتیجه مثلث ABH متساوی‌الساقین است بنابراین $AH=3$. توجه کنید که

$$S_{ABC}=S_{ABH}+S_{BCH}=\frac{1}{2}\times 3\times 3+\frac{1}{2}\times 3\times CH=\frac{9}{2}+\frac{3\times CH}{2}$$

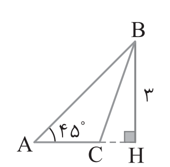


از طرف دیگر بنابر فرض مسئله $S_{ABC}=\frac{9}{2}(1+\sqrt{3})$، پس

$$\frac{9}{2}+\frac{3\times CH}{2}=\frac{9}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

یعنی $CH=3\sqrt{3}$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BCH،

$$BC=\sqrt{BH^2+CH^2}=\sqrt{9+27}=6$$



توجه کنید اگر $\hat{B}<45^\circ$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه ارتفاع BH بیرون مثلث قرار می‌گیرد و چون

$$S_{ABH}=\frac{9}{2},\quad S_{ABC}=\frac{9}{2}(1+\sqrt{3})$$

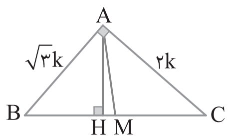
در نتیجه $S_{ABC}>S_{ABH}$ که با توجه به شکل قابل قبول نیست.

۴۶۳ (۴) چون $\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$، پس عددی مانند k وجود دارد به طوری که $AC=2k$ ، $AB=\sqrt{3}k$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3k^2+4k^2}=k\sqrt{7}$$

از طرف دیگر بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، $AB^2=BH\times BC$. یعنی $3k^2=BH\times k\sqrt{7}$. پس $BH=\frac{3k}{\sqrt{7}}$. چون نقطهٔ M وسط وتر BC است، پس $BM=\frac{1}{2}BC=\frac{k\sqrt{7}}{2}$. در نتیجه $HM=BM-BH=\frac{k}{2\sqrt{7}}$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{BC}{HM}=\frac{\sqrt{7}k}{\frac{k}{2\sqrt{7}}}=14$$

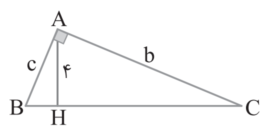


۴۶۴ (۳) **راه‌حل اول** از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، $AH\times BC=AB\times AC$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ فیثاغورس $BC=\sqrt{b^2+c^2}$، پس $4\sqrt{b^2+c^2}=bc$. دو طرف این برابری را به توان دو می‌رسانیم:

$$16(b^2+c^2)=b^2c^2\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}=\frac{1}{16}$$

در نتیجه $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}=\frac{1}{16}$.

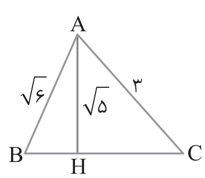


راه‌حل دوم می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با وتر a و ارتفاع وارد بر وتر h، $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$، پس در اینجا $\frac{1}{16}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

۴۶۵ (۴) در مثلث‌های ABH و ACH بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $BH=\sqrt{6-5}=1$ و $CH=\sqrt{9-5}=2$. در نتیجه

$$BC=BH+CH=1+2=3$$

بنابراین طول ضلع‌های این مثلث ۳ ، ۳ و $\sqrt{6}$ است و طول بزرگ‌ترین ضلع آن برابر ۳ است.



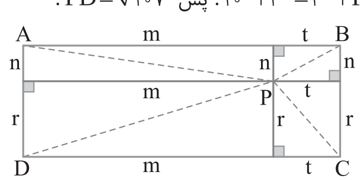
۴۶۶ (۴) از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $PA^2+PC^2=(m^2+n^2)+(r^2+t^2)$ و

$$PB^2+PD^2=(t^2+n^2)+(m^2+r^2)$$

با مقایسهٔ برابری‌های بالا نتیجه می‌گیریم

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$

در نتیجه $10^2+4^2=3^2+PD^2$. پس $PD=\sqrt{107}$.



۴۶۷ (۳) ابتدا با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها اندازهٔ زاویهٔ C را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{۳}{\sin\hat{C}}=\frac{\sqrt{۱۸}}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow\frac{۳}{\sin\hat{C}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{C}=۳۰^\circ \text{ یا } \hat{C}=۱۵۰^\circ$$

چون $\hat{B}=۴۵^\circ$، پس $\hat{C}=۳۰^\circ$ قابل قبول است و

$$A=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۴۵^\circ)=۱۰۵^\circ$$

۴۶۸ (۳) اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ سینوس‌ها $a=۲R\sin\hat{A}$ و $b=۲R\sin\hat{B}$. با قرار دادن این برابری‌ها در تساوی $a\sin\hat{A}=b\sin\hat{B}$ نتیجه می‌گیریم $۲R\sin^۲\hat{A}=۲R\sin^۲\hat{B}$. پس $\sin^۲\hat{A}=\sin^۲\hat{B}$، یعنی $\sin\hat{A}=-\sin\hat{B}$ یا $\sin\hat{A}=\sin\hat{B}$. با فرض $\sin\hat{A}=\sin\hat{B}$ نتیجه می‌شود $\hat{A}=\hat{B}$ (یا $\hat{A}=۱۸۰^\circ-\hat{B}$ که در این حالت مجموع زاویه‌های مثلث بیشتر از ۱۸۰° می‌شود) در نتیجه $BC=AC$، یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است. با فرض $\sin\hat{A}=-\sin\hat{B}$ نتیجه می‌شود $\hat{A}=-\hat{B}$ یا $\hat{A}=۱۸۰^\circ+\hat{B}$ که غیرممکن هستند.

۴۶۹ (۳) چون $\frac{\hat{A}}{۷}=\frac{\hat{B}}{۳}=۱۵^\circ$، پس $\hat{A}=۱۰۵^\circ$ و $\hat{B}=۴۵^\circ$. در نتیجه $\hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{A})=۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۱۰۵^\circ)=۳۰^\circ$. بنابر قضیهٔ سینوس‌ها، $\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}$، یعنی $\frac{AB}{\frac{۱}{۲}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$. در نتیجه $\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

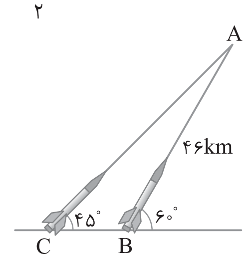
۴۷۰ (۳) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها $\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$، پس $\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{b}$.

اکنون می‌توان برابری $c=(b^۲-۲)\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}}$ را به صورت $c=(b^۲-۲)\frac{c}{b}$ نوشت. پس $۱=(b^۲-۲)\times\frac{۱}{b}$ یا $b^۲-b-۲=۰$. چون $b>۰$، با حل این معادله به‌دست می‌آید $b=۲$.

۴۷۱ (۱) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC،

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{۴۶}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{AC}{\sin ۱۲۰^\circ}$$

$$\frac{۴۶}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow AC=\frac{۴۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=۲۳\sqrt{۶}$$



۴۷۲ (۱) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

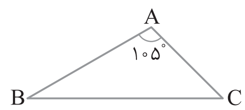
$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر بنابر فرض $\frac{AC}{AB}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{C}}$، بنابراین از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{C}}\Rightarrow\sin\hat{C}=\cos\hat{C},\quad \tan\hat{C}=۱\Rightarrow\hat{C}=۴۵^\circ$$

پس اندازهٔ زاویهٔ B برابر است با

$$\hat{B}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{C})=۱۸۰^\circ-(۱۰۵^\circ+۴۵^\circ)=۳۰^\circ$$



۴۷۳ (۲) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$، پس $a\sin\hat{B}=b\sin\hat{A}$. از مقایسهٔ این برابری با برابری $b\sin\hat{A}=a\cos\hat{C}$ نتیجه می‌گیریم $a\sin\hat{B}=a\cos\hat{C}$. پس $\sin\hat{B}=\cos\hat{C}$. اگر سینوس یک زاویه از مثلث با کسینوس زاویهٔ دیگر آن برابر و دو زاویه حاده باشند، مجموع آن‌ها ۹۰° است، یعنی $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{B}+۳\hat{B}=۹۰^\circ$. بنابراین $\hat{B}=۲۲/۵^\circ$.

۴۷۴ (۳) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$، پس

$$a^۲\sin^۲\hat{B}=b^۲\sin^۲\hat{A}$$

به جای $b^۲\sin^۲\hat{A}$ در فرض تست قرار می‌دهیم $a^۲\sin^۲\hat{B}$، بنابراین

$$a^۲\cos^۲\hat{B}+b^۲\sin^۲\hat{A}=a^۲\cos^۲\hat{B}+a^۲\sin^۲\hat{B}$$

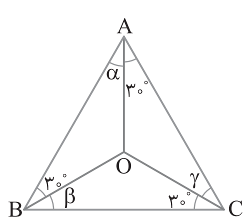
$$=a^۲(\cos^۲\hat{B}+\sin^۲\hat{B})=a^۲$$

بنابراین $a^۲=۸$، یعنی $a=۲\sqrt{۲}$.

۴۷۵ (۲) بنابر فرض تست $\frac{BC}{AC}=\frac{\cos\hat{A}}{\cos\hat{B}}$. از طرف دیگر بنابر قضیهٔ سینوس‌ها، $\frac{BC}{AC}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}$. در نتیجه $\frac{\cos\hat{A}}{\cos\hat{B}}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}$. اکنون توجه کنید که از این برابری نتیجه می‌گیریم $\tan\hat{A}=\tan\hat{B}$، یعنی $\hat{A}=\hat{B}$. چون $\hat{C}=۹۰^\circ$، پس $\hat{A}=\hat{B}=۴۵^\circ$. اکنون از فرض تست نتیجه می‌گیریم $\frac{BC}{\cos ۴۵^\circ}=۸$. یعنی $\frac{BC}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۸$، بنابراین $BC=۴\sqrt{۲}$.

۴۷۶ (۲) در مثلث AOB، بنابر قضیهٔ سینوس‌ها، $\frac{OB}{\sin\alpha}=\frac{OA}{\sin ۳۰^\circ}$.

در نتیجه $\sin\alpha=\frac{OB}{۲OA}$. با استدلالی مشابه در مثلث‌های OBC و OAC، $\sin\beta=\frac{OC}{۲OB}$ و $\sin\gamma=\frac{OA}{۲OC}$. از ضرب این سه تساوی به دست آمده نتیجه می‌شود $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{۱}{۸}$.



۴۷۷ (۳) بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$$

$$۵=۳+۱+۲\sqrt{۳}+۳+۱-۲\sqrt{۳}-۲(۳-۱)\cos\hat{A}$$

$$-۴\cos\hat{A}=-۳\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{۳}{۴}$$

۴۷۸ (۲) با مقایسهٔ برابری فرض مسئله و تساوی $c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{C}$ ، نتیجه می‌گیریم $\cos\hat{C}=\frac{۱}{۲}$. پس $\hat{C}=۶۰^\circ$.

۴۷۹ (۲) بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها، $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$. بنابراین

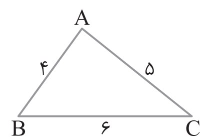
$$\frac{(b+c)^۲-a^۲}{bc(\cos\hat{A}+۱)}=\frac{b^۲+c^۲+۲bc-a^۲}{bc(\cos\hat{A}+۱)}$$

$$=\frac{a^۲+۲bc\cos\hat{A}-a^۲+۲bc}{bc(\cos\hat{A}+۱)}=\frac{۲bc(\cos\hat{A}+۱)}{bc(\cos\hat{A}+۱)}=۲$$

۴۸۰ (۱) در هر مثلث زاویهٔ بزرگ‌تر روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است. پس در شکل زیر، کسینوس $\hat{A}$ مورد سؤال است. بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\cos\hat{A}$$

$$۳۶=۱۶+۲۵-۲(۴)(۵)\cos\hat{A}\Rightarrow -۵=-۴۰\cos\hat{A}\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{۵}{۴۰}=\frac{۱}{۸}$$



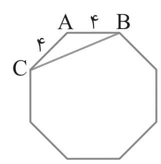
۴۸۱ (۴) اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی هشت‌ضلعی منتظم برابر $۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۱۳۵^\circ$ است. در شکل زیر، BC کوچک‌ترین قطر هشت‌ضلعی منتظم است. بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\cos\hat{A}$$

$$BC^۲=۱۶+۱۶-۲(۴)(۴)\cos۱۳۵^\circ$$

$$BC^۲=۳۲-۳۲(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\Rightarrow BC^۲=۳۲+۱۶\sqrt{۲}$$

$$BC^۲=۱۶(۲+\sqrt{۲})\Rightarrow BC=۴\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$$



۴۸۲ (۳) برای به‌دست آوردن مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین زاویه‌های مثلث ABC کافی است اندازهٔ زاویهٔ متوسط را از ۱۸۰° کم کنیم. در شکل زیر، AC ضلع متوسط مثلث ABC است. پس

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲-۲AB\times BC\cos\hat{B}$$

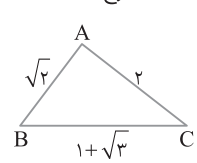
$$۲^۲=(\sqrt{۲})^۲+(۱+\sqrt{۳})^۲-۲(\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۳})\cos\hat{B}$$

$$۴=۲+۴+۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})\cos\hat{B}$$

$$-۲-۲\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})\cos\hat{B}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{-۲-۲\sqrt{۳}}{-۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})}=\frac{-۲(۱+\sqrt{۳})}{-۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat{B}=۴۵^\circ$$

بنابراین $۱۳۵^\circ=۴۵^\circ-۱۸۰^\circ=$مجموع دو زاویهٔ دیگر .



۴۸۳ (۲) اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی هشت‌ضلعی‌منتظم برابر است با

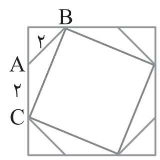
$$۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۱۳۵^\circ$$

اکنون بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC،

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\cos۱۳۵^\circ$$

$$=۲^۲+۲^۲-۲(۲)(۲)(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$BC^۲=۴+۴+۴\sqrt{۲}\Rightarrow BC^۲=۴(۲+\sqrt{۲})\Rightarrow \text{مساحت مربع}=۴(۲+\sqrt{۲})$$



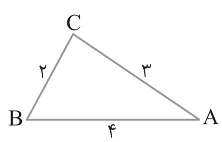
۴۸۴ (۱) برای به‌دست آوردن $\tan\hat{B}$ باید $\sin\hat{B}$ و $\cos\hat{B}$ را به‌دست آوریم. بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos\hat{B}\Rightarrow ۹=۴+۱۶-۲(۲)(۴)\cos\hat{B}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{-۱۱}{-۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}\Rightarrow\sin\hat{B}=\sqrt{۱-\cos^۲\hat{B}}=\sqrt{۱-\frac{۱۲۱}{۲۵۶}}=\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۱۶}$$

بنابراین

$$\tan\hat{B}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}=\frac{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۱۶}}{\frac{۱۱}{۱۶}}=\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۱۱}$$



۴۸۵ (۲) با رسم قطر BD در مثلث ABD با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌نویسیم

$$BD^۲=۵^۲+۱۲^۲=۱۶۹\Rightarrow BD=۱۳$$

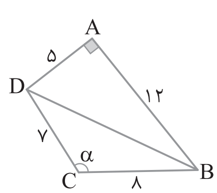
اکنون با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BDC ، کسینوس زاویهٔ α را به‌دست می‌آوریم:

$$BD^۲=BC^۲+DC^۲-۲BC\times DC\cos\alpha$$

$$۱۳^۲=۸^۲+۷^۲-۲(۸)(۷)\cos\alpha\Rightarrow ۱۶۹=۶۴+۴۹-۱۱۲\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=-\frac{۵۶}{۱۱۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=۱۲۰^\circ$$

بنابراین $\tan\alpha=\tan۱۲۰^\circ=-\sqrt{۳}$.



۴۸۶ (۲) بنابر قضیهٔ استوارت در مثلث ABC،

$$AB^۲\times DC+AC^۲\times BD=AD^۲\times BC+BD\times DC\times BC$$

$$۷^۲\times۷+۱۳^۲\times۵=AD^۲\times۱۲+۵\times۷\times۱۲\Rightarrow ۳۴۳+۸۴۵=۱۲AD^۲+۴۲۰$$

$$۱۲AD^۲=۷۶۸\Rightarrow AD^۲=۶۴\Rightarrow AD=۸$$

بنابراین $۲۰=۷+۵+۸=$محیط(مثلث ABD) .

۴۸۷ **۲** برای محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ B با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos\hat{B}\quad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر فرض

$$۲ac=\sqrt{۲}(a^۲+c^۲-b^۲)\Rightarrow b^۲=a^۲+c^۲-\sqrt{۲}ac\quad (۲)$$

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\cos\hat{B}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \hat{B}=۴۵^\circ$.

۴۸۸ **۲** ابتدا رابطهٔ داده شده بین طول ضلع‌ها را ساده می‌کنیم:

$$b^۳+c^۳-a^۳=ba^۲+ca^۲-a^۳\Rightarrow (b+c)(b^۲-bc+c^۲)=a^۲(b+c)$$

$$a^۲=b^۲+c^۲-bc\quad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها، $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}\quad (۲)$

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\cos\hat{A}=\frac{۱}{۲}$، پس $\hat{A}=۶۰^\circ$.

۴۸۹ **۳** از شکل زیر استفاده می‌کنیم. در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند. بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$\triangle AOB: AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA\times OB\times\cos ۱۲۰^\circ$$

$$=۴+۱۶-۲(۲)(۴)(-\frac{۱}{۲})=۲۸$$

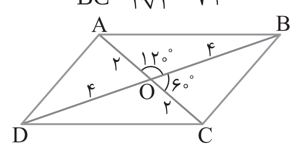
در نتیجه $AB=۲\sqrt{۷}$. از طرف دیگر،

$$\triangle BOC: BC^۲=OB^۲+OC^۲-۲OB\times OC\times\cos ۶۰^\circ$$

$$=۱۶+۴-۲(۴)(۲)(\frac{۱}{۲})=۱۲$$

در نتیجه $BC=۲\sqrt{۳}$. بنابراین نسبت اندازهٔ دو ضلع متوازی‌الاضلاع برابر است با

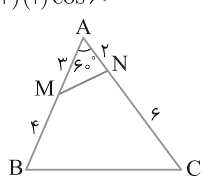
$$\frac{AB}{BC}=\frac{۲\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۷}{۳}}$$



۴۹۰ **۲** بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث‌های AMN و ABC،

$$\frac{BC}{MN}=\frac{\sqrt{AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\times\cos\hat{A}}}{\sqrt{AM^۲+AN^۲-۲AM\times AN\times\cos\hat{A}}}$$

$$=\frac{\sqrt{۷^۲+۸^۲-۲(۷)(۸)\cos ۶۰^\circ}}{\sqrt{۳^۲+۲^۲-۲(۳)(۲)\cos ۶۰^\circ}}=\frac{\sqrt{۴۹+۶۴-۵۶}}{\sqrt{۹+۴-۶}}=\frac{\sqrt{۵۷}}{\sqrt{۷}}=\sqrt{\frac{۵۷}{۷}}$$

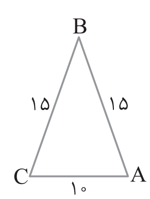


۴۹۱ **۴** شکل تست به صورت زیر است. بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos\hat{B}\Rightarrow ۱۰^۲=۱۵^۲+۱۵^۲-۲(۱۵)(۱۵)\cos\hat{B}$$

$$۱۰۰=۲۲۵+۲۲۵-۴۵۰\cos\hat{B}\Rightarrow -۳۵۰=-۴۵۰\cos\hat{B}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{۳۵۰}{۴۵۰}=\frac{۷}{۹}$$



۴۹۲ **۳** از رابطهٔ مساحت مثلث نتیجه می‌شود

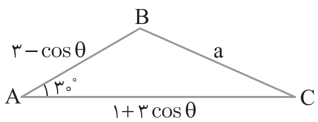
$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}(۱+۳\cos\theta)(۳-\cos\theta)\sin ۳۰^\circ=۲$$

$$۳\cos^۲\theta-۸\cos\theta+۵=۰$$

چون مجموع ضریب‌های معادلهٔ فوق صفر است، پس $\cos\theta=۱$ یا $\cos\theta=\frac{۵}{۳}$.

می‌دانیم $\cos\theta\le ۱$. پس جواب $\cos\theta=\frac{۵}{۳}$ قابل قبول نیست. در نتیجه $\cos\theta=۱$. پس $AC=۴$ و $AB=۲$. بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}=۱۶+۴-۲(۴)(۲)\cos ۳۰^\circ=۲۰-۸\sqrt{۳}$$



۴۹۳ **۳** بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

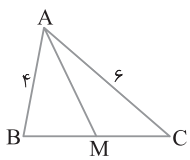
$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\times\cos\hat{A}=۱۶+۳۶-۲(۴)(۶)\cos ۶۰^\circ$$

$$BC^۲=۵۲-۲(۴)(۶)(\frac{۱}{۲})=۵۲-۲۴=۲۸\Rightarrow BC=۲\sqrt{۷}$$

اکنون از قضیهٔ میانه‌ها به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB^۲+AC^۲=۲AM^۲+\frac{BC^۲}{۲}\Rightarrow ۱۶+۳۶=۲AM^۲+\frac{(۲\sqrt{۷})^۲}{۲}$$

$$۵۲=۲AM^۲+۱۴\Rightarrow AM^۲=۱۹\Rightarrow AM=\sqrt{۱۹}$$



۴۹۴ **۲** **راه‌حل اول** در شکل $a=۴$، $b=۳$ و $c=۲$. اکنون بنابر قضیهٔ میانه‌ها،

$$b^۲+c^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}\Rightarrow ۹+۴=۲m_a^۲+\frac{۱۶}{۲}\Rightarrow m_a^۲=\frac{۵}{۲}$$

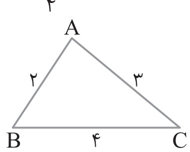
$$a^۲+b^۲=۲m_c^۲+\frac{c^۲}{۲}\Rightarrow ۱۶+۹=۲m_c^۲+\frac{۴}{۲}\Rightarrow m_c^۲=\frac{۲۳}{۲}$$

$$a^۲+c^۲=۲m_b^۲+\frac{b^۲}{۲}\Rightarrow ۱۶+۴=۲m_b^۲+\frac{۹}{۲}\Rightarrow m_b^۲=\frac{۳۱}{۴}$$

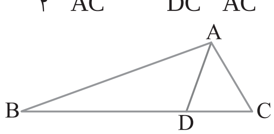
بنابراین $m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۵}{۲}+\frac{۲۳}{۲}+\frac{۳۱}{۴}=\frac{۸۷}{۴}$.

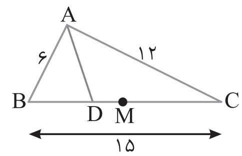
راه‌حل دوم می‌دانیم $m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)$، پس

$$m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(۲^۲+۳^۲+۴^۲)=\frac{۳}{۴}(۲۹)=\frac{۸۷}{۴}$$



۴۹۵ **۲** طبق فرض $\frac{BD}{DC}=\frac{۵}{۲}$. چون AD نیمساز زاویهٔ داخلی A است، بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$، یعنی $\frac{۵}{۲}=\frac{AB}{AC}$. پس $۲AB=۵AC$.



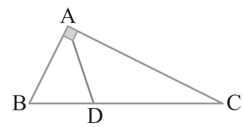


۴۹۶ **۳** M وسط BC است. چون AD نیمساز زاویهٔ داخلی A است، پس

$$BD=\frac{BC\times AB}{AB+AC}=\frac{۱۵\times ۶}{۶+۱۲}=۵$$

همچنین $BM=\frac{۱}{۲}BC=۷/۵$. اکنون می‌توان نوشت

$$DM=BM-BD=۷/۵-۵=۲/۵$$

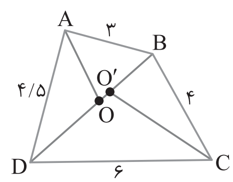


۴۹۷ **۲** از شکل مقابل استفاده می‌کنیم که در آن AD نیمساز زاویهٔ داخلی A است. بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{۲}{۳}$ ، یعنی عددی مانند k وجود دارد به‌طوری که $AB=۲k$ و $AC=۳k$. چون مساحت مثلث ABC برابر ۲۷ است، پس

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC=۲۷\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times ۲k\times ۳k=۲۷$$

پس $k=۳$. در نتیجه $AB=۶$ و $AC=۹$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$BC=\sqrt{AB^{۲}+AC^{۲}}=\sqrt{۶^{۲}+۹^{۲}}=۳\sqrt{۱۳}$$



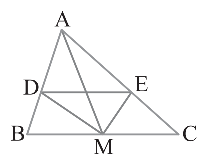
۴۹۸ **۱** در مثلث ABD، چون AO نیمساز است، پس

$$BO=\frac{BD\times AB}{AB+AD}=\frac{۲}{۵}BD \qquad (۱)$$

همچنین در مثلث CBD چون CO′ نیمساز است، پس

$$BO'=\frac{BD\times CB}{CD+CB}=\frac{۲}{۵}BD \qquad (۲)$$

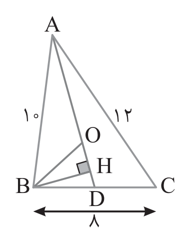
با مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $BO=BO'$. پس در واقع O و O′ بر هم منطبق هستند و در نتیجه $OO'=۰$.



۴۹۹ **۱** در دو مثلث MAB و MAC ، بنابر قضیهٔ نیمسازها،

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{MB},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{AM}{MC}$$

از طرف دیگر چون AM میانه است، پس $MB=MC$. در نتیجه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. اکنون بنابر عکس قضیهٔ تالس، نتیجه می‌گیریم $DE||BC$. پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$.



۵۰۰ **۲** چون مثلث‌های BAO و BAD در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند، پس

$$\frac{S_{BAO}}{S_{BAD}}=\frac{AO}{AD} \qquad (۱)$$

در مثلث ABC ، پاره‌خط AD نیمساز است، بنابراین

$$BD=\frac{BC\times AB}{AB+AC}=\frac{۸\times ۱۰}{۱۰+۱۲}=\frac{۴۰}{۱۱}$$

همچنین در مثلث BAD، BO نیمساز است، پس $AO=\frac{AD\times AB}{BD+AB}$. در نتیجه

$$\frac{AO}{AD}=\frac{AB}{BD+AB}=\frac{۱۰}{\frac{۴۰}{۱۱}+۱۰}=\frac{۱۱}{۱۵} \qquad (۲)$$

اکنون با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{S_{BAO}}{S_{BAD}}=\frac{۱۱}{۱۵}$.

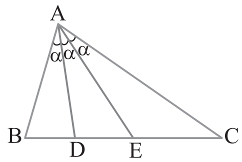
۵۰۱ **۴** چون AD نیمساز مثلث ABE است، پس بنابر قضیهٔ نیمسازها،

$$\frac{DE}{BD}=\frac{AE}{AB} \qquad (۱)$$

همچنین AE نیمساز مثلث ADC است، پس بنابر قضیهٔ نیمسازها،

$$\frac{EC}{DE}=\frac{AC}{AD} \qquad (۲)$$

با ضرب کردن دو طرف برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{EC}{BD}=\frac{AE\times AC}{AB\times AD}$.

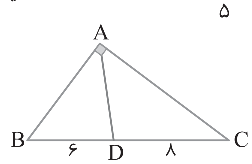


۵۰۲ **۱** از شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن AD نیمساز وارد بر وتر BC است. بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$. در نتیجه عددی مانند k وجود دارد به‌طوری که $AB=۳k$ و $AC=۴k$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC ،

$$AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}\Rightarrow ۹k^{۲}+۱۶k^{۲}=۱۴^{۲}$$

در نتیجه $k=\frac{۱۴}{۵}$. پس $AB=۳k=\frac{۴۲}{۵}$ و $AC=۴k=\frac{۵۶}{۵}$. در نتیجه

$$\text{(مثلث ABC) محیط}=AB+AC+BC=\frac{۴۲}{۵}+\frac{۵۶}{۵}+۱۴=۳۳/۶$$

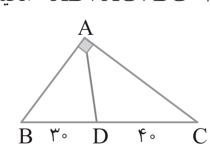


۵۰۳ **۴** از شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون نقطهٔ D از ضلع‌های زاویهٔ A به یک فاصله است، پس AD نیمساز است. بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{۳}{۴}$ ، یعنی عددی مانند k وجود دارد به‌طوری که $AB=۳k$ و $AC=۴k$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}\Rightarrow ۹k^{۲}+۱۶k^{۲}=۷۰^{۲}$$

در نتیجه $k=۱۴$. پس $AB=۳k=۴۲$ و $AC=۴k=۵۶$. با معلوم شدن طول ضلع‌ها می‌توان نوشت

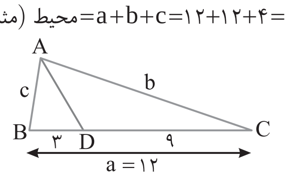
$$\text{(مثلث ABC) محیط}=AB+AC+BC=۴۲+۵۶+۷۰=۱۶۸$$



۵۰۴ **۳** از شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون AD نیمساز زاویهٔ A است، پس بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$ ، یعنی $\frac{c}{b}=\frac{۱}{۳}$ ، پس $b=۳c$. اکنون با توجه به برابری صورت تست می‌توان نوشت

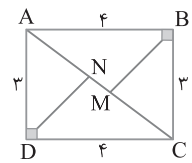
$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-\frac{bc}{۳}\Rightarrow ۱۲^{۲}=۹c^{۲}+c^{۲}-\frac{۳c\times c}{۳}$$

با حل این معادله به دست می‌آید $c=۴$. پس $b=۳c=۱۲$. در نهایت می‌توان نوشت $\text{(مثلث ABC) محیط}=a+b+c=۱۲+۱۲+۴=۲۸$.



۵۰۵ (۲) از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. بنابر قضیهٔ نیمسازها در مثلث ABC، $AM=\frac{AC\times AB}{AB+BC}=\frac{5\times 4}{4+3}=\frac{20}{7}$. از طرف دیگر در مثلث ADC، $AN=\frac{AC\times AD}{AD+DC}=\frac{5\times 3}{3+4}=\frac{15}{7}$. اکنون می‌توان نوشت

$$MN=AM-AN=\frac{20}{7}-\frac{15}{7}=\frac{5}{7}$$



۵۰۶ (۳) بنابر قضیهٔ نیمسازها،

$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{7}{5}=\frac{AB}{AC}$$

$$\xrightarrow{\text{عددی مانند x وجود دارد}} AB=7x,\ AC=5x$$

اکنون در مثلث ABC از قضیهٔ کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos 60^\circ$$

$$(7x)^2=(5x)^2+12^2-2(5x)(12)(\tfrac{1}{2})$$

$$49x^2=25x^2+144-60x\Rightarrow 24x^2+60x-144=0$$

$$2x^2+5x-12=0$$

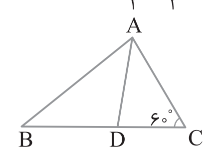
جواب‌های این معادله عبارتند از:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{4}=\frac{-5\pm 11}{4}\xrightarrow{x>0} x=\frac{-5+11}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$AC=5x=\frac{15}{2},\ AB=7x=\frac{21}{2},\ BC=12$$

$$\text{محیط (مثلث ABC)}=\frac{15}{2}+\frac{21}{2}+12=30$$



۵۰۷ (۱) راه‌حل اول بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\xrightarrow{\sin\hat{B}=2\sin\hat{C}}\frac{b}{2\sin\hat{C}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow b=2c$$

$$\xrightarrow{c=4} b=8$$

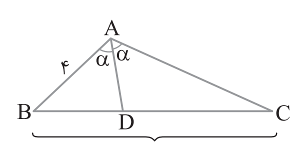
بنابر قضیهٔ نیمساز،

$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}$$

$$\frac{BD}{BD+DC}=\frac{1}{1+2}\Rightarrow \frac{BD}{9}=\frac{1}{3}\Rightarrow BD=3,\ DC=6$$

بنابراین

$$AD^2=AB\times AC-BD\times DC=4\times 8-3\times 6=14\Rightarrow AD=\sqrt{14}$$



راه‌حل دوم چون a=۹، b=۸ و c=۴، پس $P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{21}{2}$. بنابراین

$$d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcP(P-a)}=\frac{2}{12}\sqrt{4\times 8\times\frac{21}{2}(\frac{21}{2}-9)}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{4\times 4\times 21\times\frac{3}{2}}=\frac{2\times 2\times 3}{6}\sqrt{\frac{7}{2}}=2\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{14}$$

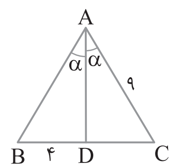
۵۰۸ (۳) فرض کنید $AB=CD=x$. طول نیمساز AD را محاسبه می‌کنیم.

$$AD^2=AB\times AC-BD\times DC\Rightarrow AD^2=9x-4x\Rightarrow AD^2=5x \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ نیمساز،

$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{4}{x}=\frac{x}{9}\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=6 \quad (2)$$

از تساوی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $AD^2=5\times 6\Rightarrow AD=\sqrt{30}$.



۵۰۹ (۱) راه‌حل اول با توجه به شکل،

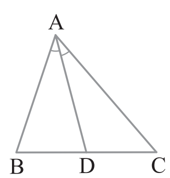
$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$$

$$\frac{1}{2}AB\times AC\sin 60^\circ=\frac{1}{2}AB\times AD\sin 30^\circ+\frac{1}{2}AC\times AD\sin 30^\circ$$

$$(8)(10)(\frac{\sqrt{3}}{2})=(8)(AD)(\frac{1}{2})+(10)(AD)(\frac{1}{2})$$

$$80\sqrt{3}=8AD+10AD\Rightarrow 80\sqrt{3}=18AD\Rightarrow AD=\frac{80\sqrt{3}}{18}=\frac{40\sqrt{3}}{9}$$

راه‌حل دوم اگر d_a طول نیمساز زاویهٔ A باشد، آن‌گاه



$$d_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{2}\xrightarrow[c=AB=8]{b=AC=10}$$

$$d_a=\frac{2(10)(8)}{10+8}\cos\frac{60^\circ}{2}$$

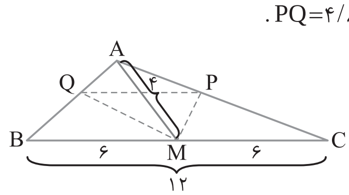
$$=\frac{2\times 10\times 8}{18}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{40\sqrt{3}}{9}$$

۵۱۰ (۲) در مثلث‌های AMB و AMC چون MQ و MP نیمساز هستند، پس بنابر قضیهٔ نیمسازها،

$$\frac{AQ}{BQ}=\frac{AM}{BM},\quad \frac{AP}{PC}=\frac{AM}{MC}$$

چون $BM=MC$، پس $\frac{AQ}{BQ}=\frac{AP}{PC}$. در نتیجه بنابر عکس قضیهٔ تالس $PQ\parallel BC$. اکنون بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{PQ}{BC}=\frac{AQ}{AB}$. با تفضیل در مخرج به دست می‌آید $\frac{PQ}{BC-PQ}=\frac{AQ}{AB-AQ}$، یعنی $\frac{PQ}{BC-PQ}=\frac{AQ}{BQ}$.

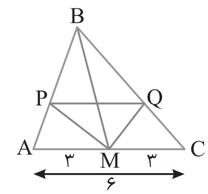
از طرف دیگر $\frac{AQ}{BQ}=\frac{AM}{BM}$. بنابراین $\frac{PQ}{12-PQ}=\frac{4}{6}$. با حل این معادله به دست می‌آید $PQ=4/8$.



۵۱۱ (۳) بنابر قضیهٔ نیمسازها در مثلث‌های ABM و CBM،

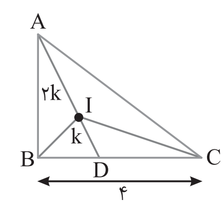
$$\frac{BP}{PA}=\frac{BM}{MA}=\frac{۵}{۳}\quad (۱)\,,\qquad \frac{BQ}{QC}=\frac{BM}{MC}=\frac{۵}{۳}$$

در نتیجه $\frac{BP}{PA}=\frac{BQ}{QC}$. پس بنابر عکس قضیهٔ تالس $PQ||AC$. با ترکیب در مخرج برابری (۱) نتیجه می‌شود $\frac{BP}{BP+PA}=\frac{۵}{۵+۳}$ پس $\frac{BP}{BA}=\frac{۵}{۸}$. اکنون بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{PQ}{AC}=\frac{BP}{BA}$، یعنی $\frac{PQ}{۶}=\frac{۵}{۸}$. در نتیجه $PQ=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$.



۵۱۲ (۳) چون BI نیمساز زاویهٔ B از مثلث BAD است، پس بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{ID}$. پس $\frac{AB}{BD}=\frac{۲}{۱}$. همچنین CI نیمساز زاویهٔ C در مثلث ACD است، بنابراین $\frac{AC}{CD}=\frac{AI}{ID}$. پس $\frac{AC}{CD}=\frac{۲}{۱}$. در نتیجه $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{۲}{۱}$. اکنون بنابر ویژگی‌های تناسب می‌توان نوشت $\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{۲}{۱}$، یعنی $\frac{AB+AC}{BC}=\frac{۲}{۱}$ یا $\frac{AB+AC}{۴}=\frac{۲}{۱}$، در نتیجه $AB+AC=۸$. اکنون می‌توان محیط مثلث ABC را به‌دست آورد

محیط (مثلث ABC) $=(AB+AC)+BC=۸+۴=۱۲$



۵۱۳ (۱) راه‌حل اول بنابر قضیهٔ نیمسازها،

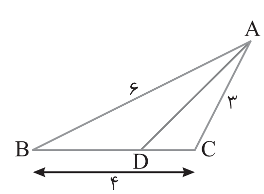
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۶}{۳}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BD+DC}=\frac{۲}{۲+۱}$$

$$\frac{BD}{BC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{BD}{۴}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow BD=\frac{۸}{۳}$$

در نتیجه $DC=۴-\frac{۸}{۳}=\frac{۴}{۳}$. بنابراین

$$AD^۲=AB\times AC-BD\times DC=۶\times۳-\frac{۸}{۳}\times\frac{۴}{۳}=۱۸-\frac{۳۲}{۹}=\frac{۱۳۰}{۹}$$

در نتیجه $AD=\frac{\sqrt{۱۳۰}}{۳}$.



راه‌حل دوم چون $a=۴$، $b=۳$ و $c=۶$، پس $P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۱۳}{۲}$. بنابراین

$$d_a=\frac{۲}{b+c}\sqrt{bcP(P-a)}=\frac{۲}{۹}\sqrt{۳\times۶\times\frac{۱۳}{۲}(\frac{۱۳}{۲}-۴)}=\frac{۲}{۹}\sqrt{۳\times۳\times۱۳\times\frac{۵}{۲}}$$

$$=\frac{۲\times۳}{۹}\sqrt{\frac{۱۳\times۵}{۲}}=\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۴\times۱۳\times۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۳۰}}{۳}$$

۵۱۴ (۱) اگر h_a، h_b و h_c طول ارتفاع‌های مثلث ABC باشند، آن‌گاه $h_a=\frac{۲S}{a}$، $h_b=\frac{۲S}{b}$ و $h_c=\frac{۲S}{c}$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{\frac{۲S}{a}}+\frac{۱}{\frac{۲S}{b}}+\frac{۱}{\frac{۲S}{c}}=\frac{a+b+c}{۲S}=\frac{۱۸}{۲\times۱۲}=\frac{۳}{۴}$$

۵۱۵ (۳) می‌دانیم مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع است، پس $S=\frac{۱}{۲}a\times c\times\sin\hat{B}$. چون $a\times c=۲b^۲$، پس $S=\frac{۱}{۲}(۲b^۲)\sin\hat{B}=b^۲\sin\hat{B}$. همچنین $S=\frac{۱}{۲}b\times h_b=\frac{b^۲}{۲}$. بنابراین $\frac{۱}{۲}b^۲=b^۲\sin\hat{B}$، یعنی $\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه $\hat{B}=۳۰^\circ$ یا $\hat{B}=۱۵۰^\circ$. چون زاویهٔ A در این مثلث منفرجه است، پس $\hat{B}=۱۵۰^\circ$ قابل قبول نیست.

۵۱۶ (۱) می‌دانیم در هر مثلث، نسبت دو ارتفاع دلخواه، برابر است با معکوس نسبت قاعده‌های نظیر آن دو ارتفاع، بنابراین

$$\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}\,,\qquad \frac{h_c}{h_b}=\frac{b}{c}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

اکنون می‌توان نوشت $\frac{h_a+h_c}{h_b}=\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_c}{h_b}=\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۴}$.

۵۱۷ (۲) راه‌حل اول با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۱}{۲}(۲۴+۱۰+۲۶)=۳۰$$

$$S=\sqrt{۳۰\times(۳۰-۲۴)\times(۳۰-۱۰)\times(۳۰-۲۶)}=۱۲۰$$

می‌دانیم اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $r=\frac{S}{P}$، پس $r=\frac{۱۲۰}{۳۰}=۴$.

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن مساحت مثلث ABC، چون ۲۴، ۱۰ و ۲۶ اعداد فیثاغورسی هستند ($۱۰^۲+۲۴^۲=۲۶^۲$)، می‌توان از روش کلاسیک نیز مساحت مثلث را به‌دست آورد: $S=\frac{۲۴\times۱۰}{۲}=۱۲۰$

۵۱۸ (۳) با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۴+۵+۷}{۲}=۸\,,\qquad S=\sqrt{۸(۸-۴)(۸-۵)(۸-۷)}=۴\sqrt{۶}$$

می‌دانیم اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $R=\frac{abc}{۴S}$، پس

$$R=\frac{۴\times۵\times۷}{۴\times۴\sqrt{۶}}=\frac{۳۵}{۴\sqrt{۶}}$$

در نتیجه طول قطر دایرهٔ محیطی $=۲R=\frac{۳۵}{۲\sqrt{۶}}$.

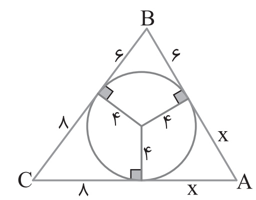
۵۱۹ **۲** از شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که $a=14$، $b=8+x$ و $c=6+x$. در نتیجه $P=\frac{a+b+c}{2}=x+14$. می‌دانیم اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $r=\frac{S}{P}$، پس $S=rP$، یعنی

$$S=4(x+14)\quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر دستور هرون،

$$S=\sqrt{(x+14)(x)(6)(8)}=\sqrt{48x(x+14)}\quad (2)$$

با مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $(4(x+14))^2=48x(x+14)$. با حل این معادله به‌دست می‌آید $x=7$، پس $a=14$، $b=8+x=15$ و $c=6+x=13$، یعنی اندازهٔ کوچک‌ترین ضلع مثلث برابر ۱۳ است.



۵۲۰ **۱** راه‌حل اول میانه‌های $CM''=5$، $BM'=9$ و $AM=6$ را در مثلث ABC در نظر بگیرید. پاره‌خط OM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به D برسیم. در این صورت در مثلث OCD اندازهٔ ضلع‌ها برابرند با

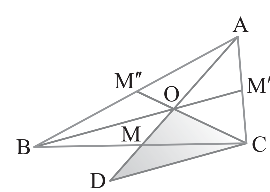
$$OC=\frac{2}{3}CM'',\quad OD=\frac{2}{3}AM,\quad CD=OB=\frac{2}{3}BM'$$

بنابراین $OC=\frac{10}{3}$، $OD=4$ و $CD=6$، پس سه ضلع مثلث OCD معلوم است و به کمک دستور هرون می‌توان مساحت آن را به‌دست آورد. درضمن می‌دانیم $S_{OCD}=2S_{OMC}$ و $S_{OMC}=\frac{1}{6}S_{ABC}$، پس $S_{ABC}=3S_{OCD}$.

توجه کنید که $S_{OCD}=\sqrt{P(P-OC)(P-OD)(P-CD)}$. چون در مثلث OCD مقدار P برابر $\frac{\frac{10}{3}+4+6}{2}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$ است، پس

$$S_{OCD}=\sqrt{\frac{20}{3}\left(\frac{20}{3}-\frac{10}{3}\right)\left(\frac{20}{3}-4\right)\left(\frac{20}{3}-6\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{20}{3}\times\frac{10}{3}\times\frac{8}{3}\times\frac{2}{3}}=\frac{40\sqrt{2}}{9}$$

بنابراین $S_{ABC}=3\times\frac{40\sqrt{2}}{9}=\frac{40\sqrt{2}}{3}$.



راه‌حل دوم اگر S مساحت مثلث و S' مساحت مثلث ساخته شده با میانه‌های این مثلث باشد، آن‌گاه $S'=\frac{3}{4}S$.

پس ابتدا S' را به کمک دستور هرون به‌دست می‌آوریم:

$$S'=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\xrightarrow{P=\frac{5+9+6}{2}=10}$$
$$S'=\sqrt{10(10-5)(10-9)(10-6)}=\sqrt{10\times5\times1\times4}=10\sqrt{2}$$

بنابراین $S=\frac{4}{3}S'=\frac{4}{3}\times10\sqrt{2}=\frac{40\sqrt{2}}{3}$.

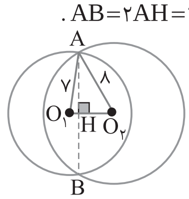
۵۲۱ **۴** با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث O_1O_2A را به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{7+8+5}{2}=10\Rightarrow S=\sqrt{10\times(10-7)\times(10-8)\times(10-5)}=10\sqrt{3}$$

اکنون طول ارتفاع AH را به‌دست می‌آوریم:

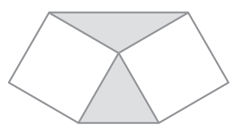
$$AH=\frac{2S}{O_1O_2}=\frac{2\times10\sqrt{3}}{5}=4\sqrt{3}$$

بنابراین $AB=2AH=2\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.



۵۲۲ **۳** اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع a باشد، اضلاع مربع‌ها نیز به طول a هستند و زاویهٔ رأس دو مثلث متساوی‌الساقین رنگی 60° و 120° است. بنابراین

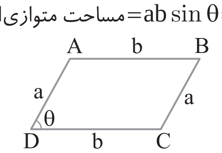
$$\frac{\text{مساحت قسمت رنگی}}{\text{مساحت مربع}}=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin60^\circ+\frac{1}{2}a^2\sin120^\circ}{a^2}$$
$$=\frac{a^2\sin60^\circ}{a^2}=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



۵۲۳ **۲** متوازی‌الاضلاع ABCD با دو ضلع به طول‌های ثابت a و b و زاویهٔ متغیر θ مفروض است.

محیط متوازی‌الاضلاع $=2(a+b)=$ ثابت

مساحت متوازی‌الاضلاع $=ab\sin\theta=$ متغیر



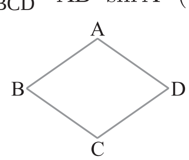
۵۲۴ **۳** مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بین دو قطر آن. بنابراین

مساحت متوازی‌الاضلاع $=\frac{1}{2}(8)(6)\sin60^\circ=24\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

۵۲۵ **۱** مساحت لوزی ABCD برابر $AB^2\sin\hat{A}$ است.

$$\sin\hat{A}=\sqrt{1-\cos^2\hat{A}}=\sqrt{1-\left(\frac{-12}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$$

بنابراین $S_{ABCD}=AB^2\sin\hat{A}=(26)^2\left(\frac{5}{13}\right)=260$.



۵۲۶ (۱) اضلاع چهارضلعی ABCD قطرهای کوچک هشت‌ضلعی منتظم هستند، پس مساوی‌اند. بنابراین $AB=\frac{8+4\sqrt{2}}{4}=2+\sqrt{2}$. از طرف دیگر اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی هشت‌ضلعی منتظم 135° است. پس با توجه به شکل زیر و بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$\triangle OAB: AB^2=AO^2+BO^2-2(AO)(BO)\cos 135^\circ$$

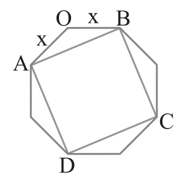
$$(2+\sqrt{2})^2=x^2+x^2-2x^2(-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$2x^2+\sqrt{2}x^2=(2+\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2=2+\sqrt{2}$$

بنابراین

$$\text{مساحت بین هشت‌ضلعی و } ABCD=4S_{OAB}$$

$$=4(\frac{1}{2}x^2\sin 135^\circ)=2(2+\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}+2$$



۵۲۷ (۱) در مثلث ABC فرض می‌کنیم $AB=2\sqrt{2}$، $AC=4$، $\hat{A}=\frac{3\pi}{4}$ و AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها طول ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}} BC^2=8+16-2(2\sqrt{2})(4)(-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

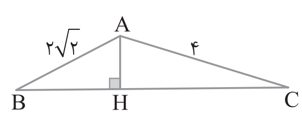
$$BC^2=8+16+16=40 \Rightarrow BC=2\sqrt{10}$$

اکنون مساحت مثلث ABC را به دو صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH\times BC,\quad S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\hat{A}$$

$$AH\times BC=AB\times AC\sin\hat{A} \Rightarrow AH\times 2\sqrt{10}=2\sqrt{2}\times 4\times \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}} AH=\frac{2\sqrt{2}\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$



۵۲۸ (۲) ابتدا با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها طول قطر BD را به‌دست می‌آوریم:

$$\triangle ABD: BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos 60^\circ$$

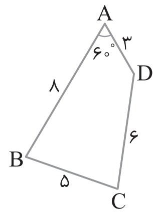
$$BD^2=8^2+3^2-2(8)(3)(\frac{1}{2}) \Rightarrow BD^2=64+9-24 \Rightarrow BD=7$$

اکنون به کمک قضیهٔ هرون مساحت مثلث BCD را پیدا می‌کنیم:

$$P=\frac{5+6+7}{2}=\frac{18}{2}=9$$

$$S_{BCD}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$$

$$=\sqrt{9\times 4\times 3\times 2}=6\sqrt{6}$$



۵۲۹ (۳) در شکل زیر، فرض کنید $BC=8$ و طول میانه‌های BM و CN به ترتیب برابر ۶ و ۹ باشد. نقطهٔ O محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC است. پس

$$OB=\frac{2}{3}BM=\frac{2}{3}(6)=4,\quad OC=\frac{2}{3}CN=\frac{2}{3}(9)=6$$

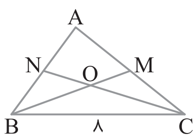
اکنون به کمک قضیهٔ هرون مساحت مثلث OBC را پیدا می‌کنیم:

$$P=\frac{6+4+8}{2}=9$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{9(9-6)(9-4)(9-8)}$$

$$=\sqrt{9\times 3\times 5\times 1}=3\sqrt{15}$$

از طرف دیگر مساحت مثلث ABC سه برابر مساحت مثلث OBC است. پس $S_{ABC}=3\times 3\sqrt{15}=9\sqrt{15}$.



۵۳۰ (۴) طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس خارجی برابر مجموع شعاع‌های دو دایره است. پس اضلاع مثلث $OO'O''$ برابر $OO'=8$، $OO''=9$ و $O'O''=11$ است. اکنون مساحت این مثلث را به کمک قضیهٔ هرون به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{8+9+11}{2}=14$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{14(14-8)(14-9)(14-11)}$$

$$=\sqrt{14\times 6\times 5\times 3}=\sqrt{4\times 9\times 7\times 5}=6\sqrt{35}$$

۵۳۱ (۱) سه ضلع مثلث ABC معلوم است. به نظر می‌رسد برای محاسبهٔ مساحت از قضیهٔ هرون استفاده کنیم ولی طول اضلاع اعداد گنگ هستند و محاسبه به کمک رابطهٔ هرون وقت‌گیر می‌شود. در اینجا با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها یکی از زاویه‌های مثلث مثلاً A را به‌دست می‌آوریم تا به کمک رابطهٔ مساحت سینوسی، مساحت مثلث را پیدا کنیم:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$$

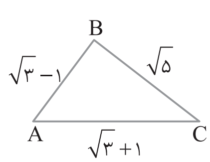
$$5=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\cos\hat{A}$$

$$-3=-4\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{3}{4}$$

$$\sin\hat{A}=\sqrt{1-\cos^2\hat{A}}=\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\hat{A}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)(\frac{\sqrt{7}}{4})=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

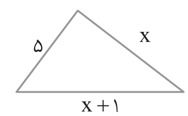


۵۳۲ (۳) مساحت مثلث را با استفاده از قضیهٔ هرون به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۵+x+x+۱}{۲}=x+۳$$
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$
$$=\sqrt{(x+۳)(x+۳-۵)(x+۳-x)(x+۳-x-۱)}$$
$$=\sqrt{(x+۳)(x-۲)(۳)(۲)}=\sqrt{۶(x^۲+x-۶)}$$

بنابر فرض سؤال $S=۶\sqrt{۶}$، پس

$$\sqrt{۶(x^۲+x-۶)}=۶\sqrt{۶}\Rightarrow x^۲+x-۴۲=۰$$
$$(x+۷)(x-۶)=۰\xrightarrow{x>۰}x=۶$$

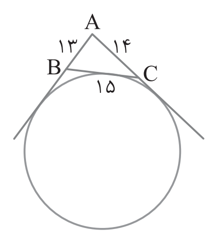


۵۳۳ (۱) شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC (بزرگ‌ترین ضلع در شکل زیر) از رابطهٔ $r_a=\frac{S}{P-a}$ به‌دست می‌آید.

مساحت مثلث ABC را با استفاده از قضیهٔ هرون به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=۲۱$$
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}$$
$$=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۶}=\sqrt{۲۱\times۲۱\times۱۶}=۲۱\times۴=۸۴$$

بنابراین $r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{۸۴}{۲۱-۱۵}=\frac{۸۴}{۶}=۱۴$.



۵۳۴ (۴) ابتدا درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۳,\quad a_{۱۲}=۳,\quad a_{۱۳}=۵$$
$$a_{۲۱}=۶,\quad a_{۲۲}=۸,\quad a_{۲۳}=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix}۳&۳&۵\\۶&۸&۴\end{bmatrix}$. اکنون به‌دست می‌آید

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس A}=۳+۳+۵+۶+۸+۴=۲۹$$

۵۳۵ (۱) با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A،

$$a_{۲۴}=۲^۲-۱=۳,\quad a_{۳۱}=۳+۱=۴,\quad a_{۳۳}=۷$$

بنابراین $۲a_{۲۴}-۳a_{۳۱}+۴a_{۳۳}=۲(۳)-۳(۴)+۴(۷)=۲۲$.

۵۳۶ (۳) ماتریس A مربعی از مرتبهٔ $(۶-n)\times(۲n)$ است، پس

$$۶-n=۲n\Rightarrow ۳n=۶\Rightarrow n=۲$$

پس $A=[۲-۲ij]_{۴\times۴}$. بنابراین درایه‌های روی قطر اصلی آن به‌صورت زیر هستند.

$$A=\begin{bmatrix}۰&?&?&?\\?&-۶&?&?\\?&?&-۱۶&?\\?&?&?&-۳۰\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A برابر $۰-۶-۱۶-۳۰=-۵۲$ است.

۵۳۷ (۴) در گزینهٔ (۱)، درایهٔ $a_{۱۲}$ برابر $۱-۲=-۱$ است، پس این گزینه درست نیست. در گزینهٔ (۲)، درایهٔ $a_{۲۳}$ برابر $۲-۱=۳$ است، پس این گزینه هم درست نیست. در گزینهٔ (۳)، درایهٔ $a_{۱۲}$ برابر $۰-۱=۱$ است، پس این گزینه هم درست نیست. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۵۳۸ (۴) دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند. چون $A=B$، پس

$$\begin{cases}x-y=۳\\x+y=۹\end{cases}\Rightarrow ۲x=۱۲\Rightarrow x=۶\Rightarrow y=۳,\qquad z-۱=-۳\Rightarrow z=-۲$$

بنابراین $\frac{x}{۲}-y+۲z=\frac{۶}{۲}-۳-۴=-۴$.

۵۳۹ (۴) درایه‌های این دو ماتریس را تعیین می‌کنیم:

$$A=[۲ij-۱]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۱&۳&۵\\۳&۷&۱۱\\۵&۱۱&۱۷\end{bmatrix}$$
$$B=[i^۲-۳j]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}-۲&-۵&-۸\\۱&-۲&-۵\\۶&۳&۰\end{bmatrix}$$

بنابراین $۲A-B=۲\begin{bmatrix}۱&۳&۵\\۳&۷&۱۱\\۵&۱۱&۱۷\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۲&-۵&-۸\\۱&-۲&-۵\\۶&۳&۰\end{bmatrix}$. فقط ستون دوم ماتریس $۲A-B$ را لازم داریم، پس $۲A-B=\begin{bmatrix}?&۱۱&?\\?&۱۶&?\\?&۱۹&?\end{bmatrix}$.

در نتیجه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $۲A-B$ برابر است با
$۱۱+۱۶+۱۹=۴۶$

۵۴۰ (۴) ماتریس‌های A و B را در معادلهٔ زیر قرار می‌دهیم:

$$mA-nB=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\۵&۰\end{bmatrix}\Rightarrow m\begin{bmatrix}۰&-۲\\۱&۲\end{bmatrix}-n\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&۳\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\۵&۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-n&-۲m\\m+n&۲m-۳n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\۵&۰\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-n=-۳\Rightarrow n=۳\\-۲m=-۴\Rightarrow m=۲\\m+n=۵\\۲m-۳n=۰\end{cases}$$

توجه کنید مقادیر m و n به‌دست آمده در معادلهٔ چهارم صدق نمی‌کنند، پس $m=۲$ و $n=۳$ قابل‌قبول نیست.

۵۴۱ **۳** ضرب دو ماتریس در صورتی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس سمت چپ با تعداد سطرهای ماتریس سمت راست برابر باشد. در اینجا ماتریس A ماتریسی 2×3 و ماتریس C ماتریسی 3×5 است، پس ماتریس AC قابل تعریف و از مرتبهٔ 2×5 است. سایر گزینه‌ها این ویژگی را ندارند و ضرب آن‌ها قابل تعریف نیست.

۵۴۲ **۳** ابتدا ماتریس‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -14\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

بنابراین $AB-BA=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 4 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -14\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 3 & 2\end{bmatrix}$.

۵۴۳ **۳** **راه‌حل اول** ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1-k\\ 2+2k & -2+k^2\end{bmatrix}$$

چون $A^2+2A-I=\bar{O}$، پس

$$\begin{bmatrix}-1 & -1-k\\ 2+2k & -2+k^2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -k-3\\ 2k+6 & k^2+2k-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}-k-3=0\Rightarrow k=-3\\ 2k+6=0\Rightarrow k=-3\\ k^2+2k-3=0\Rightarrow (k+3)(k-1)=0\Rightarrow k=-3 \text{ یا } k=1\end{cases}$$

بنابراین $k=-3$ که در هر سه معادله صدق می‌کند، قابل قبول است. پس به‌ازای یک مقدار k تساوی ماتریسی داده شده برقرار است.

راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ کیلی – همیلتون،

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & k\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=(k+1)A-(k+2)I$$

طبق فرض $A^2=I-2A$، بنابراین $(k+1)A-(k+2)I=I-2A$. در نتیجه

$$\begin{cases}k+1=-2\Rightarrow k=-3\\ -(k+2)=1\Rightarrow k=-3\end{cases}$$

پس فقط یک مقدار برای k به دست می‌آید.

۵۴۴ **۱** چون $c_{21}=16$، پس $\begin{bmatrix}a & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ b\\ 3\end{bmatrix}=a+2b+6=16$

یعنی $a+2b=10$. همچنین از $c_{22}=0$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}a & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ a\\ 4\end{bmatrix}=-a+2a+8=0$$

پس $a=-8$ و از برابری $a+2b=10$ به‌دست می‌آید $-8+2b=10$، یعنی $b=9$. بنابراین $a-b=-8-9=-17$.

۵۴۵ **۳** ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{11}=1-2=-1,\quad a_{12}=1-4=-3,\quad a_{13}=1-6=-5$$

$$a_{21}=2-2=0,\quad a_{22}=2-4=-2,\quad a_{23}=2-6=-4$$

پس $A=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -5\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}$. از طرف دیگر، $b_{11}=2+1=3$، $b_{12}=2+2=4$ و $b_{13}=2+3=5$. پس $B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix}$. بنابراین

$$C=\begin{bmatrix}B\\ A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & -3 & -5\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$C^2=C\times C=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & -3 & -5\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & -3 & -5\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & -10 & -25\\ 0 & 15 & 30\\ 2 & 14 & 26\end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس C^2 برابر است با

$$5-10-25+15+30+2+14+26=57$$

۵۴۶ **۱** ابتدا ماتریس AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & b & -1\\ 2 & 1 & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -2\\ 1 & a\\ 2b & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a-b & 1+ab\\ 2a+1-2ab & -4-2a\end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطری اصلی صفر هستند، پس

$$\begin{cases}1+ab=0\Rightarrow ab=-1 \quad (1)\\ 2a+1-2ab=0\Rightarrow 2a+1+2=0\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}\xrightarrow{\text{از } (1)} b=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

بنابراین $a^2-3b=(-\frac{3}{2})^2-3(\frac{2}{3})=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$.

۵۴۷ **۴** در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند، پس

$$2y+3=0\Rightarrow y=-\frac{3}{2},\quad x-2y=0\Rightarrow x=2y\xrightarrow{y=-\frac{3}{2}} x=-3$$

پس $A=\begin{bmatrix}-3+z & 0\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$. اکنون ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-3+z & 0\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3+z & 0\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-3+z)^2 & 0\\ 0 & \frac{9}{4}\end{bmatrix}$$

چون A^2 اسکالر است، پس درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر هستند. پس

$$(-3+z)^2=\frac{9}{4}\Rightarrow -3+z=\pm\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}-3+z=\frac{3}{2}\Rightarrow z=\frac{9}{2}\\ -3+z=-\frac{3}{2}\Rightarrow z=\frac{3}{2}\end{cases}$$

پس کمترین مقدار $x+y+z$ به ازای $z=\frac{3}{2}$ به‌دست می‌آید:

$$x+y+z=-3-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=-3$$

۵۴۸ (۲) ضرب ماتریس‌ها را به‌ترتیب پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 3}\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & -x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix}_{3\times 3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}_{3\times 1}=0$$

$$\begin{bmatrix} 2x-2 & x+2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}=0\Rightarrow 2x-2+2x+4-3x=0\Rightarrow x=-2$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۵۴۹ (۳) چون A از مرتبهٔ 2×5 و C از مرتبهٔ $p\times q$ است، پس AC از مرتبهٔ $5\times q$ است و $p=2$. برای اینکه $(2AC)^3$ قابل تعریف باشد، باید $q=5$. همچنین $(2AC)^3$ از مرتبهٔ 5×5 باید با ماتریس $3B$ قابل تفریق شدن باشد، پس باید ماتریس‌های $(2AC)^3$ و $3B$ هم‌مرتبه باشند، یعنی $5\times 5=k\times 5$ بنابراین $k=5$. در نتیجه $pqk=2\times 5\times 5=50$.

۵۵۰ (۳) برای به‌دست آوردن این درایه به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

(ستون اول B)A(سطر سوم C)=درایهٔ سطر سوم و ستون اول ماتریس CAB

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=10$$

۵۵۱ (۱) برای به‌دست آوردن درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس BAB به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{(سطر دوم B)}}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\text{(ستون دوم B)}}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & -3 & -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}=24+3-8-14=5$$

۵۵۲ (۴) ابتدا طرفین تساوی $A^2=2A+I$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^2=2A+I\Rightarrow A^4=(2A+I)^2\Rightarrow A^4=4A^2+I+4A$$

$$A^4=4(2A+I)+I+4A\Rightarrow A^4=12A+5I\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در A ضرب}}$$

$$A^5=12A^2+5A\Rightarrow A^5=12(2A+I)+5A\Rightarrow A^5=29A+12I$$

بنابراین $\alpha=29$ و $\beta=12$، پس $\alpha-2\beta=29-24=5$.

۵۵۳ (۲) توجه کنید که

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

اکنون می‌توانیم ماتریس A^{20} را به صورت زیر به‌دست آوریم:

$$A^{20}=(A^3)^6\times A^2=I^6\times A^2=A^2=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

۵۵۴ (۳) ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

چون A^2 ماتریس خاصی نیست، ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ماتریس A^3 نیز کمکی برای پیدا کردن توان‌های بالای A نمی‌کند، پس A^4 را پیدا می‌کنیم:

$$A^4=A^2\times A^2=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-I$$

بنابراین برای پیدا کردن A^{168} آن را برحسب A^4 می‌نویسیم:

$$A^{168}=(A^4)^{42}=(-I)^{42}=I$$

۵۵۵ (۳) می‌دانیم $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. پس

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 1+\tan^2\alpha \\ \cos^2\alpha & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1+\tan^2\alpha \\ \cos^2\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \cos^2\alpha & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \cos^2\alpha & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^7=(A^2)^3\times A=I^3\times A=A$ و $A^8=(A^2)^4=I^4=I$. پس

$$A^7+A^8=A+I$$

۵۵۶ (۱) در حالت کلی، حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ برابر است با $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$. اکنون با توجه به این رابطه می‌توانیم ماتریس A را به‌دست آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2+\cdots+10 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 55 & 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که $1+2+\cdots+10=\frac{10(10+1)}{2}=55$.

۵۵۷ (۳) A ماتریس قطری است و می‌دانیم حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن از ضرب نظیربه‌نظیر درایه‌های این دو ماتریس به‌دست می‌آیند. بنابراین

$$A^7=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^7=\begin{bmatrix}1^7&0&0\\0&(-1)^7&0\\0&0&2^7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2^7\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^7 برابر $2^7=128$ است.

۵۵۸ (۳) ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0&1399&1398\\0&0&1397\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1399&1398\\0&0&1397\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1399\times1397\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

چون ماتریس A^2 ماتریس خاصی نیست، ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&0&1399\times1397\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1399&1398\\0&0&1397\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$$

چون $A^3=\bar{O}$، پس به‌ازای هر عدد طبیعی n که $n\geq 3$، $A^n=\bar{O}$. بنابراین

$$(A^4-I)(I+A^3)=(\bar{O}-I)(I+\bar{O})=-I^2=-I$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳) برابر $-I$ است، چون $A^{1400}=\bar{O}$، پس

$$A^{1400}-I=-I$$

۵۵۹ (۴) ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

چون A^2 ماتریس خاصی نیست، ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-2&3&-4\\-2&3&-3\end{bmatrix}$$

ماتریس A^3 نیز کمکی برای پیدا کردن توان‌های بالاتر A نمی‌کند، پس ماتریس A^4 را پیدا می‌کنیم:

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-2&3&-4\\-2&3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^{12}=(A^4)^3=I^3=I$.

۵۶۰ (۳) ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A-I\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در } A \text{ ضرب}}A^3=A^2-A$$

$$A^3=A-I-A\Rightarrow A^3=-I$$

بنابراین $A^{200}=(A^3)^{66}\times A^2=(-I)^{66}\times A^2=I\times A^2=A^2=A-I$.

۵۶۱ (۱) ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

در نتیجه $A^4=(A^2)^2=I^2=I$ و $A^5=A^4A=IA=A$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{bmatrix}1&6\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

یعنی $\begin{bmatrix}1&6\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{bmatrix}$، در نتیجه $b=-4$ و $c=-1$. پس

$$b+c=-4-1=-5$$

۵۶۲ (۲) در عبارت داده شده از سمت چپ از A و از سمت راست از B فاکتور می‌گیریم:

$$A\begin{bmatrix}3&-1\\-6&5\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-1&1\\6&-3\end{bmatrix}B$$

$$=A\left(\begin{bmatrix}3&-1\\-6&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1\\6&-3\end{bmatrix}\right)B$$

$$=A\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}B=A(2I)B=2AB=2\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2\\0&6\end{bmatrix}$$

۵۶۳ (۲) **راه‌حل اول** ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال،

$$A^2=\alpha A+\beta I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha+\beta&\alpha\\5\alpha&4\alpha+\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2\alpha+\beta=9\\\alpha=2\end{cases}\Rightarrow\beta=13$$

این مقادیر α و β در دو معادلهٔ $5\alpha=10$ و $4\alpha+\beta=21$ نیز صدق می‌کنند. پس زوج مرتب (α,β) برابر $(2,13)$ است.

راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون

$$A^2=(-2+4)A-(-8-5)I_2=2A+13I_2$$

اکنون با مقایسهٔ این برابری با تساوی $A^2=\alpha A+\beta I_2$ به دست می‌آید $\alpha=2$ و $\beta=13$.

۵۶۴ (۱) بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون،

$$A^2=(3+1)A-(3+2)I=4A-5I$$

دو طرف این برابری را در A ضرب می‌کنیم: $A^3=4A^2-5A$. مقدار A^2 را در این برابری قرار می‌دهیم:

$$A^3=4(4A-5I)-5A=16A-20I-5A=11A-20I$$

چون $A^3=\alpha A+\beta I$، پس $\alpha=11$ و $\beta=-20$. در نتیجه $\alpha+\beta=11-20=-9$.

۵۶۵ (۴) از تساوی $2A-B=I$ به‌دست می‌آید $B=2A-I$. دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $B^2=4A^2-4A+I$. چون $A^2=A$، پس $B^2=4A-4A+I=I$، اکنون به‌دست می‌آید $B^2-I=I-I=\bar{O}$.

۵۶۶ (۳) از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها نتیجه می‌شود

$$A(BA)^5B=A(BA)(BA)(BA)(BA)(BA)B$$

$$=(AB)(AB)(AB)(AB)(AB)(AB)=(AB)^6=C^6$$

۵۶۷ (۱) تساوی $BA+mAB=\bar{O}$ را می‌توان به صورت $AB=(-\frac{1}{m})BA$ نوشت. اکنون دو طرف این تساوی را از سمت راست در B ضرب می‌کنیم: $AB^2=(-\frac{1}{m})BAB$. بنابراین

$$AB^2=(-\frac{1}{m})B(AB)=(-\frac{1}{m})B(-\frac{1}{m})BA$$

$$=(-\frac{1}{m})\times(-\frac{1}{m})BBA=\frac{1}{m^2}B^2A$$

۵۶۸ (۲) از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب ماتریس روی جمع ماتریس‌ها نتیجه می‌شود

$$(A+3I)(-4A-2I)=-4A^2-2A-12A-6I=-4A^2-14A-6I$$

از طرف دیگر، از فرض $A^2+4A=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^2=-4A$. پس

$$(A+3I)(-4A-2I)=16A-14A-6I=2A-6I$$

۵۶۹ (۱) حاصل‌ضرب دو ماتریس که وارون یکدیگرند، برابر ماتریس همانی است. پس

$$A(2I-A)=I\Rightarrow 2A-A^2=I\Rightarrow A^2=2A-I\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A}$$

$$A^3=2A^2-A\Rightarrow A^3=2(2A-I)-A\Rightarrow A^3=3A-2I$$

$$A^3+2I=3A$$

۵۷۰ (۱) از تساوی $A^2=A+I$ به‌دست می‌آید:

$$A^2-A=I\Rightarrow A(A-I)=I$$

بنابراین ماتریس A وارون‌پذیر است و $A^{-1}=A-I$.

۵۷۱ (۱) تساوی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^3+A^2+A=-3I\Rightarrow A(A^2+A+I)=-3I\Rightarrow A(\frac{A^2+A+I}{-3})=I$$

بنابراین ماتریس A وارون‌پذیر است و

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}(A^2+A+I)\quad(1)$$

از طرف دیگر،

$$A^3+A^2+A+3I=\bar{O}\Rightarrow A^2+A+I=-A^3-2I\quad(2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}(-A^3-2I)=\frac{1}{3}(A^3+2I)$$

۵۷۲ (۱) طرفین تساوی $AC+CB=AB$ را از چپ در A^{-1} و از راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$AC+CB=AB\xrightarrow{A^{-1}\times}A^{-1}AC+A^{-1}CB=A^{-1}AB$$

$$C+A^{-1}CB=B\xrightarrow{\times B^{-1}}CB^{-1}+A^{-1}CBB^{-1}=BB^{-1}$$

$$CB^{-1}+A^{-1}C=I$$

۵۷۳ (۳) می‌دانیم حاصل‌ضرب هر ماتریس وارون‌پذیر در وارونش برابر I است، پس $(A-2I)(A-2I)^{-1}=I$. ضرب را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$A(A-2I)^{-1}-2(A-2I)^{-1}=I$$

بنابراین

$$A(A-2I)^{-1}=I+2(A-2I)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&4&2\\4&-1&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

۵۷۴ (۲) طرفین تساوی $A^2=4A-3I$ را در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^2=4A-3I\xrightarrow{A^{-1}\times}A=4I-3A^{-1}\Rightarrow 3A^{-1}=-A+4I$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}A+\frac{4}{3}I\xrightarrow{A^{-1}=\alpha A+\beta I}\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{3}\\ \beta=\frac{4}{3}\end{cases}$$

بنابراین $2\alpha-\beta=-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-2$.

۵۷۵ (۳) ماتریسی وارون‌پذیر است که دترمینان آن غیرصفر باشد. اکنون دترمینان ماتریس هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\begin{vmatrix}a-1&0\\0&a+1\end{vmatrix}=a^2-1$. حاصل این دترمینان به‌ازای $a=\pm1$ صفر است، پس این ماتریس همواره وارون‌پذیر نیست.

گزینهٔ (۲): $\begin{vmatrix}a+1&b\\b-1&a\end{vmatrix}=a^2+a-b^2+b$. حاصل این دترمینان به‌ازای $a=0$ و $b=0$ صفر است، پس این ماتریس همواره وارون‌پذیر نیست.

گزینهٔ (۳): $\begin{vmatrix}a^2+1&0\\0&1\end{vmatrix}=a^2+1$. حاصل این دترمینان هیچ‌وقت صفر نمی‌شود، پس این ماتریس همواره وارون‌پذیر است.

گزینهٔ (۴): $\begin{vmatrix}a^2&0\\0&b^2+1\end{vmatrix}=a^2(b^2+1)$. حاصل این دترمینان به‌ازای $a=0$ صفر است، پس این ماتریس همواره وارون‌پذیر نیست.

۵۷۶ (۳) ابتدا درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{11}=2-1=1,\quad a_{12}=2-2=0,\quad a_{21}=8-1=7,\quad a_{22}=8-2=6$$

پس $A=\begin{bmatrix}1&0\\7&6\end{bmatrix}$. بنابراین $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0\\-7&1\end{bmatrix}$. در نتیجه

$$6A^{-1}+A=\begin{bmatrix}6&0\\-7&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\7&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0\\0&7\end{bmatrix}=7I$$

۵۷۷ (۲) ابتدا درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{11}=1-2=-1,\quad a_{12}=1-4=-3$$
$$a_{21}=2-2=0,\quad a_{22}=2-4=-2$$

پس $A=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$. بنابراین

$$A+I=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$A-I=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

اکنون تساوی داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$AB-B=I+A\Rightarrow (A-I)B=I+A$$

طرفین این تساوی را از چپ در $(A-I)^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$(A-I)B=I+A\xrightarrow{(A-I)^{-1}\times}B=(A-I)^{-1}(I+A)$$

$$B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0 & 6\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس B برابر $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ است.

۵۷۸ (۳) می‌دانیم حاصل‌ضرب دو ماتریس که وارون یکدیگرند، برابر ماتریس همانی است، پس

$$(A-I)(A-I)^{-1}=I\Rightarrow A(A-I)^{-1}-(A-I)^{-1}=I$$

$$A(A-I)^{-1}=I+(A-I)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های $A(A-I)^{-1}$ برابر ۹ است.

۵۷۹ (۱) از تساوی داده شده به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$A+B=2AB\Rightarrow 2AB-B=A\Rightarrow (2A-I)B=A\quad (1)$$

توجه کنید که

$$2A-I=2\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$(2A-I)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -4\\ 2 & -7\end{bmatrix}$$

طرفین تساوی (۱) را از سمت چپ در $(2A-I)^{-1}$ ضرب می‌کنیم

$$(2A-I)B=A\Rightarrow B=(2A-I)^{-1}A$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 2 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس B برابر -3 است.

۵۸۰ (۴) از تفریق دو تساوی فرض سؤال ماتریس $2B$ به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l}A+B=[2j-i]_{2\times 2}\\ A-B=[2i-j]_{2\times 2}\end{array}\right\}\xrightarrow{-}2B=[(2j-i)-(2i-j)]_{2\times 2}$$

$$2B=[-3i+3j]_{2\times 2}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix}$$

بنابراین $(2B)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$.

۵۸۱ (۲) توجه کنید که

$$A^{-1}=\frac{1}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}$$

۵۸۲ (۴) وارون ماتریس A^{-1} را به‌دست می‌آوریم تا ماتریس A به‌دست آید:

$$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

اکنون برای اینکه بتوانیم A^{20} را تعیین کنیم، ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

چون ماتریس A^2 ماتریس خاصی نیست، پس A^3 را پیدا می‌کنیم:

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

چون ماتریس A^3 نیز ماتریس خاصی نیست، پس A^4 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}=-4I$$

بنابراین $A^{20}=(A^4)^5=(-4I)^5=-4^5I=-2^{10}I=\begin{bmatrix}-2^{10} & 0\\ 0 & -2^{10}\end{bmatrix}$.

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^{20} برابر $-2^{10}-2^{10}=-2^{11}$ است.

۵۸۳ (۱) به سادگی می‌توان ثابت کرد چون ماتریس A یک ماتریس قطری است، پس وارون آن به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^3}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & b^3\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & b^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a+3} & 0\\ 0 & -4a\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{a+3}\Rightarrow a=2,\quad b^3=-4a\xrightarrow{a=2}b^3=-8\Rightarrow b=-2$$

پس $a+2b=2-4=-2$.

۵۸۴ (۲) از تساوی $A^{-1}-2I=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید

$$A^{-1}=2I+\begin{bmatrix}2 & 7\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

از طرف دیگر، $A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{8-7}\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}$. در نهایت به‌دست می‌آید $A+I=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -7\\ -1 & 5\end{bmatrix}$.

۵۸۵ (۲) راه‌حل اول با توجه به تساوی $\alpha A+\beta I=2A^{-1}$، پس

$$\alpha\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha+\beta&0\\-\alpha&2\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\alpha=1\\ \alpha+\beta=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=3\end{cases}$$

یعنی $(\alpha,\beta)=(-1,3)$. توجه کنید که این مقادیر در معادلهٔ $2\alpha+\beta=1$ نیز صدق می‌کنند.

راه‌حل دوم دو طرف تساوی $\alpha A+\beta I=2A^{-1}$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$\alpha A^2+\beta A=2I\Rightarrow A^2=(-\frac{\beta}{\alpha})A+(\frac{2}{\alpha})I\quad(1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون: $A^2=3A-2I\quad(2)$

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}-\dfrac{\beta}{\alpha}=3\\ \dfrac{2}{\alpha}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=3\end{cases}$$

۵۸۶ (۲) طرفین تساوی $AXA=I$ را از سمت چپ و از سمت راست در ماتریس A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به‌دست آید:

$$AXA=I\xrightarrow{A^{-1}\times}XA=A^{-1}\xrightarrow{\times A^{-1}}X=(A^{-1})^2$$

توجه کنید که $A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&3\\-2&-2\end{bmatrix}$. بنابراین

$$X=(A^{-1})^2=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&3\\-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\-2&-2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}10&6\\-4&-2\end{bmatrix}$$

در نهایت به‌دست می‌آید:

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس X}=\frac{1}{4}(10+6-4-2)=\frac{5}{2}$$

۵۸۷ (۴) فرض می‌کنیم $B=\begin{bmatrix}-2&-1\\3&2\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-4&3\\5&-4\end{bmatrix}$، یعنی تساوی داده شده در صورت سؤال را به صورت $BAC=\begin{bmatrix}2&3\\0&-1\end{bmatrix}$ می‌نویسیم. دو طرف این تساوی را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم، در نتیجه

$$A=B^{-1}\begin{bmatrix}2&3\\0&-1\end{bmatrix}C^{-1}$$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}2&1\\-3&-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3\\0&-1\end{bmatrix}\times\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-4&-3\\-5&-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4&-5\\6&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-3\\-5&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41&32\\-59&-46\end{bmatrix}$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس A}=41+32-59-46=-32$$

۵۸۸ (۳) طرفین تساوی $A+B=AB$ را از سمت چپ در A^{-1} و از سمت راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A+B=AB\xrightarrow{A^{-1}\times}A^{-1}A+A^{-1}B=A^{-1}AB$$

$$I+A^{-1}B=B\xrightarrow{\times B^{-1}}IB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=BB^{-1}$$

$$B^{-1}+A^{-1}=I$$

اکنون به‌دست می‌آید

$$B^{-1}=I-A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{-2+1}\begin{bmatrix}-1&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&3\end{bmatrix}$$

۵۸۹ (۱) راه حل اول از معادلهٔ اول x را به‌دست می‌آوریم $x=\frac{1-by}{a}$.

مقدار به‌دست آمده را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم: $\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a}y+ay=1$

با حل این معادله به‌دست می‌آید $y=\frac{1}{a+b}$. دیگر نیازی به محاسبهٔ x نیست، چون در بین گزینه‌ها فقط در گزینهٔ (۱) این مقدار y وجود دارد.

راه حل دوم مجهول y را حذف می‌کنیم:

$$\begin{matrix}a\times\\ b\times\end{matrix}\begin{cases}ax+by=1\\ bx+ay=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2x+aby=a\\ b^2x+aby=b\end{cases}$$

معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم: $(a^2-b^2)x=a-b$، یعنی

$$x=\frac{1}{a+b}$$

۵۹۰ (۲) از معادلهٔ اول دستگاه به‌دست می‌آید $4x+9y=y$، یعنی $4x+8y=0$. با ساده کردن این تساوی به‌دست می‌آید $x+2y=0$.

۵۹۱ (۳) چون دستگاه داده شده بی‌شمار جواب دارد، پس

$$\frac{m^2}{3}=\frac{-3}{m^2-10}=\frac{3-2m}{3}\Rightarrow\frac{m^2}{3}=\frac{3-2m}{3}$$

$$m^2+2m-3=0\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ m=-3\end{cases}$$

به ازای $m=1$ تناسب اولیه به‌صورت $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ درمی‌آید که قابل قبول است. به ازای $m=-3$ تناسب اولیه به‌صورت $3=3=3$ درمی‌آید که قابل قبول است. پس حاصل‌ضرب مقادیر m برابر -3 است.

۵۹۲ (۳) ابتدا دستگاه $\begin{cases}x+2y=5\\ 2x+y=4\end{cases}$ را حل می‌کنیم. برای حل این دستگاه از روش تبدیل استفاده می‌کنیم. از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=5-2y$. مقدار آن را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم: $2(5-2y)+y=4$. در نتیجه $y=2$. پس $x=5-2y=5-4=1$. جواب‌ها را در معادلهٔ $x+y=m^2+m+1$ قرار می‌دهیم، پس $3=m^2+m+1$، یعنی $m^2+m-2=0$. در نهایت به‌دست می‌آید $m=-2$ یا $m=1$.

۵۹۳ (۳) فرض می‌کنیم $A=\frac{1}{2x-1}$ و $B=\frac{1}{y-2}$. اکنون دستگاه را به شکل $\begin{cases}A+2B=-\frac{1}{3}\\ 2A-3B=\frac{5}{3}\end{cases}$ می‌نویسیم. به روش حذف این دستگاه را حل می‌کنیم:

$$2\times\begin{cases}A+2B=-\frac{1}{3}\\ 2A-3B=\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2A+4B=-\frac{2}{3}\\ 2A-3B=\frac{5}{3}\end{cases}$$

معادلهٔ پایین را از معادلهٔ بالا کم می‌کنیم: $7B=-\frac{7}{3}$. در نتیجه $B=-\frac{1}{3}$. با قرار دادن مقدار B در معادلهٔ $A+2B=-\frac{1}{3}$ به‌دست می‌آید: $A-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$، یعنی $A=\frac{1}{3}$. در نتیجه $\begin{cases}A=\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{3}\\ B=\frac{1}{y-2}=-\frac{1}{3}\end{cases}$. پس $\begin{cases}2x-1=3\\ y-2=-3\end{cases}$. بنابراین $x=2$ و $y=-1$. در نهایت به‌دست می‌آید: $x+y=2-1=1$.

۵۹۴ (۴) اگر A ماتریس ضرایب باشد، بنابر فرض مسئله، $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1\\2&1\end{bmatrix}$. بنابراین $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.

بنابراین $x+y=1+3=4$.

۵۹۵ (۱) چون دستگاه معادلات جواب منحصربه‌فرد دارد، پس $\frac{m-1}{2}\neq\frac{3m}{4}$. در نتیجه $m\neq-2$.

۵۹۶ (۳) چون دستگاه جواب ندارد، پس $\frac{m-1}{3}=\frac{4}{m+3}\neq\frac{6}{9}$. از $\frac{m-1}{3}=\frac{4}{m+3}$ به‌دست می‌آید $m=-5$ یا $m=3$. از طرف دیگر از $\frac{m-1}{3}\neq\frac{6}{9}$ به‌دست می‌آید $m\neq3$. در نتیجه به‌ازای $m=-5$ این دستگاه جواب ندارد.

۵۹۷ (۴) از این معادلهٔ ماتریسی دستگاه معادلات زیر به‌وجود می‌آید:

$$\begin{bmatrix}2m+1&3\\3m&m+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+6\\7m^2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}(2m+1)x+3y=m+6\\3mx+(m+2)y=7m^2\end{cases}$$

شرط جواب نداشتن این دستگاه این است که

$$\frac{2m+1}{3m}=\frac{3}{m+2}\neq\frac{m+6}{7m^2}\qquad(1)$$

$$\frac{2m+1}{3m}=\frac{3}{m+2}\Rightarrow 2m^2+4m+m+2=9m\Rightarrow 2m^2-4m+2=0$$

$$m^2-2m+1=0\Rightarrow(m-1)^2=0\Rightarrow m=1$$

به ازای $m=1$ رابطهٔ (۱) به‌صورت $1\neq1$ درمی‌آید که قابل قبول نیست. پس m ای که به ازای آن دستگاه فوق جواب نداشته باشد، وجود ندارد.

۵۹۸ (۲) در روش ماتریس وارون جواب‌های دستگاه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c-2\\-c-4\end{bmatrix}$$

پس

$$x=c-2\xrightarrow{x=-1}c=1$$

$$y=-c-4\xrightarrow{c=1}y=-5$$

۵۹۹ (۱) با استفاده از دستور ساروس به‌دست می‌آید

$$\begin{vmatrix}7&0&-2\\-4&2&0\\0&-7&4\end{vmatrix}\begin{matrix}7&0\\-4&2\\0&-7\end{matrix}$$

$$|A|=(56+0-56)-(0+0+0)=0$$

۶۰۰ (۱) با توجه به تعریف به‌دست می‌آید

$$A=\begin{bmatrix}-1&-4&-7\\1&-2&-5\\3&0&-3\end{bmatrix}$$

اگر دترمینان را بر حسب سطر سوم بسط دهیم، آن‌گاه

$$|A|=3\begin{vmatrix}-4&-7\\-2&-5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-1&-4\\1&-2\end{vmatrix}=3\times6-3\times6=0$$

۶۰۱ (۱) ماتریس A قطری است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر هستند. پس

$$b+1=0\Rightarrow b=-1,\quad a-2=0\Rightarrow a=2$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix}-4&0\\0&7\end{bmatrix}$$

درضمن ماتریس B اسکالر است، پس هم درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر هستند و هم درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابرند. پس

$$a+b=c\Rightarrow c=2-1=1$$

توجه کنید در ماتریس B به ازای $b=-1$ و $a=2$ درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. بنابراین $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. در نتیجه

$$|AB|=|A||B|=\begin{vmatrix}-4&0\\0&7\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-28\times1=-28$$

۶۰۲ (۴) در ماتریس قطری، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. اکنون درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی حاصل‌ضرب داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\5&-2\\-b&a+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&b-4-2a-2\\-a+15-4b&?\end{bmatrix}$$

پس

$$\begin{cases}b-4-2a-2=0\\-a+15-4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a+b=6\\a+4b=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8a-4b=-24\\a+4b=15\end{cases}\xrightarrow{+}$$

$$9a=-9\Rightarrow a=-1,\quad b=4$$

بنابراین

$$\begin{vmatrix}3a-1&ab\\-b&a+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&-4\\-4&1\end{vmatrix}=-4-16=-20$$

۶۰۳ ② **راه‌حل اول** ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A=[۲i-j]_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۳&۲\\۵&۴\end{bmatrix}\quad,\quad B=[j^۲-۲i]_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix}-۱&۲&۷\\-۳&۰&۵\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}۱&۰\\۳&۲\\۵&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۲&۷\\-۳&۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۲&۷\\-۹&۶&۳۱\\-۱۷&۱۰&۵۵\end{bmatrix}$$

$$|AB|=-۱\times ۲۰-۲\times ۳۲+۷\times ۱۲=-۲۰-۶۴+۸۴=۰$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱&۲&۷\\-۳&۰&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۳&۲\\۵&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۰&۳۲\\۲۲&۲۰\end{bmatrix}$$

$$|BA|=۴۰\times ۲۰-۲۲\times ۳۲=۸(۱۰۰-۸۸)=۸\times ۱۲=۹۶$$

پس $|AB|-|BA|=۰-۹۶=-۹۶$.

راه‌حل دوم برای محاسبهٔ $|AB|$ توجه کنید که اگر یک ماتریس ۲×۳ در یک ماتریس ۳×۲ ضرب شود، دترمینان ماتریس حاصل‌ضرب صفر است. پس $|AB|=۰$.

۶۰۴ ① ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد، پس $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$. بنابراین

$$|(A\times B)\times C|=|A\times(B\times C)|=\begin{vmatrix}۱&-۱&۲\\۱&۰&۱\\۳&۱&-۱\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر دوم}}۱(-۱)^۳\begin{vmatrix}-۱&۲\\۱&-۱\end{vmatrix}+۱(-۱)^۵\begin{vmatrix}۱&-۱\\۳&۱\end{vmatrix}$$

$$=-(۱-۲)-(۱+۳)=۱-۴=-۳$$

۶۰۵ ③ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه دو ماتریس AB و BA دارای دو ویژگی زیر هستند:

۱) مجموع درایه‌های قطر اصلی AB مساوی مجموع درایه‌های قطر اصلی BA است.

۲) $|AB|=|BA|$

در ماتریس AB مجموع درایه‌های قطر اصلی −۱ است و $|AB|=-۱۰$. در بین گزینه‌ها فقط ماتریس $\begin{bmatrix}۲&۱\\۴&-۳\end{bmatrix}$ این ویژگی‌ها را دارد.

۶۰۶ ② ماتریس A برابر است با

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۲&۳\\۱&۱\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-۱&۰\\۵&۱\end{vmatrix}\\[2mm]\begin{vmatrix}۲&۲\\۳&۴\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}m&۱\\۲&-۱\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}۲-۳&-۱-۰\\۸-۶&-m-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&-۱\\۲&-m-۲\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$|A|=m+۲+۲\Rightarrow|A|=m+۴$$

از طرف دیگر،

$$|۲A|=۱۲\Rightarrow ۲^۲|A|=۱۲\Rightarrow|A|=۳\Rightarrow m+۴=۳\Rightarrow m=-۱$$

۶۰۷ ① از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم: $|A|=\begin{vmatrix}۴|A|&۱\\۳&|A|\end{vmatrix}$. یعنی $|A|=۴|A|^۲-۳$. از حل این معادله به‌دست می‌آید $|A|=۱$ یا $|A|=-\frac{۳}{۴}$. اگر $|A|=۱$، آن‌گاه $۲|A|^۲-۱=۱$ و اگر $|A|=-\frac{۳}{۴}$، آن‌گاه $۲|A|^۲-۱=\frac{۱}{۸}$.

۶۰۸ ④ از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{|A|}{۲}&۵&|A|\\۰&۲|A|&۷\\۰&۰&\frac{|A|}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\frac{|A|}{۲}\times ۲|A|\times\frac{|A|}{۴}$$

$$|A|^۳=۴|A|\Rightarrow|A|=-۲,\quad |A|=۰,\quad |A|=۲$$

از طرف دیگر $|-۲A|=(-۲)^۳|A|=-۸|A|$. اگر $|A|=۲$، آن‌گاه $|-۲A|$ برابر −۱۶ است. اگر $|A|=-۲$، حاصل $|-۲A|$ برابر ۱۶ است. همچنین اگر $|A|=۰$، آن‌گاه $|-۲A|$ برابر صفر است. پس کمترین مقدار $|-۲A|$ برابر −۱۶ است.

۶۰۹ ③ ماتریسی همواره وارون‌پذیر است که دترمینان آن همواره غیرصفر باشد. دترمینان ماتریس گزینهٔ (۱) برابر $a^۲(a^۲+۱)(a^۲+۲)$ است که به ازای $a=۰$ صفر است. دترمینان گزینهٔ (۲) برابر $-a^۲\times a^۲\times a^۲$ است که به ازای $a=۰$ صفر است. دترمینان گزینهٔ (۴) برابر $-a\times a\times a$ است که به ازای $a=۰$ صفر است. ولی دترمینان گزینهٔ (۳) برابر $(a^۲+۱)(a^۲+۲)(a^۲+۳)$ است که همواره غیرصفر است.

۶۱۰ ① از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix}۳&-۱\\۲&-۱\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}-۳&۰\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۴\\۲&۵\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}۳&-۱\\۲&-۱\end{vmatrix}|A|\begin{vmatrix}-۳&۰\\۱&۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱&۴\\۲&۵\end{vmatrix}$$

$$(-۳+۲)|A|(-۳-۰)=۵-۸\Rightarrow ۳|A|=-۳\Rightarrow|A|=-۱$$

۶۱۱ ① دترمینان ماتریس قطری $\begin{bmatrix}۲&۰&۰\\۰&-m&۰\\۰&۰&-\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ برابر m است، پس دترمینان وارون آن برابر $\frac{۱}{m}$ است، پس بنابر فرض سؤال،

$$\begin{vmatrix}۲&۰&-۱\\۱&۱&۰\\-۲&m&۳\end{vmatrix}=\frac{۱}{m}\Rightarrow ۲(-۱)^۲\begin{vmatrix}۱&۰\\m&۳\end{vmatrix}-۱(-۱)^۴\begin{vmatrix}۱&۱\\-۲&m\end{vmatrix}=\frac{۱}{m}$$

$$۲(۳)-(m+۲)=\frac{۱}{m}\Rightarrow ۴-m=\frac{۱}{m}\Rightarrow ۴m-m^۲=۱\Rightarrow m^۲-۴m+۱=۰$$

پس مجموع مقادیر m برابر $S=-\frac{b}{a}=۴$ است.

۶۱۲ (۳) توجه کنید که

$$A^2=\bar{O}\Rightarrow A^2-I=-I\Rightarrow \frac{1}{2}(2(A-I)(A+I))=-I$$

$$|\frac{1}{2}(2A-2I)(A+I)|=|-I|\Rightarrow(\frac{1}{2})^3|2A-2I||A+I|=(-1)^3|I|$$

$$\frac{1}{8}(-8)|A+I|=-1\Rightarrow|A+I|=1$$

۶۱۳ (۴) ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}4&-1&-4\\3&0&-4\\3&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1&-4\\3&0&-4\\3&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

بنابراین

$$|(A^4+A^8+A^{10})^{-1}|=|((A^2)^2+(A^2)^4+(A^2)^5)^{-1}|$$

$$=|(I^2+I^4+I^5)^{-1}|=|(3I)^{-1}|=|\frac{1}{3}I|=(\frac{1}{3})^3|I|=\frac{1}{27}$$

۶۱۴ (۳) بنابر فرض سؤال تساوی زیر برقرار است:

$$\begin{vmatrix}a&b&c+3\\m&3&1\\4&-2&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&b&c\\m&3&1\\4&-2&5\end{vmatrix}=6$$

اکنون اگر هر دو دترمینان را بر حسب سطر اول بسط دهیم، مقادیر a، b و c با ضرایب آن‌ها حذف می‌شوند و فقط عبارت زیر باقی می‌ماند:

$$3(-1)^4\begin{vmatrix}m&3\\4&-2\end{vmatrix}=6\Rightarrow 3(-2m-12)=6\Rightarrow -2m-12=2\Rightarrow m=-7$$

۶۱۵ (۳) در دترمینان خواسته شده از ستون اول عدد ۶، از ستون دوم عدد ۵ و از ستون سوم عدد ۳ را فاکتور می‌گیریم. سپس از سطر اول عدد ۲، از سطر دوم عدد ۷ و از سطر سوم عدد ۳ را فاکتور می‌گیریم. پس

$$\begin{vmatrix}12a&10b&6c\\42d&35e&21f\\18m&15n&9k\end{vmatrix}=6\times5\times3\begin{vmatrix}2a&2b&2c\\7d&7e&7f\\3m&3n&3k\end{vmatrix}$$

$$=6\times5\times3\times2\times7\times3\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\m&n&k\end{vmatrix}$$

$$=6\times5\times3\times2\times7\times3\times\frac{1}{126}=30\times6\times21\times\frac{1}{6\times21}=30$$

۶۱۶ (۱) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ برابر $-2+1=-1$ است، پس $|A^{-1}|=-1$. در نتیجه

$$B=\begin{bmatrix}1&|B|\\1&\frac{1}{|B|}\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین دترمینان}}|B|=\frac{1}{|B|}-|B|$$

$$2|B|=\frac{1}{|B|}\Rightarrow|B|^2=\frac{1}{2}$$

بنابراین $||B|A|=|B|^2|A|=\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{1}{2}$.

۶۱۷ (۳) **راه‌حل اول** ماتریس‌های BA و AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}-1&3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}=-1-3-6=-10$$

$$BA=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3&-2\\1&-3&2\\-3&9&-6\end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید $|AB|=-10$ و

$$|BA|=\begin{vmatrix}-1&3&-2\\1&-3&2\\-3&9&-6\end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{-1(-1)^2\begin{vmatrix}-3&2\\9&-6\end{vmatrix}+3(-1)^3\begin{vmatrix}1&2\\-3&-6\end{vmatrix}-2(-1)^4\begin{vmatrix}1&-3\\-3&9\end{vmatrix}}_{\text{بسط برحسب سطر اول}}=0$$

در نتیجه $|AB|+|BA|=-10+0=-10$.

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن $|BA|$ توجه کنید که دترمینان حاصل‌ضرب ماتریس ۳×۱ در ماتریس ۱×۳، صفر است. بنابراین بدون محاسبه می‌توانستیم نتیجه بگیریم $|BA|=0$.

۶۱۸ (۲) حاصل دترمینان را با بسط دادن برحسب ستون اول به‌دست می‌آوریم: $\begin{vmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&f&g\end{vmatrix}=a(dg-fe)$. توجه کنید در حاصل این دترمینان مقادیر b و c وجود ندارند. به عبارت دیگر، b و c هر تغییری کنند، روی مقدار دترمینان اثر نخواهند داشت.

۶۱۹ (۱) دترمینان‌ها را حساب می‌کنیم تا معادلهٔ هر دو خط به‌دست آید:

$$\begin{vmatrix}x&0&1\\y&2a&-1\\-1&2&3\end{vmatrix}=0$$

$$\underbrace{x(-1)^2\begin{vmatrix}2a&-1\\2&3\end{vmatrix}+1(-1)^4\begin{vmatrix}y&2a\\-1&2\end{vmatrix}}_{\text{بسط برحسب سطر اول}}=0$$

با ساده کردن به‌دست می‌آید: $y=-(3a+1)x-a$. از طرف دیگر،

$$\begin{vmatrix}x&y&1\\a&1&3\\2&-1&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\underbrace{1(-1)^4\begin{vmatrix}a&1\\2&-1\end{vmatrix}+3(-1)^5\begin{vmatrix}x&y\\2&-1\end{vmatrix}}_{\text{بسط برحسب ستون سوم}}=0$$

با ساده کردن به‌دست می‌آید: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{6}+\frac{1}{3}$. شیب خط اول برابر $-(3a+1)$ و شیب خط دوم برابر $-\frac{1}{2}$ است. چون دو خط بر هم عمود هستند، پس حاصل‌ضرب این شیب‌ها برابر -1 است: $-(3a+1)(-\frac{1}{2})=-1$.

در نتیجه $3a+1=-2$، یعنی $a=-1$.

۶۲۰ **۴** راه‌حل اول دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+۲ \\ a & b+۲ & c \\ a+۲ & b & c\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b+۲ & c \\ b & c\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & c \\ a+۲ & c\end{vmatrix} + (c+۲)\begin{vmatrix} a & b+۲ \\ a+۲ & b\end{vmatrix}$$

$$=۲ac+۲bc-۲ac-۲bc-۴c-۴a-۴b-۸=-۴(a+b+c)-۸$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{vmatrix} a & b & c+۲ \\ a & b+۲ & c \\ a+۲ & b & c\end{vmatrix}=-۸$$

راه‌حل دوم می‌توانستیم با فرض $a=b=c=۰$ حاصل دترمینان را به‌دست آوریم:

$$\begin{vmatrix} ۰&۰&۲\\ ۰&۲&۰\\ ۲&۰&۰\end{vmatrix} = \underbrace{۲(-۱)^۴\begin{vmatrix}۰&۲\\ ۲&۰\end{vmatrix}}_{\text{بسط برحسب سطر اول}} = -۸$$

۶۲۱ **۱** بـا وجـود آنکه به درایهٔ سـطر سـوم و سـتون اول ۲ واحد اضافه می‌شود، حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند. این وقتی امکان دارد که $A_{۳۱}=۰$ ، بنابراین

$$\begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}۲&۳\\ a&۱\end{vmatrix}=۰ \Rightarrow ۲-۳a=۰\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

۶۲۲ **۳** حاصل هـر دو دترمینان را با بسـط دادن برحسـب سـتون اول حساب و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}۱&۲&m\\ ۰&۳&۴\\ -۱&n&۵\end{vmatrix}=۷\Rightarrow ۱(-۱)^۲\begin{vmatrix}۳&۴\\ n&۵\end{vmatrix}-۱(-۱)^۴\begin{vmatrix}۲&m\\ ۳&۴\end{vmatrix}=۷$$

$$۱(۱۵-۴n)-۱(۸-۳m)=۷\Rightarrow ۱۵-۴n-۸+۳m=۷\Rightarrow ۳m-۴n=۰$$

از طرف دیگر،

$$\begin{vmatrix}۰&۶&۸\\ ۵&۲&m\\ -۵&n&۵\end{vmatrix}=۵(-۱)^۳\begin{vmatrix}۶&۸\\ n&۵\end{vmatrix}-۵(-۱)^۴\begin{vmatrix}۶&۸\\ ۲&m\end{vmatrix}$$

$$=-۵(۳۰-۸n)-۵(۶m-۱۶)$$

$$=-۱۵۰+۴۰n-۳۰m+۸۰=۱۰(\underbrace{۴n-۳m}_{\text{صفر}})-۷۰=-۷۰$$

۶۲۳ **۲** ابتدا تساوی $(A-I)^۲=-۴A$ را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$(A-I)^۲=-۴A\Rightarrow A^۲-۲A+I=-۴A\Rightarrow A^۲+I=-۲A$$

اکنون دترمینان دو طرف تساوی بالا را به‌دست می‌آوریم:

$$|A^۲+I|=|-۲A|=(-۲)^۳|A|=(-۸)\times(-۱)=۸$$

۶۲۴ **۳** توجه کنید که

$$\big||A|A+۲A\big|=|A|\Rightarrow \big|(|A|+۲)A\big|=|A|$$

چون A ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ است، پس $|A|=|A|(|A|+۲)^۲$. چون $|A|\neq۰$، پس $(|A|+۲)^۲=۱$. در نتیجه $|A|=-۱$ یا $|A|=-۳$. از طرف دیگر، $|۲A|=۲^۲|A|=۴|A|$. اگر $|A|=-۱$، آن‌گاه $|۲A|=-۴$ و اگر $|A|=-۳$، آن‌گاه $|۲A|=-۱۲$.

۶۲۵ **۱** راه‌حل اول بـا توجه به فرض $A^۳=I$ ، در صورت کسر داده شده به‌جای ماتریس I ماتریس $A^۳$ را قرار می‌دهیم. در این صورت

$$\frac{|A^۲+I|}{|A+I|}=\frac{|A^۲+A^۳|}{|A+I|}=\frac{|A^۲(A+I)|}{|A+I|}=\frac{|A^۲||A+I|}{|A+I|}=|A|^۲$$

اکنون مقدار $|A|$ را به‌دست می‌آوریم. برای این کار از طرفین فرض $A^۳=I$ دترمینان می‌گیریم: $|A^۳|=|I|\Rightarrow |A|^۳=۱\Rightarrow |A|=۱$

پس $\frac{|A^۲+I|}{|A+I|}=۱$.

راه‌حل دوم چون $I^۳=I$ ، پس مقدار عبارت مورد نظر را به ازای $A=I$ حساب می‌کنیم: $\frac{|I^۲+I|}{|I+I|}=\frac{|۲I|}{|۲I|}=۱$.

۶۲۶ **۴** طرفین تساوی $A=A^{-۱}$ را در ماتریس A ضرب می‌کنیم. در این صورت به تساوی $A^۲=I$ می‌رسیم. پس

$$|I-\lambda A^۲|=|I-\lambda I|=|(۱-\lambda)I|=(۱-\lambda)^۲|I|=(۱-\lambda)^۲$$

۶۲۷ **۴** طرفین تساوی $A+B=۲AB$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ و از سمت راست در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{-۱}(A+B)B^{-۱}=A^{-۱}(۲AB)B^{-۱}$$

$$A^{-۱}AB^{-۱}+A^{-۱}BB^{-۱}=۲A^{-۱}ABB^{-۱}$$

$$IB^{-۱}+A^{-۱}I=۲I\times I$$

بنابراین $A^{-۱}+B^{-۱}=۲I$. اکنون به‌دست می‌آید:

$$|A^{-۱}+B^{-۱}|=|۲I|=۴ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر از $A^۳=-۸I$ به‌دست می‌آید $|A|^۳=(-۸)^۲|I|$ ، یعنی $|A|^۳=۶۴$. در نهایت $|A|=۴$. اکنون می‌توان نوشت

$$|A^{-۱}(A^{-۱}+B^{-۱})^{-۱}|=|A^{-۱}||(A^{-۱}+B^{-۱})^{-۱}|$$

$$=\frac{۱}{|A|}\times\frac{۱}{|A^{-۱}+B^{-۱}|}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۶}$$

۶۲۸ **۲** راه‌حل اول با استفاده از تساوی $BB^{-۱}=I$ نتیجه می‌گیریم

$$|BAB^{-۱}-۲I|=|BAB^{-۱}-۲BB^{-۱}|=|B(A-۲I)B^{-۱}|$$

$$=|B||A-۲I||B^{-۱}|=|B||A-۲I|\frac{۱}{|B|}=|A-۲I|$$

پس لازم است ماتریس $A-۲I$ را پیدا کنیم:

$$A-۲I=\begin{bmatrix}۶&۲\\ ۳&-۳\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲\\ ۳&-۵\end{bmatrix}$$

بنابراین $|BAB^{-۱}-۲I|=\begin{vmatrix}۴&۲\\ ۳&-۵\end{vmatrix}=-۲۰-۶=-۲۶$.

راه‌حل دوم فرض کنید $B=I$. در این صورت $|BAB^{-۱}-۲I|=|A-۲I|$.

از طرف دیگر،

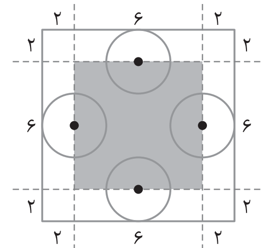
$$A-۲I=\begin{bmatrix}۶&۲\\ ۳&-۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲&۰\\ ۰&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲\\ ۳&-۵\end{bmatrix}$$

بنابراین $|A-۲I|=-۲۶$.

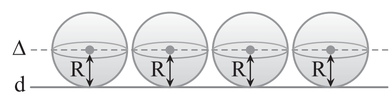
۶۲۹ **۳** صفحهٔ موازی با محور یک سطح مخروطی از هر دو تکهٔ بالا و پایین سطح مخروطی عبور می‌کند. اگر این صفحه از رأس سطح مخروطی عبور نکند، مقطع حاصل هذلولی است و اگر از رأس سطح مخروطی عبور کند مقطع حاصل دو خط متقاطع است.

۶۳۰ **۲** فصل مشترک یک صفحه با یک سطح استوانه‌ای می‌تواند دایره، بیضی، دو خط موازی یا یک خط باشد ولی مستطیل هیچ وقت ایجاد نمی‌شود.

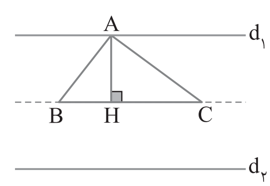
۶۳۱ **۳** به شکل زیر نگاه کنید. برای اینکه سکه به طور کامل درون مربع باشد، باید فاصلهٔ مرکز سکه تا ضلع‌های مربع حداقل برابر ۲ باشد، یعنی مرکز سکه درون مربعی به طول ضلع ۶ قرار گیرد. در این حالت مساحت مکان هندسی مورد نظر برابر $۶\times۶=۳۶$ است.



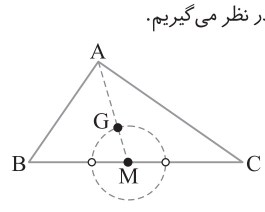
۶۳۲ **۱** با توجه به شکل، مرکز این توپ که در راستای خط d می‌غلتد از خط d به فاصلهٔ شعاع توپ است، یعنی مکان هندسی مورد نظر خطی است موازی خط d و به فاصلهٔ R (شعاع توپ) از خط d.



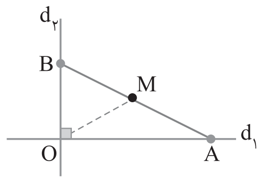
۶۳۳ **۳** در شکل زیر مثلث ABC یکی از مثلث‌های مورد نظر است. توجه کنید که $S=\frac{۱}{۲}AH\times BC$. پس $AH=\frac{۲S}{BC}$. چون مساحت (S) و قاعدهٔ BC ثابت هستند، پس اندازهٔ ارتفاع AH هم ثابت است، یعنی فاصلهٔ رأس A از خط BC مقداری ثابت است، بنابراین مکان هندسی رأس A دو خط موازی BC در دو طرف آن و به فاصلهٔ AH از آن است (دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را در شکل ببینید).



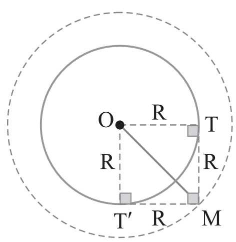
۶۳۴ **۳** در شکل زیر یکی از مثلث‌ها و میانهٔ AM از آن را رسم کرده‌ایم و G مرکز ثقل این مثلث است. توجه کنید که $MG=\frac{۱}{۳}AM$. چون نقطهٔ M نقطه‌ای ثابت و MG هم مقداری ثابت است، پس مکان هندسی G دایره‌ای است به مرکز M و شعاع $\frac{۱}{۳}AM$. توجه کنید که محل برخورد این دایره با ضلع BC عضو مکان هندسی نیست. اما در تست‌ها معمولاً این مکان هندسی را یک دایره در نظر می‌گیریم.



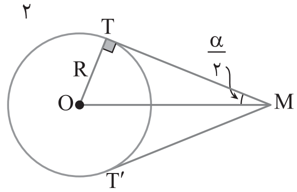
۶۳۵ **۳** در شکل زیر مثلث OAB قائم‌الزاویه است و در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. پس $OM=\frac{۱}{۲}AB$. چون O نقطه‌ای ثابت و $\frac{۱}{۲}AB$ مقداری ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ M دایرهٔ به مرکز O و شعاع $\frac{۱}{۲}AB$ است.



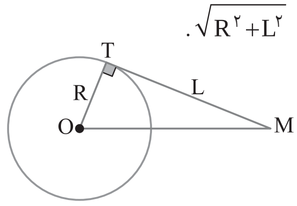
۶۳۶ **۱** فرض کنید M نقطه‌ای از مکان هندسی باشد و مماس‌های MT و MT' بر هم عمود باشند (شکل زیر را ببینید). از نقطهٔ O به نقاط T و T' وصل می‌کنیم. در این صورت در چهارضلعی $OTMT'$ همهٔ زاویه‌ها قائمه‌اند و دو ضلع مجاور آن یعنی OT و OT'، برابرند، پس $OTMT'$ مربع به طول ضلع R است. در نتیجه نقطهٔ M از مرکز O به فاصلهٔ ثابت $\sqrt{۲}R$ است. پس M روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{۲}R$ است.



۶۳۷ **۲** فرض کنید M نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد (شکل زیر را ببینید). چون OM نیمساز زاویهٔ TMT' است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT، $\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R}{OM}$، یعنی $OM=\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$. مقدار $\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$ ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$ است.

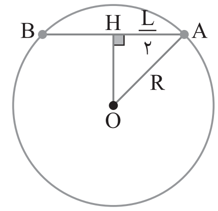


۶۳۸ **۲** فرض کنید M نقطه‌ای از مکان هندسی باشد (شکل زیر را ببینید). در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $OM=\sqrt{OT^۲+MT^۲}=\sqrt{R^۲+L^۲}$. چون R و L مقادیر ثابتی هستند، پس $OM=\sqrt{R^۲+L^۲}$ مقدار ثابتی است. در نتیجه نقطهٔ M از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت $\sqrt{R^۲+L^۲}$ است. در نهایت، مکان هندسی دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^۲+L^۲}$.

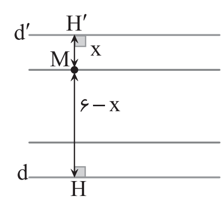


۶۳۹ (۲) **راه‌حل اول** در شکل زیر، وتر AB از دایرهٔ $C(O,R)$ به طول L است. از نقطهٔ O عمودی بر وتر AB رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ H قطع کند. در این صورت H وسط AB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $OH=\sqrt{OA^{۲}-AH^{۲}}=\sqrt{R^{۲}-\frac{L^{۲}}{۴}}$. چون R و L مقادیر ثابتی هستند، پس OH طول ثابتی دارد. بنابراین H در فاصلهٔ ثابتی از نقطهٔ ثابت O است، یعنی مکان هندسی، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^{۲}-\frac{L^{۲}}{۴}}$.

راه‌حل دوم فرض کنید $L=۲R$. در این صورت مکان هندسی مورد نظر وسط قطرهای دایرهٔ $C(O,R)$، یعنی مرکز آن است. فقط در گزینهٔ (۲) به ازای $L=۲R$ نقطهٔ O به‌دست می‌آید.

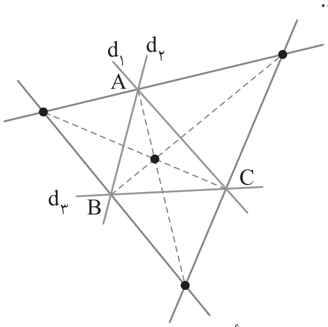


۶۴۰ (۲) فرض کنید M نقطه‌ای از مکان هندسی باشد (شکل زیر را ببینید). بنابر فرض سؤال $MH-MH'=۵$ یعنی $۶-x-x=۵$ پس $x=\frac{۱}{۲}$، یعنی M روی خطی موازی d و d' و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از خط d' است.
به همین صورت اگر $MH'-MH=۵$، نقطهٔ M روی خطی موازی d و d' و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از خط d است، یعنی مکان هندسی مورد نظر دو خط موازی d و d' است.



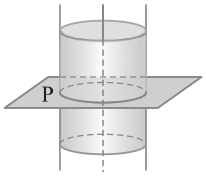
۶۴۱ (۴) توجه کنید که نقطه‌هایی که بین دو خط هستند تفاضل فاصلهٔ آن‌ها از دو خط کمتر از ۵ است. نقطه‌هایی که روی دو خط یا در دو طرف دو خط هستند، تفاضل فاصله‌شان از دو خط برابر ۵ است. در نتیجه نقطه‌ای که تفاضل فاصلهٔ آن از دو خط موازی مورد نظر برابر ۶ باشد وجود ندارد.

۶۴۲ (۳) مطابق شکل زیر، سه خط $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ دوبه‌دو متقاطع هستند. محل همرسی نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث ABC نقطه‌های مورد نظر هستند.

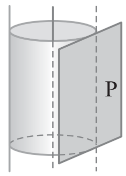


۶۴۳ (۲) اگر صفحه از رأس سطح مخروطی موازی با مولد (در هر یک از وضعیت‌های آن) عبور کند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است.

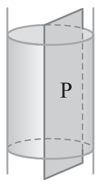
۶۴۴ (۴) فصل مشترک صفحهٔ P با یک سطح استوانه‌ای در صورتی که P بر محور آن عمود باشد یک دایره است.



و اگر صفحهٔ P مماس بر سطح استوانه‌ای باشد، مقطع یک خط است.



و در صورتی که صفحهٔ P موازی با محور سطح استوانه‌ای آن را قطع کند، مقطع دو خط موازی است.



ولی در هیچ حالتی مقطع صفحه با سطح استوانه‌ای دو خط متقاطع نیست.

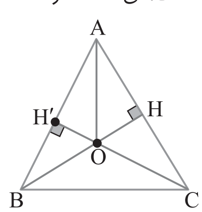
۶۴۵ (۳) اگر صفحهٔ قاطع هر دو تکهٔ بالا و پایین سطح مخروطی را قطع کند و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، آن‌گاه سطح مقطع یک هذلولی است.

۶۴۶ (۴) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن بگذرد، سطح مقطع یک نقطه است.
در صورتی که صفحهٔ P موازی محور سطح مخروطی و گذرا از رأس آن باشد، سطح مقطع دو خط متقاطع است.
اگر صفحهٔ P موازی مولد سطح مخروطی (در هر یک از وضعیت‌های آن) و گذرا از رأس باشد، سطح مقطع یک خط است. ولی در هیچ حالتی سطح مقطع صفحه و سطح مخروطی دو خط موازی نیست.

۶۴۷ (۱) در مثلث ABC، در شکل زیر عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر اضلاع AC و AB وارد می‌کنیم. توجه کنید که

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{OAB}}{S_{OAC}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}OH'\times AB}{\frac{۱}{۲}OH\times AC}\\[2ex] \dfrac{S_{OAB}}{S_{OAC}}=\dfrac{AB}{AC}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{\frac{۱}{۲}OH'\times AB}{\frac{۱}{۲}OH\times AC}\Rightarrow OH=OH'$$

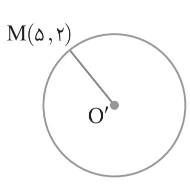
پس نقطهٔ O از دو ضلع زاویهٔ A به یک فاصله است. در نتیجه O روی نیمساز داخلی یا خارجی زاویهٔ A است (بدیهی است که O روی نقطهٔ A نمی‌تواند قرار بگیرد. زیرا در این صورت مثلث‌های AOB و AOC تشکیل نخواهند شد).



۶۴۸ (۲) به m دو مقدار دلخواه می‌دهیم و جواب‌های مشترک دو معادلهٔ به‌دست آمده را پیدا می‌کنیم. به این ترتیب مختصات مرکز دایره به‌دست می‌آید. توجه کنید که

$$m=-۲\Rightarrow -x+۱=۰\Rightarrow x=۱,\quad m=-۱\Rightarrow y+۱=۰\Rightarrow y=-۱$$

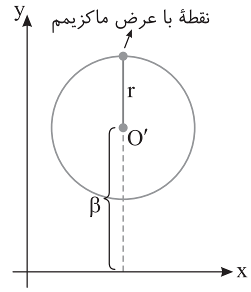
پس مرکز دایره نقطهٔ $O'(۱,-۱)$ است.



فاصلهٔ O' تا نقطهٔ $M(۵,۲)$ برابر شعاع دایرهٔ مورد نظر است:
$r=O'M=\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}=۵$.

۶۴۹ ۲ راه‌حل اول مطابق شکل زیر، اگر $O'(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد، بیشترین عرض نقاط دایره برابر $\beta+r$ است. بنابراین مرکز و شعاع دایرهٔ مورد نظر را تعیین می‌کنیم. توجه کنید که

$$\begin{cases} O'=(\frac{۴+۲}{۲},\frac{۲-۲}{۲})=(۳,۰) \\ r=\frac{AB}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۱۶}}{۲}=\sqrt{۵}\end{cases} \Rightarrow \text{عرض ماکزیمم}=\beta+r=۰+\sqrt{۵}=\sqrt{۵}$$



راه‌حل دوم مرکز این دایره $O'(۳,۰)$ و شعاع آن $r=\sqrt{۵}$ است. پس معادلهٔ دایره به صورت $(x-۳)^۲+y^۲=۵$ است و در این معادله، بیشترین و کمترین مقادیر y وقتی ایجاد می‌شوند که $(x-۳)^۲$ برابر صفر باشد. پس جواب‌های $y^۲=۵$ بیشترین و کمترین مقادیر y را معلوم می‌کند. در نتیجه $\sqrt{۵}$ بیشترین مقدار y و $-\sqrt{۵}$ کمترین مقدار y است.

۶۵۰ ۴ در معادلهٔ گستردهٔ دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابرند:

$$a-۳b=۲a-b\Rightarrow a=-۲b$$

در معادلهٔ دایره از برابری $a=-۲b$ استفاده می‌کنیم:

$$(-۲b-۳b)x^۲+(-۴b-b)y^۲+۵bx-۵by=۰$$

$$(-۵b)x^۲+(-۵b)y^۲+۵bx-۵by=۰$$

دو طرف تساوی را بر $-۵b$ تقسیم می‌کنیم: $x^۲+y^۲-x+y=۰$. اکنون شعاع دایره به‌دست می‌آید $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۱-۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۶۵۱ ۲ در معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ اگر $c<۰$، آن‌گاه معادله دایره است، یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) دایره هستند. اکنون در گزینه‌های دیگر $a^۲+b^۲-۴c$ را به‌دست می‌آوریم. گزینهٔ (۲) دایره نیست، زیرا $a^۲+b^۲-۴c=۴+۹-۱۶<۰$. گزینهٔ (۴) دایره است، زیرا

$$a^۲+b^۲-۴c=۱۶+۲۵-۲۰>۰$$

۶۵۲ ۳ برای اینکه این معادله نشان‌دهندهٔ یک دایره باشد باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر باشند: $k=\frac{۱}{k}$، در نتیجه $k=\pm۱$. به‌ازای $k=۱$ معادلهٔ داده شده به صورت $x^۲+y^۲-۲x+۲=۰$ است که در آن $a^۲+b^۲-۴c=۴+۰-۸<۰$، یعنی این معادله دایره نیست. به‌ازای $k=-۱$ معادلهٔ داده شده به صورت $x^۲+y^۲+۲x-۲=۰$ است. چون $c=-۲<۰$، پس این معادله نشان‌دهندهٔ یک دایره است.

۶۵۳ ۲ راه‌حل اول معادلهٔ دایرهٔ محیطی این مثلث را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر می‌گیریم. نقطه‌های A، B و C در این معادله صدق می‌کنند:

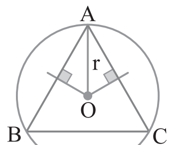
$$A\in\text{دایره}\Rightarrow ۱+a+c=۰,\quad B\in\text{دایره}\Rightarrow ۱-b+c=۰$$

$$C\in\text{دایره}\Rightarrow ۱+۱+a-b+c=۰$$

یعنی $a+c=-۱$، $-b+c=-۱$ و $a-b+c=-۲$. از قرار دادن $-b+c=-۱$ (معادلهٔ دوم) در معادلهٔ سوم به‌دست می‌آید $a=-۱$. در نتیجه $c=۰$ و $b=۱$، یعنی معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC به صورت $x^۲+y^۲-x+y=۰$ است. اکنون قطر دایره را به‌دست می‌آوریم:

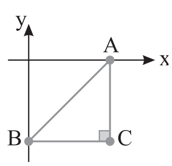
$$۲r=\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

راه‌حل دوم این روش را توضیح می‌دهیم، محاسبات به عهدهٔ خودتان. معادلات عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AB و AC را می‌نویسیم و سپس محل برخورد آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی است (نقطهٔ O را در شکل زیر ببینید). فاصلهٔ O از هر کدام از رأس‌ها برابر شعاع دایرهٔ محیطی است.



راه‌حل سوم این روش گاهی اوقات جواب می‌دهد. در این روش نقطه‌های داده شده را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. اگر مثلث قائم‌الزاویه بود، آن‌گاه وسط وتر مرکز دایرهٔ محیطی و طول وتر قطر دایرهٔ محیطی است (شکل زیر را ببینید):

$$۲r=AB=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$$



۶۵۴ ۱ فرض می‌کنیم $M(x,y)$ نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد. اگر $A(۲,۱)$ و $B(۱,۲)$ دو نقطهٔ داده شده باشند، آن‌گاه

$$MA=۲MB\Rightarrow\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۱)^۲}=۲\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۲)^۲}$$

$$x^۲+۴-۴x+y^۲+۱-۲y=۴(x^۲+۱-۲x+y^۲+۴-۴y)$$

$$۳x^۲+۳y^۲-۴x-۱۴y+۱۵=۰\Rightarrow x^۲+y^۲-\frac{۴}{۳}x-\frac{۱۴}{۳}y+۵=۰$$

مکان هندسی نقطهٔ M یک دایره است و نقطهٔ (m,n) مرکز این دایره است. در نتیجه

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۲}{۳},\frac{۷}{۳})=(m,n)\Rightarrow m+n=\frac{۲}{۳}+\frac{۷}{۳}=۳$$

۶۵۵ ۱ ابتدا وضعیت نقطهٔ A و دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم: $C(A)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+۱+۲-۵=-\frac{۳}{۲}<۰$. پس نقطهٔ A درون دایره است و می‌دانیم از نقطه‌ای درون دایره هیچ مماسی بر دایره رسم نمی‌شود.

۶۵۶ ۲ چون نقطهٔ A خارج دایره است، پس $C(A)>۰$، یعنی $C(-۱,۳)=۱+۹-۲-۱۲+m>۰$. پس $m>۴$. از طرف دیگر شرط دایره بودن معادلهٔ داده شده این است که $a^۲+b^۲-۴c>۰$ یعنی $۴+۱۶-۴m>۰$. بنابراین $m<۵$. اشتراک دو نابرابری حاصل به صورت $۴<m<۵$ است.

۶۵۷ ۱ طول کوتاه‌ترین وتر برابر $۲\sqrt{|C(A)|}$ است و طول بلندترین وتر همان طول قطر $(۲r)$ است.

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر}=۲\sqrt{|C(A)|}=۲\sqrt{|۱+۱-۴-۲-۴|}=۴\sqrt{۲}$$

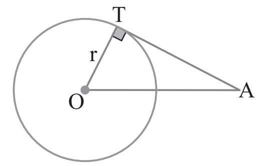
$$x^۲+y^۲-۴x-۲y-۴=۰\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴+۱۶}=۳$$

$$\text{طول بلندترین وتر}=۲r=۶$$

در نتیجه $\frac{\text{طول کوتاه‌ترین وتر}}{\text{طول بلندترین وتر}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۶}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$.

۶۵۸ (۱) **راه‌حل اول** از معادلهٔ دایره به‌دست می‌آید $O(۱,-۲)$ و $r=\sqrt{۱+۴-۳}=\sqrt{۲}$. همچنین $OA=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=۳\sqrt{۲}$. در نتیجه

$$\text{طول مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایره}=AT=\sqrt{OA^۲-r^۲}=\sqrt{۱۸-۲}=۴$$

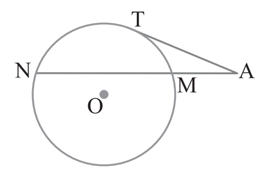


راه‌حل دوم طول مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایره برابر $\sqrt{C(A)}$ است، در نتیجه

$$AT=\sqrt{C(A)}=\sqrt{۴^۲+۱^۲-۲\times۴+۴\times۱+۳}=۴$$

۶۵۹ (۲) فرض کنید AT بر دایره مماس است. با توجه به روابط طولی در دایره، $AT^۲=AM\times AN$، پس باید مربع طول مماس را به‌دست آوریم. می‌دانیم $AT=\sqrt{C(A)}=\sqrt{۹+۴+۶-۷}=\sqrt{۱۲}$.

در نتیجه $MA\times NA=AT^۲=۱۲$.



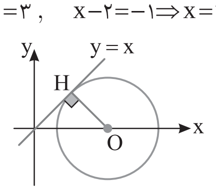
۶۶۰ (۱) معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۲$ یک دایره به مرکز $O(۱,۱)$ و شعاع $r=\sqrt{۱+۱+۲}=۲$ است. برای مشخص کردن وضعیت خط و دایره نسبت به هم، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط را به‌دست می‌آوریم و با شعاع دایره مقایسه کنیم: $\text{فاصلهٔ O تا خط}=OH=\frac{|۱+۱-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. چون $OH<r$، پس خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. در ضمن مختصات مرکز $O(۱,۱)$ در معادلهٔ خط صدق نمی‌کنند. پس گزینهٔ (۴) نمی‌تواند درست باشد.

۶۶۱ (۳) معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول $y=x$ است. پس فاصلهٔ مرکز $O(۲,۰)$ از این خط برابر شعاع دایره است. پس $r=OH=\frac{|۲|}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$.

بنابراین معادلهٔ دایره به صورت $(x-۲)^۲+y^۲=۲$ است. اکنون طول نقاط برخورد دایره را با خط $y=۱$ می‌یابیم:

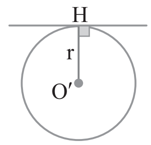
$$\begin{cases}(x-۲)^۲+y^۲=۲\\ y=۱\end{cases}\Rightarrow(x-۲)^۲+۱=۲\Rightarrow(x-۲)^۲=۱$$

$$x-۲=۱\Rightarrow x=۳\,,\quad x-۲=-۱\Rightarrow x=۱$$



۶۶۲ (۱) از معادلهٔ دایره به‌دست می‌آید $O'(۲,-۱)$ و $r=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$. فاصلهٔ مرکز دایره از خط داده شده برابر شعاع دایره است، در نتیجه

$$O'H=r\Rightarrow\frac{|۲-۲-a|}{\sqrt{۱+۴}}=\sqrt{۵}\Rightarrow|a|=۵\Rightarrow a=\pm۵$$



۶۶۳ (۲) مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط بتوان مماسی به طول L بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم کرد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{L^۲+R^۲}$ است (شکل زیر را ببینید). مرکز O و شعاع R را در دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۵$ به‌دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۱)\,,\quad R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۴+۲۰}}{۲}=\sqrt{۷}$$

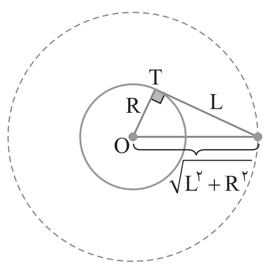
بنابراین از نقاط روی دایره‌ای به مرکز $O(۱,۱)$ و شعاع $\sqrt{(۳\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۷})^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$ می‌توان مماس‌هایی به طول $۳\sqrt{۲}$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۵$ رسم کرد. نقاط تلاقی خط $x+y=۳$ و دایرهٔ به مرکز $O(۱,۱)$ و شعاع ۵، جواب‌های این تست هستند:

$$\begin{cases}(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۲۵\\ x+y=۳\Rightarrow y=۳-x\end{cases}$$

$$(x-۱)^۲+(۳-x-۱)^۲=۲۵\Rightarrow x^۲+۱-۲x+x^۲+۴-۴x=۲۵$$

$$۲x^۲-۶x-۲۰=۰\Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰\Rightarrow(x-۵)(x+۲)=۰$$

اگر $x=۵$، آن‌گاه $y=-۲$، پس نقطهٔ مورد نظر $(۵,-۲)$ است. اگر $x=-۲$، آن‌گاه $y=۵$، پس نقطهٔ مورد نظر $(-۲,۵)$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد.



۶۶۴ (۳) دو خط داده شده متقاطع هستند (شکل زیر را ببینید). فاصلهٔ مرکز دایره تا دو خط مماس برابر است:

$$MH=MH'\Rightarrow\frac{|\sqrt{۱۰}-۳b|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{|b-۳\sqrt{۱۰}|}{\sqrt{۱+۹}}\Rightarrow|\sqrt{۱۰}-۳b|=|b-۳\sqrt{۱۰}|$$

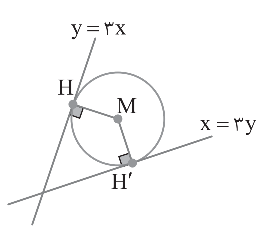
$$\sqrt{۱۰}-۳b=b-۳\sqrt{۱۰}\Rightarrow۴b=۴\sqrt{۱۰}\Rightarrow b=\sqrt{۱۰}$$

$$r=\frac{|\sqrt{۱۰}-۳\sqrt{۱۰}|}{\sqrt{۱۰}}=۲$$

$$\sqrt{۱۰}-۳b=-b+۳\sqrt{۱۰}\Rightarrow۲b=-۲\sqrt{۱۰}$$

$$b=-\sqrt{۱۰}\Rightarrow r=\frac{|\sqrt{۱۰}+۳\sqrt{۱۰}|}{\sqrt{۱۰}}=۴$$

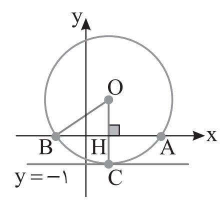
پس شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر ۲ است.



۶۶۵ (۴) **راه‌حل اول** فرض کنید خط $y=-۱$ در نقطهٔ C بر این دایره مماس است. اگر O مرکز دایره باشد، آن‌گاه شعاع OC بر خط $y=-۱$ عمود است و در نتیجه OC بر AB عمود است (شکل زیر را ببینید). چون $AB=۴$ و OH عمودمنصف AB است، پس $BH=۲$. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، $OB=r$ ، $BH=۲$ و $OH=r-۱$. در نتیجه

$$\triangle OBH: OB^۲=BH^۲+OH^۲ \Rightarrow r^۲=۲^۲+(r-۱)^۲$$

$$r^۲=۴+r^۲+۱-۲r \Rightarrow r=\frac{۵}{۲}$$



راه‌حل دوم با توجه به شکل بالا، C نقطهٔ $(۱,-۱)$ است. فرض کنید معادلهٔ دایره‌ای که از نقاط A، B و C می‌گذرد به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. بنابراین

$$\begin{cases} A\in \text{دایره} \Rightarrow ۹+۳a+c=۰ \\ B\in \text{دایره} \Rightarrow ۱-a+c=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+c=-۹ \\ -a+c=-۱ \end{cases} \Rightarrow a=-۲\ ,\ c=-۳$$

$$C\in \text{دایره} \Rightarrow ۱+۱+a-b+c=۰ \xrightarrow{a=-۲,c=-۳} ۲-۲-b-۳=۰$$

$$b=-۳$$

بنابراین معادلهٔ دایره $x^۲+y^۲-۲x-۳y-۳=۰$ است، پس

$$r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۹+۱۲}}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۶۶۶ (۳) توجه کنید که

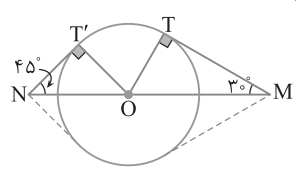
$$r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶}}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

بـا توجه به شـکل زیر، در حالتـی که MN از مرکز O عبور کند بیشـترین طول MN ایجاد می‌شود. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle OMT: \hat{M}=۳۰^\circ \Rightarrow OT=\frac{۱}{۲}OM \xrightarrow{OT=۲\sqrt{۲}} OM=۴\sqrt{۲}$$

$$\triangle ONT': \hat{N}=۴۵^\circ \Rightarrow OT'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}ON \xrightarrow{OT'=۲\sqrt{۲}} ON=۴$$

در نتیجه $MN=OM+ON=۴\sqrt{۲}+۴=۴(\sqrt{۲}+۱)$.

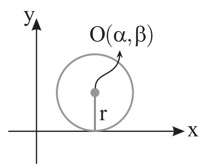


۶۶۷ (۱) **راه‌حل اول** دایرهٔ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r بر محور x مماس است، هرگاه $|\beta|=r$ (شکل زیر را ببینید).

$$x^۲+y^۲-mx+۲y+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{m}{۲},-۱) \\ r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{m^۲+۴-۴}}{۲}=\frac{|m|}{۲} \end{cases}$$

بنابراین

$$|\beta|=r \Rightarrow ۱=\frac{|m|}{۲} \Rightarrow |m|=۲ \Rightarrow m=\pm ۲$$



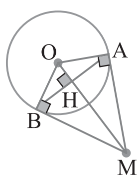
راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد محور x و دایرهٔ $x^۲+y^۲-mx+۲y+۱=۰$ را به‌دسـت می‌آوریم. معادلهٔ محور x ، $y=۰$ است. بنابراین در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم $y=۰$. در نتیجه $x^۲-mx+۱=۰$ معادلهٔ حاصل از برخورد محور x و این دایره است. این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس $m=\pm ۲$.

۶۶۸ (۴) مرکز این دایره نقطهٔ $O(۰,۰)$ و شعاع آن برابر ۵ است. پس

$$OM=\sqrt{(۶-۰)^۲+(-۸-۰)^۲}=\sqrt{۳۶+۶۴}=۱۰\ ,\qquad OA=۵$$

در نتیجـه در مثلـث قائم‌الزاویـهٔ OAM ، OM دو برابـر OA اسـت. پـس $A\hat{M}O=۳۰^\circ$ و $A\hat{M}B=۶۰^\circ$. از طرف دیگر می‌دانیم $MA=MB$. پس مثلث AMB متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۶۰° است. بنابراین مثلث AMB متساوی‌الاضلاع است. اکنون طول MA را به‌دست می‌آوریم

$$\triangle OAM: MA^۲=OM^۲-OA^۲=۷۵ \Rightarrow MA=۵\sqrt{۳} \Rightarrow AB=۵\sqrt{۳}$$



۶۶۹ (۴) اگـر از نقطهٔ A دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ $C(O,r)$ رسـم کنیـم، مطابق شـکل زیـر چهارضلعـی $ATOT'$ مربع به ضلع r اسـت، پس $OA=r\sqrt{۲}$. اکنون مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

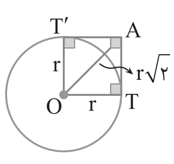
$$x^۲+y^۲-۲x+۲y+a-۱=۰$$

$$\begin{cases} O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۱) \\ r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۴-۴a+۴}}{۲}=\sqrt{۳-a} \end{cases}$$

بنابراین

$$OA=r\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{(a-۱)^۲+۲^۲}=\sqrt{۲}\sqrt{۳-a} \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

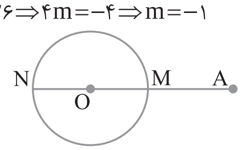
$$a^۲+۱-۲a+۴=۶-۲a \Rightarrow a^۲=۱ \Rightarrow a^۲-۱=۰$$



۶۷۰ (۱) اگر از A به مرکز O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند، آن‌گاه M نزدیک‌ترین و N دورترین نقطهٔ دایره به A است. همچنیـن $AM=OA-r$ و $AN=OA+r$. بنابـر فـرض سـؤال $(OA+r)(OA-r)=۳۶$ ، پس $OA^۲-r^۲=۳۶$. از طرف دیگر می‌دانیم $OA^۲-r^۲=C(A)$ ، پس

$$C(A)=۳۶ \Rightarrow C(۳,۴)=۳۶ \Rightarrow ۹+۱۶+۶-۴m+۱=۳۶$$

$$۳۲-۴m=۳۶ \Rightarrow ۴m=-۴ \Rightarrow m=-۱$$



۶۷۱ **۴** راه‌حل اول در دایرهٔ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r بیشترین مقدار x برابر $\alpha+r$ است. بنابراین مرکز و شعاع این دایره را به‌دست می‌آوریم

$$x^۲+y^۲+۸x-۱۰y+۳۷=۰$$

$$\begin{cases} O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۴,۵) \\ r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۶۴+۱۰۰-۱۴۸}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶}}{۲}=۲ \end{cases}$$

پس بیشترین مقدار x در این دایره برابر $\alpha+r=-۴+۲=-۲$ است.

راه‌حل دوم معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

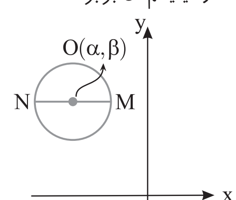
$$x^۲+y^۲+۸x-۱۰y+۳۷=۰\Rightarrow(x+۴)^۲-۱۶+(y-۵)^۲-۲۵+۳۷=۰$$

$$(x+۴)^۲+(y-۵)^۲=۴$$

اگر $(y-۵)^۲$ صفر باشد، آن‌گاه بیشترین و کمترین مقدار x به‌دست می‌آیند. پس

$$(x+۴)^۲=۴\Rightarrow\begin{cases} x+۴=۲\Rightarrow x=-۲ \\ x+۴=-۲\Rightarrow x=-۶ \end{cases}$$

پس ماکزیمم x برابر ۲- و مینیمم آن برابر ۶- است.



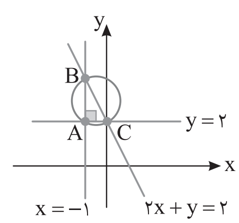
۶۷۲ **۱** این خطوط را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. از برخورد این خطوط مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ایجاد می‌شود (شکل زیر را ببینید). بنابراین BC قطر دایرهٔ محیطی این مثلث است. چون $B(-۱,۴)$ و $C(۰,۲)$ پس مرکز و شعاع دایره به‌صورت زیر است:

$$O(\frac{-۱+۰}{۲},\frac{۴+۲}{۲})=(-\frac{۱}{۲},۳),\quad r=\frac{BC}{۲}=\frac{\sqrt{۱+۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x+\frac{۱}{۲})^۲+(y-۳)^۲=\frac{۵}{۴}\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۴}+x+y^۲+۹-۶y=\frac{۵}{۴}$$

$$x^۲+y^۲+x-۶y+۸=۰$$



۶۷۳ **۳** فرض می‌کنیم $M(x,y)$ نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد.
بنا بر فرض

$$MA=\sqrt{۲}MO\Rightarrow\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۱)^۲}=\sqrt{۲}\sqrt{x^۲+y^۲}\xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$x^۲+۱-۲x+y^۲+۱+۲y=۲x^۲+۲y^۲\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲y-۲=۰$$

پس مکان هندسی مورد نظر دایره است و شعاع آن برابر است با:

$$r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۴+۸}}{۲}=۲$$

بنابراین $\pi r^۲=۴\pi$ = مساحت دایره.

۶۷۴ **۴** تمام خط‌های قائم بر دایره‌ای دلخواه از مرکز دایره می‌گذرند. پس M مرکز دایره است: $M(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,۱)$. در نتیجه مجموع مختصات M برابر ۳ است.

۶۷۵ **۱** در هر دایره خط‌های قائم بر آن همواره از نقطهٔ ثابت مرکز می‌گذرند. پس نقطهٔ $A(۲,-۲)$ مرکز این دایره است. چون در معادلهٔ دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابرند، پس $a=۳$. در نتیجه معادلهٔ دایره به صورت زیر درمی‌آید:

$$۳x^۲+۳y^۲+bx+cy-۳=۰\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}}$$

$$x^۲+y^۲+\frac{b}{۳}x+\frac{c}{۳}y-۱=۰$$

$$O(\frac{-\frac{b}{۳}}{۲},\frac{-\frac{c}{۳}}{۲})=(-\frac{b}{۶},-\frac{c}{۶})=(۲,-۲)\Rightarrow b=-۱۲\ ,\ c=۱۲$$

بنابراین معادلهٔ دایره $x^۲+y^۲-۴x+۴y-۱=۰$ است. بیشترین فاصلهٔ نقاط روی دایره برابر قطر دایره است:

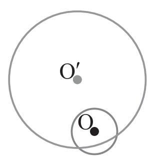
$$۲r=\sqrt{(-۴)^۲+۴^۲-۴(-۱)}=\sqrt{۱۶+۱۶+۴}=\sqrt{۳۶}=۶$$

۶۷۶ **۳** ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$C:x^۲+y^۲-۲x+۴y+۴=۰\Rightarrow O(۱,-۲),r=۱$$

$$C':۲x^۲+۲y^۲-۴y-۳۰=۰\Rightarrow x^۲+y^۲-۲y-۱۵=۰\Rightarrow O'(۰,۱),r'=۴$$

اکنون طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم: $OO'=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$.
چون $|r-r'|<OO'<r+r'$، پس دو دایره متقاطع هستند.

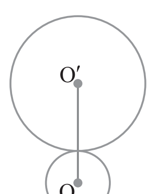


۶۷۷ **۱** ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$C:x^۲+y^۲-۲x+۲y+k=۰\Rightarrow O(۱,-۱),r=\sqrt{۲-k}$$

$$C':x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱=۰\Rightarrow O'(۱,۲),r'=\sqrt{۴}=۲$$

اکنون طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم: $OO'=۳$. چون دو دایره مماس خارج هستند، پس $OO'=r+r'$، یعنی $۲+\sqrt{۲-k}=۳$. در نهایت به‌دست می‌آید $k=۱$.



۶۷۸ **۴** ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰\Rightarrow O'(۲,۳),r'=۴$$

اکنون طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم: $OO'=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$.
چون دو دایره مماس داخل هستند، پس $|r-r'|=OO'$، یعنی $r-۴=\pm۲\sqrt{۲}$.
در نتیجه

$$r=۴\pm۲\sqrt{۲}$$

۶۷۹ **۳** ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲-۶x-۴y+۹=۰\Rightarrow O_۱(۳,۲),\quad r_۱=۲$$

$$x^۲+y^۲+۲x-۳=۰\Rightarrow O_۲(-۱,۰),\quad r_۲=۲$$

چـون شـعاع‌های دو دایـره بـا هـم برابرنـد، پـس مرکز دایـرهٔ مورد نظـر روی عمودمنصف $O_۱O_۲$ است (شکل زیر را ببینید):

$$m_{O_۱O_۲}=\frac{۲-۰}{۳+۱}=\frac{۱}{۲},\quad H(\frac{۳-۱}{۲},\frac{۲+۰}{۲})=(۱,۱)$$

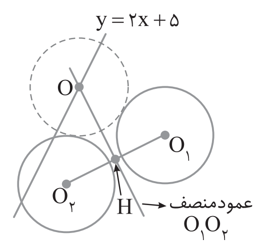
$$m_{\text{عمودمنصف}}=-\frac{۱}{m_{O_۱O_۲}}=-\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲$$

اکنـون معادلـهٔ عمودمنصـف $O_۱O_۲$ را می‌نویسـیم: $y-۱=-۲(x-۱)$، در نتیجـه $y+۲x=۳$. محل برخـورد این عمودمنصف با خط $y=۲x+۵$ مرکز دایرهٔ خواسته شده است:

$$\begin{cases}y+۲x=۳\\ y=۲x+۵\end{cases}\Rightarrow ۲x+۵+۲x=۳\Rightarrow ۴x=-۲\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow O(-\frac{۱}{۲},۴)$$

با فرض اینکه r شعاع دایرهٔ خواسته شده است، به‌دست می‌آید:

$$r=O_۱O-r_۱=\sqrt{(۳+\frac{۱}{۲})^۲+(۲-۴)^۲}-۲=\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}-۲=\frac{\sqrt{۶۵}-۴}{۲}$$

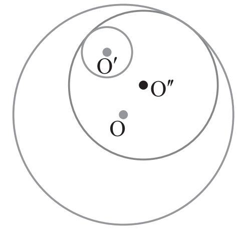


۶۸۰ **۴** توجه کنید که

$$\frac{MA-MB}{MA-۲}=۲\Rightarrow MA-MB=۲MA-۴\Rightarrow MA+MB=۴$$

یعنی مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت ۴ اسـت و این مقدار بیشتر از فاصلهٔ دو نقطهٔ ثابت A و B است. در نتیجه، مکان هندسی نقطهٔ M، یک بیضی با دو نقطهٔ ثابت A و B و مقدار ثابت $۲a=۴$ است.

۶۸۱ **۳** در شـکل زیر دایرهٔ به مرکز O'' و شـعاع R'' یکی از دایره‌های مـورد بحـث در مسـئله اسـت و فـرض کرده‌ایـم $R>R'$. در ایـن صـورت $OO''=R-R''$ و $O'O''=R''-R'$. بـا جمـع کـردن برابری‌هـای بـالا به‌دسـت می‌آید $OO''+O'O''=R-R'$، یعنـی مجموع فاصله‌هـای نقطهٔ O'' از دو نقطـهٔ ثابـت O و O' برابـر مقدار ثابت $R-R'$ اسـت، همچنین $OO'<R-R'$، در نتیجه مکان هندسـی O'' یـک بیضی با نقطه‌های ثابت O و O' و مقدار ثابت $R-R'$ است.



۶۸۲ **۳** اگر دو نقطهٔ ثابت تعریف بیضی (کانون‌ها) F و F' باشند، چون $MF+MF'=۳<۲a=۶$، پس M درون بیضی است.

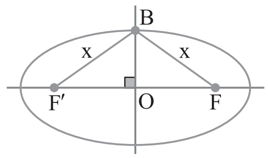
۶۸۳ **۲** چون نقطهٔ M درون بیضی است، پس

$$FF'\le MF+MF'<۲a\Rightarrow ۵\le ۲x-۱<۱۴$$

$$۶\le ۲x<۱۵\Rightarrow ۳\le x<\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

یعنی $x\in\{۳,۴,۵,۶,۷\}$.

۶۸۴ **۲** چـون B روی عمودمنصـف FF' اسـت، پـس $BF=BF'$. همچنین می‌دانیم $BF+BF'=۲a$، یعنی $۲BF=۲a$، در نتیجه $BF=a$.



۶۸۵ **۳** چون طول قطر بزرگ برابر $۲a=۱۲$ و M روی بیضی است، پس $MF+MF'=۱۲$. دو طرف این برابری را به توان دو می‌رسانیم:

$$MF^۲+MF'^۲+۲MF\times MF'=۱۴۴$$

می‌دانیم $MF\times MF'=۲۶$، پس $MF^۲+MF'^۲+۵۲=۱۴۴$. در نتیجه

$$MF^۲+MF'^۲=۹۲$$

۶۸۶ **۳** می‌دانیم مسـاحت یک چهارضلعی که قطرهـای آن بر هم عمود هستند، برابر نصف حاصل‌ضرب دو قطر است. پس

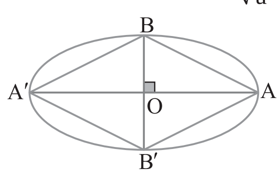
$$\text{مساحت (چهارضلعی } ABA'B')=\frac{۱}{۲}AA'\times BB'=\frac{۱}{۲}\times ۲a\times ۲b=۲ab$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AB=\sqrt{OA^۲+OB^۲}=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

اکنون نسبت خواسته شده به‌دست می‌آید

$$\frac{\text{مساحت (چهارضلعی } ABA'B')}{AB}=\frac{۲ab}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$



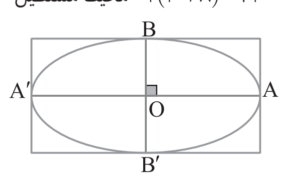
۶۸۷ **۳** توجـه کنید کـه طول و عـرض این مسـتطیل، بـه ترتیب همان اندازه‌های قطر بزرگ و قطر کوچک این بیضی هستند. در نتیجه

$$\text{محیط مستطیل}=۲(۲a+۲b)=۴(a+b)$$

دقت کنید که مقدار b را باید حساب کنیم:

$$b=\sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{۱۰^۲-۶^۲}=۸$$

$$\text{محیط مستطیل}=۴(۱۰+۸)=۷۲$$



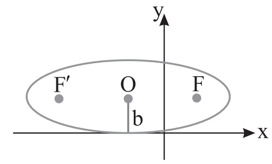
۶۸۸ **۴** **راه‌حـل اول** عرض کانون‌ها برابر یکدیگر اسـت، پس قطر بزرگ بیضی موازی محور x اسـت (شـکل زیر را ببینید). مرکز بیضی وسـط F و F' یعنی $O(-۱,۱)$ است. با توجه به شکل، فاصلهٔ مرکز بیضی تا محور x برابر b است، پس $b=۱$. از طرف دیگر، $۲c=FF'=۴\Rightarrow c=۲$

اکنون با استفاده از برابری $a^۲=b^۲+c^۲$، a را به‌دست می‌آوریم

$$a^۲=b^۲+c^۲=۱+۴=۵\Rightarrow a=\sqrt{۵}$$

بنابراین قطر بزرگ این بیضی $۲a=۲\sqrt{۵}$ است.

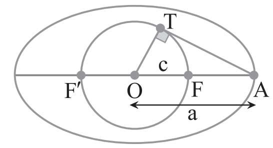
راه‌حل دوم توجه کنید که $۲c=FF'=۴$. چون اندازهٔ بلندترین قطر بیضی $۲a$ است و $a>c$ ، پس باید $۲a>۲c=۴$ ، یعنی باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که از ۴ بزرگ‌تر باشد. فقط گزینهٔ (۴) این شرط را دارد.



۶۸۹ (۲) **راه‌حل اول** در شکل زیر O مرکز دایره و مرکز بیضی است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AT=\sqrt{OA^۲-OT^۲}=\sqrt{a^۲-c^۲}$$

در بیضی $a^۲-c^۲=b^۲$ ، پس $AT=\sqrt{b^۲}=b$.



راه‌حل دوم بنابر روابط طولی در دایره، $AT=\sqrt{(a-c)(a+c)}$ ، پس

$$AT=\sqrt{a^۲-c^۲}=b$$

۶۹۰ (۳) **راه‌حل اول** بنابر فرض مسئله،

$$\text{طول قطر بزرگ}=۲(\text{طول قطر کوچک})\Rightarrow ۲a=۲(۲b)\Rightarrow a=۲b$$

از طرف دیگر، چون $a^۲=b^۲+c^۲$ ، پس

$$(۲b)^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۴b^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۳b^۲=c^۲\Rightarrow \sqrt{۳}b=c$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBF، بنابر نسبت‌های مثلثاتی

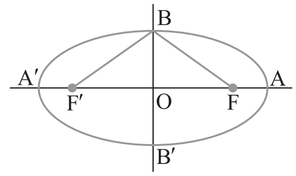
$$\tan(O\hat{B}F)=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{۳}b}{b}=\sqrt{۳}$$

پس $O\hat{B}F=۶۰^\circ$. در نتیجه

$$F\hat{B}F'=۲(O\hat{B}F)=۲\times۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $BF=a$. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBF ، وتر BF دو برابر ضلع OB است. پس $B\hat{F}O=۳۰^\circ$. در نتیجه در مثلث متساوی‌الساقین BFF' ، اندازهٔ دو زاویهٔ مجاور قاعده، ۳۰° است. پس

$$F\hat{B}F'=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۳۰^\circ)=۱۲۰^\circ$$



۶۹۱ (۴) **راه‌حل اول** بنابر فرض‌های مسئله،

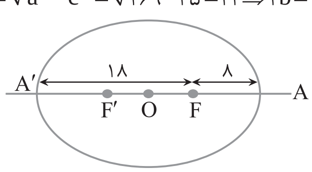
$$FA=a-c=۸\ ,\quad F'A=a+c=۱۸$$

بنابراین

$$\text{طول قطر کوچک}=۲b=۲\sqrt{a^۲-c^۲}=۲\sqrt{(a-c)(a+c)}=۲\sqrt{۸\times۱۸}=۲۴$$

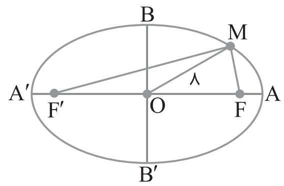
راه‌حل دوم چون $F'A'=FA=۸$ و $F'A'+F'F=۱۸$ ، پس $F'F=۱۰$. در نتیجه $c=۵$. بنابراین $a=OA=c+FA=۵+۸=۱۳$. در نتیجه

$$b=\sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=۱۲\Rightarrow ۲b=۲۴$$



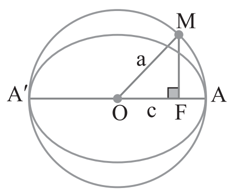
۶۹۲ (۴) بنابر فرض مسئله $۲a=۲۰$ و $۲b=۱۲$. پس $a=۱۰$ و $b=۶$. پس $c=\sqrt{a^۲-b^۲}=\sqrt{۱۰^۲-۶^۲}=۸$. بنابراین $FF'=۲c=۱۶$. توجه کنید که در مثلث MFF' ، میانهٔ OM نصف ضلع FF' است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است و $F\hat{M}F'=۹۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFF' ، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$MF^۲+MF'^۲=FF'^۲=۱۶^۲=۲۵۶$$



۶۹۳ (۱) چون M روی دایرهٔ به قطر AA' است، پس $OM=a$. از طرف دیگر می‌دانیم $OF=c$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMF، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$MF=\sqrt{OM^۲-OF^۲}=\sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{b^۲}=b$$

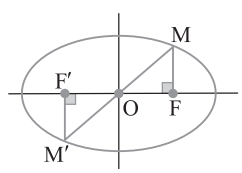


۶۹۴ (۲) فرض کنید، نقطهٔ M و کانون F ، طول‌های برابر دارند. MF نصف وتر کانونی بیضی است، پس $MF=\frac{b^۲}{a}$ و $OF=c$. از طرف دیگر $۲a=۶$ ، پس $a=۳$ و $۲b=۲\sqrt{۶}$ ، پس $b=\sqrt{۶}$. در نتیجه چون $c^۲=a^۲-b^۲$ ، پس $c=\sqrt{۹-۶}=\sqrt{۳}$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle OMF: OM^۲=MF^۲+OF^۲ \xrightarrow[OF=c]{MF=\frac{b^۲}{a}}$$

$$OM^۲=(\frac{b^۲}{a})^۲+c^۲=(\frac{۶}{۳})^۲+۳=۷$$

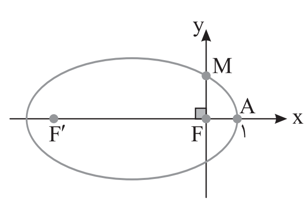
پس $OM=\sqrt{۷}$. در نتیجه اندازهٔ قطر MM' برابر $۲\sqrt{۷}$ است.



۶۹۵ (۲) فاصلهٔ دو کانون بیضی برابر ۲c است، پس $۲c=FF'=۸$ ، یعنی $c=۴$. از طرف دیگر، مرکز بیضی وسط دو کانون F و F' است. پس

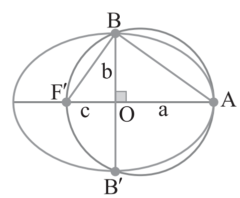
$$\text{مرکز بیضی}=O(\frac{-۸+۰}{۲},\frac{۰+۰}{۲})=(-۴,۰)$$

در نتیجه $a=OA=۵$ ، پس $b=\sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{۵^۲-۴^۲}=۳$. می‌دانیم $MF=\frac{b^۲}{a}=\frac{۹}{۵}$. پس $M(۰,\frac{۹}{۵})$ نقطهٔ مورد نظر است.



۶۹۶ **۲** می‌دانیم $AA'=۲a$، پس $۲a=AA'=\sqrt{(-۲-۴)^۲+۰}=۶$، یعنی $a=۳$. همچنین چون $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ و $a=۳$، پس $c=\sqrt{۵}$. اکنون به‌دست می‌آید $b=\sqrt{a^۲-c^۲}=\sqrt{۹-۵}=۲$. در نتیجه $MN=\frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲\times ۲^۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$.

۶۹۷ **۴** دایرهٔ به قطر AF' از دو رأس B و B' می‌گذرد. زاویهٔ ABF'، زاویهٔ محاطی مقابل به قطر AF' است، پس $A\hat{B}F'=۹۰^\circ$. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABF'، $OB^۲=OA\times OF'$، یعنی $b^۲=ac$. در ضمن $e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$، پس $e=\sqrt{۱-\frac{ac}{a^۲}}=\sqrt{۱-\frac{c}{a}}=\sqrt{۱-e}$. دو طرف برابری $e=\sqrt{۱-e}$ را به توان دو می‌رسانیم، پس $e^۲=۱-e$. با حل این معادله به‌دست می‌آید $e=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$.



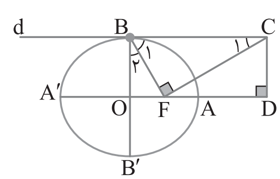
۶۹۸ **۳** بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle BFC:\hat{C}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow BF=\frac{۱}{۲}BC \xrightarrow{BF=a} BC=۲a$$

چهارضلعی $BCDO$ مستطیل است، پس $OD=BC=۲a$. در نتیجه $AD=a$. از طرف دیگر $\hat{C}_۱+\hat{B}_۱=۹۰^\circ$ و $\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=۹۰^\circ$، در نتیجه $\hat{B}_۲=\hat{C}_۱=۳۰^\circ$. اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle BOF:\hat{B}_۲=۳۰^\circ \Rightarrow OF=\frac{۱}{۲}BF \xrightarrow[OF=c]{BF=a} c=\frac{۱}{۲}a \Rightarrow FA=\frac{a}{۲}$$

در نتیجه $\frac{AD}{AF}=\frac{a}{\frac{a}{۲}}=۲$.

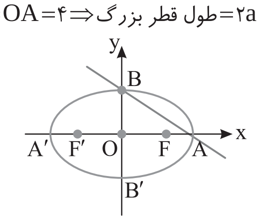


۶۹۹ **۳** نقطهٔ تلاقی خط $۳x+۴y=۱۲$ با محور x رأس A است. پس از حل معادلهٔ حاصل از برخورد این خط با محور x نقطهٔ A به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}۳x+۴y=۱۲\\ y=۰\end{cases}\Rightarrow ۳x=۱۲\Rightarrow x=۴\Rightarrow A(۴,۰)$$

از طرف دیگر فاصلهٔ مرکز بیضی تا رأس A برابر نصف قطر بزرگ بیضی است. بنابراین

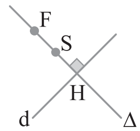
$a=OA=۴\Rightarrow$ طول قطر بزرگ $=۲a=۸$



۷۰۰ **۱** معادلهٔ خط Δ، گذرنده از F و عمود بر خط d را می‌نویسیم، چون $m_d=۱$، پس $m_\Delta=-۱$، در نتیجه $\Delta:y-۲=-(x-۱)$. بنابراین $\Delta:x+y=۳$. محل برخورد دو خط d و Δ را به‌دست می‌آوریم:

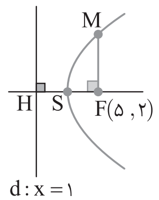
$$\begin{cases}x+y=۳\\ x-y=۳\end{cases}\Rightarrow H(۳,۰)$$

نقطهٔ S، رأس سهمی، وسط پاره‌خط FH است، پس $S(\frac{۱+۳}{۲},\frac{۲+۰}{۲})=(۲,۱)$. بنابراین مجموع طول و عرض رأس سهمی برابر است با $۲+۱=۳$.

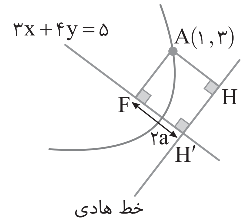


۷۰۱ **۲** با توجه به شکل، FM نصف طول وتر کانونی است، پس

$$FM=۲a=FH=۴$$

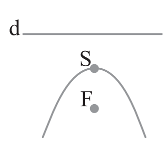


۷۰۲ **۲** شکل سؤال به صورت زیر است. چون A روی سهمی است، پس $AH=AF$، بنابراین چهارضلعی $AHH'F$ مربعی به ضلع $۲a$ است. بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۳)$ از خط $۳x+۴y=۵$ برابر $۲a$ است. در نتیجه $۲a=AF=\frac{|۳+۱۲-۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$. در نتیجه $a=۱$. پس فاصلهٔ کانونی سهمی برابر ۱ است.

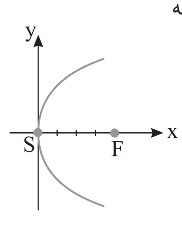


۷۰۳ **۳** صورت کلی معادلهٔ این سهمی $y^۲=۴ax$ است. بنابراین $۴a=۱۶$، پس $a=۴$. در نتیجه فاصلهٔ رأس تا کانون این سهمی برابر ۴ است.

۷۰۴ **۱** می‌دانیم نزدیک‌ترین نقطهٔ سهمی به کانون، رأس سهمی است. معادلهٔ سهمی، $x^۲=-۴y$ است که در آن رأس، $S(۰,۰)$ است.



۷۰۵ **۳** می‌دانیم $a=|SF|=۴$. در ضمن از موقعیت F و S نسبت به هم نتیجه می‌گیریم دهانهٔ سهمی رو به راست است، پس معادلهٔ سهمی به شکل $y^۲=۴ax$ است، در نتیجه معادلهٔ سهمی: $y^۲=۱۶x$

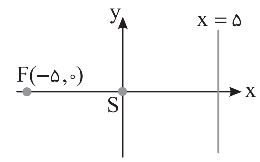


۷۰۶ **۲** کانون و خط هادی را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. به سادگی می‌توان فهمید رأس سهمی $S(۰,۰)$ است و $a=۵$. همچنین دهانهٔ سهمی رو به چپ است، پس صورت کلی معادلهٔ این سهمی $y^۲=-۴ax$ و در نتیجه معادلهٔ سهمی $y^۲=-۲۰x$ است. برای به‌دست آوردن محل برخورد این سهمی با نیمساز ربع سوم معادلهٔ حاصل از برخورد $y=x$ را با سهمی به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} y^۲=-۲۰x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^۲=-۲۰x \Rightarrow x=۰\ (\text{غ.ق.ق.}),\ x=-۲۰ \Rightarrow y=-۲۰$$

$A(-۲۰,-۲۰)$

$-۴۰=-۲۰-۲۰=$ مجموع مختصات A

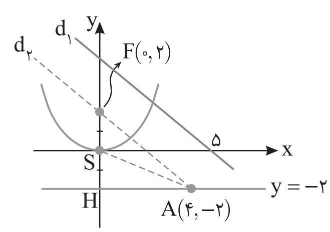


۷۰۷ **۲** رأس این سهمی $S(۰,۰)$ و صورت کلی آن $x^۲=۴ay$ است، پس در این سهمی مقدار a برابر ۲ است. همچنین دهانهٔ این سهمی رو به بالا و $F(۰,۲)$ کانون آن است. بنابراین شکل سهمی به صورت زیر است. معادلهٔ خط $d_۲$ گذرنده از $F(۰,۲)$ و موازی خط $d_۱: x+y=۵$، را به‌دست می‌آوریم. چون $m_{d_۱}=-۱$، پس $m_{d_۲}=-۱$، در نتیجه $d_۲: y-۲=-x$، بنابراین $d_۲: x+y=۲$. معادلهٔ حاصل از برخورد این خط را با خط هادی $(y=-۲)$ به‌دست می‌آوریم تا مختصات A به‌دست آید:

$$\begin{cases} x+y=۲ \\ y=-۲ \end{cases} \Rightarrow A(۴,-۲)$$

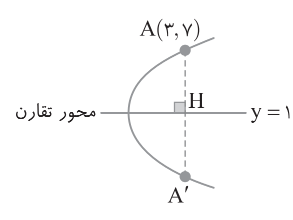
مساحت مثلث ASF به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S_{ASF}=\frac{۱}{۲}\times FS\times AH=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۴=۴$$



۷۰۸ **۴** می‌دانیم محور کانونی هر سهمی محور تقارن آن است. پس قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,۷)$ نسبت به محور تقارن این سهمی روی آن قرار دارد. رأس سهمی $(y-۱)^۲=۴a(x-b)$ نقطهٔ $(b,۱)$ است و $y=۱$ محور تقارن آن است. برای پیدا کردن قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,۷)$ نسبت به خط $y=۱$ از A عمود AH را بر این خط وارد می‌کنیم و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به A' برسیم. نقطهٔ H به مختصات $(۳,۱)$ است و $H=\frac{A+A'}{۲}$. بنابراین $A'=۲H-A$. پس

$$A'=۲(۳,۱)-(۳,۷)=(۶,۲)-(۳,۷)=(۳,-۵)$$



۷۰۹ **۴** ابتدا معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y=-۲+(۲x+۱)^۲ \Rightarrow y=-۲+۴(x+\frac{۱}{۲})^۲$$

$$۴(x+\frac{۱}{۲})^۲=y+۲ \Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}(y+۲)$$

رأس این سهمی نقطهٔ $S(-\frac{۱}{۲},-۲)$ است. بنابراین فاصلهٔ مبدأ از رأس برابر است با

$$OS=\sqrt{\frac{۱}{۴}+۴}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

۷۱۰ **۲** به موازات هر خط دلخواهی می‌توان مماس بر سهمی رسم کرد به غیر از خطوطی که موازی محور تقارن سهمی هستند. چون در معادلهٔ این سهمی توان y برابر ۲ است، پس محور تقارن آن موازی محور x است. در نتیجه به موازات خطوط با معادلهٔ $y=k$ نمی‌توان مماس بر این سهمی رسم کرد.

۷۱۱ **۱** ابتدا معادلهٔ سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$۳x^۲-۶x=-۴y-۱۱ \Rightarrow x^۲-۲x=\frac{-۴y-۱۱}{۳}$$

$$x^۲-۲x+۱=\frac{-۴y-۱۱+۳}{۳}$$

درنتیجه $(x-۱)^۲=-\frac{۴}{۳}(y+۲)$. درنتیجه رأس این سهمی $S(h,k)=(۱,-۲)$ است و $a=\frac{۱}{۳}$. همچنین دهانهٔ این سهمی رو به پایین است. بنابراین معادلهٔ خط هادی آن به صورت $y=k+a=-۲+\frac{۱}{۳}=-\frac{۵}{۳}$ است.

۷۱۲ **۳** معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲-۴x=-۸y+۱۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=-۸y+۱۲+۴$$

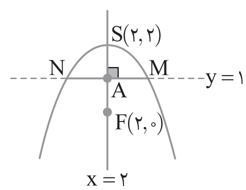
$$(x-۲)^۲=-۸(y-۲)$$

در نتیجه رأس این سهمی $S(h,k)=(۲,۲)$ است و $a=۲$. همچنین دهانهٔ این سهمی رو به پایین است. اکنون کانون به‌دست می‌آید $F(h,k-a)=(۲,۲-۲)=(۲,۰)$. نقطهٔ A وسط پاره‌خط SF است، پس $A=\frac{(۲,۲)+(۲,۰)}{۲}=(۲,۱)$. توجه کنید که MN خط گذرا از A و عمود بر محور تقارن (خط $x=۲$) است، پس معادلهٔ آن $y=۱$ است. با قرار دادن $y=۱$ در معادلهٔ سهمی طول نقطه‌های M و N به‌دست می‌آیند:

$$x^۲-۴x-۴=۰ \Rightarrow x_۱=۲+۲\sqrt{۲},\ x_۲=۲-۲\sqrt{۲}$$

پس $M(۲+۲\sqrt{۲},۱)$ و $N(۲-۲\sqrt{۲},۱)$. در نتیجه

$$MN=|۲+۲\sqrt{۲}-۲+۲\sqrt{۲}|=۴\sqrt{۲}$$



۷۱۳ (۴) معادلهٔ داده شده را مرتب می‌کنیم:

$$x^2+y^2+\frac{2}{m}x+8y=12-mx^2 \Rightarrow (1+m)x^2+y^2+\frac{2}{m}x+8y=12$$

در معادلهٔ سهمی‌ای که دهانهٔ آن رو به راست است x^2 وجود ندارد، پس باید ضریب آن صفر باشد، در نتیجه $1+m=0$، یعنی $m=-1$. بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y^2-2x+8y=12$ است. اکنون معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم تا مختصات رأس آن را به‌دست آوریم:

$$y^2+8y=2x+12 \Rightarrow (y+4)^2-16=2x+12$$

$$(y+4)^2=2x+28 \Rightarrow (y+4)^2=2(x+14)$$

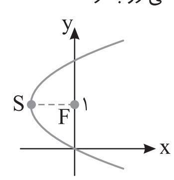
بنابراین رأس این سهمی نقطهٔ $S(-14,-4)$ است.

۷۱۴ (۳) **راه‌حل اول** ابتدا معادلهٔ سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2-my=nx \Rightarrow y^2-my+(\frac{m}{2})^2=nx+(\frac{m}{2})^2$$

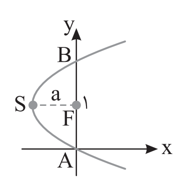
$$(y-\frac{m}{2})^2=n(x+\frac{m^2}{4n})$$

بنابراین رأس این سهمی $S(h,k)=(-\frac{m^2}{4n},\frac{m}{2})$ است و $a=\frac{n}{4}$. چون عرض رأس سهمی برابر ۱ است (شکل زیر را ببینید)، پس $\frac{m}{2}=1$، یعنی $m=2$. همچنین کانون این سهمی $F(h+a,k)=(0,1)$ است، پس $(\frac{n}{4}-\frac{1}{n},1)=(0,1)$، یعنی $\frac{n}{4}-\frac{1}{n}=0$، پس $n=\pm2$. مقدار $n=-2$ قابل قبول نیست، چون دهانهٔ سهمی رو به راست است. بنابراین $m=n=2$.



راه‌حل دوم فرض کنید سهمی محور عرض‌ها را در نقاط A و B قطع کرده است. چون F وسط A و B است، پس B نقطهٔ $(0,2)$ است و مختصات آن در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند: $4=2m \Rightarrow m=2$

از طرف دیگر، طول وتر کانونی (AB) برابر $4a$ است. چون $A(0,0)$ و $B(0,2)$، پس $AB=2$. بنابراین $4a=2$. در نتیجه $a=\frac{1}{2}$. با توجه به شکل زیر، رأس این سهمی $S(-a,1)=(-\frac{1}{2},1)$ است. مختصات S در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند: $1=2-\frac{1}{2}n \Rightarrow n=2$



۷۱۵ (۴) **راه‌حل اول** چون سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس مختصات $O(0,0)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:

$$O\in \text{سهمی} \Rightarrow 0-0=0+n \Rightarrow n=0$$

اکنون معادلهٔ سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2-4y+4=mx+4 \Rightarrow (y-2)^2=m(x+\frac{4}{m})$$

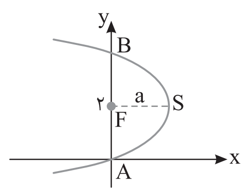
چون دهانهٔ سهمی رو به چپ است، پس معادلهٔ آن به شکل $(y-k)^2=-4a(x-h)$ است. رأس این سهمی $S(h,k)=(-\frac{4}{m},2)$ است و $a=-\frac{m}{4}$. همچنین کانون سهمی نقطهٔ $F(h-a,k)$ است. با توجه به شکل $F(0,2)$، بنابراین

$$h-a=0 \Rightarrow -\frac{4}{m}+\frac{m}{4}=0$$

در نتیجه $m=\pm4$. چون دهانهٔ سهمی رو به چپ است مقدار $m=4$ قابل قبول نیست، پس $m=-4$. در نتیجه $m+n=-4+0=-4$.

راه‌حل دوم سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس $n=0$. با توجه به شکل زیر، AB وتر کانونی سهمی است. چون $AF=2$، پس $2a=2 \Rightarrow a=1$ رأس سهمی نقطهٔ $S(a,2)=(1,2)$ است. بنابراین مختصات S در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند: $4-8=m \Rightarrow m=-4$

در نتیجه $m+n=-4$.



۷۱۶ (۳) در سهمی فاصلهٔ کانونی را با a نمایش می‌دهیم. در اینجا برای اینکه اشتباهی صورت نگیرد، در معادلهٔ سهمی داده شده، به جای a، m را قرار می‌دهیم. پس معادلهٔ داده شده $x^2-mx=2my+3$ می‌شود. اکنون توجه کنید که

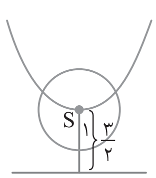
$$a=\left|\frac{\text{ضریب متغیری که عبارت، نسبت به آن درجهٔ ۱ است}}{4\times(\text{ضریب متغیر درجهٔ ۲})}\right|=\left|\frac{2m}{4}\right|=\frac{|m|}{2}$$

چون فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $2a$ است، پس $a=3$. در نتیجه $\frac{|m|}{2}=3$، یعنی $m=\pm6$. اکنون به ازای $m=6$ معادلهٔ سهمی را به شکل استاندارد $(x-3)^2=12(y+1)$ می‌نویسیم. در این معادله رأس سهمی $S(3,-1)$ است. چون این جواب در گزینه‌ها هست، پس دیگر بررسی $m=-6$ لازم نیست.

۷۱۷ (۴) مکان هندسی نقاطی که از رأس سهمی به فاصلهٔ ۱ هستند، دایره‌ای به مرکز رأس سهمی و شعاع ۱ است. نقاط برخورد این دایره با خط هادی نقاط مورد نظر هستند. فاصلهٔ رأس سهمی تا خط هادی برابر a است. a را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم:

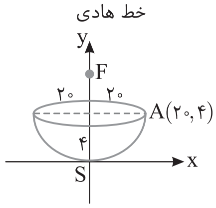
$$a=\left|\frac{\text{ضریب متغیری که عبارت، نسبت به آن درجهٔ ۱ است}}{4\times(\text{ضریب متغیر درجهٔ ۲})}\right|=\left|\frac{-6}{4\times1}\right|=\frac{3}{2}$$

چون $a=\frac{3}{2}>1$، پس دایره خط هادی را قطع نمی‌کند، یعنی چنین نقطه‌ای وجود ندارد.



خط هادی

۷۱۸ (۲) آینهٔ سهموی را مطابق شکل روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم به‌طوری که رأس آن مبدأ مختصات باشد. با توجه به فرض تست نقطهٔ $A(20,4)$ روی این آینهٔ سهموی قرار دارد. همچنین از روبه‌رو این آینه یک سهمی به معادلهٔ $x^2=4ay$ است. پس



$$x^2=4ay \xrightarrow{A\in \text{سهمی}} 20^2=4a(4) \Rightarrow a=\frac{400}{16}=25$$

۷۱۹ (۱) بنابر خاصیت بازتابندگی سهمی بازتاب پرتوهای نوری که موازی محور سهمی بر آن می‌تابند از کانون آن می‌گذرند. پس باید کانون سهمی داده شده را به‌دست آوریم:

$$x^۲-۲x+۴y+۵=۰\Rightarrow(x-۱)^۲-۱+۴y+۵=۰$$

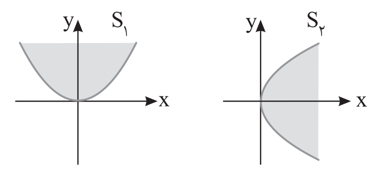
$$(x-۱)^۲=-۴y-۴\Rightarrow(x-۱)^۲=-۴(y+۱)$$

پس دهانهٔ این سهمی رو به پایین و رأس آن $S(h,k)=(۱,-۱)$ است. همچنین $۴a=۴$، در نتیجه $a=۱$. مختصات کانون این سهمی به‌صورت زیر است:

$$F(h,k-a)=(۱,-۱-۱)=(۱,-۲)$$

۷۲۰ (۱) رابطهٔ $-۱\le y\le ۳$ و $۲\le x\le ۵$ نمایانگر مستطیلی در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^۲$ است، به طوری که اضلاع آن روی خط‌های $x=۲$، $x=۵$، $y=-۱$ و $y=۳$ قرار دارند.

۷۲۱ (۴) نمودارهای $S_۱$ و $S_۲$ رسم شده است (شکل‌های زیر را ببینید). پس $S_۱\cap S_۲$ همانند شکل گزینهٔ (۴) است.



۷۲۲ (۲) با توجه به شکل، پاره‌خط AB روی خط $x=۳$ قرار دارد و عرض A برابر ۱ و عرض B برابر -۳ است. پس رابطهٔ مربوط به پاره‌خط AB به‌صورت $x=۳$ و $-۳\le y\le ۱$ است.

۷۲۳ (۳) پاره‌خط AB روی خط $y=۳$ و پاره‌خط DC روی خط $y=-۴$ قرار دارد. همچنین پاره‌خط BC روی خط $x=۴$ و پاره‌خط AD روی خط $x=۱$ قرار دارد. بنابراین ناحیهٔ رنگی در رابطهٔ $۱\le x\le ۴$ و $-۴\le y\le ۳$ صدق می‌کند.

۷۲۴ (۳) معادلهٔ $x^۲+y^۲=۴$ مشخص کنندهٔ یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است. رابطهٔ $x^۲+y^۲\le ۴$ نشان‌دهندهٔ نقاط درون و روی این دایره است.

۷۲۵ (۳) ناحیه‌ای که در روابط $(x-۳)^۲+(y-۲)^۲\le ۹$ و $۱/۵\le x\le ۴/۵$ صدق می‌کند قسمتی از سطح دایرهٔ به مرکز $(۳,۲)$ و شعاع ۳ است که بین دو خط موازی $x=۱/۵$ و $x=۴/۵$ قرار دارد (شکل زیر را ببینید). در شکل مثلث OAB مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. پس $A\hat{O}B=۶۰^\circ$ و $B\hat{O}C=۱۲۰^\circ$. بنابراین

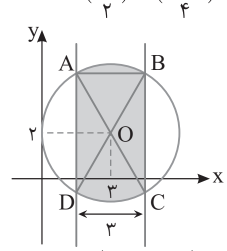
$$\text{مساحت قطاع } OAB=\text{مساحت قطاع } OCD=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\pi(۳)^۲=\frac{۳\pi}{۲}$$

$$S_{OBC}=S_{OAD}=\frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin ۱۲۰^\circ=\frac{۹}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

در نتیجه

$$\text{مساحت قسمت رنگی}=۲(\text{مساحت قطاع } OAB)+۲S_{OBC}$$

$$=۲(\frac{۳\pi}{۲})+۲(\frac{۹\sqrt{۳}}{۴})=۳\pi+\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$



۷۲۶ (۲) رابطهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y\le ۳$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

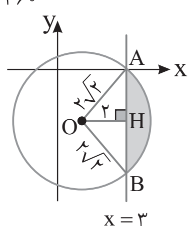
$$x^۲+y^۲-۲x+۴y\le ۳\Rightarrow(x-۱)^۲-۱+(y+۲)^۲-۴\le ۳$$

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲\le ۸$$

بنابراین رابطهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y\le ۳$ درون و روی دایرهٔ به مرکز $(۱,-۲)$ و شعاع $۲\sqrt{۲}$ است. همچنین رابطهٔ $x\ge ۳$ سمت راست و روی خط $x=۳$ است. پس روابط $x^۲+y^۲-۲x+۴y\le ۳$ و $x\ge ۳$ یک قطعه از دایره را مشخص می‌کنند (شکل زیر را ببینید). فاصلهٔ مرکز O از وتر AB برابر ۲ است و $OA=OB=۲\sqrt{۲}$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های OAH و OBH، $AH=BH=۲$. در نتیجه زاویهٔ AOB برابر ۹۰° است $(AB^۲=OA^۲+OB^۲)$. در نتیجه

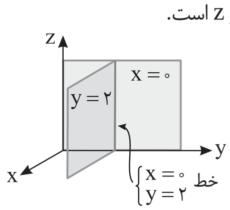
$$\text{مساحت قسمت رنگی}=\text{مساحت (قطاع } OAB)-\text{مساحت (مثلث } OAB)$$

$$\text{مساحت قسمت رنگی}=\frac{۹۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\pi(۲\sqrt{۲})^۲-\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})=۲\pi-۴$$



۷۲۷ (۴) ارتفاع و عرض نقطهٔ A منفی و طول آن مثبت است، پس نقطهٔ A در ناحیهٔ هشتم دستگاه مختصات $\mathbb{R}^۳$ واقع است.

۷۲۸ (۱) $x=۰$ معادلهٔ صفحهٔ yz است و $y=۲$ معادلهٔ صفحه‌ای موازی صفحهٔ xz و به فاصلهٔ ۲ از آن است. پس $\begin{cases}x=۰\\y=۲\end{cases}$ خطی عمود بر صفحهٔ xy و در نتیجه موازی محور z است.



۷۲۹ (۳) یال AB فصل مشترک دو صفحهٔ $x=۲$ و $z=۳$ است و عرض نقاط روی آن بین صفر و ۷ هستند. پس معادلات یال AB به‌صورت زیر هستند:

$$AB:\begin{cases}x=۲\\۰\le y\le ۷\\z=۳\end{cases}$$

۷۳۰ (۲) در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات فضایی $x<۰$، $y>۰$ و $z>۰$، پس،

$$۲a+۱>۰\Rightarrow a>-\frac{۱}{۲}\qquad(۱)$$

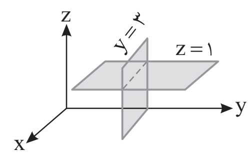
در ناحیهٔ هشتم دستگاه مختصات فضایی $x>۰$، $y<۰$ و $z<۰$، پس

$$۳a-۱۴<۰\Rightarrow a<\frac{۱۴}{۳}\qquad(۲)$$

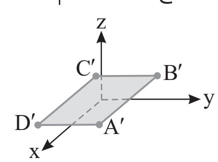
از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $-\frac{۱}{۲}<a<\frac{۱۴}{۳}$. پس بیشترین مقدار صحیح a برابر ۴ است.

۷۳۱ (۳) نقاط E ، F ، H و M روی فقط یک وجه مکعب قرار دارند. سایر نقطه‌ها یا روی هیچ وجهی قرار ندارند (مثل D) یا روی دو یا سه وجه هم‌زمان واقع هستند. پس چهار نقطه بین این نقاط روی فقط یک وجه قرار دارند.

۷۳۲ (۱) $y=۳$ معادلهٔ صفحه‌ای موازی با صفحهٔ xz است و $z=۱$ معادلهٔ صفحه‌ای موازی با صفحهٔ xy است. پس معادلات $\begin{cases} y=۳ \\ z=۱ \end{cases}$ فصل مشترک این دو صفحه را نشان می‌دهند که خطی است موازی محور x .



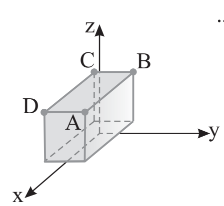
۷۳۳ (۳) ارتفاع‌های نقاط A ، B ، C و D همگی برابر ۳ است، پس این نقاط روی صفحهٔ $z=۳$ قرار دارند. تصویر آن‌ها روی صفحهٔ xy نقاط $A'(۲,۱,۰)$ ، $B'(-۱,۱,۰)$ ، $C'(-۱,-۱,۰)$ و $D'(۲,-۱,۰)$ هستند. این نقاط همگی روی صفحهٔ $z=۰$ قرار دارند، عرض دو نقطهٔ A' و B' برابر ۱ و عرض دو نقطهٔ C' و D' برابر -۱ است. طول دو نقطهٔ B' و C' برابر -۱ و طول دو نقطه A' و D' برابر ۲ است. بنابراین $A'B'$ و $C'D'$ بین $x=-۱$ و $x=۲$ قرار دارند و $B'C'$ و $A'D'$ بین $y=-۱$ و $y=۱$ هستند. پس سطح $A'B'C'D'$ در روابط $-۱\le x\le ۲$ ، $-۱\le y\le ۱$ و $z=۰$ صدق می‌کند. این سطح با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی است.



۷۳۴ (۲) وجه $ADD'A'$ روی صفحهٔ $x=۴$ قرار دارد، متغیر y در آن بین صفر و ۵ و متغیر z در آن بین صفر و ۱ است. بنابراین روابط مشخص کنندهٔ این وجه $x=۴$ ، $۰\le y\le ۵$ و $۰\le z\le ۱$ هستند.

۷۳۵ (۲) نقطهٔ $(۵,۶,-۱)$ مختصات نقطهٔ D' است، پس روی وجه‌های $DCC'D'$ ، $ADD'A'$ و $A'B'C'D'$ قرار دارد. پس گزینهٔ (۲) نادرست است. به درستی سایر گزینه‌ها توجه کنید.

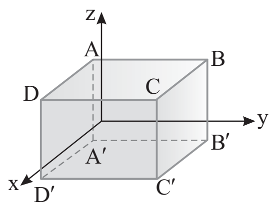
۷۳۶ (۳) ارتفاع هر چهار نقطهٔ A ، B ، C و D برابر ۳ است، پس این نقاط روی صفحهٔ $z=۳$ هستند. در ضمن عرض دو نقطهٔ A و B برابر ۱ و عرض دو نقطهٔ C و D برابر -۱ است. همچنین طول دو نقطهٔ B و C برابر -۱ و طول دو نقطهٔ A و D برابر ۲ است. پس AB و CD بین $x=-۱$ و $x=۲$ قرار دارند و BC و AD بین $y=-۱$ و $y=۱$ قرار دارند. بنابراین سطح محدود به چهارضلعی $ABCD$ با روابط $-۱\le x\le ۲$ ، $-۱\le y\le ۱$ و $z=۳$ مشخص می‌شود.



۷۳۷ (۳) در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات فضایی x منفی، y منفی و z مثبت است. پس نقطهٔ $A(۱,-۲,۳)$ در این ناحیه قرار ندارد، پس گزینهٔ (۳) نادرست است. درستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

۷۳۸ (۱) دو یال این مکعب مستطیل روی خط‌های $\begin{cases} x=۷ \\ z=۲ \end{cases}$ و $\begin{cases} y=۵ \\ z=-۱ \end{cases}$ هستند. پس این مکعب مستطیل به صفحات $x=۳$ ، $x=۷$ ، $y=۱$ ، $y=۵$ ، $z=-۱$ و $z=۲$ محدود است و شکل آن به صورت زیر است. پس ابعاد این مکعب مستطیل $AD=۷-۳=۴$ ، $AB=۵-۱=۴$ و $AA'=۲-(-۱)=۳$ است. در ضمن قطر وجه‌های موازی صفحهٔ yoz برابر DC' است. بنابراین

$$\frac{|AC'|}{|DC'|}=\frac{\sqrt{۴^۲+۴^۲+۳^۲}}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\sqrt{\frac{۴۱}{۲۵}}$$



۷۳۹ (۱) قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ نسبت به صفحهٔ yz نقطهٔ $A'(-x,y,z)$ است، پس در اینجا $A'(-۲,۴,-۵)$. از طرف دیگر، قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ نسبت به محور y نقطهٔ $A''(-x,y,-z)$ است. بنابراین قرینهٔ $A'(-۲,۴,-۵)$ نسبت به محور y نقطهٔ $A''(۲,۴,۵)$ است. بنابراین $x_{A''}+y_{A''}+z_{A''}=۲+۴+۵=۱۱$.

۷۴۰ (۲) اگر $A(x,y,z)$ نقطه‌ای باشد که در شرط مسئله صدق می‌کند، آن‌گاه

(فاصلهٔ A از صفحهٔ yz) $\frac{۱}{۲}$ = فاصلهٔ A از محور x

یعنی $\sqrt{y^۲+z^۲}=\frac{۱}{۲}|x|$. پس $۴(y^۲+z^۲)=x^۲$. تنها گزینهٔ (۲) در این برابری صدق می‌کند.

۷۴۱ (۴) فرض کنید فاصلهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ از صفحه‌های xy ، xz و yz به‌ترتیب برابر ۱ ، ۲ و ۳ باشد. در این صورت:

فاصلهٔ A تا صفحهٔ xy $=|z_۰|=۱$ ، فاصلهٔ A تا صفحهٔ xz $=|y_۰|=۲$

فاصلهٔ A تا صفحهٔ yz $=|x_۰|=۳$

می‌دانیم فاصلهٔ A تا مبدأ مختصات برابر $|OA|=\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲}$ است. بنابراین

$$|OA|=\sqrt{۹+۴+۱}=\sqrt{۱۴}$$

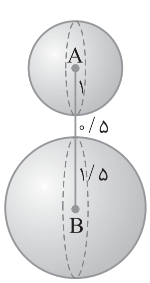
۷۴۲ (۲) فاصلهٔ نقطهٔ (x,y,z) از صفحهٔ xz برابر $|y|$ است، پس $m=\pm۱$. بنابراین

$m=۱\Rightarrow M(۲,۱,۱)\Rightarrow$ فاصلهٔ M از محور y $=\sqrt{x^۲+z^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$

$m=-۱\Rightarrow M(۰,-۱,۱)\Rightarrow$ فاصلهٔ M از محور y $=\sqrt{x^۲+z^۲}=\sqrt{۰+۱}=۱$

در بین گزینه‌ها عدد $\sqrt{۵}$ وجود دارد.

۷۴۳ (۱) مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ ۱ هستند کره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ است و مکان هندسی نقاطی که از B به فاصلهٔ $\frac{۳}{۲}$ هستند کره‌ای به مرکز B و شعاع $\frac{۳}{۲}$ است. نقاط تلاقی این دو کره جواب این مسئله است. توجه کنید که



$$|AB|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۴)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$$

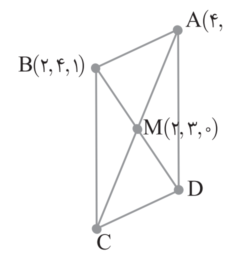
چون $|AB|$ از مجموع شعاع‌های دو کره بیشتر است، پس دو کره نقطهٔ تلاقی ندارند. پس این مسئله جواب ندارد.

۷۴۴ (۲) بنابر فرض مسئله $A'(۱,۲,۰)$ و $B'(۰,۰,-۳)$. اگر M وسط پاره‌خط $A'B'$ باشد، آن‌گاه

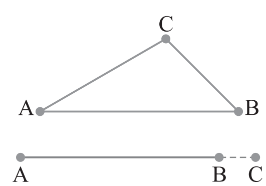
$$M=\frac{A'+B'}{۲}=\frac{(۱,۲,۰)+(۰,۰,-۳)}{۲}=(\frac{۱}{۲},۱,-\frac{۳}{۲})$$

۷۴۵ (۳) چون نقطهٔ $M(۲,۳,۰)$ وسط پاره‌خط واصل نقاط $A(۴,۵,۲)$ و $B(۲,۴,۱)$ نیست، پس A و B رأس‌های مجاور متوازی‌الاضلاع هستند. نقطهٔ M وسط قطر BD در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است (شکل زیر را ببینید). در نتیجه $M=\frac{B+D}{۲}$. پس $D=۲M-B=۲(۲,۳,۰)-(۲,۴,۱)=(۲,۲,-۱)$.

اکنون توجه کنید که $|AD|=\sqrt{۴+۹+۹}=\sqrt{۲۲}$ و $|AB|=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$. در نتیجه طول بزرگ‌ترین ضلع متوازی‌الاضلاع برابر $\sqrt{۲۲}$ است.



۷۴۶ (۲) اگر C روی خط AB نباشد، آن‌گاه بنابر نابرابری‌های مثلث، $|AB|>||AC|-|BC||$ و اگر C روی خط AB باشد، بیشترین مقدار $||AC|-|BC||$ زمانی اتفاق می‌افتد که C در طرفین پاره‌خط AB باشد، در این صورت $|AB|=||AC|-|BC||$. پس بیشترین مقدار $||AC|-|BC||$ برابر است با $|AB|=\sqrt{۱+۴+۴}=۳$.



۷۴۷ (۱) ابتدا نقطهٔ وسط AB را به‌دست می‌آوریم. اگر M وسط AB باشد، آن‌گاه

$$M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{-۲+۲m}{۲},\frac{m-۲-m}{۲},\frac{۳-۱}{۲})=(m-۱,-۱,۱)$$

فاصلهٔ M از مبدأ برابر $\sqrt{۲}$ است، پس

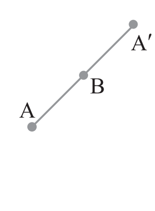
$$|OM|=\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{(m-۱)^۲+۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$m^۲-۲m+۳=۲\Rightarrow m^۲-۲m+۱=۰\Rightarrow(m-۱)^۲=۰\Rightarrow m=۱$$

۷۴۸ (۳) اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B باشد، آن‌گاه B وسط AA' قرار دارد. بنابراین

$$B=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲B-A$$

$$A'=۲(۲,۳,-۱)-(۱,-۲,۴)\Rightarrow A'(۳,۸,-۶)$$



۷۴۹ (۳) برداری که اندازهٔ آن برابر یک است، بردار یکه است. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم

گزینهٔ (۱): $|\frac{\sqrt{۳}}{۳}\vec{i}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\vec{j}|=\sqrt{(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲+(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}\neq۱$

گزینهٔ (۲): $|\vec{i}+\vec{j}|=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}\neq۱$

گزینهٔ (۳): $|-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{i}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{j}|=\sqrt{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۱$ ✓

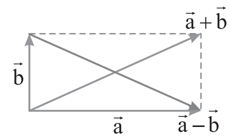
گزینهٔ (۴): $|\vec{i}-\vec{j}|=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}\neq۱$

۷۵۰ (۴) چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی هستند، پس باید مضرب هم باشند و چون مؤلفهٔ x در $\vec{b}$، -۲ برابر مؤلفهٔ x در $\vec{a}$ است، پس

$$\vec{b}=-۲\vec{a}\Rightarrow(-۲,۴)=-۲(۱,-m+۲)=(-۲,۲m-۴)$$

$$۲m-۴=۴\Rightarrow m=۴$$

۷۵۱ (۴) توجه کنید که بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ هم‌اندازه هستند، زیرا اندازهٔ هر دوی آن‌ها برابر $\sqrt{(\frac{۷}{۸})^۲+(\frac{۲}{۳})^۲}$ است. از طرف دیگر $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاع به اضلاع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند. متوازی‌الاضلاع با قطرهای برابر مستطیل است، پس $\vec{a}\perp\vec{b}$.



۷۵۲ (۱) چون $|۳\vec{a}+\vec{b}|=|۳\vec{a}-\vec{b}|$ پس متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار $۳\vec{a}$ و $\vec{b}$ ایجاد می‌شود، دارای قطرهایی با طول برابر است، یعنی این متوازی‌الاضلاع مستطیل است و $۳\vec{a}\perp\vec{b}$ در نتیجه $\vec{a}\perp\vec{b}$.

۷۵۳ (۳) تساوی داده شده را ساده می‌کنیم. می‌دانیم $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}$، پس

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+۳\overrightarrow{MP}+۳\overrightarrow{PN}=\vec{o}\Rightarrow\overrightarrow{AC}+۳\overrightarrow{MN}=\vec{o}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=-۳\overrightarrow{MN}$$

پس $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{MN}$ مضرب منفی یکدیگرند. پس موازی و غیرهم‌جهت هستند، در نتیجه زاویهٔ بین آن‌ها ۱۸۰° است.

۷۵۴ (۴) چون $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$، پس

$$۳\overrightarrow{OA}+۶\overrightarrow{BZ}+۲\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{AB}+۵\overrightarrow{OB}$$

$$=۳\overrightarrow{OA}+۶(\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OB})+۲(\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+۵\overrightarrow{OB}=۸\overrightarrow{OZ}$$

۷۵۵ (۲) تصویر بردار $\vec{a}=(-۳,۱,۴)$ روی صفحهٔ xz بردار $\vec{b}=(-۳,۰,۴)$ است و اندازهٔ این بردار برابر است با $\sqrt{(-۳)^۲+۴^۲}=۵$.

۷۵۶ (۳) می‌دانیم بازتاب ایزومتری است. پس اگر $\vec{a}'$ قرینهٔ $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه $|\vec{a}'|=|\vec{a}|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$.

۷۵۷ (۳) چون بردار $\vec{v}$ با صفحهٔ xy موازی است، پس بر محور z عمود است. در نتیجه مختص (مؤلفهٔ) z در آن صفر است، یعنی $m-۱=۰$، پس $m=۱$. بنابراین $\vec{v}=(۴,۳,۰)$. در نتیجه $|\vec{v}|=\sqrt{۱۶+۹}=۵$.

۷۵۸ (۱) توجه کنید که

$$\vec{a}-۲\vec{b}=(۲,۳,۱)-۲(۱,-۱,۱)=(۲,۳,۱)-(۲,-۲,۲)=(۰,۵,-۱)$$

$$\vec{a}+۲\vec{b}=(۲,۳,۱)+۲(۱,-۱,۱)=(۲,۳,۱)+(۲,-۲,۲)=(۴,۱,۳)$$

در نتیجه $\frac{|\vec{a}-۲\vec{b}|}{|\vec{a}+۲\vec{b}|}=\frac{\sqrt{۲۵+۱}}{\sqrt{۱۶+۱+۹}}=\frac{\sqrt{۲۶}}{\sqrt{۲۶}}=۱$.

۷۵۹ (۲) بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ دو قطر متوازی‌الاضلاعی هستند که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند:

$$\vec{a}+\vec{b}=(۳,-۱,۲)+(۱,۲,-۱)=(۴,۱,۱)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(۳,-۱,۲)-(۱,۲,-۱)=(۲,-۳,۳)$$

اکنون توجه کنید که

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{۱۶+۱+۱}=۳\sqrt{۲}\ ,\qquad |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۴+۹+۹}=\sqrt{۲۲}$$

بنابراین طول قطر کوچک برابر $۳\sqrt{۲}$ است.

۷۶۰ (۳) چون زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه است، پس $|\vec{a}-\vec{b}|>|\vec{a}+\vec{b}|$، یعنی $\sqrt{(x+۱)^۲+۱۶+(x-۱)^۲}>\sqrt{(x-۳)^۲+x^۲+۱}$. دو طرف را به توان دو می‌رسانیم:

$$(x+۱)^۲+۱۶+(x-۱)^۲>(x-۳)^۲+x^۲+۱$$

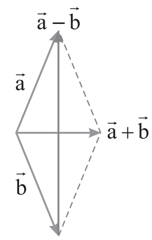
با ساده کردن این نابرابری به‌دست می‌آید $x>-\frac{۴}{۳}$.

۷۶۱ (۳) توجه کنید که $|\vec{a}|=|\vec{b}|=۳$. پس $\vec{a}+\vec{b}$ راستای نیمساز زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است:

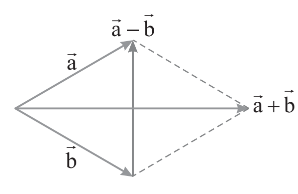
$$\text{راستای نیمساز زاویهٔ بین } \vec{a} \text{ و } \vec{b}=\vec{a}+\vec{b}=(۱,۲,-۲)+(۲,۱,-۲)$$
$$=(۳,۳,-۴)$$

۷۶۲ (۴) توجه کنید که چون $\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$، پس $\vec{a}+\vec{b}$ نیمساز زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. در نتیجه متوازی‌الاضلاع ایجاد شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لوزی است و

$$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$$



۷۶۳ (۴) توجه کنید که چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرینهٔ هم هستند، پس $|\vec{a}|=|\vec{b}|$، بنابراین متوازی‌الاضلاع ایجاد شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لوزی است. در لوزی قطرها بر هم عمود هستند، در نتیجه $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$.



۷۶۴ (۲) بردار $|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$ در راستای نیمساز زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و $|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}=۱(-۲,۱,۲)+۳(۱,۰,۰)=(۱,۱,۲)$. هر بردار هم‌راستا و هم‌جهت با نیمساز زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مضرب مثبت بردار $(۱,۱,۲)$ است. پس بردار مورد نظر را $(m,m,۲m)$ در نظر می‌گیریم که $m>۰$. اندازهٔ این بردار برابر $\sqrt{۶}$ است، پس $\sqrt{m^۲+m^۲+۴m^۲}=\sqrt{۶}\Rightarrow\sqrt{۶}m=\sqrt{۶}$
در نتیجه $m=۱$ و بردار مطلوب $(۱,۱,۲)$ است.

۷۶۵ (۱) ابتدا مختصات دو بردار موازی را پیدا می‌کنیم:

$$۲\vec{a}+\vec{j}=۲(۱,m,۲)+(۰,۱,۰)=(۲,۲m+۱,۴)$$
$$\vec{i}-۳\vec{b}=(۱,۰,۰)-۳(۲,-۱,n)=(-۵,۳,-۳n)$$

می‌دانیم مختصات دو بردار موازی متناسب‌اند، پس

$$\frac{۲}{-۵}=\frac{۲m+۱}{۳}=\frac{۴}{-۳n}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲m+۱}{۳}=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۱۰m+۵=-۶\Rightarrow m=-\frac{۱۱}{۱۰}\\[2mm] \frac{۴}{-۳n}=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۶n=۲۰\Rightarrow n=\frac{۱۰}{۳}\end{cases}$$

بنابراین $۳mn=۳(-\frac{۱۱}{۱۰})(\frac{۱۰}{۳})=-۱۱$.

۷۶۶ (۲) چون دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی هستند، پس $\frac{k}{۳}=\frac{۴}{m}=\frac{۲}{۱}$. در نتیجه $k=۶$ و $m=۲$. بنابراین $m+k=۲+۶=۸$.

۷۶۷ (۱) می‌دانیم $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$. برابری دوم را از برابری اول کم می‌کنیم

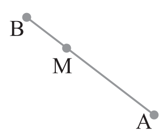
$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\xrightarrow{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}}$$
$$(۱,۳,-۱)-(-۱,-۱,۳)=\overrightarrow{AB}$$

بنابراین $\overrightarrow{AB}=(۲,۴,-۴)$. در نتیجه $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{۴+۱۶+۱۶}=۶$.

۷۶۸ (۱) چون M روی پاره‌خط AB است و $|\overrightarrow{AM}|=۲|\overrightarrow{BM}|$، پس $\overrightarrow{AM}=۲\overrightarrow{MB}$. بنابراین $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=۲(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$. در نتیجه

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+۲\overrightarrow{OB}}{۳}=\frac{(۲,۳,-۲)+۲(۳,-۱,۱)}{۳}=(\frac{۸}{۳},\frac{۱}{۳},۰)$$

در نتیجه $\text{مجموع مختصات M}=\frac{۸}{۳}+\frac{۱}{۳}=۳$.

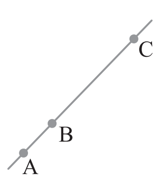


۷۶۹ (۱) توجه کنید که ترتیب قرار گرفتن نقطه‌ها روی خط مهم نیست، باید $\overrightarrow{AB}\|\overrightarrow{AC}$. بنابراین

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-۱,۳,k)-(۵,۱,۲)=(-۶,۲,k-۲)$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(۹,m,۵)-(۵,۱,۲)=(۴,m-۱,۳)$$

چون $\overrightarrow{AB}$ با $\overrightarrow{AC}$ موازی است، پس $\frac{-۶}{۴}=\frac{۲}{m-۱}=\frac{k-۲}{۳}$. بنابراین $m=-\frac{۱}{۳}$ و $k=-\frac{۵}{۲}$. در نتیجه

$$\sqrt{۳۰mk}=\sqrt{۳۰\times(-\frac{۱}{۳})\times(-\frac{۵}{۲})}=\sqrt{۲۵}=۵$$



۷۷۰ (۴) چون $\vec{a}=(۲,-۳)$ و $\vec{b}=(۱,۲)$، به‌دست می‌آید

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۲-۶=-۴$$

۷۷۱ (۴) چون $\vec a\cdot\vec b=۴$، پس $m-۱-۴=۴$، بنابراین $m=۹$. در نتیجه $\vec b=(۸,۲)$ و $|\vec b|=\sqrt{۶۴+۴}=۲\sqrt{۱۷}$.

۷۷۲ (۴) از تعریف ضرب داخلی به‌دست می‌آید $\cos\theta=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}$، پس

$$\cos\theta=\frac{۳-۲}{\sqrt{۵}\sqrt{۱۰}}=\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}$$

۷۷۳ (۱) توجه کنید که

$$|\vec a+\vec b|+\vec a\cdot\vec b=|(۱,-۱,۱)+(-۱,۴,-۵)|+(۱,-۱,۱)\cdot(-۱,۴,-۵)$$
$$=|(۰,۳,-۴)|+(-۱-۴-۵)=\sqrt{۹+۱۶}-۱۰=۵-۱۰=-۵$$

۷۷۴ (۴) اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ باشد، از $|\vec a+\vec b|>|\vec a-\vec b|$ نتیجه می‌گیریم $۰\le\theta<۹۰^\circ$، یعنی $\vec a\cdot\vec b>۰$. در نتیجه

$$(۱,۳,m-۲)\cdot(m,۲m+۱,-۴)>۰\Rightarrow m+۶m+۳-۴m+۸>۰$$
$$۳m+۱۱>۰\Rightarrow m>-\frac{۱۱}{۳}\simeq-۳/۶۷$$

کوچک‌ترین مقدار صحیح m برابر -۳ است.

۷۷۵ (۱) توجه کنید که $\vec a-\vec b=(۱,۲,۳)-(۱,۱,-۱)=(۰,۱,۴)$.

اکنون اگر زاویهٔ بین بردارهای $\vec a-\vec b$ و $\vec b$ برابر θ باشد، آن‌گاه

$$\cos\theta=\frac{(\vec a-\vec b)\cdot\vec b}{|\vec a-\vec b||\vec b|}=\frac{(۰,۱,۴)\cdot(۱,۱,-۱)}{\sqrt{۱+۱۶}\sqrt{۱+۱+۱}}=\frac{۱-۴}{\sqrt{۱۷}\sqrt{۳}}=-\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$$

۷۷۶ (۴) چون اندازهٔ این دو بردار با هم برابر است، پس $\sqrt{۴+(m+۱)^۲+۱۶}=\sqrt{m^۲+۱۶+۹}$. دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $(m+۱)^۲+۲۰=m^۲+۲۵$. با حل این معادله به‌دست می‌آید $m=۲$، یعنی $\vec a=(۲,۳,۴)$ و $\vec b=(۲,۴,۳)$. اگر θ زاویهٔ بین این دو بردار باشد، آن‌گاه

$$\cos\theta=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}=\frac{۴+۱۲+۱۲}{\sqrt{۴+۹+۱۶}\sqrt{۴+۱۶+۹}}=\frac{۲۸}{۲۹}$$

۷۷۷ (۳) زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که $\overrightarrow{AB}=(۲,-۱,۲)$ و $\overrightarrow{AC}=(۳,-۳,۰)$، پس

$$\cos\hat A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{۶+۳}{۳\times۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat A=۴۵^\circ$$

۷۷۸ (۱) توجه کنید که $\overrightarrow{OA}=(۱,m,۲)$ و $\overrightarrow{OB}=(m-۱,۲,۲)$.

چون $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ بر هم عمود هستند، پس $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=۰$، یعنی

$$(۱,m,۲)\cdot(m-۱,۲,۲)=۰\Rightarrow m-۱+۲m+۴=۰$$

با حل معادلهٔ بالا به‌دست می‌آید $m=-۱$.

۷۷۹ (۲) چون $\vec a$ و $\vec b$ بر هم عمود هستند، پس $\vec a\cdot\vec b=۰$، یعنی

$$(۴,۵,n)\cdot(۲,m,۳)=۰\Rightarrow ۸+۵m+۳n=۰\Rightarrow ۵m+۳n=-۸$$

در بین گزینه‌ها فقط اعداد گزینهٔ (۲) در این برابری صدق می‌کنند.

۷۸۰ (۲) بنابر فرض می‌خواهیم $\vec a\cdot(\vec x+\vec y)\neq۰$.

گزینهٔ (۱) اگر $\vec x$ قرینهٔ $\vec y$ باشد، آن‌گاه $\vec x+\vec y=\vec o$، پس $\vec a\cdot(\vec x+\vec y)=۰$. پس گزینهٔ (۱) جواب نیست.

گزینهٔ (۳) اگر سه بردار دوبه‌دو بر هم عمود باشند، آن‌گاه $\vec a\cdot(\vec x+\vec y)=\vec a\cdot\vec x+\vec a\cdot\vec y=۰+۰=۰$. پس گزینهٔ (۳) هم جواب نیست.

گزینهٔ (۴) اگر بردار $\vec a$ بر صفحهٔ دو بردار $\vec x$ و $\vec y$ عمود باشد، بر هر بردار درون این صفحه عمود است. بردار $\vec x+\vec y$ در صفحهٔ دو بردار $\vec x$ و $\vec y$ است، پس $\vec a$ بر $\vec x+\vec y$ عمود است و $\vec a\cdot(\vec x+\vec y)=۰$. در نتیجه گزینهٔ (۴) هم جواب نیست. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۷۸۱ (۲) توجه کنید که

$$\vec a\cdot(۲\vec b+\vec a)=۲\vec a\cdot\vec b+\vec a\cdot\vec a=۲\times(-۳)+۲^۲=-۶+۴=-۲$$

۷۸۲ (۲) عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$(\vec a+۲\vec b)\cdot(۳\vec a+\vec b)=۳\vec a\cdot\vec a+\vec a\cdot\vec b+۶\vec b\cdot\vec a+۲\vec b\cdot\vec b$$
$$=۳|\vec a|^۲+۷\vec a\cdot\vec b+۲|\vec b|^۲=۳\times۴+۷\times۴+۲\times۹=۱۲+۲۸+۱۸=۵۸$$

۷۸۳ (۳) چون بردارهای $\vec a+۳\vec b$ و $۵\vec a+\vec b$ بر هم عمود هستند، پس $(\vec a+۳\vec b)\cdot(۵\vec a+\vec b)=۰$، یعنی

$$۵\vec a\cdot\vec a+\vec a\cdot\vec b+۱۵\vec a\cdot\vec b+۳\vec b\cdot\vec b=۰\Rightarrow۵|\vec a|^۲+۱۶\vec a\cdot\vec b+۳|\vec b|^۲=۰$$

چون $|\vec a|=|\vec b|=۱$، پس $۵+۱۶\underbrace{|\vec a|}_{۱}\underbrace{|\vec b|}_{۱}\cos\theta+۳=۰$. بنابراین $\cos\theta=-\frac{۱}{۲}$. در نتیجه $\theta=۱۲۰^\circ$.

۷۸۴ (۲) توجه کنید که

$$|۲\vec a-۳\vec b|^۲=۴|\vec a|^۲+۹|\vec b|^۲-۱۲\vec a\cdot\vec b=۴|\vec a|^۲+۹|\vec b|^۲-۱۲|\vec a||\vec b|\cos۶۰^\circ$$
$$=۴\times۹+۹\times۱۶-۱۲\times۳\times۴\times\frac{۱}{۲}=۱۰۸$$

در نتیجه $|۲\vec a-۳\vec b|=\sqrt{۱۰۸}=۶\sqrt{۳}$.

۷۸۵ (۲) از برابری‌های داده شده به‌دست می‌آید $|\vec a|=۴$، $|\vec b|=۶$ و $|\vec a+\vec b|=۳$. می‌دانیم $|\vec a+\vec b|^۲+|\vec a-\vec b|^۲=۲(|\vec a|^۲+|\vec b|^۲)$، یعنی $۹+|\vec a-\vec b|^۲=۲(۱۶+۳۶)$. پس $|\vec a-\vec b|^۲=۹۵$. در نتیجه $|\vec a-\vec b|=\sqrt{۹۵}$.

۷۸۶ (۳) با توجه به اتحاد $|\vec a+\vec b|^۲-|\vec a-\vec b|^۲=۴\vec a\cdot\vec b$،

$$۱۰^۲-۸^۲=۴\vec a\cdot\vec b\Rightarrow۱۰۰-۶۴=۴\vec a\cdot\vec b\Rightarrow\vec a\cdot\vec b=۹$$

۷۸۷ (۴) از برابری $\vec a+\vec b+\vec c=\vec o$ نتیجه می‌گیریم $\vec a+\vec b=-\vec c$، پس $|\vec a|^۲+|\vec b|^۲+۲\vec a\cdot\vec b=|-\vec c|^۲$. یعنی $۹+۲۵+۲\vec a\cdot\vec b=۳۶$. در نتیجه $\vec a\cdot\vec b=۱$.

۷۸۸ (۱) از برابری $\vec a+\vec b+\vec c=\vec o$ نتیجه می‌گیریم

$$|\vec a|^۲+|\vec b|^۲+|\vec c|^۲+۲(\vec a\cdot\vec b+\vec a\cdot\vec c+\vec b\cdot\vec c)=۰$$

یعنی

$$\vec a\cdot\vec b+\vec a\cdot\vec c+\vec b\cdot\vec c=-\frac{۱}{۲}(|\vec a|^۲+|\vec b|^۲+|\vec c|^۲)$$
$$=-\frac{۱}{۲}(۱۶+۲۵+۳۶)=-\frac{۱}{۲}\times۷۷=-\frac{۷۷}{۲}$$

۷۸۹ (۳) توجه کنید که

$$|\vec v|^۲=|\vec a+\vec b-\vec c|^۲=|\vec a|^۲+|\vec b|^۲+|\vec c|^۲+۲\vec a\cdot\vec b-۲\vec a\cdot\vec c-۲\vec b\cdot\vec c$$
$$=۴+۲۵+۱۶+۲\times۲\times۵\times\frac{۱}{۲}-۲\times۲\times۴\times\frac{۱}{۲}-۲\times۵\times۴\times\frac{۱}{۲}=۲۷\Rightarrow|\vec v|=۳\sqrt{۳}$$

۷۹۰ (۱) از برابری $\vec a+۲\vec b+۴\vec c=\vec o$ نتیجه می‌گیریم $\vec a+۲\vec b+۲\vec c=-۲\vec c$، پس $|\vec a+۲\vec b+۲\vec c|^۲=|-۲\vec c|^۲$. در نتیجه

$$|\vec a|^۲+۴|\vec b|^۲+۴|\vec c|^۲+۴\vec a\cdot\vec b+۴\vec a\cdot\vec c+۸\vec b\cdot\vec c=۴|\vec c|^۲$$
$$\vec a\cdot\vec b+\vec a\cdot\vec c+۲\vec b\cdot\vec c=-\frac{۱}{۴}(|\vec a|^۲+۴|\vec b|^۲)=-\frac{۱}{۴}(۴+۴\times۱)=-۲$$

۷۹۱ (۳) فرض کنید $\vec{a}=(۲x,y,\sqrt{۲}z)$ و $\vec{b}=(۲,۲,-\sqrt{۲})$. در این صورت بنابر نابرابری کوشی – شوارتز،

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow|۴x+۲y-۲z|\le\sqrt{\underbrace{۴x^۲+y^۲+۲z^۲}_{۴۰}}\sqrt{\underbrace{۴+۴+۲}_{۱۰}}$$

$$|۴x+۲y-۲z|\le۲۰$$

پس حداکثر مقدار عبارت $۴x+۲y-۲z$ برابر ۲۰ است.

۷۹۲ (۱) فرض کنید $\vec{a}=(۳x,۲y,\sqrt{۲}z)$ و $\vec{b}=(۱,۱,۲\sqrt{۲})$. در این صورت بنابر نابرابری کوشی – شوارتز،

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow|۳x+۲y+۴z|\le\sqrt{۹x^۲+۴y^۲+۲z^۲}\sqrt{۱+۱+۸}$$

$$\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}\le\sqrt{۹x^۲+۴y^۲+۲z^۲}\Rightarrow\frac{۲۵}{۱۰}\le۹x^۲+۴y^۲+۲z^۲$$

پس حداقل مقدار عبارت $۹x^۲+۴y^۲+۲z^۲$ برابر ۲/۵ است.

۷۹۳ (۲) فرض می‌کنیم $\vec{a}=(۰,-۳,۶)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$. اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه

$$\vec{a}'=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲})\vec{b}=(\frac{۰+۳-۱۲}{۹})(۲,-۱,-۲)=(-۲,۱,۲)$$

۷۹۴ (۲) توجه کنید که

$$\text{طول تصویر قائم } \vec{v}_۱ \text{ بر } \vec{v}_۲=\frac{|\vec{v}_۱\cdot\vec{v}_۲|}{|\vec{v}_۲|}=\frac{۲+۲+۴}{\sqrt{۴+۱+۴}}=\frac{۸}{۳}$$

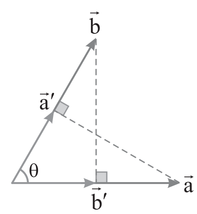
۷۹۵ (۲) اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه $|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$. اکنون بنابر فرض سؤال،

$$\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+۴\vec{j}+۷\vec{k}\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۱+۱۶+۴۹}\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۶۶$$

$$|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\vec{a}\cdot\vec{b}=۶۶\Rightarrow۹+۴۹-۲\vec{a}\cdot\vec{b}=۶۶\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-۴$$

پس $|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{|-۴|}{۷}=\frac{۴}{۷}$.

۷۹۶ (۳) توجه کنید که زاویهٔ بین $\vec{a}'$ و $\vec{b}'$ با زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است. بنابر فرض، $|\vec{a}'|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}|$. از طرف دیگر،



$$|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|}{|\vec{b}|}=|\vec{a}||\cos\theta|$$

پس $|\vec{a}||\cos\theta|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}|$، یعنی $|\cos\theta|=\frac{۱}{۲}$.

در نتیجه $\theta=۶۰^\circ$ یا $\theta=۱۲۰^\circ$.

۷۹۷ (۱) با توجه به شکل طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ برابر $\sqrt{۳}$ است، پس

$$|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{|m-۱+m-۱|}{\sqrt{۱+(m-۱)^۲}}\Rightarrow۳(۱+(m-۱)^۲)=(۲m-۲)^۲$$

$$۳+۳m^۲+۳-۶m=۴m^۲+۴-۸m\Rightarrow m^۲-۲m-۲=۰$$

مجموع ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم برابر است با

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-۲}{۱}=۲\Rightarrow\text{مجموع مقادیر } m=۲$$

۷۹۸ (۱) **راه‌حل اول** با توجه به شکل، درمی‌یابیم اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۶۰° باشد، آن‌گاه زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}'$ و $\vec{b}'$ نیز ۶۰° خواهد بود. از طرف دیگر،

$$|\vec{a}'|=|\vec{a}|\cos۶۰^\circ,\quad|\vec{b}'|=|\vec{b}|\cos۶۰^\circ\quad(۱)$$

$$\vec{a}'\cdot\vec{b}'=|\vec{a}'||\vec{b}'|\cos۶۰^\circ\xrightarrow{(۱)}$$

$$\vec{a}'\cdot\vec{b}'=(|\vec{a}|\cos۶۰^\circ)(|\vec{b}|\cos۶۰^\circ)\cos۶۰^\circ$$

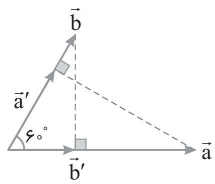
$$=(\underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|\cos۶۰^\circ}_{\vec{a}\cdot\vec{b}})\cos^۲۶۰^\circ=۴\times(\frac{۱}{۲})^۲=۱$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ و $|\vec{b}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. بنابراین

$$\vec{a}'\cdot\vec{b}'=|\vec{a}'||\vec{b}'|\cos\theta=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}\times\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}\times\cos\theta$$

$$=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|}\times\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}\times\cos\theta$$

$$=|\vec{a}\cdot\vec{b}|\cos\theta\cos\theta=۴\times(\frac{۱}{۲})^۲=۱$$



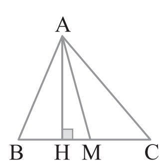
۷۹۹ (۱) در شکل فرضی زیر AH ارتفاع و AM میانهٔ وارد بر ضلع BC است، بنابراین $\overrightarrow{MH}$ تصویر قائم میانهٔ $\overrightarrow{AM}$ بر امتداد $\overrightarrow{BC}$ است و می‌دانیم اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ روی امتداد $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه $|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$. پس

$$M=\frac{B+C}{۲}=(۰,۳,۱),\quad\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(۰,۴,-۱)$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-۲,-۲,۰)$$

اکنون باید اندازهٔ تصویر قائم $\overrightarrow{AM}$ بر $\overrightarrow{BC}$ را پیدا کنیم:

$$|\overrightarrow{AM}'|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|۰-۸+۰|}{\sqrt{۴+۴+۰}}=\frac{۸}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$



۸۰۰ (۱) توجه کنید که

$$\vec{v}_۱\times\vec{v}_۲=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۲&-۱&۳\\-۱&۰&۲\end{vmatrix}$$

$$=(-۲-۰)\vec{i}-(۴+۳)\vec{j}+(۰-۱)\vec{k}=-۲\vec{i}-۷\vec{j}-\vec{k}$$

طول تصویر قائم این بردار روی محور y برابر ۷ است.

۸۰۱ (۴) می‌دانیم $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر ترکیب خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، یعنی همواره $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=۰$. پس این تساوی به‌ازای تمام مقادیر m درست است.

۸۰۲ (۳) $\vec a\times\vec b$ بر صفحهٔ شامل $\vec a$ و $\vec b$ عمود است. پس بر هر ترکیب خطی $\vec a$ و $\vec b$ نیز عمود است. در نتیجه $\vec a\times\vec b$ و هر مضرب مخالف صفر آن بر $\vec a+2\vec b$ و $2\vec a-\vec b$ عمود هستند:

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=3\vec i-2\vec j-\vec k$$

در بین گزینه‌ها، گزینهٔ (۳) قرینهٔ $\vec a\times\vec b$ است، پس بر $\vec a+2\vec b$ و $2\vec a-\vec b$ عمود است.

۸۰۳ (۴) چون $\vec b\times\vec c$ بر $\vec b$ و $\vec c$ عمود است، پس هر مضرب ناصفری از آن هم بر $\vec b$ و $\vec c$ عمود است و برعکس، یعنی هر برداری که بر $\vec b$ و $\vec c$ عمود باشد، باید مضرب $\vec b\times\vec c$ باشد. در نتیجه $\vec a$ مضرب $\vec b\times\vec c$ است. از طرف دیگر $\vec b\times\vec c=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\vec i+3\vec j+2\vec k$. عددی ناصفر مانند m وجود دارد که به‌ازای آن $\vec a=m(\vec b\times\vec c)=(-m,3m,2m)$. چون $|\vec a|=2$، پس

$$\sqrt{m^2+9m^2+4m^2}=2\Rightarrow\sqrt{14}|m|=2$$

در نتیجه $m=\pm\frac{2}{\sqrt{14}}$، یعنی $\vec a=(\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{4}{\sqrt{14}})$ یا $\vec a=(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-6}{\sqrt{14}},\frac{-4}{\sqrt{14}})$. در نهایت به‌دست می‌آید

$$x+y+z=\frac{-2}{\sqrt{14}}+\frac{6}{\sqrt{14}}+\frac{4}{\sqrt{14}}=\frac{8}{\sqrt{14}}$$

یا

$$x+y+z=\frac{2}{\sqrt{14}}-\frac{6}{\sqrt{14}}-\frac{4}{\sqrt{14}}=-\frac{8}{\sqrt{14}}$$

۸۰۴ (۲) اگر θ زاویهٔ بین $\vec a$ و $\vec b$ باشد، آنگاه

$$|\vec a||\vec b|\sin\theta=\sqrt{3}|\vec a||\vec b|\cos\theta\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$$

$$\tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

۸۰۵ (۱) بنابر اتحاد لاگرانژ،

$$|\vec a\times\vec b|^2=|\vec a|^2|\vec b|^2-(\vec a\cdot\vec b)^2=2^2\times15^2-24^2=2^2(15^2-12^2)=2^2\times9^2$$

در نتیجه $|\vec a\times\vec b|=18$.

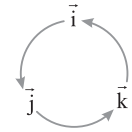
۸۰۶ (۲) توجه کنید که

$$|(\vec a+\vec b)\times(\vec a-\vec b)|=|\vec a\times\vec a-\vec a\times\vec b+\vec b\times\vec a-\vec b\times\vec b|$$
$$=|\vec 0+\vec b\times\vec a+\vec b\times\vec a-\vec 0|=2|\vec b\times\vec a|=2|\vec b||\vec a|\sin\theta$$
$$=2\times5\times4\sin\theta=40\sin\theta$$

چون $|(\vec a+\vec b)\times(\vec a-\vec b)|=20$، پس $40\sin\theta=20$، یعنی $\sin\theta=\frac{1}{2}$. در نتیجه $\theta=30^\circ$.

۸۰۷ (۳) می‌دانیم $\vec i\times\vec j=\vec k$، $\vec j\times\vec k=\vec i$ و $\vec k\times\vec i=\vec j$. عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

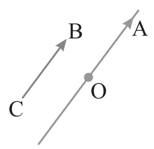
$$\vec i\times\vec i+\vec i\times\vec j-\vec i\times\vec k+2\vec j\times\vec i-\vec j\times\vec j+\vec j\times\vec k+\vec k\times\vec i+2\vec k\times\vec j$$
$$=\vec 0+\vec k+\vec j-2\vec k-\vec 0+\vec i+\vec j-2\vec i=-\vec i+2\vec j-\vec k$$



۸۰۸ (۳) می‌دانیم ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. پس

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=\vec 0$$
$$\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\vec 0\Rightarrow\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{CB}=\vec 0$$

بنابراین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{CB}$ موازی هستند. پس A روی خطی قرار دارد که از مبدأ O می‌گذرد و با $\overrightarrow{CB}$ موازی است. مختصات $\overrightarrow{CB}$ برابر $(0,0,1)$ است. بنابراین خط فوق موازی بردار $\vec k$، یعنی موازی محور z است و چون این خط از مبدأ می‌گذرد، پس مکان نقطهٔ A همان محور z است.



۸۰۹ (۱) ابتدا بردار $(\vec a-\vec b)\times(\vec a+\vec b)$ را ساده می‌کنیم:

$$(\vec a-\vec b)\times(\vec a+\vec b)=\underbrace{\vec a\times\vec a}_{\vec 0}+\vec a\times\vec b-\vec b\times\vec a-\underbrace{\vec b\times\vec b}_{\vec 0}=\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec b=2\vec a\times\vec b$$

$$=2\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=2(\vec i-2\vec j-2\vec k)=2\vec i-4\vec j-4\vec k$$

پس مجموع مختصات این بردار مساوی $2-4-4=-6$ است.

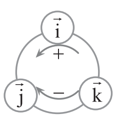
۸۱۰ (۱) بردار $\vec a\times\vec b$ و مضارب غیرصفر آن هم بر $\vec a$، هم بر $\vec b$ و هم بر ترکیب‌های خطی $\vec a$ و $\vec b$ مثل $7\vec a-\vec b$ و $3\vec a+9\vec b$ عمود هستند.

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\vec i+3\vec j-3\vec k$$

در بین گزینه‌ها تنها بردار $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ مضرب بردار $(3,3,-3)$ است. توجه کنید که

$$\frac{1}{12}(\vec a\times\vec b)=\frac{1}{12}(3,3,-3)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$$

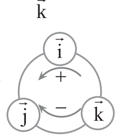
۸۱۱ (۳) به کمک نمودار چرخشی



حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\vec i$، $\vec j$ و $\vec k$ برابر هستند با $\vec i\times\vec j=\vec k$، $\vec i\times\vec k=-\vec j$ و $\vec j\times\vec k=\vec i$، در نتیجه

$$(-2\vec i\times(3\underbrace{\vec i\times\vec j}_{\vec k}))\times\vec k=(-6\underbrace{\vec i\times\vec k}_{-\vec j})\times\vec k=6\underbrace{\vec j\times\vec k}_{\vec i}=6\vec i$$

۸۱۲ (۱) به کمک نمودار چرخشی

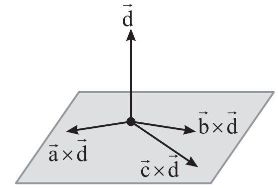


ضرب‌های خارجی بردارهای $\vec i$، $\vec j$ و $\vec k$ برابر هستند با $\vec j\times\vec k=\vec i$، $\vec k\times\vec i=\vec j$ و $\vec j\times\vec i=-\vec k$. پس

$$2\vec i\cdot(\vec j\times\vec k)-\vec j\cdot(2\vec k\times\vec i)+3\vec k\cdot(\vec j\times\vec i)=2\vec i\cdot\vec i-2\vec j\cdot\vec j-3\vec k\cdot\vec k$$

$$=2\underbrace{|\vec i|}_{1}{}^2-2\underbrace{|\vec j|}_{1}{}^2-3\underbrace{|\vec k|}_{1}{}^2=2-2-3=-3$$

۸۱۳ (۱) سه بردار $\vec{a}\times\vec{d}$ ، $\vec{b}\times\vec{d}$ و $\vec{c}\times\vec{d}$ بر بردار $\vec{d}$ عمودند، پس این سه بردار در صفحهٔ عمود بر d قرار دارند.



۸۱۴ (۲) ضرب داخلی و ضرب خارجی بین دو بردار تعریف می‌شوند. در عبارت $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$ حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}$ یک عدد است و ضرب خارجی بین یک عدد و بردار $\vec{c}$ تعریف نشده است. پس $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$ تعریف نشده است.

۸۱۵ (۴) مختصات بردار $۲\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۲\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})=۲\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{o}}-۲\vec{a}\times\vec{b}=-۲\vec{a}\times\vec{b}=-۲\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۲&-۱&۲\\ ۰&۱&-۱\end{vmatrix}$$

$$=-۲(-\vec{i}+۲\vec{j}+۲\vec{k})=۲\vec{i}-۴\vec{j}-۴\vec{k}$$

پس مختص عرض این بردار برابر ۴− است.

۸۱۶ (۴) توجه کنید که $\overrightarrow{AB}=(۱,۲,-۲)$ و $\overrightarrow{AC}=(-۴,۴,-۲)$. در نتیجه

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۲&-۲\\ -۴&۴&-۲\end{vmatrix}=(۴,۱۰,۱۲)$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۱}{۲}|(۴,۱۰,۱۲)|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۰۰+۱۴۴}=\sqrt{۶۵}$$

۸۱۷ (۳) مساحت مثلث ساخته شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$ است. پس باید $|\vec{a}\times\vec{b}|$ را به دست آوریم. اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، با استفاده از فرض سؤال به دست می‌آید

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow\frac{۱۸}{۵}=۳\times۲\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

پس $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۳\times۲\times\frac{۴}{۵}=\frac{۲۴}{۵}$. بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

۸۱۸ (۴) ابتدا اندازهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را به دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۲}|(۶\vec{a}+\vec{b})\times(۴\vec{a}-\vec{b})|=۳\Rightarrow\frac{۱}{۲}|۲۴\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{o}}\underbrace{-۶\vec{a}\times\vec{b}}_{۶\vec{b}\times\vec{a}}+۴\vec{b}\times\vec{a}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{o}}|=۳$$

$$\frac{۱}{۲}|۱۰\vec{b}\times\vec{a}|=۳\Rightarrow|\vec{b}\times\vec{a}|=\frac{۳}{۵}\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۳}{۵}$$

از طرف دیگر بنابر اتحاد لاگرانژ،

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}+(\vec{a}\cdot\vec{b})^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}\Rightarrow\frac{۹}{۲۵}+(\vec{a}\cdot\vec{b})^{۲}=۱$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^{۲}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\frac{۴}{۵}$$

چون زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است، پس $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{۴}{۵}$.

۸۱۹ (۱) اگر $\vec{b}'$ تصویر قائم بردار $\vec{b}$ روی امتداد بردار $\vec{a}$ باشد، آن‌گاه $|\vec{b}'|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ و چون $|\vec{b}'|=۲$، پس $\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}=۲$. اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}=۲\Rightarrow\frac{|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|}{|\vec{a}|}=۲$$

$$|\vec{b}||\cos\theta|=۲\xrightarrow{|\vec{b}|=۳}|\cos\theta|=\frac{۲}{۳}$$

پس $\sin\theta=\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}=\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$. می‌دانیم مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار $۲\vec{a}+\vec{b}$ و $۳\vec{a}-۲\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار است. بنابراین

$$S=|(۲\vec{a}+\vec{b})\times(۳\vec{a}-۲\vec{b})|=|۶\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{o}}-۴\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{-\vec{b}\times\vec{a}}+۳\vec{b}\times\vec{a}-۲\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{o}}|$$

$$=۷|\vec{b}\times\vec{a}|=۷|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta=۷(۳)(۴)(\frac{\sqrt{۵}}{۳})=۲۸\sqrt{۵}$$

۸۲۰ (۳) بنابر فرض تست،

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۷\Rightarrow(m,۲m,۳)\cdot(۳,-۱,۲m)=۷$$

$$۳m-۲m+۶m=۷\Rightarrow m=۱$$

پس $\vec{a}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{b}=(۳,-۱,۲)$. در نتیجه

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۲&۳\\ ۳&-۱&۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۲&۳\\ -۱&۲\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۱&۳\\ ۳&۲\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۱&۲\\ ۳&-۱\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(۷,۷,-۷)\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۴۹+۴۹+۴۹}=۷\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر مساحت مثلث ایجاد شده با $\vec{a}+۲\vec{b}$ و $۲\vec{b}-\vec{a}$ برابر است با

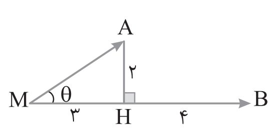
$$S=\frac{۱}{۲}|(\vec{a}+۲\vec{b})\times(۲\vec{b}-\vec{a})|=\frac{۱}{۲}|۲\vec{a}\times\vec{b}-\overbrace{\vec{a}\times\vec{a}}^{\vec{o}}+۴\overbrace{\vec{b}\times\vec{b}}^{\vec{o}}-\underbrace{۲\vec{b}\times\vec{a}}_{-۲\vec{a}\times\vec{b}}|$$

$$=\frac{۱}{۲}|۴\vec{a}\times\vec{b}|=۲|\vec{a}\times\vec{b}|=۲\times۷\sqrt{۳}=۱۴\sqrt{۳}$$

۸۲۱ (۲) **راه‌حل اول** می‌دانیم اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ باشد، آن‌گاه $|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|\sin\theta$. بنابراین با توجه به شکل،

$$\triangle MAH:\sin\theta=\frac{AH}{MA}\xrightarrow{MA=\sqrt{۳^{۲}+۲^{۲}}=\sqrt{۱۳}}\sin\theta=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

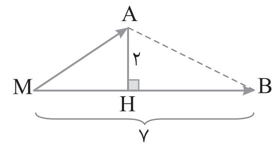
$$|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|\sin\theta=\sqrt{۱۳}\times۷\times\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}=۱۴$$



راه‌حل دوم می‌دانیم $|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}|$ دو برابر مساحت مثلث ایجادشده توسط این دو بردار است (یعنی مثلث MAB در شکل)، پس ابتدا مساحت این مثلث را حساب می‌کنیم:

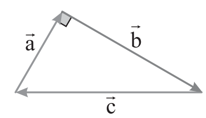
$$S_{MAB}=\frac{۱}{۲}\times|MB|\times|AH|=\frac{۱}{۲}\times۷\times۲=۷$$

در نتیجه $|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}|=2S_{MAB}=14$.



۸۲۲ (۴) می‌توان برای بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ شکل زیر را در نظر گرفت. چون $5^2=4^2+3^2$، پس مثلث شکل زیر قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر مساحت مثلث ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ است. در نتیجه

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=2S=2\times\frac{1}{2}\times3\times4=12$$



۸۲۳ (۳) در متوازی‌الاضلاع ABCD،

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=S_{ABCD}\ ,\ |\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{AC}|=2S_{ABCD}$$

بنابراین

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{AC}|=10+10+20=40$$

۸۲۴ (۳) حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود، برابر $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$ است. پس ابتدا $\vec{b}\times\vec{c}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=(8,-3,1)$$

اکنون توجه کنید که

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(2,-1,1)\cdot(8,-3,1)=16+3+1=20$$

در نتیجه حجم این متوازی‌السطوح برابر ۲۰ است. پس حجم هرم هم‌حجم با این متوازی‌السطوح نیز برابر ۲۰ است.

۸۲۵ (۳) حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $2\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر $|2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$ است. بنابراین $12=|2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$، پس $6=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$. از طرف دیگر، حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$، $\vec{b}+\vec{c}$ و $\vec{c}+\vec{a}$ مساوی $|(\vec{a}+\vec{b})\cdot((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a}))|$ است. چون ضرب داخلی و ضرب خارجی روی جمع بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارند و

$$\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})=\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})=0$$

پس

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a}))$$
$$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\underbrace{\vec{c}\times\vec{c}}_{\vec{0}}+\vec{c}\times\vec{a})$$
$$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a})$$
$$=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})}_{0}+\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}_{0}+\underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}_{0}+\underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})}_{0}+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$
$$=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$
$$=2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=2\times6=12$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح مورد نظر برابر ۱۲ است.

۸۲۶ (۴) می‌دانیم $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$. پس

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2=4+9+1=14$$

۸۲۷ (۱) از برابری $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ نتیجه می‌گیریم

$$\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$$

در نتیجه $\vec{a}\,||\,\vec{b}-\vec{c}$ (درستی گزینهٔ (۲)). گزینهٔ (۳) هم همواره برقرار است. دو طرف برابری $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ را در $\vec{c}$ ضرب داخلی می‌کنیم: $\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$. چون $\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=0$، پس $\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$، یعنی $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم‌صفحه‌اند، یعنی موازی یک صفحه‌اند (درستی گزینهٔ (۴)).

۸۲۸ (۳) سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه هستند، هرگاه حاصل‌ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & m & 3\\ 2 & 1 & 0\\ m & 4 & -1\end{vmatrix}=0\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}}$$

$$-1\,(-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{vmatrix}+m(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 0\\ m & -1\end{vmatrix}+3(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 1\\ m & 4\end{vmatrix}=0$$

$$-1(-1)-m(-2)+3(8-m)=0\Rightarrow1+2m+24-3m=0\Rightarrow m=25$$

۸۲۹ (۴) نقاط A، B، C و D در یک صفحه‌اند، هرگاه حاصل‌ضرب مختلط $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ برابر صفر باشد، توجه کنید A را نقطهٔ شروع هر سه بردار گرفته‌ایم چون مختصات A از بقیه ساده‌تر و محاسبات در کل راحت‌تر می‌شود:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1,2,1)-(1,0,0)=(-2,2,1)$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2,0,2)-(1,0,0)=(1,0,2)$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(m,-1,-1)-(1,0,0)=(m-1,-1,-1)$$

بنابراین

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ m-1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$$

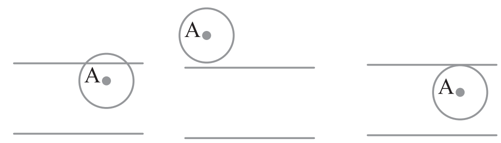
$$\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر دوم}}1(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}+2(-1)^5\begin{vmatrix}-2 & 2\\ m-1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$-(-2+1)-2(2-2m+2)=0\Rightarrow1-8+4m=0\Rightarrow m=\frac{7}{4}$$

فصل دوم

پاسخ تشریحی آزمون‌ها

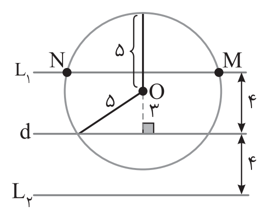
۱ (۲) مجموعـهٔ نقطه‌هایی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ هسـتند، دایره‌ای اسـت به مرکز A و شعاع ۴ (قطر ۸). همچنین مجموعهٔ نقطه‌هایی که از خط L به فاصلهٔ ۵ هسـتند، دو خط موازی L و به فاصلهٔ ۵ از آن هسـتند (دقت کنید فاصلهٔ این دو خط ۱۰ است). تعداد نقطه‌های مشترک دایره و دو خط موازی L، تعداد جواب‌ها است. حالت‌های زیر به‌دست می‌آید.



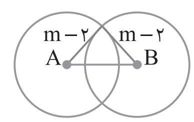
دو جواب دارد   هیچ جوابی ندارد   ۱ جواب دارد

توجـه کنیـد، چون قطـر دایـره (۸) از فاصلـهٔ دو خـط (۱۰) کمتر اسـت، پس حالت‌های دیگری رخ نمی‌دهد.

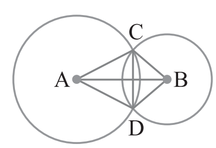
۲ (۲) مجموعـهٔ نقطه‌هایـی که از خط d بـه فاصلهٔ ۴ هسـتند، دو خط موازی d و به فاصلهٔ ۴ از آن است (دو خط L_1 و L_2 را در شکل زیر ببینید). در نتیجه تعداد نقطه‌هایی که این شـرط را دارند دو تا اسـت (نقطه‌های M و N در شکل).



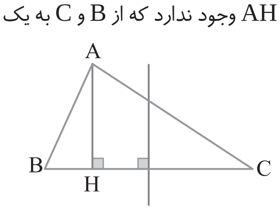
۳ (۱) مجموعهٔ نقطه‌هایی که از A و B به فاصلهٔ $m-۲$ هستند، محل برخورد دو دایره به مراکز A و B و شـعاع $r_1=r_2=m-۲$ اسـت. چون بنابر صورت مسئله می‌خواهیم دو نقطه دارای این ویژگی باشند، باید دو دایره متقاطع باشند، یعنی $|r_1-r_2|<AB<r_1+r_2 \Rightarrow ۰<۴<۲m-۴ \Rightarrow ۴<m$



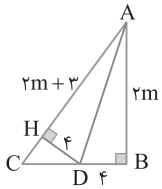
۴ (۴) چـون $AC=AD$ و $BC=BD$، پـس AB عمودمنصـف پاره‌خـط CD اسـت. بنابراین هر نقطه روی پاره‌خـط AB از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله است.



۵ (۱) مجموعـهٔ نقاطـی کـه از دو رأس B و C بـه یـک فاصله‌انـد، عمودمنصـف ضلع BC اسـت. این عمودمنصف با ارتفاع AH موازی اسـت. بنابراین نقطه‌ای روی AH وجود ندارد که از B و C به یک فاصله باشد.



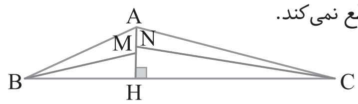
۶ (۳) می‌دانیم هر نقطه روی نیمسـاز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس عمود DH برابر DB و مسـاوی ۴ است. در ضمن دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و AHD به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه همنهشت هستند. پس $AH=AB=۲m$



در نتیجه $CH=AC-AH=۲m+۳-۲m=۳$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس

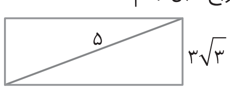
$$\triangle DCH: DC^۲=CH^۲+DH^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵ \Rightarrow DC=۵$$

۷ (۱) نقاطی که از دو ضلع مثلث به یک فاصله‌اند روی نیمسـاز زاویهٔ بیـن آن دو ضلـع قرار دارند. اگر نیمسـازهای زاویه‌های B و C را رسـم کنیم تا ارتفاع AH را به‌ترتیب در نقاط M و N قطع کنند، دو نقطهٔ M و N روی AH از دو ضلـع مثلـث به یک فاصله‌اند. توجه کنید نیمسـاز زاویهٔ A ارتفاع AH را درون مثلث قطع نمی‌کند.



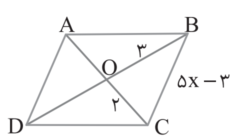
۸ (۴) زاویهٔ بین دو قطر مسـتطیل معلوم نیست، پس با تغییر این زاویه نامتناهی مستطیل با معلوم‌بودن طول قطر مساوی $۲\sqrt{۶}$ قابل رسم است.

۹ (۴) عدد $۳\sqrt{۳}$ از ۵ بزرگ‌تر اسـت. پس مسـتطیل با طول قطر ۵ و طول ضلع $۳\sqrt{۳}$ وجود ندارد، پس گزینهٔ (۱) نادرسـت است. در ضمن با تغییر زاویـهٔ بیـن دو ضلع مجاور متوازی‌الاضـلاع نامتناهی متوازی‌الاضلاع قابل رسـم است. پس گزینهٔ (۲) نادرست است. با معلوم بودن طول یک ضلع لوزی و تغییر زاویهٔ بین دو ضلع آن نامتناهی لوزی قابل رسـم اسـت، پس گزینهٔ (۳) نادرسـت است. ولی چون در مربع قطرها مساوی و عمودمنصف یکدیگرند، با داشتن طول یک قطر مربع فقط یک مربع قابل رسم است.

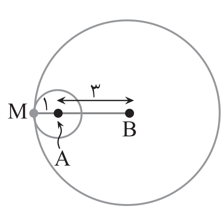


۱۰ (۴) در متوازی‌الاضـلاع قطرهـا منصـف یکدیگرنـد. پـس در صورتـی متوازی‌الاضلاع $ABCD$ قابل رسم است که مثلث OBC قابل رسم باشد، بنابراین اضلاع مثلث OBC باید در نابرابری‌های مثلث یا نتیجهٔ آن صدق کنند، در نتیجه

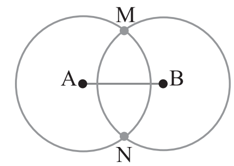
$$|۳-۲|<۵x-۳<۳+۲ \Rightarrow ۱<۵x-۳<۵ \Rightarrow ۴<۵x<۸ \Rightarrow \frac{۴}{۵}<x<\frac{۸}{۵}$$



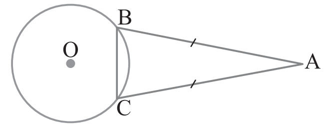
۱۱ (۲) نقاطی که از A به فاصلهٔ ۱ هستند روی دایرهٔ به مرکز A و شعاع ۱ و نقاطی که از B به فاصلهٔ ۴ هستند روی دایرهٔ به مرکز B و شعاع ۴ هستند. مطابق شـکل مقابل، این دو دایره در نقطهٔ M مماس هسـتند و این نقطه جواب این سؤال است.



۱۲ (۳) مجموعهٔ نقطه‌هایی که هم از A و هم از B به فاصلهٔ ۵ هستند نقطه‌های برخورد دو دایره به مراکز A و B و شعاع ۵ است. با فرض $r_1=r_2=5$، چون $r_1+r_2=10$، $|r_1-r_2|=0$ و $AB=6$، پس $|r_1-r_2|<AB<r_1+r_2$ بنابراین دو دایره متقاطع هستند و دو نقطه با این ویژگی وجود دارد.



۱۳ (۲) چون $AB=AC$، پس A روی عمودمنصف BC قرار دارد. از طرف دیگر $OB=OC$، پس O نیز روی عمودمنصف BC قرار دارد. بنابراین OA عمودمنصف BC است.



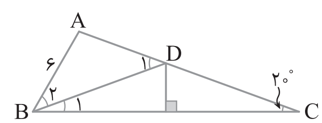
۱۴ (۲) چون D روی عمودمنصف BC است، بنابر خاصیت عمودمنصف $BD=DC$، پس مثلث BDC متساوی‌الساقین است، بنابراین $\hat{B}_1=\hat{C}=20^\circ$. زاویهٔ D_1 زاویهٔ خارجی برای مثلث BDC است:

$$\hat{D}_1=\hat{B}_1+\hat{C}=20^\circ+20^\circ=40^\circ \quad (1)$$

از طرف دیگر

$$\hat{B}_2=\hat{B}-\hat{B}_1=60^\circ-20^\circ=40^\circ \quad (2)$$

از مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $\hat{D}_1=\hat{B}_2=40^\circ$. بنابراین مثلث ABD متساوی‌الساقین است و $AD=AB=6$.



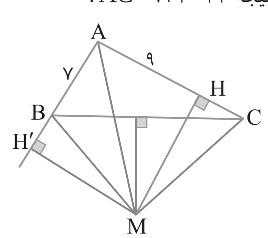
۱۵ (۲) نقطهٔ M از دو رأس B و C به یک فاصله است، پس M روی عمودمنصف ضلع BC است. در ضمن نقطهٔ M از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است، پس M روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد و عمودهای MH و MH' مساوی‌اند. بنابر فرض سؤال تصویر AM روی AC برابر ۹ است، پس $AH=9$. از طرف دیگر،

$$\left.\begin{array}{l} MB=MC \\ MH=MH' \\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle MCH\cong\triangle MBH'\Rightarrow BH'=CH$$

$$\left.\begin{array}{l} MH=MH' \\ AM=AM \\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AMH\cong\triangle AMH'\Rightarrow AH'=AH$$

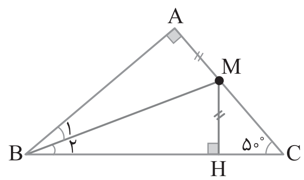
$$7+BH'=9\Rightarrow BH'=2$$

پس $CH=2$، در نتیجه $AC=9+2=11$.

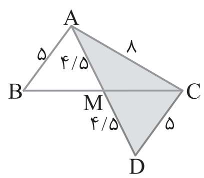


۱۶ (۳) شکل سؤال به‌صورت زیر است. نقطهٔ M از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است $(MA=MH)$. پس M روی نیمساز زاویهٔ B است. یعنی BM نیمساز زاویهٔ B است. بنابراین

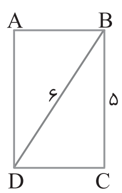
$$\hat{B}=90^\circ-\hat{C}=90^\circ-50^\circ=40^\circ\Rightarrow\hat{B}_1=\hat{B}_2=\frac{\hat{B}}{2}=20^\circ\Rightarrow H\hat{B}M=20^\circ$$



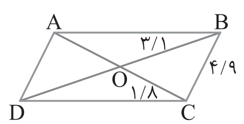
۱۷ (۲) در مثلث ABC میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ D برسیم. در این صورت سه ضلع مثلث ADC برابر ۸، ۵ و ۹ است و با این داده‌ها فقط یک مثلث ADC قابل رسم است (توجه کنید ۸، ۵ و ۹ در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند)، پس فقط یک مثلث ABC قابل رسم است.



۱۸ (۱) در مستطیل ABCD با داشتن قطر $BD=6$ و ضلع $BC=5$ به کمک رابطهٔ فیثاغورس ضلع DC به‌دست می‌آید و با داشتن طول سه ضلع، مثلث BCD به‌صورت یکتا قابل رسم است. اگر از B و D موازی اضلاع روبه‌روی آن‌ها رسم کنیم، مستطیل ABCD به‌دست می‌آید. پس با این معلومات فقط یک مستطیل قابل رسم است.



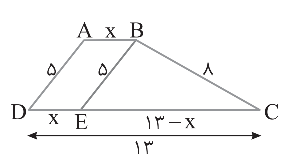
۱۹ (۱) در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند، پس اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD، $BD=6/2$ و $AC=3/6$، آن‌گاه $OB=3/1$ و $OC=1/8$. در این صورت در مثلث OBC، چون $4/9=3/1+1/8$، پس $BC\not<OB+OC$، یعنی طول ضلع‌ها در نابرابری‌های مثلث صدق نمی‌کنند. بنابراین چنین متوازی‌الاضلاعی وجود ندارد.



۲۰ (۱) فرض می‌کنیم ABCD ذوزنقهٔ مورد نظر باشد. اگر از رأس B خطی موازی ساق AD رسم کنیم، تا قاعدهٔ DC را در E قطع کند، آن‌گاه ذوزنقه به یک متوازی‌الاضلاع و یک مثلث تقسیم می‌شود. برای آنکه ذوزنقه قابل رسم باشد باید مثلث BEC قابل رسم باشد. پس لازم است اضلاع این مثلث در نابرابری‌های مثلث یا نتیجهٔ آن صدق کنند. پس

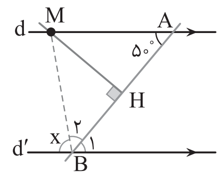
$$|8-5|<13-x<8+5\Rightarrow 3<13-x<13\xrightarrow[\text{را کم می‌کنیم}]{\text{از طرفین ۱۳}}$$

$$-10<-x<0\Rightarrow 0<x<10$$



۲۱ (۲) نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس MA=MB. بنابراین $\hat{B}_{۲}=M\hat{A}B=۵۰^\circ$. از طرف دیگر از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $\hat{B}_{۱}=۵۰^\circ$. بنابراین

$$x=۱۸۰^\circ-(\hat{B}_{۱}+\hat{B}_{۲})=۱۸۰^\circ-(۵۰^\circ+۵۰^\circ)=۸۰^\circ$$



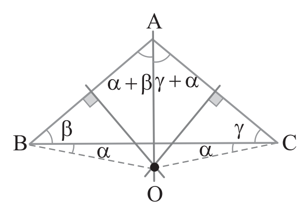
۲۲ (۴) در هر مثلث نیمسازهای زاویه‌های داخلی درون مثلث همرس هستند. پس نوع این مثلث مشخص نیست، می‌تواند حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه یا منفرجه‌الزاویه باشد. بنابراین جایگاه نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های این مثلث نامشخص است.

۲۳ (۳) از فرض $\hat{B}+\hat{C}=۷۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم $\hat{A}=۱۱۰^\circ$. پس نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث بیرون آن قرار دارد (شکل زیر را ببینید). در ضمن نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث از سه رأس آن به یک فاصله است، پس OA=OB=OC. در نتیجه مثلث‌های OBC، OAB و OAC متساوی‌الساقین هستند. بنابراین با توجه به شکل

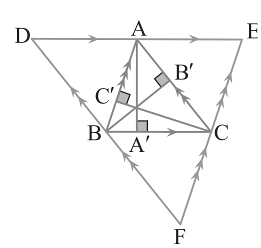
$$\hat{A}=۱۱۰^\circ\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma+\alpha=۱۱۰^\circ\xrightarrow[\text{مجموع زاویه‌های مثلث ABC}]{۲\alpha+۲\beta+۲\gamma=۱۸۰^\circ}$$

$$\alpha+۹۰^\circ=۱۱۰^\circ\Rightarrow\alpha=۲۰^\circ$$

پس $B\hat{O}C=۱۸۰^\circ-(\alpha+\alpha)=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ=۱۴۰^\circ$.



۲۴ (۴) در مثلث ABC از هر رأس خطی موازی ضلع روبه‌رو به آن رسم می‌کنیم. مثلث DEF به‌دست می‌آید. می‌دانیم نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC همان نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث DEF است و چون عمودمنصف‌های مثلث DEF همرس هستند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز همرس هستند.



۲۵ (۳) فرض می‌کنیم $\hat{A}=x$. پس $\hat{B}=۵x$ و $\hat{C}=۶x$. در نتیجه

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow x+۵x+۶x=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۱۲x=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۱۵^\circ$$

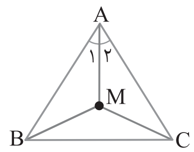
بنابراین $\hat{A}=۱۵^\circ$، $\hat{B}=۷۵^\circ$ و $\hat{C}=۹۰^\circ$. پس زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر است با $\text{زاویه خواسته‌شده}=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ+\frac{۱۵^\circ}{۲}=۹۷/۵^\circ$.

۲۶ (۴) نقطهٔ M از اضلاع مثلث ABC به یک فاصله است، پس M نقطهٔ تلاقی نیمسازهای مثلث ABC است. بنابراین

$$\text{نیمساز } AM\Rightarrow\hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲}=۳۲^\circ\Rightarrow\hat{A}=۶۴^\circ \text{ است}$$

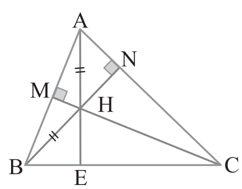
از طرف دیگر می‌دانیم زاویهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$، یعنی زاویهٔ BMC مساوی $۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$ است. بنابراین

$$B\hat{M}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ+\frac{۶۴^\circ}{۲}=۱۲۲^\circ$$



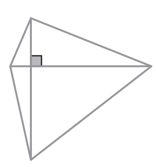
۲۷ (۳) نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC درون آن قرار دارد پس همهٔ زاویه‌های این مثلث حاده هستند. پس گزینهٔ (۱) نادرست است.
از طرف دیگر HA=HB، پس مثلث ABH متساوی‌الساقین است. بنابراین ارتفاع HM در مثلث ABH میانه هم هست، پس M وسط AB قرار دارد. بنابراین ارتفاع CM در مثلث ABC میانه هم هست. پس ABC متساوی‌الساقین است (CA=CB). با توجه به شکل دو زاویهٔ BHC و MHN متقابل به رأس هستند پس مساوی‌اند. در نتیجه $M\hat{H}N=۱۱۲^\circ$.
چون مجموع زوایای چهارضلعی AMHN برابر ۳۶۰° است در نتیجه $\hat{A}=۱۸۰^\circ-۱۱۲^\circ=۶۸^\circ$. بنابراین $\hat{B}=۶۸^\circ$. پس

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=۱۸۰^\circ-(۶۸^\circ+۶۸^\circ)=۴۴^\circ$$



۲۸ (۲) عکس قضیه‌های مطرح‌شده در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست هستند، پس آن‌ها را به‌صورت دو شرطی می‌توان نوشت. ولی عکس قضیهٔ «اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن‌گاه هم‌مساحت هستند» به‌صورت «اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، آن‌گاه همنهشت هستند» نادرست است.

۲۹ (۴) گزارهٔ (ب) یک قضیه است، پس همواره درست است و نمی‌توان با مثال نقض آن را رد کرد. ولی سه گزینهٔ دیگر با مثال نقض رد می‌شوند. برای گزارهٔ (الف) دو مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الاضلاع با مساحت ۵ هم‌مساحت هستند، ولی همنهشت نیستند.
برای گزارهٔ (پ) دو عدد $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ گنگ هستند ولی مجموع آن‌ها برابر صفر است و گنگ نیست.
برای گزارهٔ (ت) چهارضلعی مقابل دارای دو قطر مساوی و عمود بر هم است ولی لوزی نیست.



۳۰ (۳) اگر O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه

$$\text{نصف محیط}(\triangle ABC)<OA+OB+OC<\text{محیط}(\triangle ABC)$$

$$۳<OA+OB+OC<۶ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر

$$\text{محیط}(\triangle OAB)+\text{محیط}(\triangle OBC)+\text{محیط}(\triangle OAC)$$

$$=۲(OA+OB+OC)+\text{محیط}(\triangle ABC)=۲(OA+OB+OC)+۶$$

اکنون از نابرابری (۱) به‌دست می‌آید $۱۲<۲(OA+OB+OC)+۶<۱۸$.
در میان اعداد داده شده، فقط ۱۳ در این نابرابری‌ها صدق می‌کند.

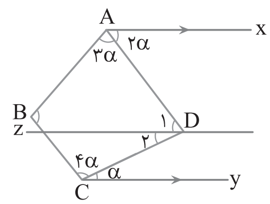
۳۱ (۳) مطابق شکل از نقطهٔ D خط Dz را موازی دو نیم‌خط موازی Ax و Cy رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} Ax \| Dz \xrightarrow{\text{مورب } AD} \hat{D}_1 = ۲\alpha \\ Cy \| Dz \xrightarrow{\text{مورب } CD} \hat{D}_۲ = \alpha \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{D} = ۳\alpha$$

از طرف دیگر مجموع زوایای چهارضلعی ABCD مساوی ۳۶۰° است. پس

$$۳\alpha + ۳\alpha + ۴\alpha + ۱۰۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۰\alpha = ۲۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۶^\circ$$

بنابراین $\hat{D} = ۳\times ۲۶ = ۷۸^\circ$.



۳۲ (۱) در مثلث ABC فرض کنید $\hat{A} = ۲x$ ، $\hat{B} = ۳x$ و $\hat{C} = ۷x$. پس

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۳x + ۷x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

در نتیجه $\hat{A} = ۳۰^\circ$ ، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $\hat{C} = ۱۰۵^\circ$. بنابراین مثلث ABC یک زاویهٔ منفرجه دارد، پس نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌ها خارج مثلث است.

۳۳ (۴) راه‌حل اول

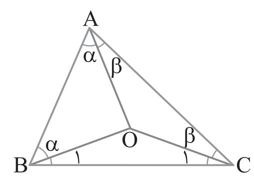
۱) چون $\hat{B} + \hat{C} = ۱۱۰^\circ$، پس $\hat{A} = ۷۰^\circ$.

۲) چون O محل همرسی عمودمنصف‌ها است، پس $OA = OB$ و $OA = OC$، یعنی دو مثلث OAB و OAC متساوی‌الساقین هستند و در آن‌ها زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۳) در مثلث OBC، مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است:

$$\hat{O} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = ۱۸۰^\circ - (\hat{B} - \alpha + \hat{C} - \beta)$$

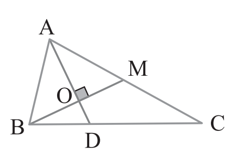
$$= ۱۸۰^\circ - (\hat{B} + \hat{C} - \hat{A}) = ۱۸۰^\circ - (۱۱۰^\circ - ۷۰^\circ) = ۱۴۰^\circ$$



راه‌حل دوم با توجه به درس‌نامه «در مثلث ABC با سه زاویهٔ حاده، اگر O محل همرسی عمودمنصف‌ها باشد، آن‌گاه $B\hat{O}C = ۲\hat{A}$». اکنون به سادگی به‌دست می‌آید

$$B\hat{O}C = ۲\hat{A} = ۲(۱۸۰^\circ - (\hat{B} + \hat{C})) = ۲(۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ) = ۲\times ۷۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

۳۴ (۴) فرض کنید نیمساز زاویهٔ A میانهٔ BM را در نقطهٔ O قطع کند. چون $AC = ۲AB$، پس $AB = AM$. یعنی مثلث ABM متساوی‌الساقین است. پس نیمساز A در این مثلث، ارتفاع هم هست و بر BM عمود است.



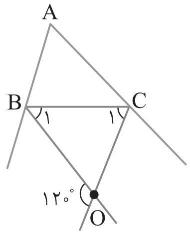
۳۵ (۳) در شکل زیر O محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C است. در مثلث OBC،

$$B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = ۱۸۰^\circ - \left(\frac{۱۸۰^\circ - \hat{B}}{۲} + \frac{۱۸۰^\circ - \hat{C}}{۲}\right)$$

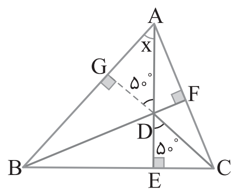
$$= \frac{\hat{B} + \hat{C}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

با توجه به شکل زیر چون $\hat{O} = ۱۲۰^\circ$، پس $B\hat{O}C = ۶۰^\circ$. در نتیجه

$$۶۰^\circ = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$



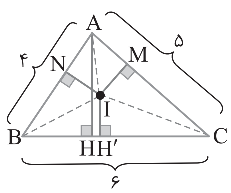
۳۶ (۲) CD را امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در G قطع کند (شکل زیر را ببینید). چون ارتفاع‌های مثلث همرس هستند، پس CG ارتفاع وارد بر ضلع AB است. اکنون به‌دست می‌آید $x = ۹۰^\circ - ۵۰^\circ = ۴۰^\circ$.



۳۷ (۲) نقطهٔ I از اضلاع مثلث ABC به یک فاصله است، پس I نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث است. فرض کنید $IH' = IN = IM = x$. در ضمن کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، بنابراین باید نسبت $\frac{IH'}{AH}$ را به‌دست آوریم. با توجه به شکل می‌نویسیم

$$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC} \Rightarrow \frac{1}{۲} AH \times ۶ = \frac{1}{۲}(۴x) + \frac{1}{۲}(۵x) + \frac{1}{۲}(۶x)$$

$$۶AH = ۴x + ۵x + ۶x = ۱۵x \Rightarrow \frac{x}{AH} = \frac{۶}{۱۵} \xrightarrow{IH' = x} \frac{IH'}{AH} = \frac{۲}{۵}$$



۳۸ (۲) توجه کنید که اعداد $۲\sqrt{۳}$، $۳\sqrt{۲}$ و ۷ در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند، یعنی

$$۷ < ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳}, \quad ۲\sqrt{۳} < ۷ + ۳\sqrt{۲}, \quad ۳\sqrt{۲} < ۷ + ۲\sqrt{۳}$$

اکنون طرفین نابرابری‌های بالا را در a ضرب می‌کنیم

$$۷a < (۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳})a \Rightarrow ۷a < ۳\sqrt{۲}a + ۲\sqrt{۳}a$$

$$۲\sqrt{۳}a < (۷ + ۳\sqrt{۲})a \Rightarrow ۲\sqrt{۳}a < ۷a + ۳\sqrt{۲}a$$

$$۳\sqrt{۲}a < (۷ + ۲\sqrt{۳})a \Rightarrow ۳\sqrt{۲}a < ۷a + ۲\sqrt{۳}a$$

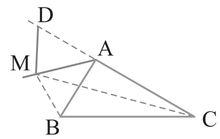
پس مثلث با طول اضلاع $۲\sqrt{۳}a$ ، $۳\sqrt{۲}a$ و $۷a$ وجود دارد. بنابراین گزینهٔ (۲) همیشه درست است و مثال نقض ندارد.

در گزینهٔ (۱) مثلث منفرجه و در گزینهٔ (۳) همهٔ مثلث‌ها به جز مثلث متساوی‌الاضلاع و در گزینهٔ (۴) مثلث قائم‌الزاویه می‌توانند مثال نقض باشند.

۳۹ (۴) نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث از ضلع‌های مثلث به یک فاصله است، پس $۳x + ۱ = ۲x + ۵$. یعنی $x = ۴$. در نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی از هر سه ضلع برابر با $۲x + ۵ = ۲\times ۴ + ۵ = ۱۳$ است.

۴۰ (۱) مانند شکل زیر روی امتداد ضلع AC نقطهٔ D را طوری انتخاب می‌کنیم که $AB=AD$. در این صورت دو مثلث AMD و AMB همنهشت‌اند (ض ز ض). بنابراین $MD=MB$. اکنون در مثلث MDC،

$$CD<MD+MC \Rightarrow CA+AD<MD+MC$$



چون $MD=MB$ و $AD=AB$، پس

$$CA+AB<MB+MC$$

بنابراین $1<\frac{MB+MC}{CA+AB}$.

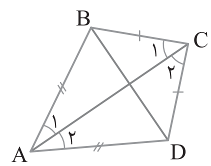
۴۱ (۲) باید هر کدام از عددهای داده شده از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد:

$$x+5<2x+4x-4 \Rightarrow \frac{9}{5}<x \ , \quad 2x<x+5+4x-4 \Rightarrow -\frac{1}{3}<x$$

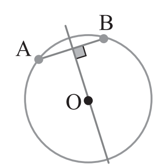
$$4x-4<2x+x+5 \Rightarrow x<9$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده، یعنی $\frac{9}{5}<x<9$ محدودهٔ x است. توجه کنید که در این محدوده $4(x-1)$، $2x$ و $x+5$ مثبت هستند.

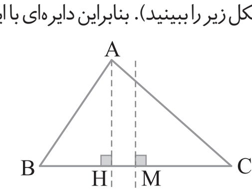
۴۲ (۳) با رسم قطر AC نتیجه می‌شود دو مثلث ABC و ADC به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند. پس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$. بنابراین AC نیمساز زاویه‌های A و C است. پس گزارهٔ (الف) درست است. از طرف دیگر نقطه‌های A و C از دو سر پاره‌خط BD به یک فاصله هستند. پس AC عمودمنصف BD است. بنابراین گزارهٔ (پ) نیز درست است. ولی گزاره‌های (ب) و (ت) درست نیستند.



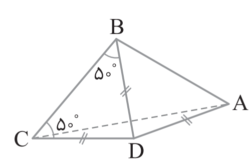
۴۳ (۱) AB وتر دایره است. بنابراین A و B روی دایره‌اند. پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره یعنی OA و OB یکسان است. بنابراین O روی عمودمنصف AB واقع شده است. یعنی فاصلهٔ O تا عمودمنصف AB صفر است.



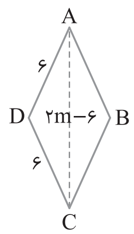
۴۴ (۱) مرکز دایره‌ای که از دو نقطهٔ B و C می‌گذرد، روی عمودمنصف ضلع BC است. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست، پس عمودمنصف BC و ارتفاع AH موازی‌اند (شکل زیر را ببینید). بنابراین دایره‌ای با این شرایط وجود ندارد.



۴۵ (۳) در مثلث BCD دو زاویهٔ B و C مساوی‌اند، پس $DC=BD$. در ضمن با توجه به اطلاعات روی شکل $BD=DA$، پس $DC=DA$. بنابراین نقطهٔ D از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است. پس D روی عمودمنصف AC است. توجه کنید نقطهٔ B از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله نیست. بنابراین B روی عمودمنصف AC نیست، به عبارت دیگر BD عمودمنصف AC نیست.



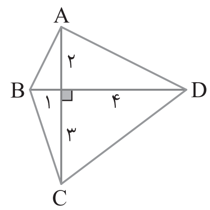
۴۶ (۳) فرض کنید ABCD لوزی مورد نظر باشد. با توجه به شکل اگر مثلث ADC با ابعاد ۶، ۶ و $2m-6$ قابل رسم باشد، لوزی ABCD نیز قابل رسم خواهد بود، پس



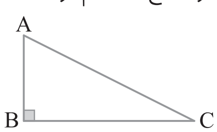
$$6-6<2m-6<6+6 \Rightarrow 6<2m<18 \Rightarrow 3<m<9$$

توجه کنید که در این محدوده، $2m-6>0$. پس m می‌تواند ۵ عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷ یا ۸ باشد.

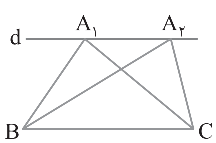
۴۷ (۴) رد گزینهٔ (۱) مطابق شکل زیر دو پاره‌خط AC و BD، هر یک به طول ۵ سانتی‌متر را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. واضح است که در این چهارضلعی قطرها برابرند و بر هم عمودند ولی این چهارضلعی مربع نیست.



رد گزینهٔ (۲) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه (مانند شکل زیر) معلوم می‌شود AB ارتفاع است ولی با خود ضلع AB هم‌طول است.



رد گزینهٔ (۳) ضلع BC و خط d موازی آن را در نظر می‌گیریم. اگر رأس سوم مثلث روی خط d باشد، مساحت مثلث‌های ایجاد شده برابرند ولی این دو مثلث لزوماً همنهشت نیستند (در شکل زیر مثلث‌های A_1BC و A_2BC هم‌مساحت‌اند ولی همنهشت نیستند).



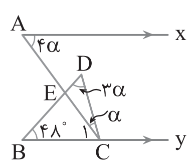
۴۸ (۳) می‌دانیم $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$، پس $\hat{A}=180^\circ-\hat{B}-\hat{C}$. اکنون با استفاده از فرض می‌نویسیم

$$\hat{A}=\hat{B}-2\hat{C} \Rightarrow 180^\circ-\hat{B}-\hat{C}=\hat{B}-2\hat{C} \Rightarrow 180^\circ+\hat{C}=2\hat{B}$$

$$\hat{B}=90^\circ+\frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{B}>90^\circ$$

پس مثلث ABC منفرجه است. بنابراین نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های این مثلث خارج آن قرار دارد.

۴۹ (۴) با استفاده از قضیهٔ خطوط موازی و مورب می‌نویسیم



$$Ax \parallel By \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}=\hat{C}_1$$

$$\hat{C}_1=4\alpha$$

از طرف دیگر مجموع زوایای مثلث BDC برابر ۱۸۰° است. پس

$$48^\circ+3\alpha+\alpha+4\alpha=180^\circ \Rightarrow 8\alpha=132^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{132^\circ}{8}=\frac{33^\circ}{2}$$

در نتیجه $\hat{C}_1=4\alpha=4\times\frac{33^\circ}{2}=66^\circ$. بنابراین

زاویهٔ خارجی مثلث BEC $A\hat{E}B \Rightarrow A\hat{E}B=\hat{B}+\hat{C}_1=48^\circ+66^\circ=114^\circ$

۵۰ **۳** از فرض تست شکل زیر را خواهیم داشت. چون $\hat{C}<۴۵^\circ$ و $\hat{A}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ$، پس $\hat{A}_۱>۴۵^\circ$، در نتیجه $\hat{A}_۱>\hat{C}$. بنابراین

$$\triangle AHC: \hat{A}_۱>\hat{C}\Rightarrow CH>AH \qquad (۱)$$

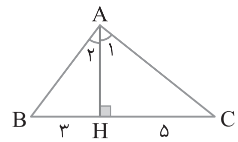
از طرف دیگر چون $\hat{B}>۴۵^\circ$ و $\hat{B}+\hat{A}_۲=۹۰^\circ$، پس $\hat{A}_۲<۴۵^\circ$. در نتیجه $\hat{B}>\hat{A}_۲$. بنابراین

$$\triangle ABH: \hat{B}>\hat{A}_۲\Rightarrow AH>BH \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$BH<AH<CH\Rightarrow ۳<AH<۵$$

در بین گزینه‌ها تنها عدد ۴ در این فاصله قرار دارد.



۵۱ **۳** مثلث‌های ADE، ACE و ABD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است. پس

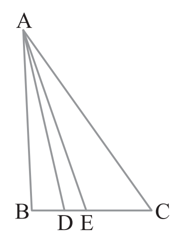
$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}}=\frac{EC}{DE}=\frac{۳}{۱}\xrightarrow{DE=x}EC=۳x$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=\frac{EC}{BD}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow{BD=y}EC=۲y$$

پس $۳x=۲y$، بنابراین

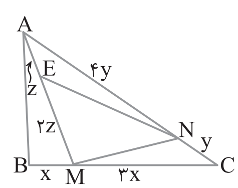
$$\frac{DE}{BD}+\frac{BC}{DE}=\frac{DE}{BD}+\frac{BD+DE+EC}{DE}=\frac{x}{y}+\frac{y+x+۳x}{x}$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+۴=\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}+۴=\frac{۳۷}{۶}$$

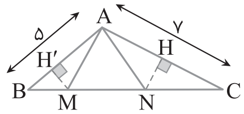


۵۲ **۳** بنابر فرض سؤال، طول پاره‌خط‌ها روی شکل نوشته شده است. دو مثلث MNE و AMN در ارتفاع نظیر رأس N مشترک هستند. پس $\frac{S_{MNE}}{S_{AMN}}=\frac{۲z}{۳z}=\frac{۲}{۳}$. همچنین دو مثلث AMN و AMC در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس $\frac{S_{AMN}}{S_{AMC}}=\frac{۴y}{۵y}=\frac{۴}{۵}$ و دو مثلث AMC و ABC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{۳x}{۴x}=\frac{۳}{۴}$. بنابراین

$$S_{MNE}=\frac{۲}{۳}S_{AMN}=\frac{۲}{۳}(\frac{۴}{۵}S_{AMC})=\frac{۸}{۱۵}(\frac{۳}{۴}S_{ABC})=\frac{۲}{۵}S_{ABC}$$



۵۳ **۲** دو مثلث ANC و AMB در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است. در نتیجه



$$\frac{S_{ANC}}{S_{AMB}}=\frac{NC}{BM}=\frac{۲BM}{BM}=۲\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}NH\times۷}{\frac{۱}{۲}MH'\times۵}=۲\Rightarrow\frac{NH}{MH'}=\frac{۱۰}{۷}$$

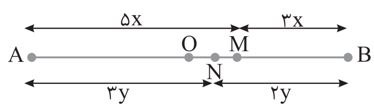
۵۴ **۲** اگر طول ضلع سوم را x فرض کنیم، بنابر فرض مسئله $x^۲=۸\times۱۰$، یعنی $x=۴\sqrt{۵}$.

۵۵ **۳** با توجه به اطلاعات مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم. توجه کنید که $AB=۸x=۵y$. بنابراین عددی مانند k وجود دارد که به ازای آن $x=۵k$ و $y=۸k$. اکنون می‌نویسیم

$$MN=AM-NA=۵x-۳y=۲۵k-۲۴k=k$$

چون $MN=۳$، پس $k=۳$. در نهایت به‌دست می‌آید:

$$AB=۸x=۴۰k=۱۲۰$$



۵۶ **۳** عدد x واسطهٔ هندسی y و ۴ است، پس

$$x^۲=۴y \qquad (۱)$$

در ضمن عدد ۱۲ واسطهٔ هندسی x و ۳۶ است، پس $۳۶x=۱۲^۲$. در نتیجه $x=۴$. اکنون از برابری (۱) به‌دست می‌آید $۴^۲=۴y$. یعنی $y=۴$. در نهایت به‌دست می‌آید $x-۲y=۴-۸=-۴$.

۵۷ **۱** **راه‌حل اول** عکس نسبت مورد نظر $\frac{ab+ac}{bc}$ است که برابر است با $\frac{a}{c}+\frac{a}{b}$. از طرف دیگر بنابر فرض $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$ و $\frac{a}{c}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$. بنابراین

$$\frac{a}{c}+\frac{a}{b}=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}=۱$$

بنابراین نسبت مورد نظر نیز برابر است با ۱.

راه‌حل دوم نسبت‌های داده شده را برابر m در نظر می‌گیریم. پس

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۶}=m\Rightarrow a=۲m,\quad b=۳m,\quad c=۶m$$

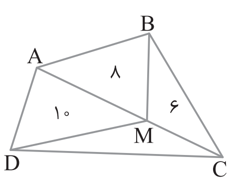
بنابراین

$$\frac{bc}{ab+ac}=\frac{(۳m)(۶m)}{(۲m)(۳m)+(۲m)(۶m)}=\frac{۱۸m^۲}{۶m^۲+۱۲m^۲}=\frac{۱۸m^۲}{۱۸m^۲}=۱$$

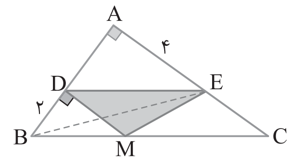
۵۸ **۲** با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۶}=\frac{d}{۵}\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{۲+۳+۶+۵}=\frac{c}{۶}\Rightarrow a+b+c+d=\frac{۱۶c}{۶}=\frac{۸}{۳}c$$

۵۹ **۲** مثلث‌های BAM و BCM در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، بنابراین $\frac{S_{BAM}}{S_{BCM}}=\frac{AM}{MC}$. پس $\frac{AM}{MC}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$. به‌همین ترتیب مثلث‌های DAM و DCM در ارتفاع نظیر رأس D مشترک‌اند، در نتیجه $\frac{S_{DAM}}{S_{DCM}}=\frac{AM}{MC}=\frac{۴}{۳}$. بنابراین $\frac{۱۰}{S_{DCM}}=\frac{۴}{۳}$، پس $S_{DCM}=۷/۵$.



۶۰ **۳** در شکل B را به E وصل کرده‌ایم. مساحت دو مثلث BDE و MDE برابر است، زیرا قاعدهٔ DE در آن‌ها مشترک است و رأس‌های B و M در این دو مثلث، روی خطی موازی این قاعده قرار دارند. از طرف دیگر در مثلث BDE، اگر BD را قاعده در نظر بگیریم، ارتفاع وارد بر این قاعده AE است، پس $S_{BDE}=\frac{۱}{۲}\times BD\times AE=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۴=۴$. در نتیجه $S_{MDE}=S_{BDE}=۴$.



۶۱ **۱** **راه‌حل اول** فرض کنید $\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۵}=t$. بنابراین $x=۳t$، $y=۴t$ و $z=۵t$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x}{x+y+z}=\frac{۳t}{۳t+۴t+۵t}=\frac{۳t}{۱۲t}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

راه‌حل دوم از تناسب $\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۵}$ نتیجه می‌شود $\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۵}=\frac{x+y+z}{۳+۴+۵}$.

پس $\frac{x}{۳}=\frac{x+y+z}{۱۲}$، در نتیجه $\frac{x}{x+y+z}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$.

۶۲ **۲** از تساوی $۲x=۳y=z$ نتیجه می‌شود $x=\frac{z}{۲}$ و $y=\frac{z}{۳}$.

اکنون این مقدارها را در عبارت خواسته شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳x+y-۲z}{x+y}=\frac{\frac{۳z}{۲}+\frac{z}{۳}-۲z}{\frac{z}{۲}+\frac{z}{۳}}=\frac{\frac{۹z+۲z-۱۲z}{۶}}{\frac{۳z+۲z}{۶}}=\frac{-z}{۵z}=\frac{-۱}{۵}$$

۶۳ **۲** از تناسب $\frac{a}{b-۲a}=-۲$ نتیجه می‌شود $a=-۲b+۴a$، پس $b=۱/۵a$. از طرف دیگر با طرفین وسطین کردن تناسب $\frac{۳a+c}{۳a-c}=۵$ نتیجه می‌شود $۱۵a-۵c=۳a+c$، پس $c=۲a$. در نتیجه

محیط مثلث $=a+b+c=a+۱/۵a+۲a=۴/۵a$

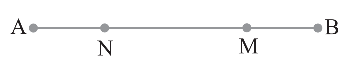
۶۴ **۲** اندازهٔ پاره‌خط‌های AM و AN را تعیین می‌کنیم. تفاضل اندازه‌های این دو پاره‌خط برابر طول MN است (شکل زیر را ببینید). در تناسب $\frac{AM}{MB}=\frac{۳}{۱}$ با ترکیب کردن در مخرج به‌دست می‌آید

$$\frac{AM}{AM+MB}=\frac{۳}{۳+۱}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow AM=\frac{۳}{۴}a$$

و در تناسب $\frac{BN}{AN}=\frac{۳}{۱}$ با ترکیب کردن در صورت به‌دست می‌آید

$$\frac{BN+AN}{AN}=\frac{۳+۱}{۱}\Rightarrow\frac{AB}{AN}=\frac{۴}{۱}\Rightarrow AN=\frac{۱}{۴}a$$

بنابراین $MN=AM-AN=\frac{۳}{۴}a-\frac{۱}{۴}a=\frac{a}{۲}$.



۶۵ **۱** در تناسب $\frac{MC}{MB}=\frac{۱}{۲}$ ترکیب در مخرج می‌کنیم:

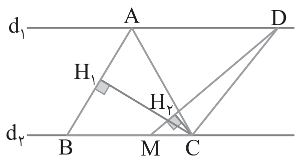
$$\frac{MC}{MB+MC}=\frac{۱}{۲+۱}\Rightarrow\frac{MC}{BC}=\frac{۱}{۳}$$

طول ارتفاع نظیر رأس A در مثلث ABC، با طول ارتفاع نظیر رأس D در مثلث DMC برابر است. بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر نسبت طول قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها است، یعنی

$$\frac{S_{DMC}}{S_{ABC}}=\frac{MC}{BC}=\frac{۱}{۳}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر با توجه به شکل زیر،

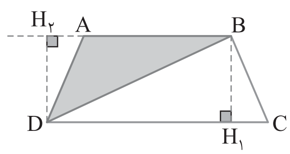
$$\frac{S_{DMC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}MD\times CH_۲}{\frac{۱}{۲}AB\times CH_۱}=\frac{MD\times CH_۲}{AB\times CH_۱}=\frac{۴\times CH_۲}{۳\times CH_۱}\qquad(۲)$$



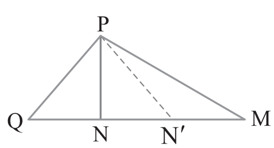
از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{۴CH_۲}{۳CH_۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{CH_۱}{CH_۲}=۴$$

۶۶ **۱** در شکل مقابل $BH_۱$ و $DH_۲$ به‌ترتیب ارتفاع‌های مثلث‌های BDC و DAB هستند. چون دو مثلث BDC و DAB دارای ارتفاع برابر هستند $(BH_۱=DH_۲)$، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها است، یعنی $\frac{S_{DAB}}{S_{BDC}}=\frac{AB}{DC}$. پس $\frac{S_{DAB}}{۶}=\frac{۲}{۳}$، در نتیجه $S_{DAB}=۴$.

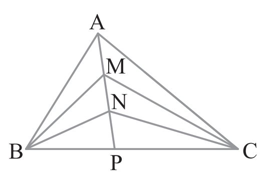


۶۷ **۱** دو مثلث $PN'M$ و PQN در ارتفاع نظیر رأس P مشترک‌اند. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است. از طرف دیگر از فرض‌های $MN=۲NQ$ و $MN=۲MN'$ نتیجه می‌گیریم $MN'=NQ$، پس



$$\frac{S_{PN'M}}{S_{PQN}}=\frac{MN'}{NQ}\Rightarrow S_{PN'M}=S_{PQN}=۸$$

۶۸ **۱** با تفضیل در مخرج تناسب $\frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}=\frac{۲}{۵}$ به‌دست می‌آید $\frac{S_{ABP}}{S_{ABC}-S_{ABP}}=\frac{۲}{۵-۲}$، یعنی $\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}=\frac{۲}{۳}$.



از طرف دیگر، دو مثلث ABP و ACP در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس $\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}=\frac{BP}{PC}=\frac{۲}{۳}$. دو مثلث MBP و MCP هم در ارتفاع نظیر رأس M مشترک‌اند، پس $\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}}=\frac{BP}{PC}=\frac{۲}{۳}$. به‌طور مشابه $\frac{S_{NBP}}{S_{NCP}}=\frac{BP}{PC}=\frac{۲}{۳}$، در نتیجه

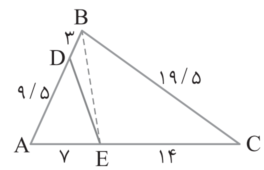
$$\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}}=\frac{S_{NBP}}{S_{NCP}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{S_{MBP}-S_{NBP}}{S_{MCP}-S_{NCP}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{S_{BMN}}{S_{CMN}}=\frac{۲}{۳}$$

۶۹ (۲) ابتدا B را به E وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید).

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABE}}=\frac{AD}{AB}=\frac{۹/۵}{۱۲/۵}=\frac{۱۹}{۲۵},\qquad \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{AE}{AC}=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}$$

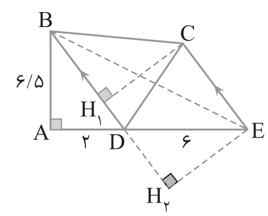
اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{۱۹}{۷۵}$. اکنون اگر این تناسب را تفضیل در مخرج کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}-S_{ADE}}=\frac{۱۹}{۷۵-۱۹}\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{BCED}}=\frac{۱۹}{۵۶}$$



۷۰ (۳) نقطه‌های B و E را به هم وصل می‌کنیم (شکل را ببینید). چون $EC||BD$، پس ارتفاع‌های نظیر رأس‌های C و E در مثلث‌های CBD و EBD برابرند، یعنی $CH_۱=EH_۲$. از طرف دیگر BD قاعدهٔ مشترک نظیر این دو ارتفاع است، پس $S_{CBD}=S_{EBD}$. در نتیجه $S_{ABD}+S_{CBD}=S_{ABD}+S_{EBD}$، یعنی $S_{ABCD}=S_{ABE}$. اکنون می‌توان نوشت

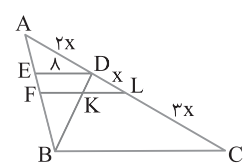
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AB\times AE=\frac{۱}{۲}\times۶/۵\times۸=۲۶$$



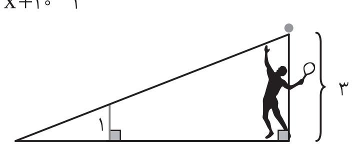
۷۱ (۱) با فرض $DL=x$، نتیجه می‌گیریم $AD=۲x$ و $LC=۳x$. با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\triangle ABC: ED||BC\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{ED}{BC}\Rightarrow\frac{۲x}{۶x}=\frac{۸}{BC}\Rightarrow BC=۲۴$$

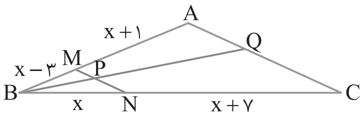
$$\triangle ABC: FL||BC\Rightarrow\frac{AL}{AC}=\frac{FL}{BC}\Rightarrow\frac{۳x}{۶x}=\frac{FL}{۲۴}\Rightarrow FL=۱۲$$



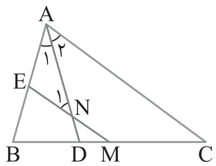
۷۲ (۲) شکل مسئله به‌صورت زیر است. اگر x فاصلهٔ مورد نظر باشد، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{x}{x+۱۰}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳x=x+۱۰\Rightarrow x=۵$



۷۳ (۲) چون $\frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PQ}$، پس بنابر عکس قضیهٔ تالس در مثلث BAQ، MP موازی AQ است. بنابراین MN هم موازی AC است. بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BAC، $\frac{BM}{MA}=\frac{BN}{NC}$، یعنی $\frac{x-۳}{x+۱}=\frac{x}{x+۷}$، پس $x=۷$.



۷۴ (۴) بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. MN را امتداد می‌دهیم تا AB را در E قطع کند. توجه کنید که



$$ME||AC\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{BM}{MC}=\frac{BE}{EA}\xrightarrow{BM=MC}۱=\frac{BE}{EA}$$

$$BE=EA=\frac{AB}{۲}$$

در مثلث ABC نقطهٔ M وسط BC و نقطهٔ E وسط AB است پس بنابر قضیهٔ میان‌خط $ME=\frac{AC}{۲}$. از طرف دیگر،

$$\left.\begin{array}{l}ME||AC\\ AD\ \text{مورب}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{قضیه خطوط}}\hat{N}_۱=\hat{A}_۲\xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲}\hat{N}_۱=\hat{A}_۱$$

$$AE=NE\Rightarrow NE=\frac{AB}{۲}$$

بنابراین $MN=ME-NE=\frac{AC}{۲}-\frac{AB}{۲}=\frac{AC-AB}{۲}=\frac{۸-۶}{۲}=۱$

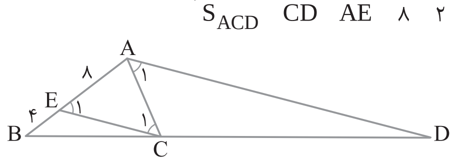
۷۵ (۱) دو مثلث ABD و ACD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD}$. اکنون با استفاده از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم

$$\hat{A}_۱=\hat{C}_۱\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب}}AD||CE$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{EA}$$

$$\hat{C}_۱=\hat{E}_۱\Rightarrow AE=AC\xrightarrow{AC=۸}AE=۸$$

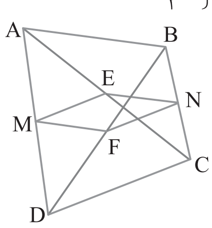
بنابراین $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AE}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$.



۷۶ (۲) در چهارضلعی ABCD، دو ضلع AB و DC برابرند و نقاط E و F وسط‌های دو قطر AC و BD هستند. همچنین N و M به ترتیب وسط‌های BC و AD هستند. بنابر قضیهٔ میان‌خط در مثلث،

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC: EN=\frac{AB}{۲}\\ \triangle ABD: MF=\frac{AB}{۲}\\ \triangle ADC: ME=\frac{DC}{۲}\\ \triangle BDC: NF=\frac{DC}{۲}\end{array}\right\}\xrightarrow{AB=DC}EN=MF=ME=NF$$

بنابراین چهارضلعی MENF لوزی است. توجه کنید که چهارضلعی MENF متوازی‌الاضلاع نیز هست ولی لوزی پاسخ جامع‌تر و کامل‌تری است.



۷۷ **۳** نقاط M، N و E به‌ترتیب وسط‌های اضلاع AB ، AC و BC هستند، پس بنابر قضیهٔ میان خط در مثلث ABC،

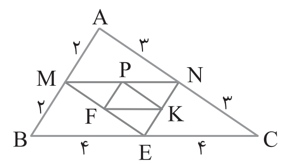
$$ME=\frac{AC}{۲}, NE=\frac{AB}{۲}, MN=\frac{BC}{۲}$$

از طرف دیگر نقاط P، F و K به ترتیب وسط‌های اضلاع MN ، ME و NE در مثلث MNE هستند. پس بنابر قضیهٔ میان خط در مثلث MNE،

$$FK=\frac{MN}{۲}, PF=\frac{NE}{۲}, PK=\frac{ME}{۲}$$

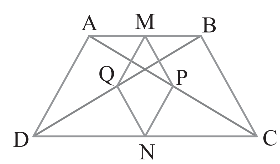
بنابراین

$$\frac{FK+PF}{BC}=\frac{\frac{MN}{۲}+\frac{NE}{۲}}{BC}=\frac{\frac{BC}{۴}+\frac{AB}{۴}}{BC}$$
$$=\frac{BC+AB}{۴BC}=\frac{۸+۴}{۴\times ۸}=\frac{۱۲}{۳۲}=۰/۳۷۵$$



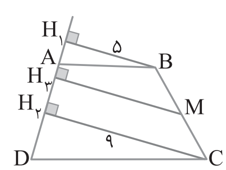
۷۸ **۳** اگر نقطه‌های M و N وسط‌های دو قاعده و نقطه‌های P و Q وسط‌های دو قطر ذوزنقه باشند، آن‌گاه بنابر قضیهٔ میان‌خط در مثلث‌های ABC و ABD، MP نصف BC و MQ نصف AD است و چون ساق‌های AD و BC مساوی‌اند، پس MP=MQ . از طرف دیگر بنابر قضیهٔ میان‌خط در مثلث‌های ADC و BDC، NP نصف AD و NQ نصف BC است، در نتیجه NP=NQ . بنابراین چهارضلعی MPNQ لوزی است. قطر MN در این لوزی برابر ارتفاع ذوزنقه، یعنی ۴ و قطر دیگر آن، یعنی PQ مساوی نصف تفاضل دو قاعده، یعنی $\frac{۶}{۲}=۳$ است. بنابراین

$$\text{مساحت لوزی}=\frac{۱}{۲}MN\times PQ=\frac{۱}{۲}(۴)(۳)=۶$$



۷۹ **۱** در شکل M وسط ساق BC است. چهارضلعی $BH_۱H_۲C$ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است و $MH_۳$ میان‌خط آن است، در نتیجه

$$MH_۳=\frac{BH_۱+CH_۲}{۲}=\frac{۵+۹}{۲}=۷$$



۸۰ **۴** ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. از تعمیم قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

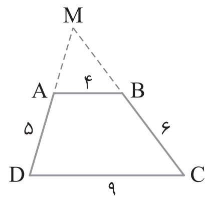
$$AB||DC\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{۴}{۹}$$

با تفضیل در مخرج کردن تناسب به دست آمده نتیجه می‌گیریم

$$\frac{MA}{MD-MA}=\frac{MB}{MC-MB}=\frac{۴}{۹-۴}\Rightarrow\frac{MA}{۵}=\frac{MB}{۶}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین MA=۴ و $MB=\frac{۲۴}{۵}$ ، پس محیط مثلث AMB برابر است با

$$MA+MB+AB=۴+\frac{۲۴}{۵}+۴=\frac{۶۴}{۵}=۱۲/۸$$



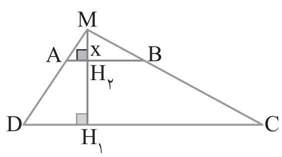
۸۱ **۲** در مثلث MCD ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

اکنون در مثلث $MDH_۱$ ، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\frac{MH_۲}{MH_۱}=\frac{MA}{MD}\Rightarrow\frac{x}{x+۴}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=۲$$

در نهایت به‌دست می‌آید $\text{فاصلهٔ M تا قاعدهٔ DC}=MH_۱=x+۴=۶$

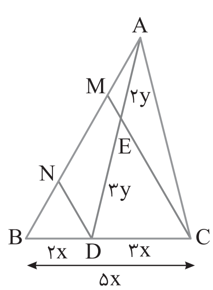


۸۲ **۳** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم

$$\triangle BMC:DN||CM\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{BD}{DC}=\frac{BN}{MN}\Rightarrow\frac{۲x}{۳x}=\frac{BN}{MN}$$
$$BN=\frac{۲}{۳}MN$$
$$\triangle AND:DN||ME\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{AE}{ED}=\frac{AM}{MN}\Rightarrow\frac{۲y}{۳y}=\frac{AM}{MN}$$
$$AM=\frac{۲}{۳}MN$$

بنابراین $BN=AM=\frac{۲}{۳}MN$. پس

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AM+MN+BN}{AM}=\frac{AM+\frac{۳}{۲}AM+AM}{AM}=\frac{۷}{۲}$$



۸۳ **۱** از نقطهٔ E خطی موازی CN رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در F قطع کند. بنابر قضیهٔ تالس،

$$\triangle AFE:MN||FE\Rightarrow\frac{AN}{NF}=\frac{AM}{ME}=۱\Rightarrow AN=NF$$
$$\triangle BNC:FE||NC\Rightarrow\frac{BF}{FN}=\frac{BE}{EC}=۱\Rightarrow BF=FN$$

بنابراین $AN=NF=BF$. پس $AN=\frac{1}{3}AB$. از طرف دیگر بنابر قضیهٔ میان‌خط در مثلث،

$$\triangle AEF: MN=\frac{FE}{2}, \quad \triangle BNC: FE=\frac{NC}{2}$$

در نتیجه $MN=\frac{NC}{4}$. چون دو مثلث AMN و ANC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس

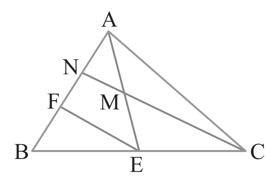
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ANC}}=\frac{MN}{NC}=\frac{1}{4} \qquad (1)$$

همچنین چون دو مثلث ANC و ABC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند، پس

$$\frac{S_{ANC}}{S_{ABC}}=\frac{AN}{AB}=\frac{1}{3} \qquad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$S_{AMN}=\frac{1}{4}S_{ANC}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}S_{ABC}\right)=\frac{1}{12}S_{ABC}=\frac{1}{12}\times 48=4$$



۸۴ (۲) با دو بار استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم

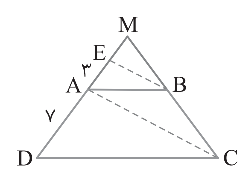
$$\triangle MAC: BE \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{AE}=\frac{MB}{BC} \qquad (1)$$

$$\triangle MDC: AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{AD}=\frac{MB}{BC} \qquad (2)$$

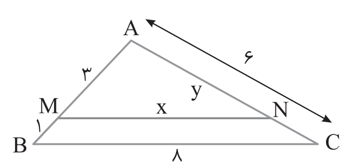
با مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{ME}{AE}=\frac{MA}{AD}$. اگر $ME=x$ ، آن‌گاه

$$\frac{x}{3}=\frac{x+3}{7} \Rightarrow 7x=3x+9 \Rightarrow 4x=9 \Rightarrow x=2/25$$

بنابراین $MD=2/25+3+7=12/25$.

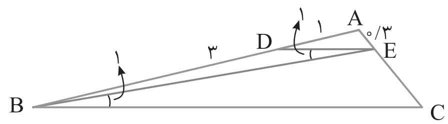


۸۵ (۲) شکل مسئله به‌صورت زیر است. چون MN با BC موازی است، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ ، یعنی $\frac{3}{4}=\frac{y}{6}=\frac{x}{8}$ ، در نتیجه $x=6$ و $y=\frac{9}{2}$. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر مثلث حاصل برابر ۶ سانتی‌متر است.



۸۶ (۳) چون $\hat{E}_1=\hat{B}_1$ ، از عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود DE با BC موازی است. در نتیجه بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ ،

یعنی $\frac{1}{4}=\frac{0/3}{AC}$ ، پس $AC=4\times 0/3=1/2$.

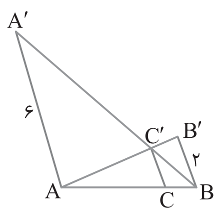


۸۷ (۱) در مثلث BAA' ، CC' با AA' موازی است. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{CC'}{AA'}=\frac{BC}{AB} \qquad (1)$$

از طرف دیگر، در مثلث ABB' ، چون CC' و BB' موازی‌اند، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{CC'}{BB'}=\frac{AC}{AB} \qquad (2)$$



با جمع کردن دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $\frac{CC'}{AA'}+\frac{CC'}{BB'}=1$. اکنون با قرار دادن مقدارهای $AA'=6$ و $BB'=2$ معلوم می‌شود که $\frac{CC'}{6}+\frac{CC'}{2}=1$. پس $CC'=\frac{3}{2}$.

۸۸ (۴) طول هر ضلع لوزی را برابر x می‌گیریم. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

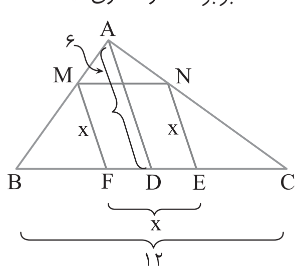
$$\triangle ABD: MF \parallel AD \Rightarrow \frac{BF}{BD}=\frac{MF}{AD}=\frac{x}{6} \qquad (1)$$

$$\triangle ACD: NE \parallel AD \Rightarrow \frac{CE}{CD}=\frac{NE}{AD}=\frac{x}{6} \qquad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{BF}{BD}=\frac{CE}{CD}=\frac{x}{6}$. بنابر ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم $\frac{BF+CE}{BD+CD}=\frac{x}{6}$. مقدار $BF+CE$ مساوی $BC-EF$ ، یعنی $12-x$ است. در ضمن $BD+CD$ برابر BC و مساوی ۱۲ است. بنابراین،

$$\frac{12-x}{12}=\frac{x}{6} \Rightarrow 12-x=2x \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$$

پس محیط لوزی $MNEF$ برابر $4x$ و مساوی ۱۶ است.



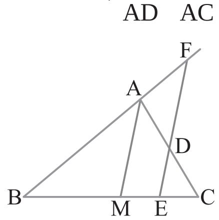
۸۹ (۳) دو بار از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\triangle AMC: DE \parallel AM \Rightarrow \frac{CM}{ME}=\frac{AC}{AD} \qquad (1)$$

$$\triangle BFE: AM \parallel FE \Rightarrow \frac{BM}{ME}=\frac{AB}{AF} \qquad (2)$$

چون $CM=BM$ ، پس یک طرف تساوی‌های (۱) و (۲) با هم مساوی‌اند و در نتیجه

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AF} \xrightarrow{\text{تعویض جای طرفین}} \frac{AF}{AD}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AF}{3}=\frac{4}{3} \Rightarrow AF=4$$



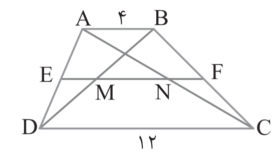
۹۰ **۳** راه‌حل اول از قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه نتیجه می‌گیریم اگر E و F وسط‌های دو ساق باشند، آن‌گاه EF موازی با قاعده‌ها است. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\triangle ADC: EN\|DC\Rightarrow\frac{AE}{AD}=\frac{EN}{DC}\Rightarrow\frac{EN}{DC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow EN=\frac{۱}{۲}DC\qquad(۱)$$

$$\triangle ABD: EM\|AB\Rightarrow\frac{DE}{AD}=\frac{EM}{AB}\Rightarrow\frac{EM}{AB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow EM=\frac{۱}{۲}AB\qquad(۲)$$

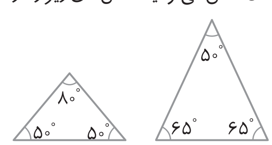
از تفریق تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$MN=\frac{۱}{۲}(DC-AB)\Rightarrow MN=\frac{۱}{۲}(۱۲-۴)=۴$$



راه‌حل دوم چون E و F وسط‌های ساق‌های ذوزنقه هستند، پاره‌خط EF موازی قاعده‌هاست. از طرف دیگر چون E وسط AD است و $EM\|AB$، پس EM در مثلث DAB میان‌خط است، یعنی M نیز وسط قطر BD از ذوزنقهٔ ABCD است. به طور مشابه N نیز وسط قطر AC است و می‌دانیم اگر M و N وسط قطرهای ذوزنقهٔ ABCD باشند، آن‌گاه $MN=\frac{|DC-AB|}{۲}=\frac{۱۲-۴}{۲}=۴$

۹۱ **۳** در شکل‌های زیر دو مثلث، متساوی‌الساقین هستند و یک زاویهٔ مساوی دارند، ولی متشابه نیستند، چون بقیهٔ زاویه‌های آن‌ها نامساوی‌اند. پس گزینهٔ (۱) نادرست است. در ضمن دو متوازی‌الاضلاع که یک زاویهٔ مساوی داشته باشند، سایر زاویه‌های آن‌ها نیز مساوی هستند، ولی لزومی ندارد اضلاع آن‌ها متناسب باشند. پس گزینهٔ (۲) نادرست است. ولی دو لوزی با زاویه‌های مساوی حتماً متشابه‌اند زیرا اضلاع آن‌ها در هر صورت متناسب‌اند. دو مثلث متساوی‌الساقین ممکن است متشابه نباشند. برای مثال نقض می‌توانید شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.



۹۲ **۴** با توجه به داده‌های روی شکل و فرض سؤال نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۳a}{۴a}=\frac{۶b}{۸b}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AB}{DC}=\frac{AE}{BC}=\frac{BE}{BD}$$

پس دو مثلث ABE و CDB به حالت (ض ض ض) متشابه‌اند. پس زاویه‌های نظیر این دو مثلث مساوی‌اند:

$$\begin{cases}۲x-۷=x+y\\ ۲x-۱=y+۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=۷\\ ۲x-y=۱۶\end{cases}\Rightarrow x=۹^\circ,\ y=۲^\circ$$

پس

$$\hat{A}=۱۸۰^\circ-(۲x-۷+۲x-۱)^\circ=۱۸۰^\circ-(۴x-۸)^\circ=۱۵۲^\circ$$

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(y+۱۵+x+y)^\circ=۱۸۰^\circ-(x+۲y+۱۵)^\circ=۱۵۲^\circ$$

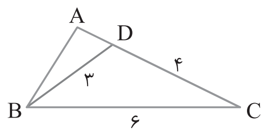
بنابراین $\hat{A}+\hat{C}=۳۰۴^\circ$.

۹۳ **۲** در دو مثلث ABD و ACB زاویهٔ A مشترک است و واضح است که دو زاویهٔ ABC و ABD نامساوی‌اند، پس باید $A\hat{B}C=A\hat{D}B$. در نتیجه از تشابه مثلث‌های ABD و ACB نتیجه می‌شود $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{BC}$. پس $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{۴+AD}=\frac{۱}{۲}$. چون $\frac{AD}{AB}=\frac{۱}{۲}$، پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد که $AD=k$ و $AB=۲k$. به این ترتیب

$$\frac{AB}{۴+AD}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۲k}{۴+k}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $k=\frac{۴}{۳}$. در نتیجه $AB=\frac{۸}{۳}$ و $AD=\frac{۴}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت

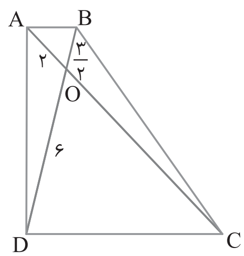
$$AB+AD=\frac{۸}{۳}+\frac{۴}{۳}=۴$$



۹۴ **۲** چون AB و DC موازی‌اند، از قضیهٔ اساسی تشابه نتیجه می‌شود که مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند. بنابراین

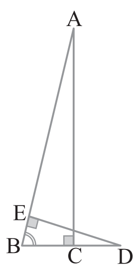
$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow\frac{۲}{OC}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۶}\Rightarrow OC=۸$$

به این ترتیب $AC=AO+OC=۲+۸=۱۰$.



۹۵ **۴** برج پیزا و تیر فلزی نگه دارنده را با پاره‌خط‌هایی مطابق شکل زیر نشان می‌دهیم. در دو مثلث BCA و BED، $\hat{C}=\hat{E}=۹۰^\circ$ و $\hat{B}=\hat{B}$، بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCA و BED متشابه‌اند (ز ز)، پس $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}$، یعنی $\frac{AB}{۱۱}=\frac{۵۰}{۱۰}$، در نتیجه

$$AB=۵۵$$



۹۶ **۳** چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، پس $A\hat{C}B=A'\hat{C}'B'$ و در نتیجه $O\hat{C}B=O\hat{C}'B'$. بنابراین دو مثلث OCB و $OC'B'$ به حالت (ز ز) متشابه هستند و

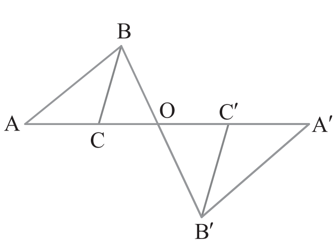
$$\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{BC}{B'C'}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\qquad(۲)$$

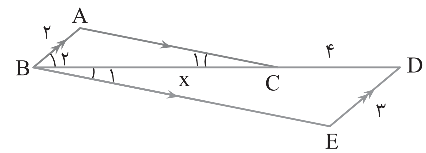
از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{OC}{OC'}=\frac{AC}{A'C'}$، پس

$$OC\times A'C'=OC'\times AC$$



۹۷ ③ چون $AC\|BE$ و BC مورب است، پس $\hat{B}_1=\hat{C}_1$. از طرف دیگر $AB\|ED$ و BD مورب است، پس $\hat{B}_2=\hat{D}$. در نتیجه دو مثلث ABC و EDB به حالت (ز ز) متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{BC}{BD}=\frac{AB}{DE}$.

بنابراین $\frac{x}{x+۴}=\frac{۲}{۳}$، یعنی $۳x=۲x+۸$ و در نتیجه $x=۸$.



۹۸ ① دو مثلث ADE و ABC متشابه‌اند، زیرا $\hat{D}_1=\hat{B}$ و $\hat{A}=\hat{A}$. از طرف دیگر چون $FE\|BC$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه $\triangle AEF\sim\triangle ABC$، بنابراین

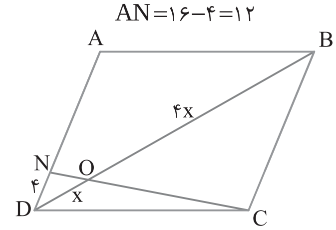
$$\triangle ADE\sim\triangle AEF\Rightarrow\frac{ED}{EF}=\frac{AD}{AE}\xrightarrow[AE=۷]{AD=۴}\frac{ED}{EF}=\frac{۴}{۷}$$

۹۹ ① بنابر فرض‌های تست شکل زیر را خواهیم داشت. بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث ODN و OBC متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{OD}{OB}=\frac{ND}{BC}\Rightarrow\frac{x}{۴x}=\frac{۴}{BC}\Rightarrow BC=۱۶$$

پس $AD=۱۶$، زیرا در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل مساوی‌اند و در نتیجه

$$AN=۱۶-۴=۱۲$$

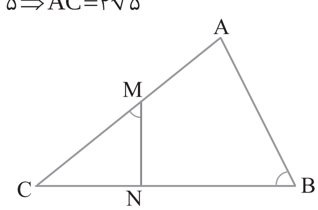


۱۰۰ ③ دو مثلث MNC و BAC را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}N\hat{M}C=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle MNC\sim\triangle BAC\Rightarrow\frac{NC}{AC}=\frac{MC}{BC}$$

$$\xrightarrow{AC=۲MC}\frac{۴}{۲MC}=\frac{MC}{۶+۴}\Rightarrow MC^۲=۲۰$$

$$MC=۲\sqrt{۵}\Rightarrow AC=۴\sqrt{۵}$$



۱۰۱ ③ اگر در این تشابه $\hat{A}=\hat{A}'$، $\hat{B}=\hat{B}'$ و $\hat{C}=\hat{C}'$، آن‌گاه نسبت تشابه برابر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ یا معکوس آن است (درستی گزینهٔ (۱)).

با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌توان دید که چون $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$، پس نسبت $\frac{A'B'+A'C'}{AB+AC}$، یعنی گزینهٔ (۲) هم همان نسبت تشابه است. از طرف دیگر از تناسب $\frac{AB}{A'B'}=\frac{۲AC}{۲A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC+۲AC+AB}{B'C'+۲A'C'+A'B'}$. پس گزینهٔ (۴) هم درست است.

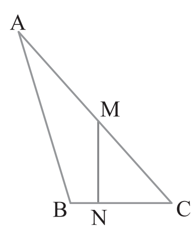
۱۰۲ ② در دو مثلث متشابه ضلع‌ها نظیر به نظیر متناسب هستند. پس a را با ۹ یا با b نظیر قرار می‌دهیم تا بیشترین مقدار a را به‌دست آوریم. اگر a را با ۹ نظیر بگیریم، به دو تناسب زیر می‌رسیم

$$\frac{a}{۹}=\frac{۵}{۷}=\frac{۴}{b}\Rightarrow a=\frac{۴۵}{۷}\quad\text{یا}\quad\frac{a}{۹}=\frac{۵}{b}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow a=\frac{۳۶}{۷}$$

اگر a را با b نظیر بگیریم، به تناسب‌های $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۷}=\frac{۵}{۹}$ یا $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۷}$ می‌رسیم که این تناسب‌ها درست نیستند. پس $a=\frac{۴۵}{۷}$ بیشترین مقدار برای a است.

۱۰۳ ① اگر زاویهٔ حادهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری مساوی باشد، آن‌گاه این دو مثلث با داشتن دو زاویهٔ مساوی متشابه خواهند بود. اگر دو ضلع قائم دو مثلث قائم‌الزاویه متناسب باشند، آن‌گاه این دو مثلث دارای زاویهٔ بین مساوی ۹۰° هم هستند، پس متشابه‌اند. اگر نسبت دو زاویهٔ حادهٔ دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشد، آن‌گاه دو مثلث دارای زاویه‌های حادهٔ مساوی هستند، پس دو مثلث متشابه می‌شوند. تساوی وترهای دو مثلث قائم‌الزاویه تشابه آن‌ها را نتیجه نمی‌دهد.

۱۰۴ ② از تناسب $\frac{NC}{BC}=\frac{MC}{AC}$ بنابر عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود MN موازی AB است که خلاف فرض تست است. پس گزینهٔ (۱) نادرست است. در ضمن در تناسب $\frac{NC}{AC}=\frac{BC}{MC}$، چون ضلع‌های نظیر به نظیر دو مثلث قرار دارند، پس نمی‌توان تشابه را نتیجه گرفت، بنابراین گزینهٔ (۳) نیز نادرست است. با فرض $B\hat{N}M=A\hat{B}C$ نمی‌توان تساوی زاویه‌های دو مثلث را نتیجه گرفت، پس گزینهٔ (۴) نیز نادرست است. ولی با فرض $M\hat{N}C=B\hat{A}C$ تشابه دو مثلث NMC و ABC نتیجه می‌شود، زیرا زاویهٔ C نیز در دو مثلث مشترک است، پس گزینهٔ (۲) درست است.



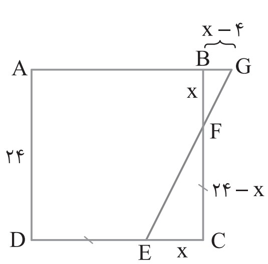
۱۰۵ ② مطابق شکل زیر، چون چهارضلعی $ABCD$ مربع است و $FC=ED$، پس

$$BF=EC=x,\quad FC=ED=۲۴-x$$

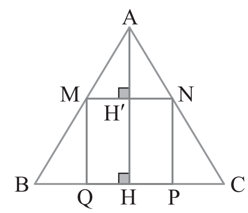
چون $BG\|EC$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث FBG و FCE متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{FB}{FC}=\frac{BG}{CE}\Rightarrow\frac{x}{۲۴-x}=\frac{x-۴}{x}$$

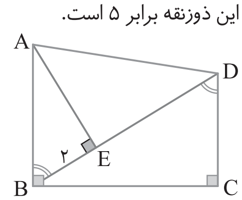
پس $x^۲-۱۴x+۴۸=۰$ و این معادله دو ریشه دارد: $x=۶$ و $x=۸$.



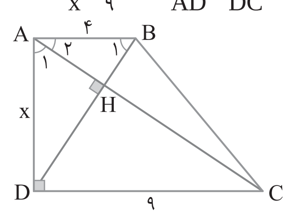
۱۰۶ (۱) در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم MN را در H' قطع می‌کند. چون MH' با BH موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه دو مثلث AMH' و ABH متشابه‌اند و $\frac{AH'}{AH}=\frac{AM}{AB}$. با استدلالی مشابه دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}$، پس $\frac{MN}{BC}=\frac{AH'}{AH}$. با تفضیل در صورت به‌دست می‌آید $\frac{BC-MN}{BC}=\frac{AH-AH'}{AH}$، یعنی $\frac{a-MN}{a}=\frac{MN}{h_a}$ و از این تساوی به‌دست می‌آید $MN=\frac{a\times h_a}{a+h_a}$.



۱۰۷ (۱) با توجه به شکل معلوم می‌شود $A\hat{B}E+D\hat{B}C=۹۰^\circ$ و $B\hat{D}C+D\hat{B}C=۹۰^\circ$، پس $A\hat{B}E=B\hat{D}C$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE و BDC متشابه‌اند (ز ز)، در نتیجه $\frac{AE}{BC}=\frac{BE}{DC}$، یعنی $\frac{AE}{BC}=\frac{۲}{DC}$، پس $۲BC=AE\times DC$. از طرف دیگر چون $AE\times DC=۱۰$، پس $BC=۵$، یعنی ارتفاع این ذوزنقه برابر ۵ است.



۱۰۸ (۳) با توجه به شکل زیر، چون $A\hat{H}B=۹۰^\circ$، پس $\hat{A}_۲+\hat{B}_۱=۹۰^\circ$. از طرف دیگر $\hat{A}_۲+\hat{A}_۱=۹۰^\circ$، پس $\hat{B}_۱=\hat{A}_۱$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و DAC متشابه‌اند (ز ز) و $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DC}$، یعنی $\frac{۴}{x}=\frac{x}{۹}$، پس $x^۲=۴\times۹$ و $x=۶$.

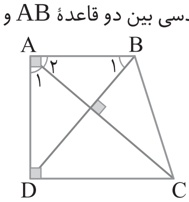


۱۰۹ (۲) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و DAC را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases}\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\\ \hat{B}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{B}_۱\\ \hat{A}=\hat{D}=۹۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle ABD\sim\triangle DAC$$

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow AD^۲=AB\times DC$$

پس ارتفاع AD واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ AB و DC است.

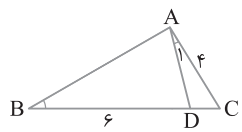


۱۱۰ (۲) دو مثلث ADC و BAC را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{cases}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle ADC\sim\triangle BAC\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{AC}$$

$$\frac{۴}{BC}=\frac{DC}{۴}\Rightarrow(۶+DC)DC=۱۶\Rightarrow DC=۲$$

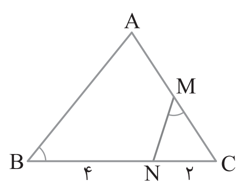
از طرف دیگر دو مثلث ADC و ABC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است. پس $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=\frac{DC}{BC}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$.



۱۱۱ (۲) چون $\hat{M}=\hat{B}$ و $\hat{C}=\hat{C}$، پس دو مثلث MNC و BAC به حالت (ز ز) متشابه‌اند. اکنون نسبت تشابه دو مثلث را می‌نویسیم $\frac{MC}{BC}=\frac{NC}{AC}$. چون M وسط AC است، پس $MC=\frac{AC}{۲}$. بنابراین $\frac{AC}{۲BC}=\frac{NC}{AC}$. در نتیجه

$$AC^۲=۲NC\times BC=۲NC(NC+NB)=۲\times۲\times(۲+۴)=۲۴$$

$$AC=۲\sqrt{۶}$$



۱۱۲ (۲) در دو مثلث متشابه ضلع‌های نظیر متناسب‌اند. پس

$$\frac{x}{۸}=\frac{y}{۷}=\frac{۸}{۵}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۶۴}{۵}\\ y=\frac{۵۶}{۵}\end{cases}\Rightarrow x+y=\frac{۱۲۰}{۵}=۲۴$$

دقت کنید اگر تناسب $\frac{x}{۷}=\frac{y}{۸}=\frac{۸}{۵}$ هم نوشته شود، جواب نهایی همان مقدار ۲۴ است.

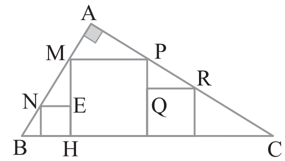
۱۱۳ (۱) توجه کنید که طول ضلع مربع به مساحت ۲ برابر $\sqrt{۲}$ است پس $NE=EH=\sqrt{۲}$. همچنین طول ضلع مربع به مساحت ۱۸ برابر $۳\sqrt{۲}$ است پس $MH=۳\sqrt{۲}$. در نتیجه $ME=۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$. اکنون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PQR و MNE را در نظر بگیرید. با فرض اینکه طول ضلع مربع سوم برابر x باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}RQ||BC\\ \text{مورب } PC\end{array}\right\}\Rightarrow P\hat{R}Q=\hat{C}\\ \left.\begin{array}{l}NE||BC\\ \text{مورب } BN\end{array}\right\}\Rightarrow M\hat{N}E=\hat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{+}P\hat{R}Q+M\hat{N}E=\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$$

$$\xrightarrow{P\hat{R}Q+R\hat{P}Q=۹۰^\circ}M\hat{N}E=R\hat{P}Q\Rightarrow\triangle PQR\sim\triangle NEM$$

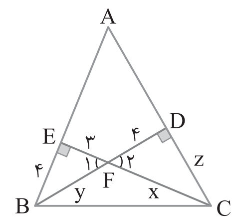
$$\frac{QR}{ME}=\frac{PQ}{NE}\Rightarrow\frac{x}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}-x}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{x}{۲}=\frac{۳\sqrt{۲}-x}{۱}\Rightarrow x=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین مساحت مربع سوم برابر $x^{۲}=۸$ است.



۱۱۴ (۳) مثلث FBE قائم‌الزاویه است. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $y=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵$. از طرف دیگر، چون $\hat{F}_{۱}=\hat{F}_{۲}$ و $\hat{E}=\hat{D}=۹۰^{\circ}$، پس دو مثلث FEB و FDC متشابه‌اند (ز ز)، در نتیجه $\frac{BF}{FC}=\frac{FE}{FD}=\frac{EB}{DC}$، یعنی $\frac{۵}{x}=\frac{۳}{۴}=\frac{۴}{z}$. بنابراین $x=\frac{۲۰}{۳}$ و $z=\frac{۱۶}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت

$$x+y+z=\frac{۲۰}{۳}+۵+\frac{۱۶}{۳}=۱۷$$



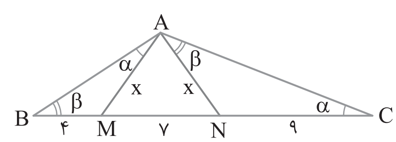
۱۱۵ (۳) فرض می‌کنیم $\hat{A}_{۱}=\hat{C}=\alpha$ و $\hat{A}_{۲}=\hat{B}=\beta$. زاویه‌های AMN و ANM به ترتیب زاویه‌های خارجی مثلث‌های ABM و ACN هستند. بنابراین

$$A\hat{M}N=\hat{A}_{۱}+\hat{B}=\alpha+\beta,\quad A\hat{N}M=\hat{C}+\hat{A}_{۲}=\alpha+\beta$$

پس $A\hat{M}N=A\hat{N}M$ و در نتیجه $AM=AN=x$. از طرف دیگر دو مثلث AMB و CNA متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{AN}{BM}=\frac{NC}{AM}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۹}{x}$$

در نتیجه $x=۶$ و محیط مثلث AMN برابر است با $۶+۶+۷=۱۹$.

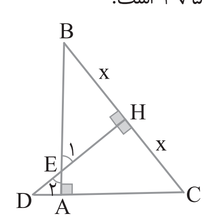


۱۱۶ (۲) با توجه به شکل $\hat{E}_{۱}$ و $\hat{E}_{۲}$ در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BHE و DAE برابرند، پس $\hat{B}=\hat{D}$. در نتیجه

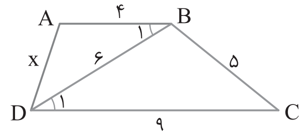
$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}\\ \hat{H}=\hat{H}=۹۰^{\circ}\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{زز})}\triangle BEH\sim\triangle DCH$$

$$\frac{EH}{HC}=\frac{BH}{DH}\Rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{x}{۵}\Rightarrow x^{۲}=۲۰\Rightarrow x=۲\sqrt{۵}$$

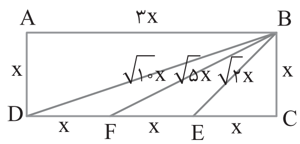
بنابراین وتر BC مساوی $۴\sqrt{۵}$ است.



۱۱۷ (۱) AB با DC موازی است و BD مورب است، پس $\hat{B}_{۱}=\hat{D}_{۱}$. از طرف دیگر، $\frac{AB}{DB}=\frac{BD}{DC}=\frac{۲}{۳}$. پس دو مثلث BAD و DBC متشابه‌اند (ض ز ض). بنابراین $\frac{AD}{BC}=\frac{۲}{۳}$، یعنی $\frac{x}{۵}=\frac{۲}{۳}$، پس $x=\frac{۱۰}{۳}$.



۱۱۸ (۱) اگر اندازهٔ عرض مستطیل را x در نظر بگیریم، آن‌گاه اندازهٔ طول مستطیل برابر $۳x$ است و بنابر قضیهٔ فیثاغورس $BE=\sqrt{۲}x$ ، $BF=\sqrt{۵}x$ و $BD=\sqrt{۱۰}x$. در این صورت نسبت‌های $\frac{BE}{ED}=\frac{\sqrt{۲}x}{۲x}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، $\frac{EF}{BE}=\frac{x}{\sqrt{۲}x}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{BF}{BD}=\frac{\sqrt{۵}x}{\sqrt{۱۰}x}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ مساوی یکدیگرند، بنابراین $\frac{BE}{ED}=\frac{EF}{BE}=\frac{BF}{BD}$. در نتیجه دو مثلث BEF و DEB ضلع‌های متناسب دارند، در نتیجه متشابه‌اند (ض ض ض).



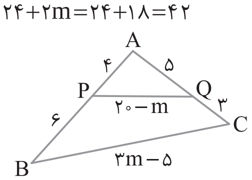
۱۱۹ (۴) دو مثلث APQ و ACB را در نظر بگیرید:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{۴}{۸}=\frac{۵}{۱۰}\Rightarrow\frac{AP}{AC}=\frac{AQ}{AB}\\ \hat{A}=\hat{A}\end{array}\right.\xrightarrow{(\text{ض ز ض})}\triangle APQ\sim\triangle ACB$$

$$\frac{۴}{۸}=\frac{۲۰-m}{۳m-۵}\Rightarrow ۳m-۵=۴۰-۲m\Rightarrow ۵m=۴۵\Rightarrow m=۹$$

بنابراین

$$\text{محیط } BPQC=BP+PQ+QC+BC=۶+۲۰-m+۳+۳m-۵$$
$$=۲۴+۲m=۲۴+۱۸=۴۲$$



۱۲۰ (۱) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت

$$AC^{۲}=AD^{۲}+DC^{۲}=۲^{۲}+۶^{۲}=۴+۳۶=۴۰\Rightarrow AC=۲\sqrt{۱۰}$$

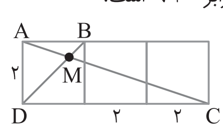
از طرف دیگر،

$$AB\|DC\xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیهٔ اساسی}}\triangle ABM\sim\triangle CDM$$

$$\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{DC}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{AM}{AC}=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{AC=۲\sqrt{۱۰}}\frac{AM}{۲\sqrt{۱۰}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow AM=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

پس AM مساوی $\frac{۱}{۲}$ برابر $\sqrt{۱۰}$ است.

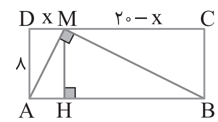


۱۲۱ **۳** بنابر فرض سؤال، مثلث AMB قائم‌الزاویه است. با فرض $DM=x$ نتیجه می‌گیریم $MC=۲۰-x$. اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB می‌نویسیم

$$MH^۲=AH\times BH\Rightarrow ۸^۲=x(۲۰-x)\Rightarrow x^۲-۲۰x+۶۴=۰$$

$$(x-۱۶)(x-۴)=۰\Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=۱۶$$

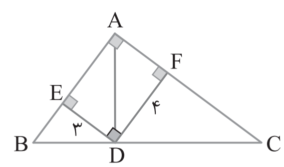
پس فاصلهٔ نزدیک‌تر برابر ۴ است.



۱۲۲ **۳** در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها برابر نسبت اضلاع متناظر است.
پس $\frac{P}{P'}=\frac{a}{a'}\Rightarrow\frac{۶+۵+۹}{P'}=\frac{۵}{۱۲/۵}\Rightarrow\frac{۲۰}{P'}=\frac{۵}{۱۲/۵}\Rightarrow P'=\frac{۲۰\times ۱۲/۵}{۵}=۵۰$

۱۲۳ **۳** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC و BDA متشابه‌اند، زیرا $B\hat{A}D+D\hat{A}C=۹۰^\circ$ و $\hat{C}+D\hat{A}C=۹۰^\circ$، در نتیجه $\hat{C}=B\hat{A}D$. همچنین $A\hat{D}C=A\hat{D}B=۹۰^\circ$، بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر در این دو مثلث متشابه برابر نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها است:

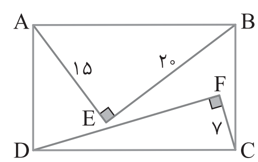
$$\frac{DE}{DF}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۴}$$



۱۲۴ **۲** در مثلث ABE، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AB=\sqrt{AE^۲+BE^۲}=\sqrt{۱۵^۲+۲۰^۲}=۲۵$$

چون ABCD مستطیل است، پس $DC=AB=۲۵$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث DFC، $DF=\sqrt{DC^۲-FC^۲}=\sqrt{۲۵^۲-۷^۲}=۲۴$.

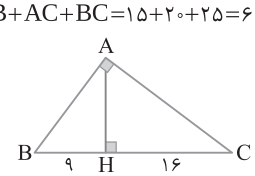


۱۲۵ **۲** با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

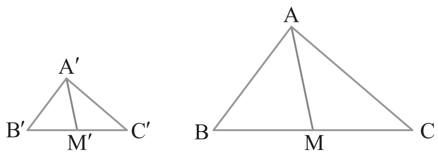
$$AB^۲=BH\times BC=۹\times ۲۵\Rightarrow AB=۳\times ۵=۱۵$$

$$AC^۲=CH\times BC=۱۶\times ۲۵\Rightarrow AC=۴\times ۵=۲۰$$

بنابراین $\text{محیط } ABC=AB+AC+BC=۱۵+۲۰+۲۵=۶۰$



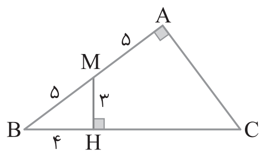
۱۲۶ **۴** هر مثلث با رسم میانه به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود. از طرف دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت تشابه آن‌ها است. بنابراین $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=(\frac{AC}{A'C'})^۲=۴$. چون $S_{ABM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$ و $S_{A'C'M'}=\frac{۱}{۲}S_{A'B'C'}$، پس $\frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}}=۴$.



۱۲۷ **۱** بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BHM،

$$MH=\sqrt{MB^۲-BH^۲}=\sqrt{۵^۲-۴^۲}=۳$$

دو مثلث BMH و BCA به حالت تساوی دو زاویه ($\hat{B}=\hat{B}$، $B\hat{H}M=B\hat{A}C=۹۰^\circ$) متشابه‌اند، پس $\frac{BC}{BM}=\frac{AB}{BH}$، یعنی $\frac{BC}{۵}=\frac{۱۰}{۴}$، پس $BC=\frac{۲۵}{۲}$. از طرف دیگر، $HC=BC-BH=\frac{۲۵}{۲}-۴=\frac{۱۷}{۲}$. اکنون به سادگی معلوم می‌شود $\frac{MH}{HC}=\frac{۳}{\frac{۱۷}{۲}}=\frac{۶}{۱۷}$.

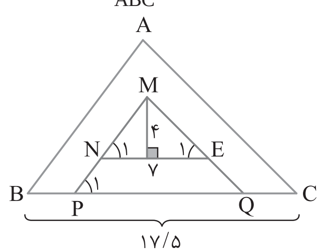


۱۲۸ **۲** با توجه به شکل زیر، ضلع‌های MN و ME را به ترتیب از سمت N و E امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطه‌های P و Q قطع کنند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\begin{cases} NE \parallel PQ \\ \text{مورب } MP \end{cases}\Rightarrow \hat{N}_۱=\hat{P}_۱,\qquad \begin{cases} MP \parallel AB \\ \text{مورب } BC \end{cases}\Rightarrow \hat{P}_۱=\hat{B}$$

بنابراین $\hat{N}_۱=\hat{B}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{E}_۱=\hat{C}$. پس دو مثلث MNE و ABC دو زاویهٔ مساوی دارند و در نتیجه متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی توان دوم نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها است:

$$\frac{S_{MNE}}{S_{ABC}}=(\frac{NE}{BC})^۲\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}(۴)(۷)}{S_{ABC}}=(\frac{۷}{۱۷/۵})^۲\Rightarrow S_{ABC}=۸۷/۵$$



۱۲۹ **۱** مطابق شکل زیر، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و HAC متشابه‌اند. پس

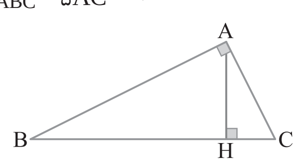
$$\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=(\frac{AC}{BC})^۲=\frac{AC^۲}{BC^۲}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow BC^۲=(۲AC)^۲+AC^۲=۵AC^۲\qquad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

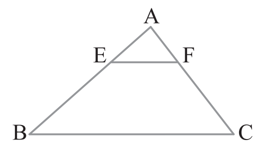
$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\frac{AC^۲}{۵AC^۲}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow S_{ABC}=۵S_{ACH}$$



۱۳۰ (۱) مساحت مثلث AEF را برابر S در نظر می‌گیریم. در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ BCFE بنابر فرض ۱۵S است. پس $S_{ABC}=۱۶S$. از طرف دیگر

$$EF||BC \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیهٔ اساسی}} \triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^{۲}$$

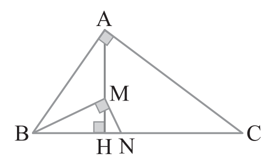
$$\frac{۱}{۱۶}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل در}} \frac{AE}{BE}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{BE}{AE}=۳$$



۱۳۱ (۲) طول BH را برابر x در نظر می‌گیریم و با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\begin{cases}\triangle ABC: AH^{۲}=BH\times CH\Rightarrow AH^{۲}=۹x\\ \triangle BMN: MH^{۲}=BH\times HN\Rightarrow MH^{۲}=x\end{cases}$$

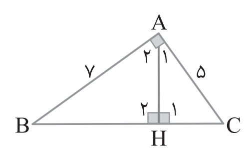
$$\frac{AH^{۲}}{MH^{۲}}=۹\Rightarrow\frac{AH}{MH}=۳\Rightarrow\frac{MH}{AH}=\frac{۱}{۳}$$



۱۳۲ (۱) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و CAH متشابه‌اند، زیرا $\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ$ و $\hat{A}_۲+\hat{B}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{A}_۱=\hat{B}$ و

$$\hat{A}_۱=\hat{B},\quad \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ \xrightarrow{(ز\ ز)} \triangle ABH\sim\triangle CAH$$

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^{۲}=\left(\frac{۷}{۵}\right)^{۲}=\frac{۴۹}{۲۵}$$

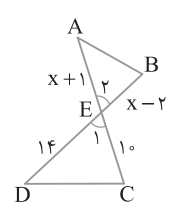


۱۳۳ (۱) دو مثلث متشابه‌اند، پس اضلاع نظیر آن‌ها متناسب‌اند. توجه کنید که مطابق شکل زیر $\hat{E}_۱=\hat{E}_۲$. از طرف دیگر $\hat{A}\neq\hat{C}$ زیرا اگر $\hat{A}=\hat{C}$ ، آن‌گاه AB||DC که این طور نیست، پس $\hat{A}=\hat{D}$ و $\hat{B}=\hat{C}$. در نتیجه

$$\frac{x+۱}{۱۴}=\frac{x-۲}{۱۰}\Rightarrow ۱۰x+۱۰=۱۴x-۲۸\Rightarrow ۴x=۳۸\Rightarrow x=\frac{۱۹}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{S_{ABE}}{S_{DCE}}=\left(\frac{x-۲}{۱۰}\right)^{۲}=\left(\frac{\frac{۱۹}{۲}-۲}{۱۰}\right)^{۲}=\left(\frac{۱۵}{۲۰}\right)^{۲}=\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}=\frac{۹}{۱۶}$$



۱۳۴ (۱) مطابق شکل زیر MN و AH هر دو بر BC عمودند، پس موازی‌اند و HM و AB هر دو بر AC عمودند، پس موازی‌اند. اکنون با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم

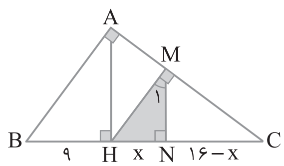
$$\begin{cases}MH||AB\Rightarrow\frac{CM}{AM}=\frac{CH}{BH}\\ MN||AH\Rightarrow\frac{CM}{AM}=\frac{CN}{HN}\end{cases}\Rightarrow\frac{CH}{BH}=\frac{CN}{HN}\Rightarrow\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱۶-x}{x}$$

$$۱۶x=۱۴۴-۹x\Rightarrow x=\frac{۱۴۴}{۲۵}$$

از طرف دیگر چون $\hat{M}_۱=\hat{C}$ ، پس دو مثلث HMN و BCA متشابه‌اند (ز ز). پس نسبت محیط‌های دو مثلث برابر نسبت اضلاع نظیر است:

$$\frac{\text{محیط } MHN}{\text{محیط } ABC}=\frac{HN}{AB}\xrightarrow{AB^{۲}=BH\times BC=۹\times۲۵\Rightarrow AB=۱۵}$$

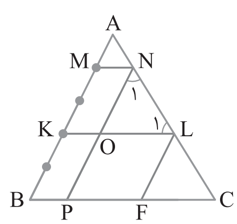
$$\frac{\text{محیط } MHN}{\text{محیط } ABC}=\frac{\frac{۱۴۴}{۲۵}}{۱۵}=\frac{۱۴۴}{۲۵\times۱۵}=\frac{۱۴۴}{۳۷۵}=\frac{۴۸}{۱۲۵}$$



۱۳۵ (۳) از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

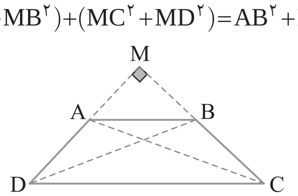
$$\begin{cases}KL||BC\\ \text{مورب } AC\end{cases}\Rightarrow\hat{L}_۱=\hat{C},\qquad \begin{cases}NP||AB\\ \text{مورب } AC\end{cases}\Rightarrow\hat{N}_۱=\hat{A}$$

بنابراین دو مثلث NOL و ABC متشابه هستند (ز ز). پس ضلع‌های آن‌ها متناسب‌اند: $\frac{ON}{AB}=\frac{OL}{BC}=\frac{NL}{AC}$. از طرف دیگر می‌دانیم ضلع‌های مقابل متوازی‌الاضلاع مساوی‌اند. پس $ON=MK=\frac{۲}{۵}AB$. بنابراین نسبت تشابه دو مثلث متشابه NOL و ABC برابر $\frac{۲}{۵}$ است. پس نسبت محیط‌های این دو مثلث مساوی $\frac{۲}{۵}=۰/۴$ است.



۱۳۶ (۱) با توجه به شکل زیر در مثلث MAC، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $AC^{۲}=MA^{۲}+MC^{۲}$ و در مثلث MBD، $BD^{۲}=MB^{۲}+MD^{۲}$. از طرف دیگر $MA^{۲}+MB^{۲}=AB^{۲}$ و $MD^{۲}+MC^{۲}=DC^{۲}$. اکنون می‌توان نوشت

$$AC^{۲}+BD^{۲}=MA^{۲}+MC^{۲}+MB^{۲}+MD^{۲}$$
$$=(MA^{۲}+MB^{۲})+(MC^{۲}+MD^{۲})=AB^{۲}+DC^{۲}=۳۲$$



۱۳۷ **۲** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH' و BDH زاویهٔ حادهٔ مساوی دارند ($\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$)، پس متشابه هستند. نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها را می‌نویسیم: $\frac{DH}{DH'}=\frac{BH}{AH'}$. بنابر فرض تست $DH'=۶$، $BH=۴$ و $DH=۳$، بنابراین

$$\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{AH'}\Rightarrow AH'=۸$$

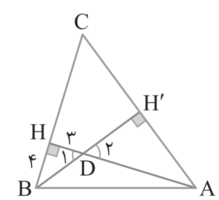
از طرف دیگر بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BDH،

$$BD=\sqrt{BH^۲+DH^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

در نتیجه $BH'=۵+۶=۱۱$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH' می‌نویسیم:

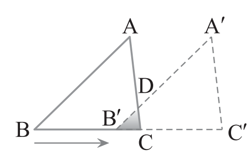
$$AB^۲=AH'^۲+BH'^۲$$
$$=۶۴+۱۲۱=۱۸۵$$

بنابراین $AB=\sqrt{۱۸۵}$.



۱۳۸ **۴** با توجه به شکل باید طول BB' را به‌دست آوریم. مساحت مثلث $DB'C$، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت مثلث ABC است. از طرف دیگر چون DB' با AB موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، مثلث‌های $DB'C$ و ABC متشابه‌اند. اگر نسبت تشابه k فرض شود، نسبت مساحت آن‌ها $k^۲$ است. پس $k^۲=\frac{۱}{۱۶}$ و $k=\frac{۱}{۴}$. از طرف دیگر $\frac{CB'}{CB}=k=\frac{۱}{۴}$. یعنی $\frac{CB'}{۸}=\frac{۱}{۴}$، پس $CB'=۲$. بنابراین

$$BB'=BC-B'C=۸-۲=۶$$

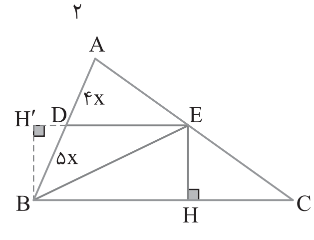


۱۳۹ **۲** اگر طول AD را برابر $۴x$ انتخاب کنیم، آن‌گاه از $AD=\frac{۴}{۵}DB$ نتیجه می‌گیریم $DB=۵x$. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$DE\|BC\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{۴x}{۹x}=\frac{۴}{۹}$$

اکنون ارتفاع‌های EH و BH' را به ترتیب در مثلث‌های EBC و EBD رسم می‌کنیم. این دو ارتفاع مساوی‌اند، زیرا فاصلهٔ دو خط موازی DE و BC هستند. بنابراین

$$\frac{S_{EBC}}{S_{EBD}}=\frac{\frac{۱}{۲}EH\times BC}{\frac{۱}{۲}BH'\times DE}=\frac{BC}{DE}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$



۱۴۰ **۲** بدون اینکه از کلی بودن راه‌حل چیزی کم شود، فرض می‌کنیم $AB=۱$ و $AC=\sqrt{۱۵}$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

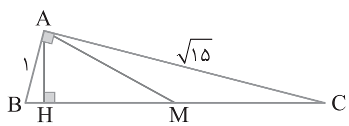
$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۱+۱۵}=۴$$

بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $AB^۲=BC\times BH$، پس $۴\times BH=۱$، بنابراین $BH=\frac{۱}{۴}$. اکنون می‌توان نوشت

$$MH=BM-BH=۲-\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

چون مثلث‌های ABC و AMH در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{BC}{MH}=\frac{۴}{\frac{۷}{۴}}=\frac{۱۶}{۷}$$



۱۴۱ **۱** طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه را در این مثلث $۳x$ و $۵x$ فرض می‌کنیم. چون مساحت مثلث ۱۶ است، پس $\frac{۱}{۲}\times ۵x\times ۳x=۱۶$، یعنی $x=۴\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}$. بنابراین طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه برابر $۱۲\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}$ و $۲۰\sqrt{\frac{۲}{۱۵}}$ است و بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\text{طول وتر}=\sqrt{۱۲^۲\times(\frac{۲}{۱۵})+۲۰^۲\times(\frac{۲}{۱۵})}=۸\sqrt{\frac{۱۷}{۱۵}}$$

۱۴۲ **۱** زاویه‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و CBA مساوی‌اند، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز ز).

$$\triangle ABH\sim\triangle CBA\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}=(\frac{BC}{AB})^۲=(\frac{۴}{۳})^۲=\frac{۱۶}{۹}$$

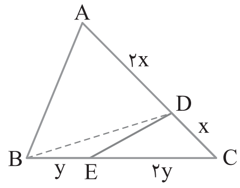
$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}-S_{ABH}}=\frac{۱۶}{۱۶-۹}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AHC}}=\frac{۱۶}{۷}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱۶}{۷}S_{AHC}$$

۱۴۳ **۲** نقطه‌های B و D را به یکدیگر وصل می‌کنیم. اگر فرض کنیم $DC=x$ و $BE=y$، نتیجه می‌شود $AD=۲x$ و $CE=۲y$. دو مثلث DEC و DBC در ارتفاع نظیر رأس D مشترک‌اند، پس $\frac{S_{DEC}}{S_{DBC}}=\frac{CE}{BC}=\frac{۲y}{۳y}=\frac{۲}{۳}$، یعنی $S_{DEC}=\frac{۲}{۳}S_{DBC}$. از طرف دیگر دو مثلث BCD و BAC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، پس $\frac{S_{BCD}}{S_{BAC}}=\frac{CD}{AC}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$، یعنی $S_{BCD}=\frac{۱}{۳}S_{BAC}$.

اکنون می‌توان نوشت

$$S_{DEC}=\frac{۲}{۳}(\frac{۱}{۳}S_{ABC})=\frac{۲}{۹}S_{ABC}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}}=\frac{۹}{۲}$$

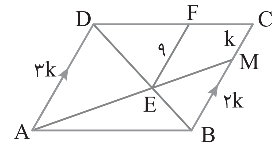


۱۴۴ (۲) چون $\frac{CM}{MB}=\frac{۱}{۲}$، پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد که $MB=۲k$ و $CM=k$. چون MB و AD موازی‌اند، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{ED}{EB}=\frac{AD}{MB}=\frac{۳}{۲}$. تناسب $\frac{ED}{EB}=\frac{۳}{۲}$ را ترکیب در مخرج می‌کنیم:

$$\frac{ED}{EB+ED}=\frac{۳}{۲+۳}\Rightarrow\frac{ED}{DB}=\frac{۳}{۵}$$

در مثلث DBC، چون $EF||BC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{EF}{BC}=\frac{DE}{DB}=\frac{۳}{۵}$.

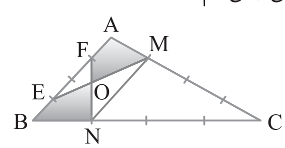
پس $\frac{۹}{BC}=\frac{۳}{۵}$، در نتیجه $BC=۱۵$. بنابراین $AD=۱۵$.



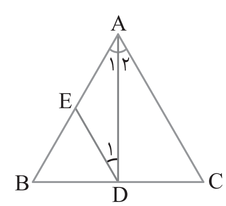
۱۴۵ (۱) شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم و نقطهٔ M را به نقطهٔ N وصل می‌کنیم. با توجه به شکل $\frac{CM}{AM}=\frac{۳}{۱}$ و $\frac{CN}{BN}=\frac{۳}{۱}$، بنابراین $\frac{CM}{AM}=\frac{CN}{BN}$، پس بنابر عکس قضیهٔ تالس MN موازی AB است. بنابراین دو مثلث AME و BNF دارای ارتفاع و قاعدهٔ مساوی‌اند، پس هم‌مساحت هستند. اگر از مساحت هر دوی آن‌ها مساحت مثلث OEF را کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$S_{AME}-S_{OEF}=S_{BNF}-S_{OEF}\Rightarrow S_{AMOF}=S_{BNOE}$$

بنابراین دو چهارضلعی رنگی هم‌مساحت هستند.



۱۴۶ (۱) بنابر فرض $\hat{D}_۱=\hat{A}_۲$ و چون $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$، بنابراین $\hat{D}_۱=\hat{A}_۱$. در نتیجه مثلث EAD متساوی‌الساقین است، پس $AE=DE=۸$. همچنین بنابر عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب، از تساوی $\hat{D}_۱=\hat{A}_۲$ توازی DE و AC نتیجه می‌شود. اکنون از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود



$$DE||AC\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{AB-AE}{AB}=\frac{۱۲-۸}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴۷ (۳) چون AM میانه است، پس $BM=MC$. از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

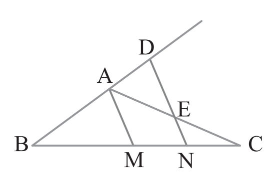
$$\triangle BDN:AM||DN\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{BM}{MN}\qquad(۱)$$

$$\triangle AMC:AM||EN\Rightarrow\frac{AC}{AE}=\frac{MC}{MN}\qquad(۲)$$

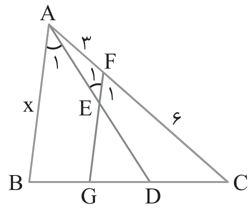
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\xrightarrow{\text{ویژگی‌های تناسب}}\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$$

پس بنابر فرض $\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$ نتیجه می‌شود $\frac{AD}{AE}=\frac{۲}{۳}$.



۱۴۸ (۳) چون $\hat{A}_۱=\hat{E}_۱$، پس EF با AB موازی است. EF را از طرف E امتداد می‌دهیم تا BC را در G قطع کند. در مثلث ABD، چون EG موازی AB است، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{EG}{AB}=\frac{DE}{AD}$، یعنی $\frac{EG}{x}=\frac{۱}{۲}$ یا $EG=\frac{x}{۲}$. از طرف دیگر در مثلث CAB، FG و AB با هم موازی هستند، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{FG}{AB}=\frac{CF}{CA}$، یعنی $\frac{\frac{x}{۲}+۱}{x}=\frac{۶}{۹}$ و در نتیجه $x=۶$.



۱۴۹ (۱) در مثلث CAM، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{DF}{AM}=\frac{CD}{CM}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر در مثلث BED، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{DE}{AM}=\frac{BD}{BM}\qquad(۲)$$

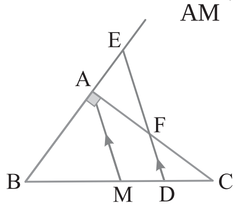
دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم

$$\frac{DF}{AM}+\frac{DE}{AM}=\frac{CD}{CM}+\frac{BD}{BM}$$

چون $BM=CM$، پس

$$\frac{DF+DE}{AM}=\frac{BD+CD}{BM}=\frac{BC}{BM}=۲$$

پس $DF+DE=۲AM=۵$.



۱۵۰ (۱) از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

$$\triangle ABD:OA'||AD\Rightarrow\frac{BA'}{AA'}=\frac{BO}{OD}\qquad(۱)$$

$$\triangle ABC:OB'||BC\Rightarrow\frac{AB'}{BB'}=\frac{AO}{OC}\qquad(۲)$$

$$AB||DC\Rightarrow\frac{BO}{OD}=\frac{AO}{OC}\qquad(۳)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{BA'}{AA'}=\frac{AB'}{BB'}\xrightarrow{\text{ویژگی‌های تناسب}}\frac{AA'}{BB'}=\frac{BA'}{AB'}\qquad(*)$$

از طرف دیگر از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

$$\triangle ABD:OA'||AD\Rightarrow\frac{BA'}{BA}=\frac{BO}{BD}\qquad(۴)$$

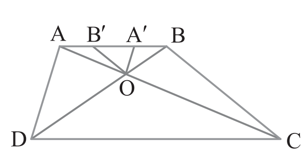
$$\triangle ABC:OB'||BC\Rightarrow\frac{AB'}{AB}=\frac{AO}{AC}\qquad(۵)$$

$$AB||DC\Rightarrow\frac{AO}{AC}=\frac{BO}{BD}\qquad(۶)$$

از تساوی‌های (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{BA'}{BA}=\frac{AB'}{AB}\xrightarrow{\text{ویژگی‌های تناسب}}\frac{BA'}{AB'}=\frac{BA}{AB}=۱\Rightarrow BA'=AB'$$

بنابراین با توجه به تناسب $(*)$ مشخص می‌شود $\frac{AA'}{BB'}=۱$.



۱۵۱ (۴) اضلاع این دو مثلث را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix}۶,۴,۲\sqrt{۲}\\ ۲\sqrt{۳},\frac{۴}{\sqrt{۳}},\frac{۴}{\sqrt{۶}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{۶}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۴}{\frac{۴}{\sqrt{۳}}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{۴}{\sqrt{۶}}}=\sqrt{۳}$$

پس دو مثلث به حالت (ض ض ض) متشابه‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه یعنی $\sqrt{۳}^{۲}=۳$ است.

۱۵۲ (۳) **راه‌حل اول** فرض کنید $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=k$. در این صورت $x=۲k$، $y=۳k$ و $z=۶k$. بنابراین $\frac{x+y}{z}=\frac{۲k+۳k}{۶k}=\frac{۵}{۶}$.

راه‌حل دوم چون $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}$، بنابر ویژگی‌های تناسب $\frac{x+y}{۲+۳}=\frac{z}{۶}$، در نتیجه

$$\frac{x+y}{z}=\frac{۵}{۶}$$

۱۵۳ (۱) در دو مثلث متشابه نسبت میانه‌های نظیر برابر نسبت تشابه است، پس اگر $\frac{m}{m'}=k$ آن‌گاه $\frac{m'}{m}=\frac{۱}{k}$، در نتیجه

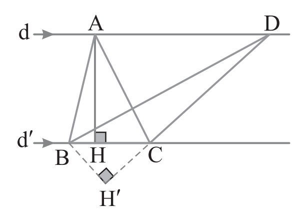
$$\frac{m}{m'}+\frac{m'}{m}=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow k+\frac{۱}{k}=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow\frac{k^{۲}+۱}{k}=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow ۳k^{۲}-۱۰k+۳=۰$$

این معادلهٔ درجهٔ دوم را حل می‌کنیم

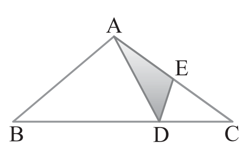
$$k=\frac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰۰-۳۶}}{۶}\Rightarrow k=\frac{۱۰\pm۸}{۶}\Rightarrow k=۳ \text{ یا } k=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث متشابه برابر $k^{۲}$ یعنی ۹ یا $\frac{۱}{۹}$ است.

۱۵۴ (۱) توجه کنید که $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times۳\times۴=۶$. دو مثلث ABC و DBC، قاعدهٔ مشترکی دارند (BC) و رأس‌های روبه‌روی این قاعده (A و D)، روی یک خط، موازی این قاعده است، پس مساحت‌های این مثلث‌ها برابرند. یعنی $S_{DBC}=S_{ABC}$. در نتیجه $\frac{۱}{۲}CD\times BH'=۶$، یعنی $\frac{۱}{۲}\times۶\times BH'=۶$، پس $BH'=۲$.



۱۵۵ (۳) تناسب $\frac{CD}{DB}=\frac{۱}{۲}$ را ترکیب در مخرج می‌کنیم $\frac{CD}{CD+DB}=\frac{۱}{۲+۱}$، یعنی $\frac{CD}{BC}=\frac{۱}{۳}$.



دو مثلث ADC و ABC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=\frac{DC}{BC}$، یعنی $\frac{S_{ADC}}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$، پس $S_{ADC}=۱۰$. از طرف دیگر دو مثلث DAE و DAC در ارتفاع نظیر رأس D مشترک‌اند. بنابراین $\frac{S_{DAE}}{S_{DAC}}=\frac{AE}{AC}$. یعنی $\frac{S_{DAE}}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$، پس $S_{DAE}=۵$.

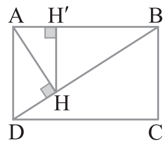
۱۵۶ (۲) از نقطهٔ H عمود HH' را بر AB رسم می‌کنیم. HH' فاصلهٔ H تا ضلع AB است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle ABD: BD^{۲}=AB^{۲}+AD^{۲}=۱۲+۴=۱۶\Rightarrow BD=۴$$

$$\triangle ABD: AH\times BD=AB\times AD\Rightarrow AH=\frac{۲\sqrt{۳}\times۲}{۴}=\sqrt{۳}$$

$$\triangle ABD: AB^{۲}=BH\times BD\Rightarrow ۱۲=BH\times۴\Rightarrow BH=۳$$

$$\triangle ABH: HH'\times AB=AH\times BH\Rightarrow HH'=\frac{AH\times BH}{AB}=\frac{\sqrt{۳}\times۳}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

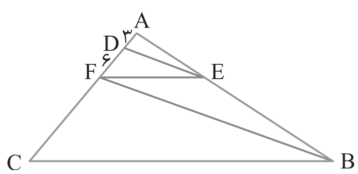


۱۵۷ (۴) از قضیهٔ تالس و تعمیم آن استفاده می‌کنیم

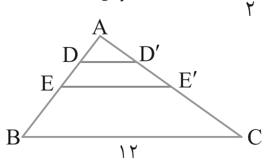
$$\triangle ABF: DE\|FB\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AF}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}\qquad(۱)$$

$$\triangle ABC: EF\|BC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\qquad(۲)$$

از تناسب‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{EF}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC=۳EF$



۱۵۸ (۲) نقطه‌های E و E' به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AB و AC هستند. پس بنابر قضیهٔ میان‌خط $EE'=\frac{BC}{۲}=۶$. از طرف دیگر نقطه‌های D و D' به ترتیب وسط‌های پاره‌خط‌های AE و AE' هستند، پس بنابر قضیهٔ میان‌خط $DD'=\frac{EE'}{۲}=۳$. بنابراین $DD'+EE'=۶+۳=۹$.



۱۵۹ (۳) از A به C وصل می‌کنیم تا MN را در O قطع کند. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

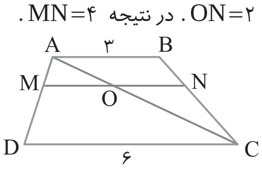
$$\triangle ADC: OM\|DC\Rightarrow\frac{AM}{AD}=\frac{OM}{DC}\quad(۱)$$

$$\triangle ABC: ON\|AB\Rightarrow\frac{CN}{BC}=\frac{ON}{AB}\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل در}}\frac{BN}{BC}=\frac{AB-ON}{AB}\quad(۲)$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه، $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}$. از مقایسهٔ این تناسب با تناسب‌های (۱) و (۲) و بنابر فرض $\frac{AM}{AD}=\frac{۱}{۳}$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{OM}{DC}=\frac{AB-ON}{AB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{OM}{۶}=\frac{۳-ON}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین $OM=۲$ و $ON=۲$. در نتیجه $MN=۴$.



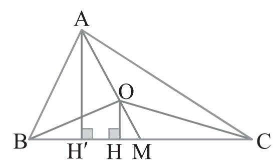
۱۶۰ (۴) عمودهای OH و AH' را بر BC وارد می‌کنیم. در این صورت OH و AH' موازی هستند. از تعمیم قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

$$\triangle AMH': OH \| AH' \Rightarrow \frac{OH}{AH'}=\frac{OM}{AM} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر دو مثلث ABC و OBC دارای قاعدهٔ مساوی هستند (BC)، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های وارد بر این قاعده است:

$$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{S'}{S}=\frac{OH}{AH'} \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{S'}{S}=\frac{OM}{AM}$.



۱۶۱ (۱) راه‌حل اول بنابر فرض سؤال

$$۱۰=\text{تعداد قطرهای } (n+۱) \text{ ضلعی} - \text{تعداد قطرهای } (n+۲) \text{ ضلعی}$$

$$\frac{۱}{۲}(n+۲)(n+۲-۳)-\frac{۱}{۲}(n+۱)(n+۱-۳)=۱۰$$

$$\frac{۱}{۲}(n+۲)(n-۱)-\frac{۱}{۲}(n+۱)(n-۲)=۱۰$$

$$n^۲+n-۲-n^۲+n+۲=۲۰ \Rightarrow ۲n=۲۰ \Rightarrow n=۱۰$$

بنابراین $\quad ۳۵=(۳-۱۰)(۱۰)\frac{۱}{۲}=(n-۳)n\frac{۱}{۲}=$ تعداد قطرهای n ضلعی

راه‌حل دوم تعداد قطرهای $(n+۱)$ ضلعی $n=(n+۱-۱)$ تا کمتر از تعداد قطرهای $(n+۲)$ ضلعی است. بنابراین $n=۱۰$، در نتیجه

$$\text{تعداد قطرهای ۱۰ ضلعی}=\frac{(۱۰)(۱۰-۳)}{۲}=۳۵$$

۱۶۲ (۳) به گزاره‌های زیر توجه کنید:

- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش عمودمنصف هم باشند لوزی است، ولی لزومی ندارد مربع باشد.
- در مستطیل همواره طول دو قطر برابر هستند و این ویژگی جدیدی برای مستطیل نیست.
- لوزی‌ای که دو قطرش برابر باشند، مربع است.
- متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش نیمساز زاویه‌های آن باشند، لوزی است.

پس گزینهٔ (۳) درست است.

۱۶۳ (۳) در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور مکمل‌اند، پس

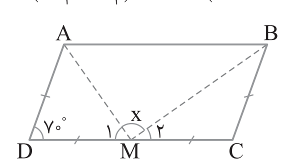
$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$$

مثلث‌های DAM و CMB متساوی‌الساقین هستند. پس

$$\hat{M}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-۷۰^\circ}{۲}=۵۵^\circ, \quad \hat{M}_۲=\frac{۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$$

اکنون به‌دست می‌آید

$$x=۱۸۰^\circ-(\hat{M}_۱+\hat{M}_۲)=۱۸۰^\circ-(۵۵^\circ+۳۵^\circ)=۹۰^\circ$$



۱۶۴ (۱) مثلث BEC متساوی‌الاضلاع است، پس

$$BC=BE \qquad (۱)$$

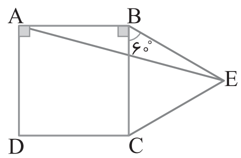
در مربع ضلع‌های مجاور با هم برابرند، پس

$$AB=BC \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $AB=BE$، بنابراین مثلث ABE متساوی‌الساقین است، پس

$$B\hat{A}E=\frac{۱۸۰^\circ-A\hat{B}E}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+۶۰^\circ)}{۲}=۱۵^\circ$$

اکنون می‌توان نوشت $D\hat{A}E=۹۰^\circ-B\hat{A}E=۹۰^\circ-۱۵^\circ=۷۵^\circ$.



۱۶۵ (۱) از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی متوازی‌الاضلاعی به اضلاع a و b و یک زاویهٔ برابر θ یک مستطیل به طول اضلاع $|a-b|\sin\frac{\theta}{۲}$ و $|a-b|\cos\frac{\theta}{۲}$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\text{یک ضلع مستطیل}=|a-b|\sin\frac{\theta}{۲}=(۱۳-۸)\sin\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۳}$$

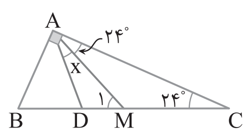
$$\text{ضلع دیگر مستطیل}=|a-b|\cos\frac{\theta}{۲}=(۱۳-۸)\cos\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۵\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

پس

$$\text{مساحت مستطیل}=\frac{۵}{۲}\times\frac{۵}{۲}\sqrt{۳}=\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۳}$$

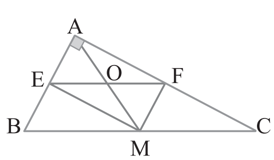
۱۶۶ (۴) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نیمساز AD و میانهٔ AM وارد بر وتر را رسم کرده‌ایم. چون میانهٔ AM نصف وتر است، پس $AM=MC$. بنابراین $M\hat{A}C=\hat{C}=۲۴^\circ$. از طرف دیگر AD نیمساز زاویهٔ قائمه است، پس

$$B\hat{A}D=D\hat{A}C=۴۵^\circ \Rightarrow x+۲۴^\circ=۴۵^\circ \Rightarrow x=۲۱^\circ$$



۱۶۷ (۴) می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس $AM=\frac{۱}{۲}BC=\frac{۱}{۲}\times۱۰=۵$. همچنین در مثلث ABC، پاره‌خط‌های EM و MF میان‌خط هستند، در نتیجه $EM \| AC$ و $MF \| BA$، پس چهارضلعی $AEMF$ متوازی‌الاضلاع است. بنابراین O محل تقاطع قطرهای این متوازی‌الاضلاع و در نتیجه وسط AM است.

$$OM=\frac{AM}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$



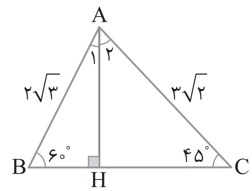
۱۶۸ **۲** ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ایجاد شده می‌نویسیم

$$\triangle ABH: \hat{B}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow BH=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

$$\triangle ACH: \hat{C}=۴۵^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲=۴۵^\circ \Rightarrow CH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۳\sqrt{۲}=۳$$

از جمع این دو تساوی به‌دست می‌آید:

$$BH+CH=\sqrt{۳}+۳ \Rightarrow BC=\sqrt{۳}+۳$$



۱۶۹ **۴** اگر در مثلثی طول میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف طول آن ضلع باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است. در اینجا بنابر فرض تست $AM=\frac{BC}{۲}$، پس $\hat{A}=۹۰^\circ$. از طرف دیگر $\hat{C}_۱=\frac{۱۱}{۵}\hat{B}$. بنابراین

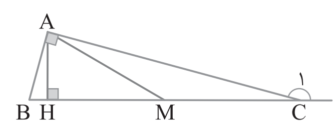
$$\hat{C}_۱=۹۰^\circ+\hat{B} \Rightarrow \frac{۱۱}{۵}\hat{B}=۹۰^\circ+\hat{B} \Rightarrow \hat{B}=۷۵^\circ$$

پس $\hat{C}=۱۵^\circ$. در نتیجه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ برابر وتر است:

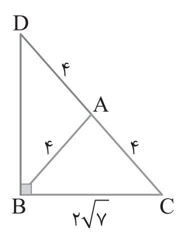
$$AH=\frac{۱}{۴}BC \Rightarrow ۲=\frac{۱}{۴}BC \Rightarrow BC=۸$$

اکنون به‌دست می‌آید

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۲=۸$$



۱۷۰ **۳** در مثلث BDC پاره‌خط AB میانه و طول آن نصف طول DC است. پس $B\hat{D}C$ قائم‌الزاویه است. بنابراین طبق قضیهٔ فیثاغورس،



$$BD^۲=DC^۲-BC^۲=۸^۲-(۲\sqrt{۷})^۲$$

$$=۶۴-۲۸=۳۶ \Rightarrow BD=۶$$

پس

$$\text{محیط } BDC=BD+DC+BC=۶+۸+۲\sqrt{۷}=۱۴+۲\sqrt{۷}$$

۱۷۱ **۲** اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم برابر $۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است. پس اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک $(n+۳)$ ضلعی منتظم برابر $۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{n+۳}$ است.

$$۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{n}+۱۰^\circ=۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{n+۳} \Rightarrow \frac{۳۶۰^\circ}{n}-۱۰^\circ=\frac{۳۶۰^\circ}{n+۳}$$

$$\frac{۳۶۰^\circ-۱۰^\circ n}{n}=\frac{۳۶۰^\circ}{n+۳}$$

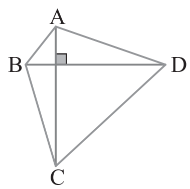
$$۳۶۰^\circ n+۳\times ۳۶۰^\circ-۱۰^\circ n^۲-۳۰^\circ n=۳۶۰^\circ n$$

$$۱۰^\circ n^۲+۳۰^\circ n-۳\times ۳۶۰^\circ=۰ \Rightarrow ۱۰^\circ(n-۹)(n+۱۲)=۰ \Rightarrow n=۹$$

از هر رأس یک n ضلعی $n-۳$ قطر رسم می‌شود، پس از سه رأس متوالی آن ظاهراً $۳(n-۳)$ قطر عبور می‌کند ولی یک قطر از بین آن‌ها دو بار محاسبه شده است:

$$\text{تعداد قطرهای رسم شده از سه رأس متوالی}=۳(n-۳)-۱=۳(۹-۳)-۱=۱۷$$

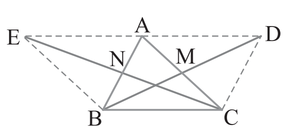
۱۷۲ **۳** در شکل زیر قطرهای چهارضلعی $ABCD$ مساوی و بر هم عمودند ولی $ABCD$ مربع نیست. پس گزینهٔ (۳) نادرست است. سایر گزینه‌ها قضیه هستند.



۱۷۳ **۳** از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل به طول a و عرض b مربعی به طول ضلع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b)$ ایجاد می‌شود. پس طول ضلع مربع $ABCD$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۴-۱)=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ و مساحت آن برابر است با $S_{ABCD}=(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲=\frac{۹}{۲}$. از طرف دیگر، مساحت چهارضلعی $MNOP$ برابر نصف مساحت مستطیل اولیه است، پس $S_{MNOP}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱=۲$.

اکنون می‌توان نوشت $\frac{S_{ABCD}}{S_{MNOP}}=\frac{\frac{۹}{۲}}{۲}=\frac{۹}{۴}$.

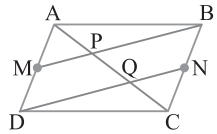
۱۷۴ **۱** در شکل زیر نقاط M و N به ترتیب وسط AC و AB هستند. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، چون قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند (نقطهٔ M وسط AC و وسط BD است). بنابراین $AD=BC$ و $AD||BC$. به طور مشابه چهارضلعی $ACBE$ نیز متوازی‌الاضلاع است، زیرا قطرهایش منصف یکدیگرند. بنابراین $AE=BC$ و $AE||BC$. به این ترتیب AD و AE که موازی با BC هستند، در یک راستا قرار دارند. در نتیجه $DE=AE+AD=BC+BC=۲BC$. پس $\frac{DE}{BC}=۲$.



۱۷۵ **۳** می‌توان ثابت کرد در شکل داده شده $AP=PQ=QC$. با فرض $AP=x$ نتیجه می‌گیریم $AC=۳x$ و $PQ=x$، پس بنابر فرض سؤال می‌توان نوشت:

$$AC+PQ=۳۶ \Rightarrow ۳x+x=۳۶ \Rightarrow x=۹$$

بنابراین $AQ=۲x=۲\times ۹=۱۸$.



۱۷۶ (۱) اگر a طول و b عرض مستطیل باشد، آن‌گاه از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی این مستطیل مربعی به ضلع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b)$ و از برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی آن مربعی به ضلع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b)$ ایجاد می‌شود. بنابر فرض سؤال،

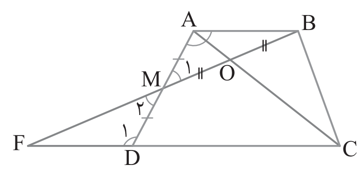
$$\frac{(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a-b))^۲}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b))^۲}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{(a-b)^۲}{(a+b)^۲}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$۲\sqrt{۲}a-۲\sqrt{۲}b=a+b\Rightarrow(۲\sqrt{۲}-۱)a=(۲\sqrt{۲}+۱)b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۲\sqrt{۲}+۱}{۲\sqrt{۲}-۱}$$

۱۷۷ (۳) با توجه به شکل زیر چون $AB||DC$، از قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $M\hat{A}B=\hat{D}_۱$. در نتیجه

$$\begin{cases}M\hat{A}B=\hat{D}_۱\\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲\\ AM=MD\end{cases}\xrightarrow{(\text{زض‌ز})}\Delta ABM\cong\Delta DFM$$

بنابراین $FM=BM$. از طرف دیگر $OB=\frac{۱}{۲}BM$، پس $\frac{FM}{OB}=۲$.



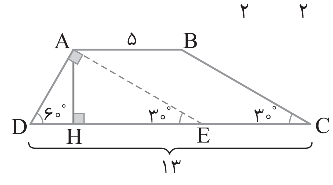
۱۷۸ (۲) مطابق شکل از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ CD را در نقطهٔ E قطع کند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب

$$AE||BC\Rightarrow A\hat{E}D=\hat{C}=۳۰^\circ$$

پس مثلث ADE قائم‌الزاویه است. در ضمن $ABCE$ متوازی‌الاضلاع است، بنابراین $CE=AB=۵$، در نتیجه $DE=CD-CE=۸$. می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف اندازهٔ وتر و طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازهٔ وتر است. پس

$$\triangle ADE:\hat{D}=۶۰^\circ\Rightarrow AE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}DE=۴\sqrt{۳}$$

$$\triangle AHE:A\hat{E}H=۳۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{AE}{۲}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$$



۱۷۹ (۱) در مثلث ABC بنابر فرض سؤال می‌نویسیم

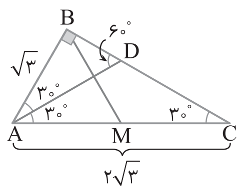
$$\frac{\hat{A}}{۶}=\frac{\hat{B}}{۵}=\frac{\hat{C}}{۱}\xrightarrow{\text{ویژگی تناسب}}\frac{\hat{A}}{۶}=\frac{\hat{B}}{۵}=\frac{\hat{C}}{۱}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۶+۵+۱}=\frac{۱۸۰^\circ}{۱۲}=۱۵^\circ$$

پس $\hat{A}=۹۰^\circ$، $\hat{B}=۷۵^\circ$ و $\hat{C}=۱۵^\circ$، در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه است و در آن ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است. بنابراین

$$S=\frac{۱}{۲}(\text{وتر})(\text{ارتفاع وارد بر وتر})=\frac{۱}{۲}(\frac{۶۴}{۴})(۶۴)=۵۱۲$$

۱۸۰ (۲) چون $(۲\sqrt{۳})^۲=(\sqrt{۳})^۲+۳^۲$، پس $AB^۲+BC^۲=AC^۲$. در نتیجه مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه است. در این مثلث، $AB=\frac{۱}{۲}AC$. بنابراین $\hat{C}=۳۰^\circ$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$. چون AD نیمساز زاویهٔ A است، پس $B\hat{A}D=۳۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAD، چون $A\hat{D}B=۶۰^\circ$، پس

$$AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD\Rightarrow AD=۲$$



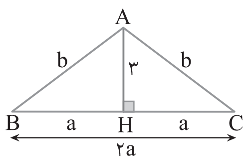
از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس

$$BM=\frac{۱}{۲}AC=\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{AD}{BM}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۸۱ (۳) فرض می‌کنیم مثلث ABC متساوی‌الساقین با ساق‌هایی به اندازهٔ b و قاعده‌ای به اندازهٔ $۲a$ باشد و AH ارتفاع وارد بر قاعده باشد. در این صورت



$$\triangle AHC:AH^۲=AC^۲-HC^۲\Rightarrow۳^۲=b^۲-a^۲$$

$$(b-a)(b+a)=۹\quad(۱)$$

از طرف دیگر محیط مثلث ABC برابر ۱۸ است، پس

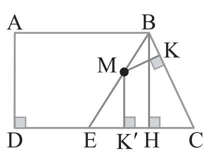
$$۲b+۲a=۱۸\Rightarrow b+a=۹\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $b-a=۱$. بنابراین

$$\begin{cases}b+a=۹\\ b-a=۱\end{cases}\Rightarrow b=۵,\ a=۴$$

پس $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}(۳)(۸)=۱۲$.

۱۸۲ (۳) مثلث BEC متساوی‌الساقین با قاعدهٔ BE است. پس مجموع فاصله‌های نقطهٔ M روی قاعدهٔ آن از دو ساق CB و CE برابر ارتفاع وارد بر ساق BH است. چون $BH=AD$، پس $MK+MK'=AD$.

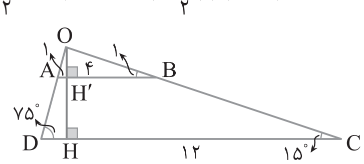


۱۸۳ (۳) ساق‌های ذوزنقه را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. چون $\hat{D}=۷۵^\circ$ و $\hat{C}=۱۵^\circ$، پس $\hat{O}=۹۰^\circ$. یعنی مثلث‌های OAB و ODC قائم‌الزاویه هستند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب می‌توان نتیجه گرفت $\hat{A}_۱=۷۵^\circ$ و $\hat{B}_۱=۱۵^\circ$. اکنون اگر ارتفاع OH را بر DC وارد کنیم، آن‌گاه OH بر AB نیز عمود خواهد بود، بنابراین

$$\triangle OAB:\hat{B}_۱=۱۵^\circ\Rightarrow OH'=\frac{AB}{۴}=\frac{۴}{۴}=۱$$

$$\triangle ODC:\hat{C}=۱۵^\circ\Rightarrow OH=\frac{DC}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

بنابراین $HH'=۲$ و $S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}HH'(AB+DC)=\frac{۱}{۲}(۲)(۴+۱۲)=۱۶$.

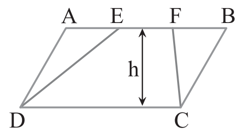


۱۸۴ (۱) چهارضلعی DCFE ذوزنقه است و اندازهٔ ارتفاع آن با اندازهٔ ارتفاع متوازی الاضلاع ABCD برابر است. پس

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{DCFE}}=\frac{h\times DC}{\frac{۱}{۲}h(EF+DC)}=\frac{۲DC}{EF+DC}$$

از طرف دیگر بنابر فرض $AB=۳EF$ و چون $AB=DC$، پس $DC=۳EF$. در نتیجه

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{DCFE}}=\frac{۲(۳EF)}{EF+۳EF}=\frac{۶EF}{۴EF}=\frac{۳}{۲}$$



۱۸۵ (۱) از نقطهٔ O خطی عمود بر دو قاعدهٔ ذوزنقه رسم می‌کنیم تا قاعده‌های AB و DC را به‌ترتیب در H' و H قطع کند (شکل زیر را ببینید).

$$AB||DC \xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \triangle OAB\sim\triangle OCD$$

$$\frac{AB}{DC}=\frac{OA}{OC}\quad(۱)$$

$$\triangle ODC: OC^۲=DC^۲-OD^۲=۱۵^۲-۹^۲=۱۴۴\Rightarrow OC=۱۲\quad(۲)$$

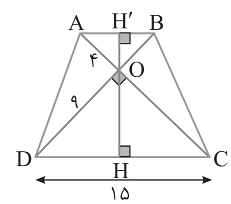
$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)}\frac{AB}{۱۵}=\frac{۴}{۱۲}\Rightarrow AB=۵$$

از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle ODC: OH\times DC=OD\times OC\Rightarrow OH=\frac{۹\times ۱۲}{۱۵}\Rightarrow OH=\frac{۳۶}{۵}$$

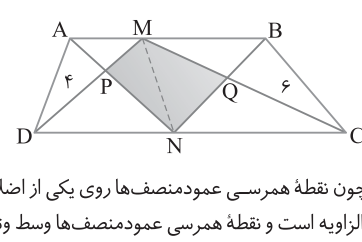
$$\triangle OAB\sim\triangle OCD\Rightarrow\frac{OH'}{OH}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{OH'}{\frac{۳۶}{۵}}=\frac{۵}{۱۵}\Rightarrow OH'=\frac{۱۲}{۵}$$

بنابراین $\text{ارتفاع ذوزنقه}=HH'=\frac{۳۶}{۵}+\frac{۱۲}{۵}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$



۱۸۶ (۴) نقطه‌های M و N را به هم وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). چهارضلعی‌های AMND و MBCN ذوزنقه هستند. بنابر قضیهٔ شبه‌پروانه در این دو ذوزنقه، $S_{MPN}=S_{APD}=۴,\quad S_{MQN}=S_{BCQ}=۶$

در نتیجه $S_{MPNQ}=S_{MPN}+S_{MQN}=۴+۶=۱۰$.

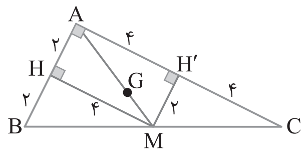


۱۸۷ (۲) چون نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها روی یکی از اضلاع قرار دارد، پس مثلث قائم‌الزاویه است و نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها وسط وتر است. پس شکل مسئله به‌صورت زیر است. چهارضلعی $AHMH'$ مستطیل است، پس $MH'=AH=BH=۲$ و $HM=AH'=CH'=۴$. اکنون از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow BC^۲=۴^۲+۸^۲=۸۰\Rightarrow BC=۴\sqrt{۵}$$

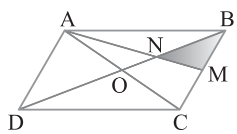
اگر G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، آن‌گاه $GM=\frac{۱}{۳}AM$. از طرف دیگر چون در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس

$$GM=\frac{۱}{۳}AM\xrightarrow{AM=\frac{BC}{۲}=۲\sqrt{۵}}GM=\frac{۱}{۳}\times ۲\sqrt{۵}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$$



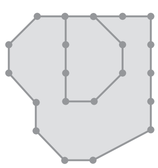
۱۸۸ (۳) قطر دیگر متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم تا قطر BD را در نقطهٔ O قطع کند. چون قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس در مثلث ABC پاره‌خط BO میانه است. در ضمن AM نیز میانه است، پس N نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است. پس مساحت مثلث BMN مساوی $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث ABC است و چون مثلث ABC هم نصف متوازی‌الاضلاع ABCD مساحت دارد، در نتیجه

$$S_{ABCD}=۲S_{ABC}=۲(۶S_{BMN})=۱۲S_{BMN}=۱۲\times ۴=۴۸$$



۱۸۹ (۲) $b_۱$ و $i_۱$ را به‌ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی شبکه‌ای بزرگ در نظر می‌گیریم $b_۱=۱۵\Rightarrow S_۱=\frac{b_۱}{۲}+i_۱-۱=۶/۵+i_۱$

همچنین $b_۲$ و $i_۲$ را به‌ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی شبکه‌ای کوچک در نظر می‌گیریم $b_۲=۸\Rightarrow S_۲=\frac{b_۲}{۲}+i_۲-۱=۳+i_۲$



مساحت بین دو چندضلعی شبکه‌ای به صورت $S_۱-S_۲=۳/۵+i_۱-i_۲$ به‌دست می‌آید. بنابر فرض مسئله $i_۱-i_۲=۱۲$، پس

$\text{مساحت بین دو چندضلعی شبکه‌ای}=۳/۵+۱۲=۱۵/۵$

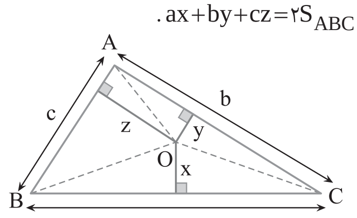
۱۹۰ (۲) برای محاسبهٔ مساحت از قضیهٔ پیک، می‌دانیم $S=\frac{b}{۲}+i-۱$. اگر به نقطه‌های درونی ۱ واحد اضافه شود به‌دست می‌آید $S'=\frac{b}{۲}+i+۱-۱=\frac{b}{۲}+i$. بنابراین $S'-S=(\frac{b}{۲}+i)-(\frac{b}{۲}+i-۱)=۱$. یعنی مقدار مساحت ۱ واحد افزایش می‌یابد.

۱۹۱ (۲) از نقطهٔ O به سه رأس مثلث ABC وصل می‌کنیم. مثلث ABC به سه مثلث OBC، OAC و OAB تقسیم می‌شود (شکل زیر را ببینید). توجه کنید که

$$S_{ABC}=S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=\frac{۱}{۲}ax+\frac{۱}{۲}by+\frac{۱}{۲}cz$$

$$=\frac{۱}{۲}(ax+by+cz)$$

بنابراین $ax+by+cz=۲S_{ABC}=۲S$.



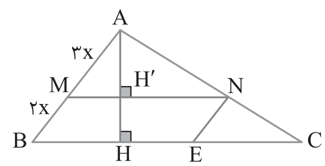
۱۹۲ ۱ مطابق شکل زیر اگر طول MA را برابر ۳x در نظر بگیریم، آن‌گاه از فرض $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۲}$ نتیجـه می‌گیریم $MB=۲x$. ارتفاع AH را رسـم می‌کنیم. چون $MN\|BC$ ، پس AH بر MN نیز عمود است. بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$MN\|BC\Rightarrow\triangle AMN\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{AH'}{AH}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳x}{۵x}=\frac{۳}{۵}$$

با تفضیل در صورت کردن تناسـب فوق نتیجه می‌شود $\frac{HH'}{AH}=\frac{۲}{۵}$. از طرف دیگر با اسـتفاده از تعمیـم قضیـهٔ تالس به تناسـب $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}$ می‌رسیم. اکنون می‌توانیم نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع به مساحت مثلث ABC را به‌دست آوریم:

$$\frac{S_{BMNE}}{S_{ABC}}=\frac{HH'\times MN}{\frac{۱}{۲}AH\times BC}=۲(\frac{HH'}{AH})(\frac{MN}{BC})=۲(\frac{۲}{۵})(\frac{۳}{۵})=\frac{۱۲}{۲۵}$$

عدد $\frac{۱۲}{۲۵}$ معادل $\frac{۱۲}{۲۵}\times۱۰۰=٪۴۸$ است.



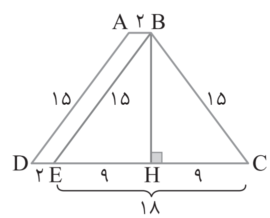
۱۹۳ ۳ از B مـوازی AD رسـم کرده‌ایـم تـا DC را در E قطـع کنـد. چهارضلعـی ABED متوازی‌الاضـلاع اسـت و در متوازی‌الاضـلاع ضلع‌های مقابل با هم برابرند:

$$DE=AB=۲\Rightarrow EC=CD-DE=۲۰-۲=۱۸\ ,\quad BE=AD=۱۵$$

مثلث BCE متساوی‌الساقین است. ارتفاع BH را در این مثلث رسم کرده‌ایم. در مثلث BCH بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$BH=\sqrt{BC^{۲}-CH^{۲}}=\sqrt{۱۵^{۲}-۹^{۲}}=۱۲$$

اکنون می‌نویسیم $S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times BH=\frac{۱}{۲}(۲+۲۰)\times۱۲=۱۳۲$.



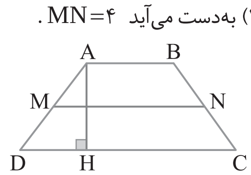
۱۹۴ ۱ اگـر نقطه‌هـای M و N وسـط‌های دو سـاق ذوزنقـهٔ ABCD باشند، آن‌گاه بنابر قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه $MN=\frac{AB+CD}{۲}$ (۱)

از طرف دیگر مساحت ذوزنقه برابر است با

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times AH$$

$$۲۸=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times۷\Rightarrow\frac{۱}{۲}(AB+CD)=۴\quad(۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $MN=۴$.



۱۹۵ ۴ دو ضلـع AB و DC را امتـداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. در این صورت مثلث OAD متساوی‌الاضلاع است، زیرا $\hat{O}=۶۰^{\circ}$. پس

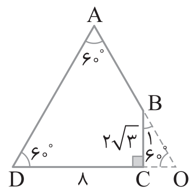
$$\triangle OBC:\hat{B}_{۱}=۳۰^{\circ}\Rightarrow\tan۳۰^{\circ}=\frac{OC}{۲\sqrt{۳}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{OC}{۲\sqrt{۳}}\Rightarrow OC=۲$$

$OD=۱۰$

بنابراین

$$S_{ABCD}=S_{OAD}-S_{OBC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}OD^{۲}-\frac{۱}{۲}(OC\times BC)$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۰)^{۲}-\frac{۱}{۲}(۲\times۲\sqrt{۳})=۲۵\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}=۲۳\sqrt{۳}$$



۱۹۶ ۳ نقـاط M و N وسـط‌های سـاق‌های ذوزنقـهٔ ABCD هسـتند. پس MN میان‌خط ذوزنقهٔ ABCD اسـت. در نتیجه MN موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع دو قاعده است، یعنی

$$MN=\frac{AB+DC}{۲}=\frac{۴+۶}{۲}=۵$$

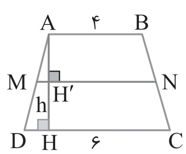
در ضمن اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه

$$\triangle ADH:MH'\|DH\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{AM}{MD}=\frac{AH'}{HH'}$$

$$\xrightarrow{AM=MD}AH'=HH'=h$$

بنابراین

$$\frac{S_{MNCD}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}h(MN+DC)}{\frac{۱}{۲}(۲h)(AB+DC)}=\frac{۵+۶}{۲(۴+۶)}=\frac{۱۱}{۲۰}=۰/۵۵$$



۱۹۷ ۴ می‌دانیم نقطهٔ برخورد میانه‌ها در هر مثلث هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. پس

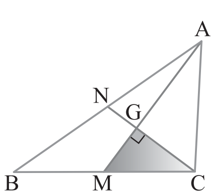
$$GM=\frac{۱}{۳}AM=\frac{۱}{۳}\times۹=۳\ ,\quad GC=\frac{۲}{۳}CN=\frac{۲}{۳}\times۶=۴$$

چون مثلث GMC قائم‌الزاویه است، پس

$$S_{GMC}=\frac{۱}{۲}GM\times GC=\frac{۱}{۲}\times۳\times۴=۶$$

در ضمـن می‌دانیـم اگـر میانه‌هـای مثلثـی رسـم شـوند، آن را به شـش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند و مثلث GMC یکی از این شش مثلث است. پس

$$S_{ABC}=۶S_{GMC}=۶\times۶=۳۶$$



۱۹۸ **۳** شکل سؤال به صورت زیر است. دو مثلث PRM و APM در ارتفاع نظیر رأس P مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{PRM}}{S_{APM}}=\frac{RM}{AM}=\frac{y}{۴y}=\frac{۱}{۴}\qquad (۱)$$

در ضمن دو مثلث APM و ABM دارای ارتفاع مشترک از رأس M هستند. پس

$$\frac{S_{APM}}{S_{ABM}}=\frac{AP}{AB}=\frac{۴x}{۵x}=\frac{۴}{۵}\qquad (۲)$$

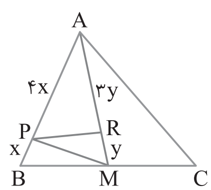
در مثلث ABC پاره‌خط AM میانه است. پس دو مثلث ABM و AMC هم‌مساحت‌اند. پس

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۲}\qquad (۳)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$S_{PRM}=\frac{۱}{۴}S_{APM}=\frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۵}S_{ABM})=\frac{۱}{۵}(\frac{۱}{۲}S_{ABC})=\frac{۱}{۱۰}S_{ABC}$$

بنابراین $\frac{S_{PRM}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۱۰}=۱۰\%$.



۱۹۹ **۲** فرض کنید S مساحت چندضلعی شبکه‌ای اولیه و S' مساحت چندضلعی شبکه‌ای جدید باشد. بنابر قضیهٔ پیک،

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱,\qquad S'=\frac{b+۸}{۲}+(i-۱)-۱$$

از طرف دیگر $S'=۳S$، پس

$$\frac{b+۸}{۲}+i-۲=۳(\frac{b}{۲}+i-۱)\Rightarrow\frac{b}{۲}+۴+i-۲=\frac{۳b}{۲}+۳i-۳\Rightarrow b+۲i=۵$$

با استفاده از تساوی بالا، در جدول زیر حالت‌های مختلف i و b نوشته شده است.

i	۰	۱	۲
b	۵	۳	۱

مسلماً حالت $b=۱$ و $i=۲$ قابل قبول نیست، زیرا $b\geq ۳$. در ضمن حالت $i=۰$ و $b=۵$ نیز قابل قبول نیست، زیرا در این صورت در چندضلعی شبکه‌ای جدید تعداد نقاط درونی -۱ می‌شود که ممکن نیست. پس فقط حالت $i=۱$ و $b=۳$ قابل قبول است.

۲۰۰ **۳** فرض کنید b تعداد نقاط مرزی، i تعداد نقاط درونی و S مساحت چندضلعی شبکه‌ای کوچک‌تر باشد. در این صورت $b'=۴b$ و $i'=۳i$ و $S'=۴S$ به‌ترتیب تعداد نقاط مرزی، درونی و مساحت چندضلعی شبکه‌ای بزرگ‌تر هستند. بنابر قضیهٔ پیک

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱\qquad (۱)$$

$$S'=\frac{b'}{۲}+i'-۱\Rightarrow ۴S=\frac{۴b}{۲}+۳i-۱\xrightarrow{\text{از } (۱)}$$

$$۴(\frac{b}{۲}+i-۱)=۲b+۳i-۱\Rightarrow ۲b+۴i-۴=۲b+۳i-۱\Rightarrow i=۳$$

در هر چندضلعی شبکه‌ای کمترین تعداد نقاط مرزی برابر ۳ است، پس حداقل مساحت چندضلعی شبکه‌ای کوچک‌تر برابر است با

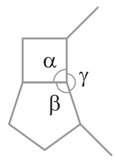
$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۳}{۲}+۳-۱=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

۲۰۱ **۴** اندازهٔ هر زاویهٔ مربع برابر ۹۰° و اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی پنج‌ضلعی منتظم برابر $\frac{(۵-۲)۱۸۰^\circ}{۵}=۱۰۸^\circ$ است. در ضمن $\alpha+\beta+\gamma=۳۶۰^\circ$ (شکل زیر را ببینید)، بنابراین $۹۰^\circ+۱۰۸^\circ+\gamma=۳۶۰^\circ\Rightarrow\gamma=۱۶۲^\circ$

از طرف دیگر اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم مساوی $\frac{(n-۲)\times۱۸۰^\circ}{n}$ است. در نتیجه

$$\frac{(n-۲)\times۱۸۰^\circ}{n}=۱۶۲^\circ\Rightarrow ۱۸۰^\circ n-۳۶۰^\circ=۱۶۲^\circ n$$

$$۱۸^\circ n=۳۶۰^\circ\Rightarrow n=۲۰$$

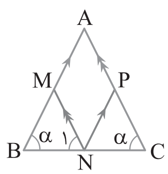


۲۰۲ **۲** در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های روبه‌روی ساق‌ها مساوی هستند، پس $\hat{B}=\hat{C}=\alpha$. چون AMNP متوازی‌الاضلاع است، پس ضلع‌های مقابل در آن موازی هستند. بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$AC||MN\xrightarrow{\text{مورب } BC}\hat{N}_۱=\hat{C}=\alpha=\hat{B}\Rightarrow MB=MN$$

بنابراین

$$\text{محیط }(AMNP)=۲(AM+MN)$$
$$=۲(AM+MB)$$
$$=۲AB=۱۰$$



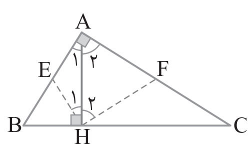
۲۰۳ **۳** با استفاده از فرض‌های تست شکل زیر را رسم کرده‌ایم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB، پاره‌خط HE میانهٔ وارد بر وتر است، پس $HE=\frac{۱}{۲}AB=AE$. یعنی مثلث AEH متساوی‌الساقین است. بنابراین $\hat{H}_۱=\hat{A}_۱\quad (۱)$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC، پاره‌خط HF میانهٔ وارد بر وتر است، پس $AF=\frac{AC}{۲}=HF$. یعنی مثلث AFH متساوی‌الساقین است. بنابراین

$$\hat{H}_۲=\hat{A}_۲\qquad (۲)$$

از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\hat{H}_۱+\hat{H}_۲=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲$. یعنی

$$E\hat{H}F=\hat{A}=۹۰^\circ$$

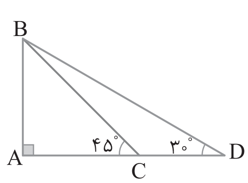


۲۰۴ **۳** در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC زاویهٔ C برابر ۴۵° است، پس این مثلث متساوی‌الساقین است و $AB=AC$. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD،

$$\hat{D}=۳۰^\circ\Rightarrow AB=\frac{BD}{۲},\qquad A\hat{B}D=۶۰^\circ\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BD$$

بنابراین $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AD}=\frac{\frac{BD}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}BD}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$. با تفضیل در مخرج کردن این تناسب به‌دست می‌آید

$$\frac{AC}{AD-AC}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}\Rightarrow\frac{AC}{CD}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}$$



۲۰۵ **۴** از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیل ABCD (با طول AB و عرض BC) مربع MNEF ایجاد می‌شود به طوری که اندازهٔ ضلع این مربع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(AB-BC)$ است. پس طول قطر این مربع یعنی ME مساوی $\sqrt{۲}$ برابر اندازهٔ ضلع این مربع است. بنابراین

$$ME=\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(AB-BC)\right)=AB-BC \quad (۱)$$

با توجه به شکل چون نقطه‌های M و E روی طول‌های مستطیل ABCD قرار دارند، پس $ME=BC$. پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$BC=AB-BC\Rightarrow AB=۲BC \quad (۲)$$

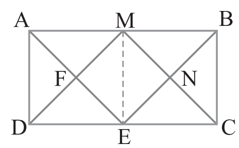
از طرف دیگر بنابر فرض تست، مساحت مربع MNEF برابر ۸ است. بنابراین

$$\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(AB-BC)\right)^۲=۸\Rightarrow\frac{(AB-BC)^۲}{۲}=۸\Rightarrow AB-BC=۴ \quad (۳)$$

از تساوی‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$۲BC-BC=۴\Rightarrow BC=۴,\quad AB=۸$$

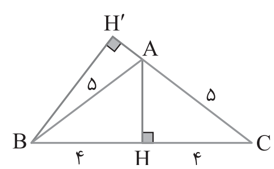
بنابراین $\text{محیط}(ABCD)=۲(AB+BC)=۲(۸+۴)=۲۴$



۲۰۶ **۲** می‌دانیم تفاضل فاصله‌های هر نقطهٔ دلخواه بر امتداد قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است و این ویژگی به اینکه M در کجای امتداد قاعده قرار دارد بستگی ندارد. پس فرض $MB=۴MC$ در حل این تست تأثیری ندارد. بنابراین با توجه به شکل باید اندازهٔ ارتفاع BH' را به‌دست آوریم. به همین علت ابتدا مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم. برای این کار ارتفاع AH وارد بر قاعدهٔ BC را رسم می‌کنیم. می‌دانیم این ارتفاع، میانه هم هست. بنابراین $AH=\sqrt{۵^۲-۴^۲}=۳$. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}BH'\times AC\Rightarrow ۳\times۸=BH'\times۵$$

$$BH'=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$



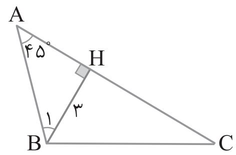
۲۰۷ **۴** مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH یک زاویهٔ ۴۵° دارد، پس زاویهٔ $B_۱$ نیز ۴۵° است (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث ABH متساوی‌الساقین است و $AH=BH=۳$. در ضمن مساحت مثلث ABC مساوی $\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})$ است. بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})\Rightarrow\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})$$

$$\frac{۱}{۲}\times۳\times AC=\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})\Rightarrow AC=۳+۳\sqrt{۳}$$

چون $AH=۳$ و $AC=۳+۳\sqrt{۳}$، پس $CH=۳\sqrt{۳}$. در نتیجه بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BHC

$$BC^۲=BH^۲+CH^۲=۳^۲+(۳\sqrt{۳})^۲=۳۶\Rightarrow BC=۶$$



۲۰۸ **۳** چون $۲S=ah_a=bh_b=ch_c$، پس

$$a=\frac{۲S}{h_a},\quad b=\frac{۲S}{h_b},\quad c=\frac{۲S}{h_c}$$

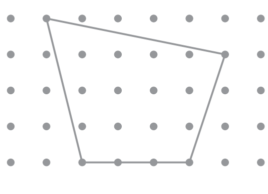
این عبارت‌ها را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{\frac{۲S}{h_a}}+\frac{۱}{\frac{۲S}{h_b}}+\frac{۱}{\frac{۲S}{h_c}}=\frac{۴}{S}\Rightarrow\frac{h_a}{۲S}+\frac{h_b}{۲S}+\frac{h_c}{۲S}=\frac{۴}{S}\Rightarrow h_a+h_b+h_c=۸$$

۲۰۹ **۴** بنابر قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه، طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند نصف مجموع طول دو قاعده است. پس مجموع طول دو قاعدهٔ این ذوزنقه برابر ۱۶ است. بنابراین

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{۱}{۲}(\text{ارتفاع})(\text{مجموع طول دو قاعده})=\frac{۱}{۲}(۴)(۱۶)=۳۲$$

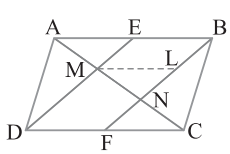
۲۱۰ **۲** با توجه به شکل تعداد نقطه‌های مرزی برابر ۶ و تعداد نقطه‌های درونی ۱۲ است ($b=۶$ و $i=۱۲$). در نتیجه مساحت شکل مورد نظر برابر است با $S=\frac{b}{۲}+i-۱=۳+۱۲-۱=۱۴$. اگر وسط‌های ضلع‌های مجاور یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم، مساحت چهارضلعی ایجاد شده نصف مساحت چهارضلعی اصلی است. بنابراین مساحت چهارضلعی حاصل برابر $\frac{۱۴}{۲}=۷$ است.



۲۱۱ **۲** اگر یک n ضلعی به $(n+1)$ ضلعی تبدیل شود، به تعداد قطرهای n ضلعی $n-۱$ قطر اضافه می‌شود. پس n ضلعی نسبت به $(n-۱)$ ضلعی $(n-۱)-۱=n-۲$ قطر بیشتر دارد. اکنون می‌توان نوشت $n-۲=\frac{۳}{۴}(n-۱)$. در نتیجه $n=۵$. مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-۲)\times۱۸۰^\circ$ است. چون $n=۵$، پس

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی پنج ضلعی محدب}=(۵-۲)\times۱۸۰^\circ=۵۴۰^\circ$$

۲۱۲ **۴** چون $BE\|DF$ و $BE=DF$، پس چهارضلعی BEDF متوازی‌الاضلاع است. بنابراین $BF\|DE$. اگر از M خطی موازی EB رسم کنیم تا NB را در L قطع کند، آن‌گاه BLME متوازی‌الاضلاع است، پس $ML=BE=AE=FC$. در نتیجه سه مثلث AME، MNL و CNF به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند و در نتیجه $AM=MN=NC$، یعنی $NC=\frac{۱}{۲}MC$.

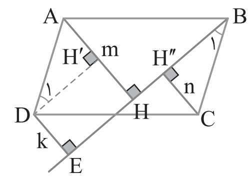


۲۱۳ (۲) از رأس D عمود DH' را بر AH وارد می‌کنیم. در این صورت چهارضلعی $DEHH'$ مستطیل است، پس $HH'=k$. از طرف دیگر دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH' و CBH'' همنهشت هستند، زیرا

$$\begin{cases}\hat{D}_۱=\hat{B}_۱\\ AD=BC\\ \hat{H}'=\hat{H}''=۹۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}\triangle ADH'\cong\triangle CBH''$$

در نتیجه $AH'=CH''=n$. چون $AH=m$، پس

$$AH=AH'+HH'\Rightarrow m=n+k$$



۲۱۴ (۲) فرض می‌کنیم ارتفاع ساختمان یعنی AH برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH یک زاویهٔ حاده ۴۵° است، پس این مثلث متساوی‌الساقین نیز هست. بنابراین $BH=AH=x$. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC زاویهٔ C برابر ۳۰° است. در نتیجه $H\hat{A}C=۶۰^\circ$ و می‌توان نوشت

$$\triangle AHC:\hat{C}=۳۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{AC}{۲}\qquad(۱)$$

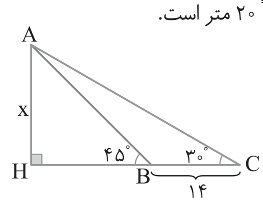
$$\triangle AHC:H\hat{A}C=۶۰^\circ\Rightarrow HC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC\qquad(۲)$$

از تقسیم تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AH}{HC}=\frac{\frac{AC}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\frac{x}{x+۱۴}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow x\sqrt{۳}=x+۱۴$$

$$x(\sqrt{۳}-۱)=۱۴\Rightarrow x=\frac{۱۴}{\sqrt{۳}-۱}$$

عدد $\sqrt{۳}$ تقریباً مساوی ۱/۷ است، بنابراین $x\simeq\frac{۱۴}{۱/۷-۱}=\frac{۱۴}{۰/۷}=۲۰$. پس ارتفاع ساختمان تقریباً ۲۰ متر است.

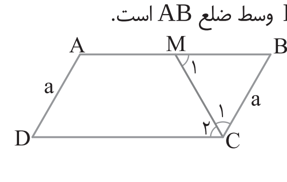


۲۱۵ (۲) فرض کنید $AD=a$، در این صورت $AB=۲a$. اکنون نیمساز زاویهٔ C را رسم می‌کنیم تا AB را در M قطع کند. در این صورت بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

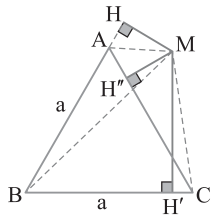
$$AB\|DC\xrightarrow{\text{مورب } MC}\hat{M}_۱=\hat{C}_۲\xrightarrow{\hat{C}_۱=\hat{C}_۲}\hat{M}_۱=\hat{C}_۱$$

$$MB=BC=a$$

چون $AB=۲a$، پس نقطهٔ M وسط AB است. به همین ترتیب نتیجه می‌شود نیمساز زاویهٔ D نیز از نقطهٔ M وسط AB می‌گذرد پس نقطهٔ تلاقی نیمسازهای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ وسط ضلع AB است.



۲۱۶ (۳) فرض می‌کنیم h طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a باشد. از نقطهٔ M به رأس‌های مثلث ABC وصل می‌کنیم. با توجه به شکل نتیجه می‌شود



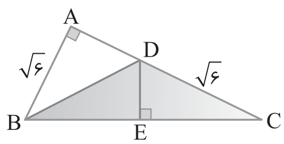
$$S_{ABC}=S_{AMB}+S_{MBC}-S_{AMC}$$

$$\frac{۱}{۲}ah=\frac{۱}{۲}MH\times a+\frac{۱}{۲}MH'\times a-\frac{۱}{۲}MH''\times a\Rightarrow h=MH+MH'-MH''$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر طول ارتفاع مثلث ABC است.

۲۱۷ (۲) در مثلث BCD پاره‌خط AB ارتفاع وارد بر ضلع DC است.

بنابراین $S_{BCD}=\frac{۱}{۲}AB\times DC=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶})(\sqrt{۶})=۳$.



۲۱۸ (۲) چون $ah_a=bh_b$، پس $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$، در نتیجه $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$، یعنی $b=۲a$. از طرف دیگر بنابر فرض تست محیط مثلث برابر $۵a$ است. بنابراین

$$a+b+c=۵a\Rightarrow b+c=۴a\xrightarrow{b=۲a}۲a+c=۴a\Rightarrow c=۲a$$

چون $b=۲a$ و $c=۲a$، پس $b=c$، در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۱۹ (۳) می‌دانیم در ذوزنقهٔ ABCD، مساحت مثلث OBC برابر است با مساحت مثلث OAD. پس مساحت مثلث OAD نیز برابر ۸ است.

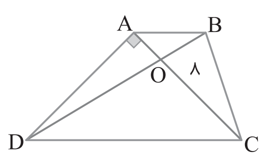
از طرف دیگر $OA=\frac{۱}{۳}OC$، پس $OA=\frac{۱}{۴}AC$. در نتیجه $OA=\frac{۱}{۴}\times۸=۲$.

چون مثلث OAD قائم‌الزاویه است، پس

$$S_{OAD}=\frac{۱}{۲}AD\times OA\Rightarrow ۸=\frac{۱}{۲}\times AD\times۲\Rightarrow AD=۸$$

از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ADC نتیجه می‌شود

$$DC^۲=AD^۲+AC^۲=۸^۲+۸^۲\Rightarrow DC=۸\sqrt{۲}$$



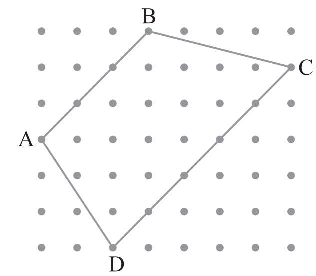
۲۲۰ (۴) مساحت چهارضلعی شبکه‌ای ABCD را به کمک قضیهٔ پیک به‌دست می‌آوریم. در این چهارضلعی شبکه‌ای $b=۱۰$ و $i=۱۶$. پس $S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۱۰}{۲}+۱۶-۱=۲۰$. از طرف دیگر به کمک قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ قاعده‌های AB و CD را در این ذوزنقه به‌دست می‌آوریم

$$AB^۲=۳^۲+۳^۲=۱۸\Rightarrow AB=۳\sqrt{۲}$$

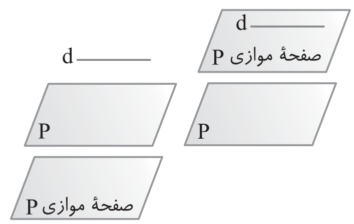
$$CD^۲=۵^۲+۵^۲=۵۰\Rightarrow CD=۵\sqrt{۲}$$

در صورتی که h طول ارتفاع این ذوزنقه باشد، می‌توان نوشت

$$S=\frac{۱}{۲}h(AB+DC)\Rightarrow۲۰=\frac{۱}{۲}h(۳\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲})\Rightarrow h=\frac{۵}{\sqrt{۲}}$$

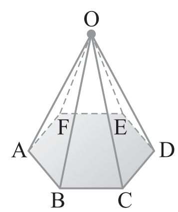


۲۲۱ **۴** خط d صفحهٔ P را قطع نکرده است، پس d با P موازی است. پس هر صفحهٔ موازی با P با خط d موازی است یا خط d بر آن واقع است.



نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

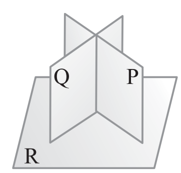
۲۲۲ **۲** در هرم با قاعدهٔ شش‌ضلعی (شکل زیر) یال AB با یال‌های OC و OD و OE و OF متنافر است. توجه کنید AB با یال‌های BC و CD و ED و EF و AF نمی‌توانند متنافر باشد زیرا AB با آن‌ها در یک صفحه است. در ضمن AB با یال‌های OB و OA متقاطع است.



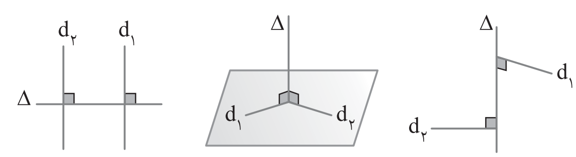
۲۲۳ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱) اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد با نامتناهی خط از آن صفحه موازی است، اما با تمام خط‌های آن صفحه موازی نیست و با برخی متنافر است.

گزینهٔ (۲) در شکل زیر دو صفحهٔ P و Q بر صفحهٔ R عمود هستند، ولی با هم موازی نیستند.



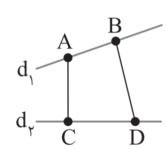
گزینهٔ (۴) دو خط عمود بر یک خط در فضا، لزوماً موازی نیستند.



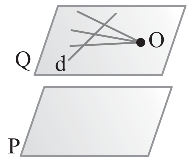
$d_1 \| d_2$ — d_1 و d_2 متقاطع‌اند. — d_1 و d_2 متنافرند.

۲۲۴ **۲** ثابت می‌کنیم AC و BD متنافر هستند.

برهان خلف فرض می‌کنیم AC و BD متنافر نباشند (فرض خلف). دو حالت رُخ می‌دهد: AC و BD موازی هستند یا اینکه AC و BD متقاطع هستند. در هر دو حالت صفحه‌ای شامل AC و BD وجود دارد (این صفحه را P می‌نامیم). چون A و B در صفحهٔ P هستند، پس خط d_1 در این صفحه است و از طرف دیگر چون C و D در صفحهٔ P هستند، پس d_2 هم در صفحهٔ P قرار دارد. این مطلب با متنافر بودن d_1 و d_2 در تناقض است (چون دو خط متنافر نمی‌توانند در یک صفحه قرار گیرند) در نتیجه AC و BD نه موازی و نه متقاطع‌اند. یعنی AC و BD متنافرند.



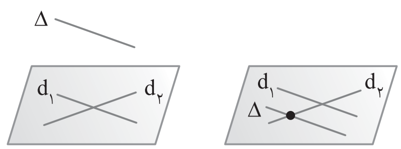
۲۲۵ **۲** تنها زمانی شرایط مسئله رُخ می‌دهد که صفحهٔ گذرنده از نقطهٔ O و خط d (صفحهٔ Q در شکل زیر) با صفحهٔ P موازی باشد. در این حالت خط d موازی صفحهٔ P است، پس گزینهٔ (۲) درست است.



(توجه کنید که لازم است نقطهٔ O و خط d در صفحهٔ موازی با P قرار داشته باشند تا شرایط سؤال برقرار شود)

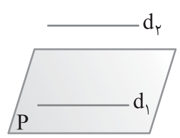
۲۲۶ **۱** می‌دانیم دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند. پس اگر صفحه‌ای مانند P وجود داشته باشد که d و d' بر آن عمود باشند، می‌توان نتیجه گرفت d و d' موازی‌اند و این خلاف فرض مسئله است. نتیجه می‌گیریم هیچ صفحه‌ای مانند P وجود ندارد.

۲۲۷ **۳** دو خط Δ و d_2 می‌توانند متقاطع یا متنافر باشند اما نمی‌توانند موازی باشند. در حقیقت، می‌دانیم دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند. اگر Δ و d_2 موازی باشند، باید d_1 و d_2 هم موازی باشند و این امکان ندارد. حالت متقاطع و متنافر بودن Δ و d_2 را در شکل‌های زیر ببینید.

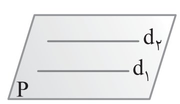


Δ و d_2 متنافرند. — Δ و d_2 متقاطع‌اند.

۲۲۸ **۴** خط d_2 می‌تواند با صفحهٔ P موازی باشد.

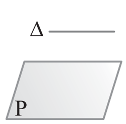


و از طرف دیگر خط d_2 می‌تواند بر صفحهٔ P واقع باشد.

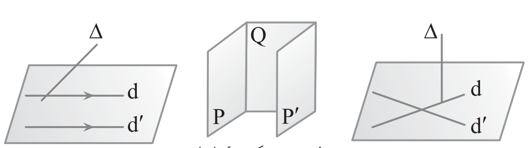


۲۲۹ **۴** دو خط AB و CD حتماً متنافر هستند زیرا در غیر این صورت یا متقاطع یا موازی خواهند بود، که در هر دو حالت صفحه‌ای وجود دارد که شامل خطوط AB و CD می‌شود. یعنی چهار نقطهٔ A، B، C و D در یک صفحه قرار می‌گیرند که با فرض سؤال در تناقض است. پس AB و CD متنافرند.

۲۳۰ **۲** فقط گزاره‌های (پ) و (ت) همواره درست هستند. گزارهٔ (الف) نادرست است، زیرا اگر Δ با تمام خط‌های صفحهٔ P موازی باشد، آن‌گاه تمام خطها در صفحهٔ P با هم موازی‌اند که نادرست است. در ضمن خط Δ با نامتناهی خط از صفحهٔ P موازی و با نامتناهی خط از صفحهٔ P متنافر است. پس گزارهٔ (ب) نیز نادرست است.

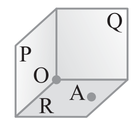


۲۳۱ **۴** در فضا اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند لزوماً خط دیگر را نیز قطع می‌کند. پس گزینهٔ (۴) درست است. در شکل‌های زیر، نادرستی سایر گزینه‌ها را می‌توانید ببینید.

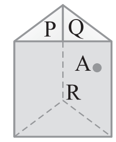


نادرستی گزینهٔ (۱) — نادرستی گزینهٔ (۲) — نادرستی گزینهٔ (۳)

۲۳۲ (۴) سه صفحهٔ دوبه‌دو متقاطع R، Q و P به دو صورت که در شکل‌های (۱) و (۲) رسم شده‌اند، می‌توانند باشند. در شکل (۱) سه صفحه دارای نقطهٔ مشترک O هستند که مورد نظر سؤال نیست و در شکل (۲) سه صفحه دوبه‌دو متقاطع‌اند و فاقد نقطهٔ مشترک هستند، ولی از این نوع صفحات گذرنده از A و متقاطع با Q و P نامتناهی وجود دارد.



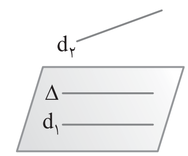
شکل (۱)



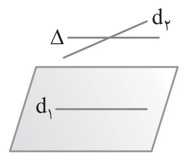
شکل (۲)

۲۳۳ (۳) دو خط AB و EE' در یک صفحه قرار ندارند و موازی با هم نیستند، پس متنافرند. نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

۲۳۴ (۳) دو خط Δ و $d_۲$ نمی‌توانند موازی باشند. چون اگر $\Delta || d_۲$، آن‌گاه از $\Delta || d_۱$ نتیجه می‌گیریم $d_۱ || d_۲$ که درست نیست. به شکل‌های زیر نگاه کنید:

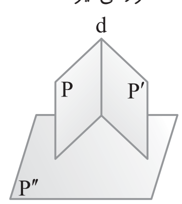


Δ و $d_۲$ متنافرند.



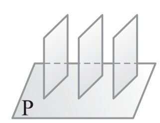
Δ و $d_۲$ متقاطع‌اند.

۲۳۵ (۴) می‌دانیم دو خط عمود بر یک صفحه موازی‌اند، پس گزینهٔ (۴) درست است. البته گزینهٔ (۲) نیز می‌تواند قابل قبول باشد ولی گزینهٔ (۴) دقیق‌تر است زیرا دو خط موازی AB و d خود به خود در یک صفحه قرار می‌گیرند.

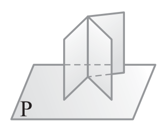


۲۳۶ (۴) اگر دو صفحهٔ متقاطع بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترک آن‌ها نیز بر آن صفحه عمود است. در شکل زیر صفحه‌های متقاطع P و P' بر P'' عمود هستند و فصل مشترک آن‌ها یعنی خط d بر P'' عمود است.

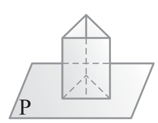
۲۳۷ (۴) مطابق شکل‌های زیر فقط گزینهٔ (۴) ممکن نیست و در نتیجه پاسخ تست است.



گزینهٔ (۱) درست است.

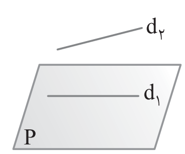


گزینهٔ (۲) درست است.

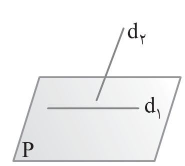


گزینهٔ (۳) درست است.

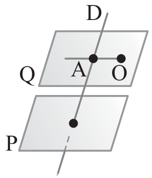
۲۳۸ (۱) صفحهٔ P می‌تواند با خط $d_۲$ موازی باشد.



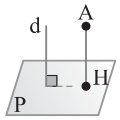
از طرف دیگر صفحهٔ P می‌تواند با خط $d_۲$ متقاطع باشد.

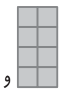
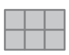


۲۳۹ (۱) از نقطهٔ O صفحهٔ Q را موازی با صفحهٔ P رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطهٔ A قطع کند. در این صورت OA خط مورد نظر است، زیرا خط OA خط D را قطع کرده و چون در صفحه‌ای قرار دارد که با صفحهٔ P موازی است، پس موازی صفحهٔ P است.



۲۴۰ (۴) می‌دانیم از نقطهٔ A فقط یک خط مثل AH موازی با خط d می‌توان رسم کرد. چون $d \perp P$، پس $AH \perp P$، بنابراین از AH هر صفحه‌ای عبور کند هم عمود بر صفحهٔ P و هم موازی d است. توجه کنید که یکی از این صفحات شامل دو خط d و AH است که در این حالت d بر آن صفحه واقع می‌شود.



۲۴۱ (۴) نمای چپ شکل به‌صورت  و نمای بالای آن به شکل  است. اگر مساحت هر مربع کوچک a واحد مربع باشد، آن‌گاه مساحت نمای چپ $۸\times a$ واحد مربع و مساحت نمای بالا $۶\times a$ واحد مربع است. بنابراین

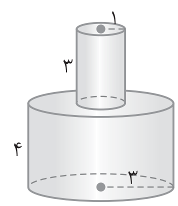
$$\frac{\text{مساحت نمای چپ}}{\text{مساحت نمای بالا}}=\frac{۸\times a}{۶\times a}=\frac{۴}{۳}$$

۲۴۲ (۳) در کل شکل مورد نظر از ۶۰ مکعب تشکیل شده است. ۱۲ مکعب که شکل نمای بالای خواسته شده را تشکیل می‌دهند نگه می‌داریم و سایر مکعب‌ها را برمی‌داریم. پس حداکثر مکعب‌های حذف شده برابر $۶۰-۱۲=۴۸$ است.

۲۴۳ (۱) این شکل فضایی استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۱ و ارتفاع ۳ است که روی استوانهٔ دیگری به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ قرار دارد (شکل زیر را ببینید). بنابراین

حجم استوانه به ارتفاع ۳ + حجم استوانه به ارتفاع ۴ = حجم شکل

$$=\pi(۳)^۲(۴)+\pi(۱)^۲(۳)=۳۶\pi+۳\pi=۳۹\pi$$



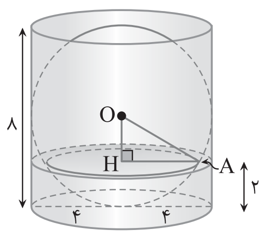
۲۴۴ (۲) شکل سؤال به‌صورت زیر است. صفحهٔ موازی با قاعدهٔ استوانه به فاصلهٔ ۲ از آن این شکل را در دو دایره قطع می‌کند. در حقیقت، استوانه را در دایره‌ای به شعاع ۴ مساوی شعاع قاعدهٔ استوانه و کره را در دایره‌ای به شعاع AH قطع می‌کند. توجه کنید که

$$OH=۴-۲=۲,\quad OA=\text{شعاع کره}=۴$$

$$\triangle OAH: AH^۲=OA^۲-OH^۲=۴^۲-۲^۲=۱۲\Rightarrow AH=۲\sqrt{۳}$$

پس مساحت مقطع حاصل مساحت بین دو دایره به شعاع‌های ۴ و $۲\sqrt{۳}$ است:

$$\text{مساحت خواسته شده}=\pi(۴)^۲-\pi(۲\sqrt{۳})^۲=۱۶\pi-۱۲\pi=۴\pi$$



۲۴۵ (۳) سطح مقطع حاصل مثلث $A'C'B$ است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle BB'C': BC'^{۲}=BB'^{۲}+B'C'^{۲}=۴^{۲}+۳^{۲}=۲۵\Rightarrow BC'=۵$$

پس مثلث $BC'A'$ متساوی‌الساقین است. برای به‌دست آوردن مساحت آن ارتفاع $C'H$ را رسم می‌کنیم. این ارتفاع میانه هم هست. از طرف دیگر

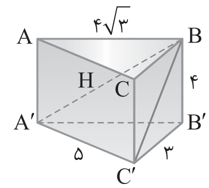
$$\triangle AA'B: A'B^{۲}=AB^{۲}+AA'^{۲}=(۴\sqrt{۳})^{۲}+۴^{۲}=۶۴\Rightarrow A'B=۸$$

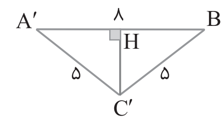
$$A'H=۴$$

$$\triangle A'C'H: C'H^{۲}=A'C'^{۲}-A'H^{۲}=۵^{۲}-۴^{۲}=۹\Rightarrow C'H=۳$$

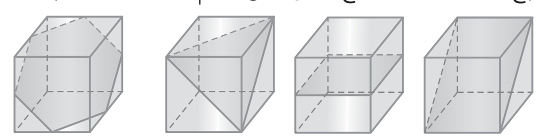
در نتیجه

$$S_{A'BC'}=\frac{۱}{۲}C'H\times A'B=\frac{۱}{۲}(۳)(۸)=۱۲$$





۲۴۶ (۳) سطح مقطع یک مکعب با صفحه‌های قائم، افقی و مایل می‌تواند مستطیل، مربع، مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم باشد (شکل‌های زیر را ببینید).

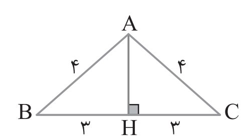


سطح‌مقطع مستطیل — سطح‌مقطع مربع — سطح‌مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع — سطح‌مقطع شش‌ضلعی منتظم

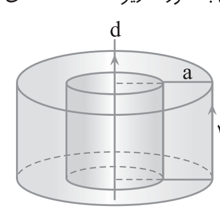
اما هیچ‌گاه یک لوزی ایجاد نمی‌شود.

۲۴۷ (۲) مثلث ABC متساوی‌الساقین است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. از دوران این مثلث حول BC دو مخروط مساوی با ارتفاع $BH=۳$ و شعاع قاعدهٔ $AH=\sqrt{۱۶-۹}=\sqrt{۷}$ ایجاد می‌شود.

$$\text{حجم شکل حاصل}=۲(\frac{۱}{۳}\pi AH^{۲}\times BH)=۲(\frac{۱}{۳}\pi\times(\sqrt{۷})^{۲}\times ۳)=۱۴\pi$$



۲۴۸ (۲) شکل حاصل به‌صورت زیر است، که فضای بین دو استوانه است.

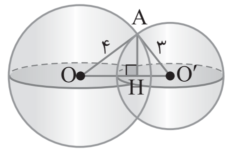


۲۴۹ (۴) شکل حاصل از برخورد دو کره یک دایره است. در شکل زیر AH شعاع این دایره است. اضلاع مثلث AOO' برابر ۳، ۴ و ۵ هستند، پس مثلث AOO' قائم‌الزاویه است. پس

$$AH\times OO'=OA\times O'A\Rightarrow AH\times ۵=۳\times ۴\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}$$

بنابراین

$$\text{مساحت سطح مقطع}=\pi AH^{۲}=\pi(\frac{۱۲}{۵})^{۲}=\frac{۱۴۴}{۲۵}\pi=۵/۷۶\pi$$



۲۵۰ (۱) مثلث ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ است که نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱ از آن جدا شده است. از دوران این مثلث حول AO یک مخروط به ارتفاع $OA=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴=۲\sqrt{۳}$ و شعاع قاعدهٔ ۲ ایجاد می‌شود به‌طوری‌که نیم‌کره‌ای به شعاع ۱ از آن جدا شده است. پس

$$\text{حجم حاصل}=\text{حجم مخروط}-\text{حجم نیم‌کره}=\frac{۱}{۳}\pi(۲)^{۲}(۲\sqrt{۳})-\frac{۲}{۳}\pi(۱)^{۳}$$

$$=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}\pi-\frac{۲}{۳}\pi=\frac{۸\sqrt{۳}-۲}{۳}\pi$$

۲۵۱ (۲) اگر همهٔ مکعب‌ها را به‌جز ردیف اول که در پایین شکل قرار دارد حذف کنیم، آن‌گاه نمای بالای شکل تغییر نمی‌کند. پنج ردیف بالای ردیف اول در هر ردیف دارای ۱۵ مکعب کوچک هستند به‌جز ردیف بالایی، پس حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید حذف شوند برابر $۵\times ۱۵-۱=۷۴$ است.

۲۵۲ (۴) در شکل گستردهٔ داده شده وجه‌های (A,C)، (E,F) و (B,D) مقابل هم قرار دارند. پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند.

۲۵۳ (۳) نمای روبه‌روی این منشور مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است، چون اضلاع مثلث ABC در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، پس

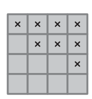
$$\text{مساحت نمای روبه‌رو}=S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۳=۹$$

نمای بالای این منشور مستطیلی به طول ۶ و عرض ۲ است، پس

$$\text{مساحت نمای بالا}=\text{مساحت مستطیل}=۶\times ۲=۱۲$$

بنابراین مجموع مساحت‌های نمای بالا و روبه‌رو برابر $۹+۱۲=۲۱$ است.

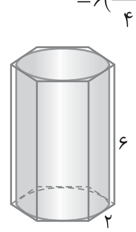
۲۵۴ (۴) اگر مربع‌هایی را که با علامت × مشخص شده‌اند از ردیف بالای مکعب مستطیل داده شده حذف کنیم و این حذف کردن را در لایه‌های زیرین نیز انجام دهیم، نمای بالا به‌صورت خواسته شده درمی‌آید. بنابراین تعداد $۳\times ۸=۲۴$ مکعب کوچک را باید حذف کنیم.

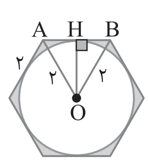


۲۵۵ (۱) بزرگ‌ترین استوانهٔ ممکن درون منشور هم‌ارتفاع با منشور است و قاعده‌های این استوانه دایره‌های محاطی هر دو قاعده هستند. صفحهٔ موازی با قاعده، این شکل را در یک شش‌ضلعی منتظم و یک دایره قطع می‌کند. مقطع حاصل به‌صورت زیر است. باید مساحت قسمت رنگی را به‌دست آوریم. چون مثلث OAB مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ است، پس $OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲)=\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\text{مساحت مقطع}=\text{مساحت شش‌ضلعی منتظم}-\text{مساحت دایره}$$

$$=۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲)^{۲})-\pi(\sqrt{۳})^{۲}=۶\sqrt{۳}-۳\pi$$



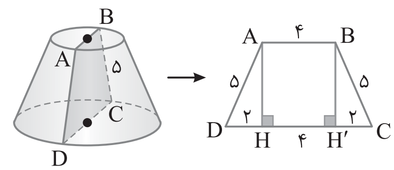


۲۵۶ (۱) سطح مقطع حاصل از این برش عمودی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD است. برای محاسبهٔ مساحت این ذوزنقه ارتفاع‌های AH و BH' را رسم می‌کنیم. در این صورت مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADH و BCH' (به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه) همنهشت هستند، پس $DH=CH'=۲$.
از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH به‌دست می‌آید

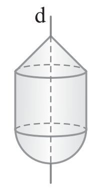
$$AH^۲=AD^۲-DH^۲=۵^۲-۲^۲=۲۱\Rightarrow AH=\sqrt{۲۱}$$

بنابراین

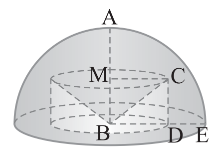
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AH(AB+DC)=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲۱})(۴+۸)=۶\sqrt{۲۱}$$



۲۵۷ (۴) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول خط d یک مخروط، از دوران مستطیل یک استوانه و از دوران ربع دایره یک نیم کره به‌وجود می‌آید. بنابراین شکل ایجاد شده به‌صورت مقابل است.



۲۵۸ (۴) با توجه به شکل مقابل از دوران ربع دایره حول AB یک نیم کره، از دوران مستطیل CDBM حول AB یک استوانه و از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ BCM حول AB یک مخروط به‌دست می‌آید. پس شکل حاصل یک نیم کره است که استوانه‌ای از آن حذف و مخروطی به آن اضافه شده است.



۲۵۹ (۳) ضلع BC را امتداد می‌دهیم تا خط d را در نقطهٔ O قطع کند. جسم حاصل از دوران این شکل حول خط d دو مخروط و یک استوانه خواهد بود (شکل زیر را ببینید). پس برای محاسبهٔ حجم خواسته شده باید حجم مخروط بزرگ‌تر را منهای مجموع حجم‌های مخروط کوچک‌تر و استوانه کنیم.
اکنون با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

$$\triangle OHC: BH'\|CH\Rightarrow\frac{OH'}{OH}=\frac{BH'}{CH}\Rightarrow\frac{OH'}{OH}=\frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{OH'}{HH'}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow\frac{OH'}{۲}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow OH'=۶\Rightarrow OH=۸$$

بنابراین

$$\text{حجم مخروط بزرگ}=\frac{۱}{۳}\pi(CH)^۲(OH)=\frac{۱}{۳}\pi(۴)^۲(۸)=۱۶\times۸=۱۲۸$$

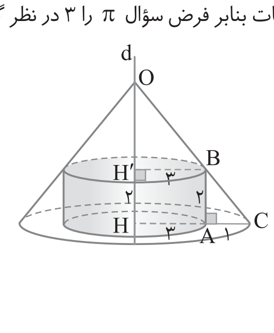
$$\text{حجم مخروط کوچک}=\frac{۱}{۳}\pi(BH')^۲(OH')=\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۶)=۵۴$$

$$\text{حجم استوانه}=\pi(AH)^۲(AB)=\pi(۳)^۲(۲)=۵۴$$

$$\text{حجم جسم}=\text{حجم مخروط بزرگ}-(\text{حجم مخروط کوچک}+\text{حجم استوانه})$$

$$=۱۲۸-(۵۴+۵۴)=۲۰$$

توجه کنید در محاسبات بنابر فرض سؤال π را ۳ در نظر گرفته‌ایم.



۲۶۰ (۱) از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول وتر BC دو مخروط با قاعدهٔ مشترک به‌دست می‌آید.

$$\text{حجم شکل}=\text{حجم مخروط با ارتفاع BH}+\text{حجم مخروط با ارتفاع CH}$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^۲(BH)+\frac{۱}{۳}\pi(AH)^۲(CH)$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^۲(BH+CH)=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^۲(BC)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

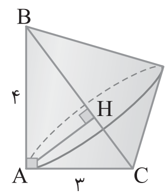
$$\triangle ABC: BC^۲=AB^۲+AC^۲=۴^۲+۳^۲=۲۵\Rightarrow BC=۵$$

پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

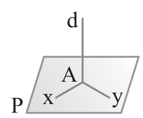
$$AH\times BC=AB\times AC\Rightarrow AH=\frac{۳\times۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

بنابراین

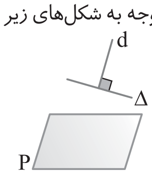
$$\text{حجم شکل}=\frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۱۲}{۵}\right)^۲(۵)=\frac{۴۸}{۵}\pi=۹/۶\pi$$



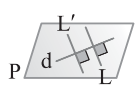
۲۶۱ (۳) می‌دانیم اگر خط d بر دو خط Ax و Ay واقع بر صفحهٔ P در نقطهٔ A عمود باشد، آن‌گاه خط d بر صفحهٔ P عمود است. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.



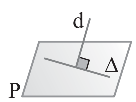
با توجه به شکل‌های زیر سایر گزینه‌ها نادرست هستند.



خط d بر خط Δ که موازی P است عمود است ولی خط d بر P عمود نیست. (نادرستی گزینهٔ (۴))



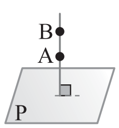
خط d بر دو خط موازی در صفحهٔ P عمود است ولی d بر P عمود نیست. (نادرستی گزینهٔ (۲))



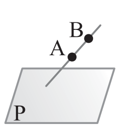
خط d بر خط Δ در صفحهٔ P عمود است ولی d بر P عمود نیست. (نادرستی گزینهٔ (۱))

۲۶۲ (۴) دو صفحه بر هم عمودند هرگاه یک خط واقع در یکی از صفحه‌ها بر صفحهٔ دیگر عمود باشد و هرگاه خطی بر دو خط متقاطع واقع در صفحه‌ای در نقطهٔ برخورد آن‌ها عمود باشد بر آن صفحه عمود است. پس با شرط‌های گزینهٔ (۴) یک خط واقع در صفحهٔ P بر صفحهٔ P' عمود است، بنابراین صفحهٔ P بر P' عمود است.

۲۶۳ (۳) می‌دانیم از خطی عمود بر صفحهٔ P نامتناهی صفحهٔ عمود بر P می‌گذرد و از خطی غیر عمود بر صفحهٔ P فقط یک صفحهٔ عمود بر P می‌گذرد. بنابراین اگر خط گذرا بر دو نقطهٔ A و B بر صفحهٔ P عمود باشد، از این دو نقطه نامتناهی صفحهٔ عمود بر P عبور می‌کند.



در صورتی که خط گذرا بر دو نقطهٔ A و B برصفحهٔ P عمود نباشد، از این دو نقطه فقط یک صفحه عمود بر P می‌گذرد.



۲۶۴ (۲) اگـر خطی بـر صفحه‌ای عمود نباشـد، از آن خط تنها یک صفحهٔ عمود بر آن صفحه می‌توان رسم کرد.

۲۶۵ (۱) اگر خط D با صفحهٔ P موازی باشد، از D فقط یک صفحه موازی با P می‌گذرد و چون D بر P عمود نیسـت، از خط D فقط یک صفحه عمود بر صفحهٔ P می‌گذرد.

۲۶۶ (۱)

۲۶۷ (۱) نمای بالای شـکل به‌صورت زیر اسـت و قسمت رنگی آن شامل یـک مربع به ضلع ۱ و ۵ مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع زاویهٔ قائمهٔ ۱ اسـت، پس مساحت قسمت رنگی برابر است با

مساحت خواسته شده $=۱^{۲}+۵\times(\frac{۱}{۲}\times۱\times۱)=۱+\frac{۵}{۲}=\frac{۷}{۲}$

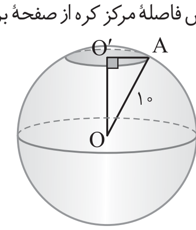
۲۶۸ (۳) فرض می‌کنیم صفحه، کرهٔ به شعاع ۱۰ را در دایرهٔ به شعاع $O'A$ قطع کند (شکل زیر را ببینید). چون مساحت سطح مقطع حاصل ۲۵π است، پس

$$\pi O'A^{۲}=۲۵\pi\Rightarrow O'A=۵$$

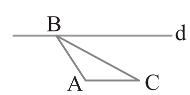
از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'A$ نتیجه می‌شود

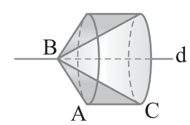
$$OO'^{۲}=OA^{۲}-O'A^{۲}=۱۰^{۲}-۵^{۲}=۷۵$$

بنابراین $OO'=۵\sqrt{۳}$. پس فاصلهٔ مرکز کره از صفحهٔ برش برابر با $۵\sqrt{۳}$ است.



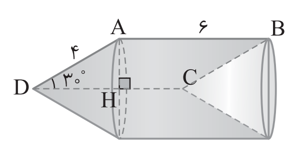
۲۶۹ (۴) از دوران ضلـع AC حـول خـط d یک اسـتوانه ایجاد می‌شـود. همچنین از دوران ضلع BC حول خط d یک مخروط و از دوران ضلع AB حول خط d مخروط دیگری به‌وجود می‌آید. پس شـکل حاصل یک استوانه است که از آن یک مخروط جدا شده و مخروط دیگری به آن اضافه شده است.



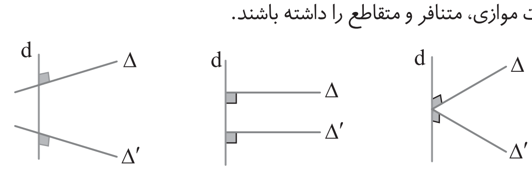


۲۷۰ (۴) از دوران متوازی‌الاضلاع ABCD حول ضلع DC یک اسـتوانه با دو مخروط مسـاوی ایجاد می‌شـود که یک مخروط از آن جدا شده و مخروط دیگر به آن اضافه شده است. بنابراین حجم خواسته‌شده معادل حجم استوانه‌ای به ارتفاع AB و شـعاع قاعدهٔ AH اسـت. در مثلـث قائم‌الزاویهٔ ADH ضلع AH روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس $AH=\frac{AD}{۲}=۲$. بنابراین

$$\text{حجم}=\pi(AH)^{۲}AB=\pi(۲)^{۲}\times۶=۲۴\pi$$

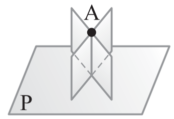


۲۷۱ (۱) بـا توجه به شـکل‌های زیـر دو خط Δ و Δ' می‌توانند هر سـه حالت موازی، متنافر و متقاطع را داشته باشند.



Δ و Δ' متقاطع‌اند. Δ و Δ' موازی‌اند. Δ و Δ' متنافرند.

۲۷۲ (۴) از نقطهٔ A یک خط عمود بر صفحهٔ P می‌توان رسم کرد و از این خط نامتناهی صفحه می‌گذرد، به طوری که همگی آن‌ها بر P عمود هستند.

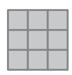


۲۷۳ (۴) اگر سه خط به‌صورت  یا  باشند، از آن‌ها فقـط یک صفحه می‌گـذرد و در صورتی‌که دو خط در نقطهٔ A متقاطع باشـند و خط سوم از A بگذرد و در صفحهٔ دو خط متقاطع دیگر نباشد، از آن‌ها صفحه‌ای عبور نمی‌کند. پس گزینهٔ (۴) درست است.

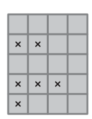
۲۷۴ (۲) از یک نقطه خارج یک صفحه، می‌توان نامتناهی صفحه بر صفحهٔ مفـروض عمـود کرد، زیـرا با توجه به اینکـه از هر نقطه خـارج یک صفحه فقط یـک خط می‌توان بر صفحهٔ مفروض عمود کـرد همهٔ صفحه‌هایی که از این خط منحصر به فرد می‌گذرند بر صفحهٔ مفروض عمود هستند.

۲۷۵ (۳)

۲۷۶ (۴) هر سه نمای شکل داده شده به‌صورت زیر هستند.



۲۷۷ (۴) نمای بالای مکعب‌مسـتطیل داده شـده به‌صورت زیر است. اگر سـه ردیـف کامـل از نمـای بـالای مکعـب مسـتطیل را حـذف کنیـم، یعنـی $۶۰=۵\times۴\times۳$ مکعب، تا به ردیف آخر برسیم و از ردیف آخر ۶ مکعب را که با علامت × مشـخص شـده‌اند، حذف کنیـم، آن‌گاه نمای بالای شـکل حاصل همان شـکلی خواهد شـد که مورد نظر اسـت. پس حداکثر مکعب‌هایی که باید حذف کنیم ۶۶ است.

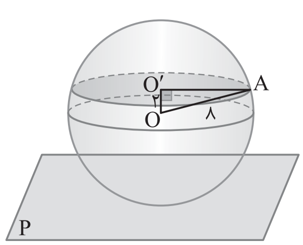


۲۷۸ (۳) سـطح مقطع صفحـهٔ موازی P با کره، دایره‌ای به شـعاع $O'A$ است. از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'A$ نتیجه می‌شود

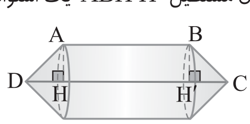
$$O'A^{۲}=OA^{۲}-OO'^{۲}=۸^{۲}-۲^{۲}=۶۰$$

بنابراین

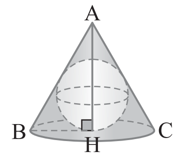
$$\text{مساحت سطح مقطع}=\pi O'A^{۲}=۶۰\pi$$



۲۷۹ (۴) ارتفاع‌های AH و BH' را در ذوزنقهٔ ABCD رسـم می‌کنیم. دو مثلـث قائم‌الزاویـهٔ ADH و BCH' بـه حالت (وتـر و یک ضلـع قائمه) همنهشـت هسـتند. از دوران این دو مثلث قائم‌الزاویه حـول DC، دو مخروط ایجاد می‌شود و از دوران مستطیل $ABH'H$ یک استوانه ایجاد می‌شود.



۲۸۰ (۲) از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع ABC حول ارتفاع AH یک مخروط ایجاد می‌شود و از دوران دایره حول AH یک کره به‌وجود می‌آید. برای محاسبهٔ حجم خواسته‌شده باید حجم مخروط را منهای حجم کره کنیم. در مخروط ایجاد شده پاره‌خط AH ارتفاع و طول آن مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر طول ضلع مثلث ABC است و BH شعاع قاعدهٔ این مخروط، نصف طول ضلع BC است. بنابراین



$$h=AH=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3})=3,\qquad R_1=BH=\frac{BC}{2}=\sqrt{3}$$

بنابراین

$$\text{حجم مخروط}=\frac{1}{3}\pi R_1^2 h=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2(3)=3\pi$$

از طرف دیگر مرکز دایره نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. پس $R_2=\frac{1}{3}h=\frac{3}{3}=1$. بنابراین شعاع کره برابر ۱ است. در نتیجه

$$\text{حجم کره}=\frac{4}{3}\pi R_2^3=\frac{4}{3}\pi(1)^3=\frac{4}{3}\pi$$

پس حجم خواسته شده برابر است با

$$\text{حجم}=3\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{5\pi}{3}$$

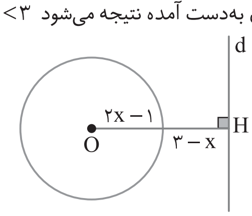
۲۸۱ (۲) چون خط و دایره نقطهٔ مشترکی ندارند، شکل زیر را رسم می‌کنیم، پس $OH=2x-1+3-x=x+2$ و $r<OH$. در نتیجه

$$2x-1<x+2\Rightarrow x<3$$

از طرف دیگر چون $3-x$ فاصله است، پس باید مثبت باشد، در نتیجه $x<3$.

همچنین طول شعاع دایره باید مثبت باشد، یعنی $2x-1>0\Rightarrow x>\frac{1}{2}$

از اشتراک محدوده‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\frac{1}{2}<x<3$.



۲۸۲ (۱) با توجه به شکل زیر شعاع OM بر خط مماس DC عمود است. در ضمن شعاع OB بر خط مماس BC و شعاع OA بر خط مماس AD عمود است. بنابراین

$OB=OM\Rightarrow$ OC نیمساز زاویهٔ C است.

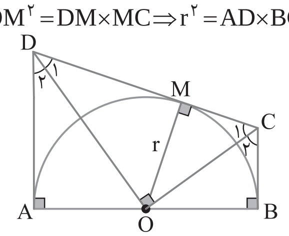
$OA=OM\Rightarrow$ OD نیمساز زاویهٔ D است.

در ضمن دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMC و OBC بنا به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه همنهشت هستند، پس $BC=MC$. به طور مشابه $DM=AD$. از طرف دیگر دو مماس AD و BC بر AB عمودند، پس موازی‌اند. در نتیجه بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\hat{D}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow\hat{D}_1+\hat{C}_1=90^\circ\Rightarrow D\hat{O}C=90^\circ$$

پس مثلث ODC قائم‌الزاویه است. از رابطه‌های طولی در این مثلث نتیجه می‌شود

$$OM^2=DM\times MC\Rightarrow r^2=AD\times BC$$



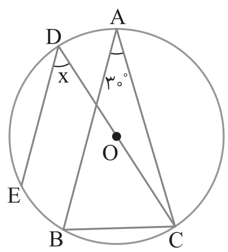
۲۸۳ (۲) چون $\hat{A}=30^\circ$، پس $\overset{\frown}{BC}=60^\circ$. از طرف دیگر مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین

$$\hat{B}=75^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AC}=150^\circ\xrightarrow{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=180^\circ}\overset{\frown}{AD}=30^\circ$$

کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساوی‌اند:

$$AB\|DE\Rightarrow\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AD}\Rightarrow\overset{\frown}{BE}=30^\circ$$

زاویهٔ EDC زاویهٔ محاطی است، پس $x=\frac{\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{30^\circ+60^\circ}{2}=45^\circ$



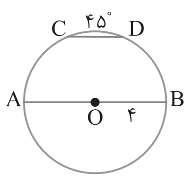
۲۸۴ (۳) چون کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. در ضمن AB قطر دایره است. بنابراین

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}=180^\circ\xrightarrow{\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}}\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}=180^\circ$$

$$2\overset{\frown}{BD}+45^\circ=180^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BD}=67/5^\circ$$

از طرف دیگر، $\frac{\text{طول کمان BD}}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان BD}}{360^\circ}$، در نتیجه

$$\frac{67/5^\circ}{360^\circ}=\frac{\text{طول کمان BD}}{2\pi(4)}\Rightarrow\text{طول کمان BD}=\frac{3\pi}{2}$$



۲۸۵ (۳) از A به C وصل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ محاطی ACB روبه‌رو به قطر است، پس قائمه است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACE

$$\hat{E}=60^\circ\Rightarrow\hat{A}_2=30^\circ\Rightarrow\frac{CE}{AE}=\frac{1}{2}\qquad(1)$$

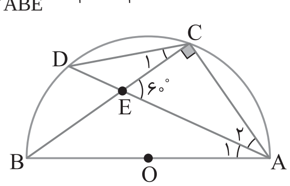
از طرف دیگر دو زاویهٔ A_1 و C_1 محاطی روبه‌رو به کمان BD هستند، پس مساوی‌اند و دو زاویهٔ B و D محاطی روبه‌رو به کمان AC هستند، پس مساوی‌اند. بنابراین

$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{C}_1\\ \hat{B}=\hat{D}\end{cases}\xrightarrow{(\text{ز ز})}\triangle ABE\sim\triangle CDE$$

نسبت تشابه این دو مثلث متشابه برابر $\frac{CE}{AE}$ است، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی توان دوم این نسبت تشابه است، یعنی

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABE}}=\left(\frac{CE}{AE}\right)^2\qquad(2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{S_{CDE}}{S_{ABE}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.



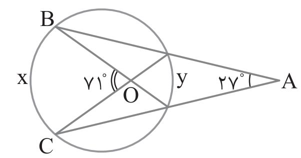
۲۸۶ **۱** با توجه به شکل زیر،

$$\hat{A}=۲۷^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{۲}=۲۷^\circ ,\quad \hat{O}=۷۱^\circ \Rightarrow \frac{x+y}{۲}=۷۱^\circ$$

بنابراین

$$\begin{cases} x-y=۵۴^\circ \\ x+y=۱۴۲^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x=۱۹۶^\circ \Rightarrow x=۹۸^\circ$$

پس $y=۴۴^\circ$ ، در نتیجه $\frac{x}{y}=\frac{۹۸^\circ}{۴۴^\circ}=\frac{۴۹}{۲۲}$.

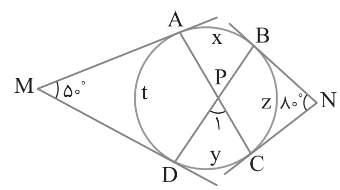


۲۸۷ **۳** با توجه به شکل زیر،

$$\begin{cases} ۸۰^\circ=\frac{x+t+y-z}{۲} \Rightarrow x+t+y-z=۱۶۰^\circ \\ ۵۰^\circ=\frac{x+z+y-t}{۲} \Rightarrow x+z+y-t=۱۰۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}$$

$$۲x+۲y=۲۶۰^\circ \Rightarrow x+y=۱۳۰^\circ$$

بنابراین $\hat{P}_۱=\frac{x+y}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$.

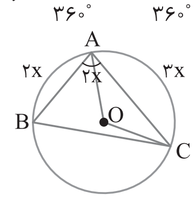


۲۸۸ **۳** زاویهٔ A محاطی است، پس کمان BC برابر ۴x است. پس

$$۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۴۰^\circ$$

بنابراین $\widehat{AC}=۳x=۱۲۰^\circ$ ، پس زاویهٔ مرکزی AOC برابر ۱۲۰° است. در نتیجه

$$\text{طول کمان } AC=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}۲\pi r=\frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ}۲\pi(۳)=۲\pi$$



۲۸۹ **۲** زاویهٔ مرکزی AOB را برابر α انتخاب می‌کنیم. در این صورت

$$\text{طول کمان } AB=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}۲\pi r \Rightarrow ۵=\frac{\alpha\pi r}{۱۸۰^\circ} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$\text{طول کمان } A'B'=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}۲\pi(۳r)=\frac{\alpha\pi r}{۱۸۰^\circ}\times ۳$$

$$\xrightarrow{\text{از }(۱)} \text{طول کمان } A'B'=۵\times۳=۱۵$$

۲۹۰ **۱** مساحت قطاع OAB به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\times\pi\times۶^۲=۳\pi$$

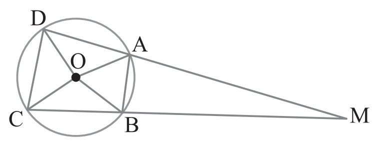
مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\times\sin ۳۰^\circ=۹$. اکنون می‌توان نوشت

$$\text{مساحت قطعه}=(\text{مساحت قطاع } OAB)-(\text{مساحت مثلث } OAB)$$

$$=۳\pi-۹=۳(\pi-۳)$$

۲۹۱ **۴** از مرکز O بـه نقطه‌های A و B وصل می‌کنیـم. در این صورت مثلث OAB متسـاوی‌الاضلاع اسـت $(OA=OB=AB=r)$. پس اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۶۰° اسـت. بنابراین $\widehat{AB}=۶۰^\circ$. از طرف دیگر اگر از O بـه نقطه‌های C و D وصل کنیم، آن‌گاه $OC=OD=r$ و $CD=r\sqrt{۲}$. بنابرایـن مثلـث OCD قائم‌الزاویه اسـت، زیرا $CD^۲=OD^۲+OC^۲$. پس انـدازهٔ زاویهٔ مرکـزی COD برابر ۹۰° اسـت. بنابراین $\widehat{CD}=۹۰^\circ$. در ضمن زاویهٔ M زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، بنابراین

$$\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\widehat{CD}-\widehat{AB})=\frac{۹۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$$



۲۹۲ **۱** چون مثلث AMD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}=\hat{M}=\alpha$. زاویهٔ A زاویهٔ محاطی در دایره است، پس

$$\hat{A}=\frac{۱}{۲}(\widehat{DC}+\widehat{BC}) \xrightarrow{\hat{A}=\alpha} \widehat{DC}+\widehat{BC}=۲\alpha$$

$$۱۸^\circ+\widehat{BC}=۲\alpha \Rightarrow \widehat{BC}=۲\alpha-۱۸^\circ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر زاویهٔ M زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، پس

$$\hat{M}=\frac{۱}{۲}(\widehat{AD}-\widehat{BC}) \xrightarrow{\hat{M}=\alpha} \widehat{AD}-\widehat{BC}=۲\alpha \qquad (۲)$$

در ضمن AB قطر دایره است، پس

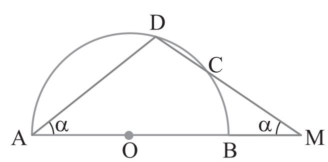
$$\widehat{AD}+\widehat{DC}+\widehat{BC}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{DC}=۱۸^\circ} \widehat{AD}+\widehat{BC}=۱۶۲^\circ \qquad (۳)$$

از تساوی‌های (۲) و (۳) به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \widehat{AD}-\widehat{BC}=۲\alpha \\ \widehat{AD}+\widehat{BC}=۱۶۲^\circ \end{cases} \xrightarrow{-} ۲\widehat{BC}=۱۶۲^\circ-۲\alpha \qquad (۴)$$

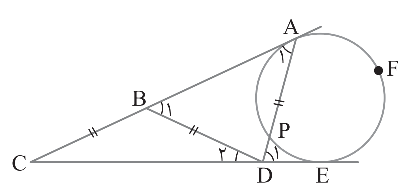
اکنون از تساوی‌های (۱) و (۴) نتیجه می‌گیریم

$$۲(۲\alpha-۱۸^\circ)=۱۶۲^\circ-۲\alpha \Rightarrow ۶\alpha=۱۹۸^\circ \Rightarrow \alpha=۳۳^\circ \Rightarrow \hat{M}=۳۳^\circ$$



۲۹۳ **۴** با توجه به شکل زیر زاویهٔ $B_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین BCD است. چون $\hat{B}_۱=\hat{C}+\hat{D}_۲=۵۰^\circ$ ، پس $\hat{D}_۲=\hat{C}=۲۵^\circ$ ، مثلث ABD نیز متساوی‌الساقین اسـت، پس $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱=۵۰^\circ$. در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ $D_۱$ که زاویهٔ خارجی مثلث ACD اسـت، برابر است با $\hat{C}+\hat{A}_۱=۲۵^\circ+۵۰^\circ=۷۵^\circ$. از طرف دیگر زاویهٔ $D_۱$ زاویهٔ بین امتداد یک وتر و خط مماس است. بنابراین

$$\hat{D}_۱=\frac{۱}{۲}(\widehat{AFE}-\widehat{PE}) \Rightarrow ۷۵^\circ=\frac{۱}{۲}(\widehat{AFE}-\widehat{PE}) \Rightarrow \widehat{AFE}-\widehat{PE}=۱۵۰^\circ$$



۲۹۴ **۴** در دایرهٔ داده شده زاویهٔ M زاویهٔ بین دو مماس MA و MB است. بنابراین $\hat{M}=\frac{1}{2}(\widehat{ACB}-\widehat{AB})$. در ضمن مثلث OBC متساوی‌الساقین است، پس

$$B\hat{O}C=180^\circ-(2\times 50^\circ)=80^\circ$$

چون $B\hat{O}C$ زاویهٔ مرکزی در این دایره است، پس $\widehat{BC}=80^\circ$، بنابراین $\widehat{AB}=100^\circ$ و $\widehat{ACB}=\widehat{AC}+\widehat{BC}=180^\circ+80^\circ=260^\circ$

در نتیجه $\hat{M}=\frac{1}{2}(\widehat{ACB}-\widehat{AB})=\frac{1}{2}(260^\circ-100^\circ)=80^\circ$.

۲۹۵ **۲** دو مثلث OMN و OAN متساوی‌الساقین هستند، پس با توجه به شکل زیر، $OA=ON\Rightarrow \hat{A}=\hat{N}$ ، $OM=MN\Rightarrow \hat{N}=\hat{O}_1$

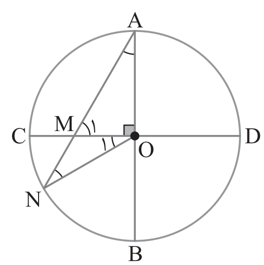
از طرف دیگر زاویهٔ M_1 زاویهٔ خارجی مثلث OMN است. بنابراین

$$\hat{M}_1=\hat{N}+\hat{O}_1 \xrightarrow{\hat{O}_1=\hat{N}} \hat{M}_1=2\hat{N}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM،

$$\hat{A}+\hat{M}_1+\hat{O}=180^\circ \Rightarrow \hat{N}+2\hat{N}+90^\circ=180^\circ \Rightarrow \hat{N}=30^\circ$$

چون $\hat{A}=\hat{N}$، پس $\hat{A}=30^\circ$.



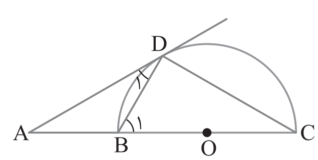
۲۹۶ **۴** با توجه به شکل زیر زاویهٔ C محاطی روبه‌رو به کمان BD و زاویهٔ D_1 ظلی روبه‌رو به کمان BD است. بنابراین اندازهٔ هر کدام از آن‌ها مساوی نصف کمان BD است، درنتیجه $\hat{C}=\hat{D}_1$، ازطرف‌دیگر، بنابرفرض، $AB=BD\Rightarrow \hat{A}=\hat{D}_1$

همچنین زاویهٔ B_1 زاویهٔ خارجی مثلث ABD است، پس

$$\hat{B}_1=\hat{A}+\hat{D}_1 \xrightarrow{\hat{A}=\hat{D}_1} \hat{B}_1=2\hat{D}_1 \xrightarrow{\hat{D}_1=\hat{C}} \hat{B}_1=2\hat{C}$$

در ضمن زاویهٔ BDC محاطی روبه‌رو به قطر است، پس قائمه است. بنابراین

$$\hat{B}_1+\hat{C}=90^\circ \Rightarrow 2\hat{C}+\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \hat{C}=30^\circ$$



۲۹۷ **۱** می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

$$\widehat{AD}=\widehat{BC}=x$$

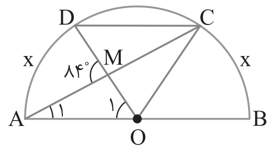
زاویهٔ A_1 محاطی روبه‌رو به کمان BC است و $\hat{O}_1$ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمان AD، پس $\hat{A}_1=\frac{x}{2}$ و $\hat{O}_1=x$. زاویهٔ AMD زاویهٔ خارجی مثلث OAM است، پس

$$A\hat{M}D=\hat{A}_1+\hat{O}_1 \Rightarrow 84^\circ=\frac{x}{2}+x \Rightarrow \frac{3}{2}x=84^\circ \Rightarrow x=56^\circ$$

از طرف دیگر AB قطر نیم‌دایره است، پس

$$\widehat{AD}+\widehat{BC}+\widehat{DC}=180^\circ \Rightarrow 2x+\widehat{DC}=180^\circ$$

$$112^\circ+\widehat{DC}=180^\circ \Rightarrow \widehat{DC}=68^\circ$$



۲۹۸ **۴** مجموع کمان‌های a، b و c برابر ۳۶۰° است. اکنون از فرض سؤال با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

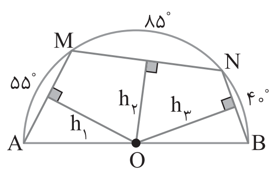
$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=\frac{a+b+c}{2+3+5}=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$$

پس $a=72^\circ$ و $c=180^\circ$. در نتیجه

$$\hat{M}=\frac{c-a}{2}=\frac{180^\circ-72^\circ}{2}=\frac{108^\circ}{2}=54^\circ$$

۲۹۹ **۴** شکل سؤال به‌صورت زیر است. چون اندازهٔ کمان AB برابر ۱۸۰° است. پس $\widehat{BN}=40^\circ$. در ضمن می‌دانیم وتر بزرگ‌تر به مرکز دایره نزدیک‌تر است. پس

$$\widehat{BN}<\widehat{AM}<\widehat{MN} \Rightarrow BN<AM<MN \Rightarrow h_3>h_1>h_2$$

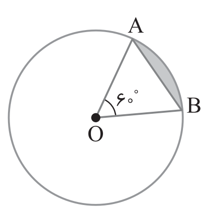


۳۰۰ **۴** محیط قطعهٔ رنگی برابر طول کمان AB به اضافهٔ طول وتر AB است:

$$\text{طول کمان AB}=\frac{\alpha}{360^\circ}2\pi r=\frac{60^\circ}{360^\circ}2\pi(6)=2\pi$$

در ضمن مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است، پس $AB=6$. بنابراین

$$\text{محیط قطعه}=2\pi+6$$

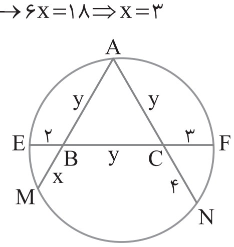


۳۰۱ **۲** اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را برابر y انتخاب می‌کنیم. با استفاده از رابطه‌های طولی در دایره،

$$CN\times CA=CF\times CE \Rightarrow 4y=3(2+y) \Rightarrow y=6$$

$$BM\times BA=BE\times BF \Rightarrow xy=2(3+y)$$

$$\xrightarrow{y=6} 6x=18 \Rightarrow x=3$$



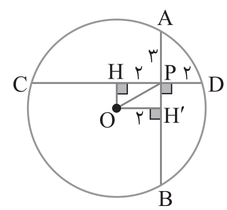
۳۰۲ **۳** بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$PA\times PB=PC\times PD\Rightarrow ۳\times ۴=۲\times PC\Rightarrow PC=۶$$

بنابراین $CD=۸$. از مرکز O عمود OH را بر CD رسم می‌کنیم. در این صورت $DH=۴$ و $PH=۴-۲=۲$. همچنین از مرکز O عمود OH' را بر AB وارد می‌کنیم. چون H' وسط AB است، پس $AH'=\frac{۷}{۲}$، در نتیجه $PH'=\frac{۷}{۲}-۳=\frac{۱}{۲}$. توجه کنید که چهارضلعی $OHPH'$ مستطیل است، پس $OH'=HP=۲$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle OPH':OP^۲=OH'^۲+PH'^۲=۴+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۷}{۴}$$

بنابراین $OP=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$.

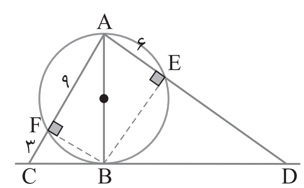


۳۰۳ **۱** از B به نقاط E و F وصل می‌کنیم. در این صورت دو زاویهٔ E و F قائمه هستند، چون محاطی روبه‌رو به قطر AB هستند. در ضمن قطر AB بر خط مماس CD عمود است. بنابراین مثلث‌های ABD و ABC قائم‌الزاویه هستند. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\begin{cases}\triangle ABD:AB^۲=AE\times AD\\ \triangle ABC:AB^۲=AF\times AC\end{cases}\Rightarrow AE\times AD=AF\times AC$$

$$\xrightarrow[AE=۶]{AF=۹,\ FC=۳}۶AD=۹\times ۱۲\Rightarrow AD=۱۸$$

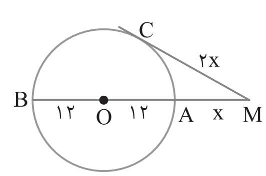
بنابراین $DE=AD-AE=۱۸-۶=۱۲$



۳۰۴ **۲** فرض می‌کنیم طول MA برابر x باشد. در این صورت با توجه به فرض تست $MC=۲x$، بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MC^۲=MA\times MB\Rightarrow (۲x)^۲=x(x+۲۴)\Rightarrow ۴x=x+۲۴\Rightarrow x=۸$$

بنابراین $MA=۸$.



۳۰۵ **۱** طول دو مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره مساوی است، پس $AT=AT'=x$ (شکل زیر را ببینید). از طرف دیگر،

$$\text{(مثلث ABC) محیط}=۲۴+۴\sqrt{۱۳}\Rightarrow ۲x+۶+۳+۴+y+z=۲۴+۴\sqrt{۱۳}$$

$$۲x+y+z=۱۱+۴\sqrt{۱۳}\qquad (۱)$$

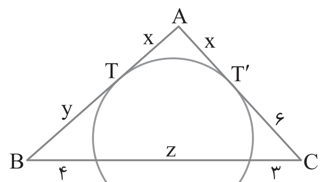
بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$CT'^۲=۳(۳+z)\Rightarrow ۳۶=۳(۳+z)\Rightarrow z=۹$$

$$BT^۲=۴(۴+z)\Rightarrow y^۲=۴(۴+۹)\Rightarrow y=۲\sqrt{۱۳}$$

با جای‌گذاری مقدارهای به‌دست آمده برای y و z در برابری (۱) نتیجه می‌شود

$$x=۱+\sqrt{۱۳}$$



۳۰۶ **۴** ابتدا باید وضعیت نسبی دو دایره را مشخص کنیم. برای این کار شعاع‌های دو دایره را برحسب d به‌دست می‌آوریم:

$$-۲\begin{cases}۳R_۱+۴R_۲=۴d\\ R_۱+۲R_۲=\frac{۱۱}{۶}d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳R_۱+۴R_۲=۴d\\ -۲R_۱-۴R_۲=\frac{-۱۱}{۳}d\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+}R_۱=\frac{d}{۳},\ R_۲=\frac{۳}{۴}d$$

بین شعاع‌های $R_۱=\frac{d}{۳}$ و $R_۲=\frac{۳}{۴}d$ و طول خط‌المرکزین d، رابطهٔ $|R_۱-R_۲|<d<R_۱+R_۲$ برقرار است. پس دو دایره متقاطع هستند و دو دایرهٔ متقاطع دو مماس مشترک دارند.

۳۰۷ **۱** مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم تا FD را در نقطهٔ M قطع کند. چون طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره مساوی‌اند، پس $MD=MA$. در نتیجه $M\hat{A}D=M\hat{D}A\quad(۱)$

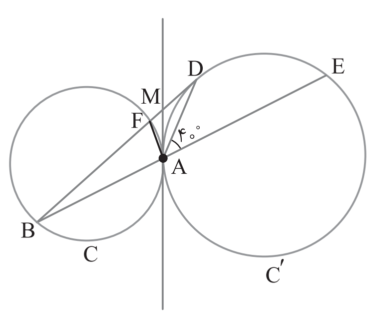
از طرف دیگر زاویهٔ محاطی B و زاویهٔ ظلی MAF در دایرهٔ C روبه‌رو به کمان AF هستند. پس $M\hat{A}F=\hat{B}\quad(۲)$

در ضمن زاویهٔ DAE زاویهٔ خارجی مثلث ABD است، پس

$$\hat{B}+M\hat{D}A=۴۰^\circ$$

با جمع طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$M\hat{A}D+M\hat{A}F=M\hat{D}A+\hat{B}\Rightarrow D\hat{A}F=۴۰^\circ$$



۳۰۸ **۲** اگر TT' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، آن‌گاه

$$TT'=\sqrt{OO'^۲-(r-r')^۲}\Rightarrow ۱۰=\sqrt{(r+۶)^۲-(r-۴)^۲}$$

$$۱۰۰=\underbrace{(r+۶)^۲-(r-۴)^۲}_{\text{مزدوج}}=(r+۶+r-۴)(r+۶-r+۴)=(۲r+۲)(۱۰)$$

به‌دست می‌آید $r=۴$.

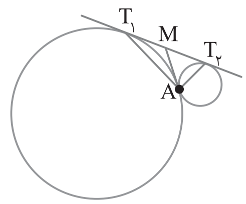
۳۰۹ **۳** از نقطهٔ A مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم تا مماس مشترک خارجی را در نقطهٔ M قطع کند. می‌دانیم اگر از هر نقطه خارج دایره مماس‌هایی بر دایره رسم کنیم، طول این مماس‌ها با هم برابرند:

$$\begin{cases}MT_1=MA\\ MT_2=MA\end{cases}\Rightarrow MT_1=MT_2=MA=\frac{T_1T_2}{2}\qquad(1)$$

بنابراین MA در مثلث AT_1T_2، میانهٔ وارد بر ضلع T_1T_2 است و نصف طول این ضلع است. از طرف دیگر، طول مماس مشترک خارجی در دو دایرهٔ مماس خارج $T_1T_2=2\sqrt{r_1r_2}$ است. پس

$$T_1T_2=2\sqrt{3\times12}=12\qquad(2)$$

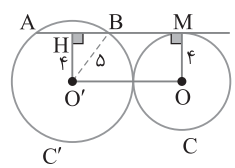
اکنون بنابر برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $AM=\frac{T_1T_2}{2}=\frac{12}{2}=6$.



۳۱۰ **۳** از O به M وصل می‌کنیم. چون AM بر دایرهٔ C مماس است، OM بر AM عمود است. از O' نیز عمود $O'H$ را بر AB رسم می‌کنیم. پس $AH=HB$. چهارضلعی $OO'HM$ مستطیل است، پس $O'H=OM=4$. در مثلث $O'HB$ بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$HB=\sqrt{O'B^2-O'H^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

در نتیجه $AB=2HB=2\times3=6$.



۳۱۱ **۱** اگر طول MA را برابر x بگیریم، آن‌گاه $MB=3x$ و

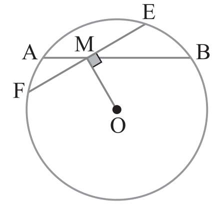
$$AB=2\Rightarrow MA+MB=2\Rightarrow x+3x=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

در نتیجه $MA=\frac{1}{2}$ و $MB=\frac{3}{2}$. از طرف دیگر کوتاه‌ترین وتری که از M می‌گذرد وتری مثل EF است که بر OM عمود باشد. در ضمن چون OM بر وتر EF عمود است، پس M وسط EF است، یعنی $ME=MF$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MA\times MB=ME\times MF\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=ME\times ME\Rightarrow ME^2=\frac{3}{4}$$

$$ME=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین $EF=2ME=\sqrt{3}$.



۳۱۲ **۱** می‌دانیم طول دو مماسی که از یک نقطه بر دایره رسم می‌شود، مساوی‌اند. پس $AB=AC\Rightarrow AB=AH+CH=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$
از طرف دیگر،

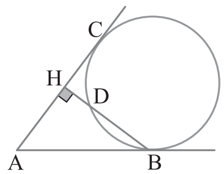
$$\triangle ABH: BH^2=AB^2-AH^2=(5\sqrt{5})^2-(3\sqrt{5})^2=125-45=80$$

$BH=4\sqrt{5}$

اکنون بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$HC^2=HD\times HB\Rightarrow(2\sqrt{5})^2=HD(4\sqrt{5})\Rightarrow20=4\sqrt{5}HD$$

$$HD=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



۳۱۳ **۱** AO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ دیگری مانند N قطع کند. با توجه به شکل $ON=OM=4$ ، پس $AM=OA-OM=12-4=8$.
اکنون بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$AM\times AN=AC\times AB\Rightarrow8\times16=AC\times AB\qquad(1)$$

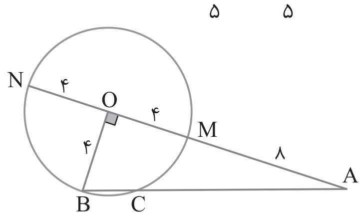
از طرف دیگر،

$$\triangle OAB: AB^2=OA^2+OB^2=12^2+4^2=144+16=160$$

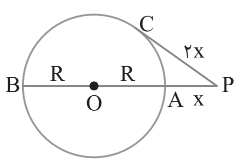
بنابراین $AB=4\sqrt{10}$ و بنابر تساوی (۱)،

$$8\times16=AC\times4\sqrt{10}\Rightarrow AC=\frac{32}{\sqrt{10}}=\frac{32\sqrt{10}}{10}=\frac{16\sqrt{10}}{5}$$

$$BC=AB-AC=4\sqrt{10}-\frac{16\sqrt{10}}{5}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$



۳۱۴ **۱** مطابق شکل زیر اگر فرض کنیم $PA=x$ ، آن‌گاه $PC=2x$.

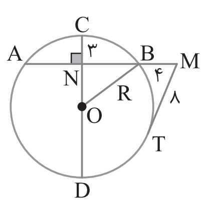


بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$PC^2=PA\times PB\Rightarrow4x^2=x(x+2R)\Rightarrow4x=x+2R\Rightarrow x=\frac{2R}{3}$$

بنابراین $PB=PA+AB=x+2R=\frac{2R}{3}+2R=\frac{8}{3}R$.

۳۱۵ **۴** بنابر رابطه‌های طولی در دایره،



$$MT^2=MB\times MA\Rightarrow64=4\times MA$$

$$MA=16$$

از طرف دیگر،

$$MA=MB+AB\Rightarrow16=4+AB$$

$$AB=12$$

چون شعاع OC بر وتر AB عمود است، آن را نصف می‌کند، پس $NB=6$.
اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ONB،

$$OB^2=NB^2+ON^2\Rightarrow R^2=6^2+(R-3)^2$$

$$R^2=36+R^2+9-6R\Rightarrow6R=45\Rightarrow R=7/5$$

۳۱۶ **۳** فرض می‌کنیم TT' مماس مشترک خارجی این دو دایره باشد. پس بنابر فرض سؤال،

$$TT'^{۲}=(۲R)(۲R')\xrightarrow{TT'=\sqrt{OO'^{۲}-(R-R')^{۲}}}$$

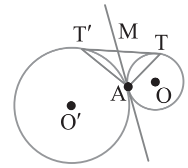
$$OO'^{۲}-(R-R')^{۲}=۴RR'\Rightarrow OO'^{۲}-R^{۲}-R'^{۲}+۲RR'=۴RR'$$

$$OO'^{۲}=R^{۲}+R'^{۲}+۲RR'\Rightarrow OO'^{۲}=(R+R')^{۲}\Rightarrow OO'=R+R'$$

پس این دو دایره مماس خارجی‌اند.

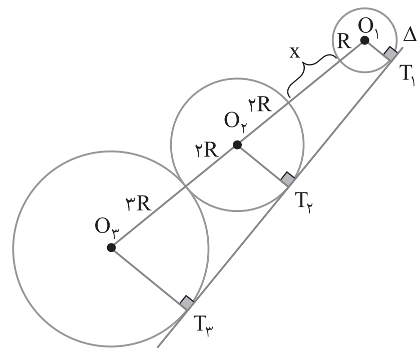
۳۱۷ **۲** مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم تا مماس مشترک خارجی TT' را در M قطع کند، می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده بر دایره، از یک نقطه مساوی‌اند. پس $MA=MT,\quad MA=MT'$

پس $MT=MT'$ و از جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می‌گیریم، $MA=\frac{TT'}{۲}$. پس در مثلث ATT' میانهٔ AM نصف TT' است. پس این مثلث قائم‌الزاویه است. ولی اگر دو دایره مساوی باشند می‌تواند متساوی‌الساقین باشد. بنابراین ATT' لزومی ندارد قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد.



۳۱۸ **۴** شعاع‌های $O_۱T_۱$، $O_۲T_۲$ و $O_۳T_۳$ بر خط Δ عمود هستند، پس موازی‌اند. بنابراین چهارضلعی $O_۱T_۱T_۳O_۳$ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است. چون $O_۲T_۲=۲R$ و $\frac{O_۱T_۱+O_۳T_۳}{۲}=\frac{R+۳R}{۲}=۲R$، پس $O_۲T_۲=\frac{O_۱T_۱+O_۳T_۳}{۲}$. در نتیجه بنابر قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه، مرکز $O_۲$ وسط $O_۱O_۳$ است. بنابراین

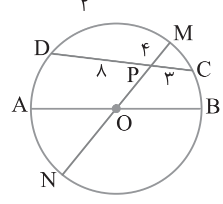
$$O_۱O_۲=O_۲O_۳\Rightarrow R+x+۲R=۲R+۳R\Rightarrow x=۲R$$



۳۱۹ **۴** اگر نیم‌دایره را کامل کنیم و MO را امتداد دهیم تا دایره را در نقطهٔ N قطع کند، آن‌گاه بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$PN\times PM=PC\times PD\Rightarrow ۴PN=۳\times ۸\Rightarrow PN=۶$$

بنابراین قطر MN برابر است با $۱۰=۴+۶$. پس شعاع دایره برابر ۵ است. در نتیجه مساحت نیم‌دایره برابر $\frac{۲۵\pi}{۲}=۱۲/۵\pi$ است.



۳۲۰ **۱** چون شعاع OA بر مماس AB عمود است، پس $\hat{A}=۹۰^\circ$، در نتیجه

$$\begin{cases}\hat{M}_۱=\hat{M}_۲\\ \hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{(\text{زز})}\triangle OAM\sim\triangle O'BM$$

نسبت اضلاع نظیر این دو مثلث متشابه را می‌نویسیم: $\frac{OA}{O'B}=\frac{AM}{MB}$. با ترکیب در صورت تناسب بالا نتیجه می‌شود

$$\frac{OA+O'B}{O'B}=\frac{AM+MB}{MB}\qquad(۱)$$

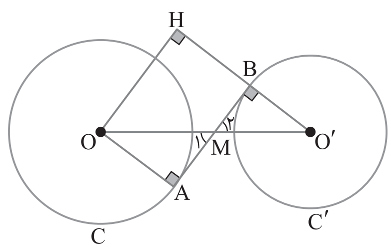
چون چهارضلعی $OHBA$ مستطیل است، پس $OA=BH$، در نتیجه

$$OA+O'B=BH+O'B=O'H=۴$$

در ضمن $AB=OH=۳$ و $MB=AB-AM=۳-\frac{۱۵}{۸}=\frac{۹}{۸}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم،

$$\frac{۴}{O'B}=\frac{۳}{\frac{۹}{۸}}\Rightarrow ۳O'B=\frac{۹}{۲}\Rightarrow O'B=\frac{۳}{۲}$$

پس شعاع دایرهٔ C' برابر $\frac{۳}{۲}$ است.



۳۲۱ **۲** اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$، پس اگر $h_a=۴$ و $h_b=۶$، آن‌گاه

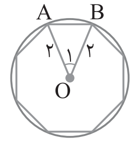
$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow\frac{۵}{۱۲}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{h_c}=\frac{۲}{۳}-\frac{۵}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{h_c}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$h_c=۴$$

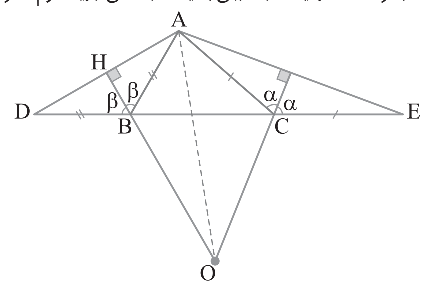
چون مثلث دو ارتفاع مساوی ۴ دارد، پس این مثلث متساوی‌الساقین است. در ضمن این مثلث متساوی‌الساقین نمی‌تواند قائم‌الزاویه باشد، زیرا ارتفاع وارد بر وتر این مثلث باید کوچک‌ترین ارتفاع باشد و ارتفاع‌های دیگر باید از آن بزرگ‌تر باشند که چنین شرایطی نیست.

۳۲۲ **۴** اگر از مرکز دایره به رأس‌های هشت‌ضلعی منتظم وصل کنیم، هشت‌ضلعی منتظم به هشت مثلث متساوی‌الساقین مساوی هم تقسیم می‌شود. در ضمن $\widehat{AB}=\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۴۵^\circ$، $\hat{O}_۱=۴۵^\circ$. بنابراین

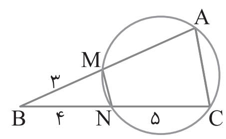
$$\text{مساحت هشت‌ضلعی}=۸S_{OAB}=۸(\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\sin ۴۵^\circ)=۱۶\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۸\sqrt{۲}$$



۳۲۳ **۲** شکل سؤال به‌صورت زیر است. نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های دو ضلع AD و AE، یعنی نقطهٔ O در شکل، مرکز دایرهٔ محیطی ADE است. چون دو مثلث ABD و ACE متساوی‌الساقین هستند، پس این دو عمودمنصف نیمساز زاویه‌های خارجی B و C در مثلث ABC هستند. بنابراین نقطهٔ O که محل تلاقی دو نیمساز خارجی زاویه‌های B و C در مثلث ABC است روی نیمساز A نیز واقع است (توجه کنید در هر مثلث دو نیمساز خارجی با نیمساز داخلی زاویهٔ سوم همرس‌اند).



۳۲۴ **۳** چهارضلعی AMNC محاطی است. دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،



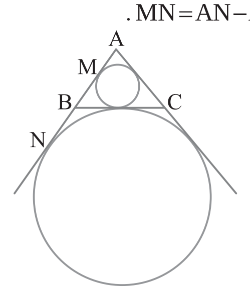
$$BN\times BC=BM\times BA$$

$$۴\times۹=۳(۳+MA)\Rightarrow ۱۲=۳+MA\Rightarrow MA=۹$$

۳۲۵ **۴** در شکل دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع بزرگ‌تر BC را رسم کرده‌ایم. پس MN مماس مشترک خارجی این دو دایره است. اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه $AM=P-a$ و $AN=P$، بنابراین

$$P=\frac{۴+۵+۷}{۲}=۸,\quad AM=P-a=۸-۷=۱,\quad AN=P=۸$$

پس $MN=AN-AM=۸-۱=۷$.

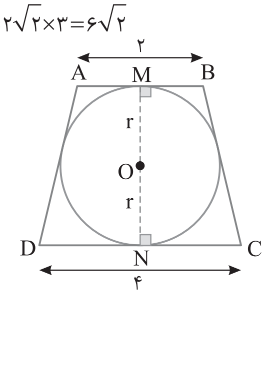


۳۲۶ **۱** **راه‌حل اول** در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، قطر دایرهٔ محاطی واسطهٔ هندسی طول قاعده‌ها است، پس $(۲r)^۲=AB\times CD=۲\times۴$. یعنی $r=\sqrt{۲}$. بنابراین طول ارتفاع ذوزنقه برابر $MN=۲r=۲\sqrt{۲}$ است. اکنون می‌توان مساحت ذوزنقه را به صورت زیر به دست آورد:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times MN=\frac{۱}{۲}(۲+۴)\times۲\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲}$$

راه‌حل دوم مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی برابر است با حاصل‌ضرب میانگین حسابی و میانگین هندسی دو قاعده.

$$S_{ABCD}=\sqrt{AB\times DC}\times\left(\frac{AB+DC}{۲}\right)=\sqrt{۲\times۴}\times\left(\frac{۲+۴}{۲}\right)$$
$$=۲\sqrt{۲}\times۳=۶\sqrt{۲}$$

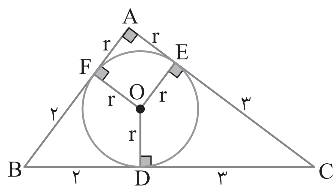


۳۲۷ **۱** از شکل زیر استفاده می‌کنیم. اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه $r=\frac{S}{P}$، پس

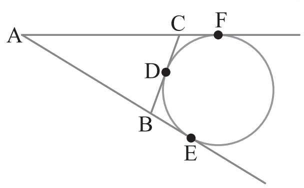
$$r=\frac{\frac{۱}{۲}AB\times AC}{P}=\frac{\frac{۱}{۲}(r+۲)(r+۳)}{\frac{۲r+۶+۴}{۲}}=\frac{(r+۲)(r+۳)}{۲r+۱۰}$$

با حل معادلهٔ بالا به دست می‌آید $r=۱$ یا $r=-۶$، که چون $r>۰$، پس $r=۱$.

اکنون می‌توان نوشت $S=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}(۱+۲)(۱+۳)=۶$.



۳۲۸ **۴** می‌دانیم طول مماس AE مساوی نصف محیط مثلث ABC است. پس محیط مثلث ABC مساوی ۲AE است و چون مماس AE اندازهٔ ثابتی دارد، بنابراین محیط ABC ثابت است. از طرف دیگر شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC، از رابطهٔ $r_a=\frac{S}{P-a}$ به دست می‌آید که S مساحت مثلث ABC و P نصف محیط آن است. چون r_a و P ثابت هستند ولی a اندازهٔ متغیری دارد، پس S متغیر است. بنابراین محیط مثلث ABC ثابت و مساحت آن متغیر است.



۳۲۹ **۱** اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه $r_a=\frac{S}{P-a}$ و $r_b=\frac{S}{P-b}$. چون $r_a=۲r_b$، پس $\frac{S}{P-a}=\frac{۲S}{P-b}$، یعنی

$$۲P-۲a=P-b\Rightarrow P=۲a-b\Rightarrow\frac{a+b+c}{۲}=۲a-b$$

در نتیجه $c=۳(a-b)$.

۳۳۰ **۳** زاویهٔ M زاویهٔ بین امتداد دو وتر دایره است، بنابراین

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}=۲x\qquad(۱)$$

از طرف دیگر AB قطر نیم‌دایره است، پس

$$\overset{\frown}{AB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AD}+۲x+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ$$

با توجه به تساوی (۱)،

$$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ$$

$$۲\overset{\frown}{AD}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AD}=۹۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{DCB}=۹۰^\circ$$

زاویهٔ A محاطی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{DCB}$ است، پس $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{DCB}}{۲}$، در نتیجه

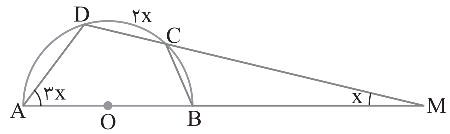
$$۳x=\frac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$

اکنون توجه کنید که چون چهارضلعی ABCD محاطی است، پس

$$\hat{A}+B\hat{C}D=۱۸۰^\circ$$

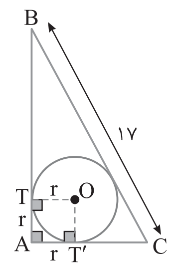
در نتیجه

$$B\hat{C}D=۱۸۰^\circ-\hat{A}=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$$



۳۳۱ (۲) از شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، با مرکز O رسم شده است. چهارضلعی $OTAT'$ مربع است، چون شعاع در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. اگر P نصف محیط مثلث و a طول وتر مثلث باشد، می‌دانیم $AT=P-a$، یعنی

$$r=P-a\Rightarrow r=۲۰-۱۷=۳$$



۳۳۲ (۲) اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}$، پس $\frac{۱}{r}=۲$، یعنی $r=\frac{۱}{۲}$.

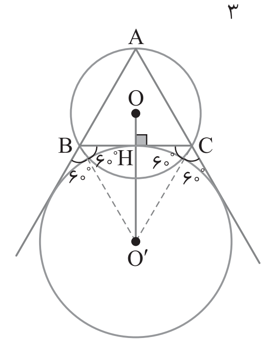
از طرف دیگر اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث باشد، آن‌گاه $r=\frac{S}{P}$، پس

$$\frac{۱}{۲}=\frac{S}{\frac{۹}{۲}}\Rightarrow S=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۳۳۳ (۳) در مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مرکز دایرهٔ محیطی بر هم منطبق‌اند چون نیمساز زاویه‌ها، عمودمنصف اضلاع نیز هست. در واقع نیمساز، عمودمنصف، میانه و ارتفاع یکی هستند. پس O محل تلاقی میانه‌ها نیز هست. در نتیجه با توجه به شکل زیر $OH=\frac{۱}{۳}AH$، همچنین $O'H=AH$، چون مثلث $O'BC$ متساوی‌الاضلاع و با ABC همنهشت است. بنابراین

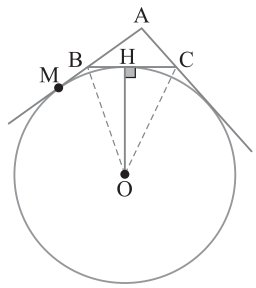
$$OO'=OH+O'H=\frac{۱}{۳}AH+AH=\frac{۴}{۳}AH$$

$$\xrightarrow{AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲\sqrt{۳})=۳} OO'=\frac{۴}{۳}\times ۳=۴$$



۳۳۴ (۲) با توجه به شکل زیر، OH شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC از مثلث ABC است. اگر این دایره در نقطهٔ M بر امتداد ضلع AB مماس باشد، آن‌گاه $BM=BH$. از طرف دیگر اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه $AM=P$. پس

$$BH=BM=AM-AB=P-AB=\frac{۱۲+۹+۷}{۲}-۹=۵$$



۳۳۵ (۲) در دایرهٔ به شعاع R طول یک ضلع nضلعی منتظم محاطی از برابری $C_n=۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و طول یک ضلع nضلعی منتظم محیطی از برابری $C'_n=۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ به‌دست می‌آید. پس

$$\frac{C_n}{C'_n}=\frac{۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}}{۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}}\Rightarrow\frac{C_n}{C'_n}=\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}\xrightarrow[n=۶]{C_n=۲\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۲\sqrt{۳}}{C'_n}=\cos\frac{۱۸۰^\circ}{۶}\Rightarrow C'_n=\frac{۲\sqrt{۳}}{\cos ۳۰^\circ}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۴$$

۳۳۶ (۲) ارتفاع BH را در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD رسم می‌کنیم. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی این ذوزنقه باشد، آن‌گاه مطابق شکل زیر، ارتفاع ذوزنقه برابر قطر دایرهٔ محاطی است. در ضمن چون ذوزنقه محیطی است، پس

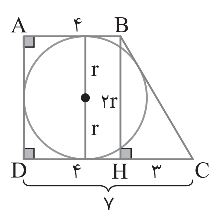
$$AB+DC=AD+BC\Rightarrow ۴+۷=AD+BC\Rightarrow AD+BC=۱۱$$

$$\xrightarrow{AD=۲r} BC=۱۱-۲r$$

بنابراین

$$\triangle BHC: BC^۲=BH^۲+CH^۲\Rightarrow(۱۱-۲r)^۲=۳^۲+(۲r)^۲$$

$$۱۲۱+۴r^۲-۴۴r=۹+۴r^۲\Rightarrow ۴۴r=۱۱۲\Rightarrow r=\frac{۱۱۲}{۴۴}=\frac{۲۸}{۱۱}$$



۳۳۷ (۴) چهارضلعی ABCD محاطی است، پس زاویه‌های مقابل آن مکمل‌اند، در نتیجه

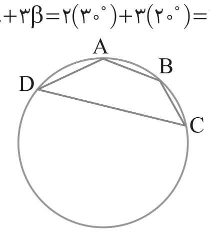
$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\alpha+۲\beta+\alpha+۲\beta-۲۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۴\alpha+۴\beta=۲۰۰^\circ$$

$$\alpha+\beta=۵۰^\circ \qquad (۱)$$

$$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۴\alpha+\beta+۲\alpha-\beta=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۶\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$$

پس بنابر برابری (۱)، $\beta=۲۰^\circ$. پس

$$۲\alpha+۳\beta=۲(۳۰^\circ)+۳(۲۰^\circ)=۱۲۰^\circ$$



۳۳۸ **۳** در شکل زیر، ذوزنقهٔ ABCD محیطی است. پس

$$AB+CD=AD+BC \quad (۱)$$

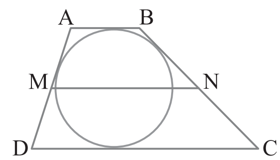
از طرف دیگر اگر M و N وسط‌های دو ساق ذوزنقه باشند، آن‌گاه از قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه نتیجه می‌گیریم

$$MN=\frac{AB+DC}{۲}\xrightarrow{MN=۱۵}$$

$$AB+DC=۳۰\xrightarrow{(۱)}AD+BC=۳۰$$

بنابراین

$$\text{محیط ذوزنقه}=AB+DC+AD+BC=۳۰+۳۰=۶۰$$



۳۳۹ **۲** مرکز O نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است. پس $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ ، $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$ و $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$.

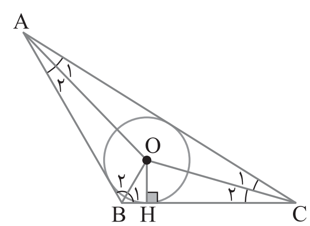
$$\triangle AOC:\hat{A}_۱+\hat{C}_۱+A\hat{O}C=۱۸۰^\circ \xrightarrow{A\hat{O}C=۱۵۰^\circ}\hat{A}_۱+\hat{C}_۱=۳۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{A}_۱=\frac{\hat{A}}{۲},\hat{C}_۱=\frac{\hat{C}}{۲}}\hat{A}+\hat{C}=۶۰^\circ\xrightarrow{\triangle ABC:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ}\hat{B}=۱۲۰^\circ$$

$$\hat{B}_۱=۶۰^\circ$$

در شکل زیر، عمود OH برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی است. بنابراین

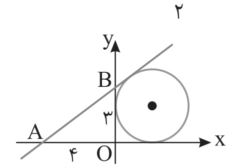
$$\triangle OBH:\hat{B}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۴\sqrt{۳})=۶$$



۳۴۰ **۳** دایرهٔ رسم شده در شکل، دایرهٔ محاطی خارجی نظیر OB از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB است. از طرف دیگر،

$$OA=۴\,,\,OB=۳\Rightarrow AB=\sqrt{OA^۲+OB^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث OAB باشد، آن‌گاه شعاع این دایره برابر است با $r=\frac{S}{P-OB}=\frac{\frac{۱}{۲}(۳)(۴)}{\frac{۵+۴+۳}{۲}-۳}=\frac{۶}{۳}=۲$.



۳۴۱ **۴** راه‌حل اول می‌دانیم PH تصویر PT روی OP است و $PT>PH$ ، پس $PT>۶/۴$. تنها گزینه‌ای که از ۶/۴ بزرگ‌تر است گزینهٔ (۴) است.

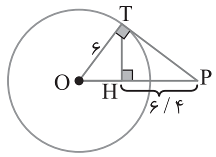
راه‌حل دوم PH تصویر مماس PT روی PO است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTP ،

$$OT^۲=OH\times OP\Rightarrow ۶^۲=OH(OH+۶/۴)\Rightarrow OH^۲+۶/۴OH-۳۶=۰$$

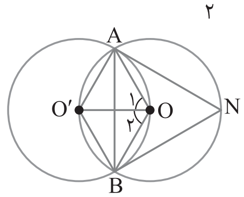
$$(OH+۱۰)(OH-۳/۶)=۰\Rightarrow OH=۳/۶,OH=-۱۰ \text{ (غ. ق. ق.)}$$

پس اندازهٔ OP برابر با $۳/۶+۶/۴=۱۰$ است. در نتیجه

$$\triangle OTP:PT^۲=OP^۲-OT^۲=۱۰^۲-۶^۲=۶۴\Rightarrow PT=۸$$



۳۴۲ **۳** اگر از مرکزهای O و O′ به نقطه‌های A و B وصل کنیم، دو مثلث OAO′ و OBO′ متساوی‌الاضلاع به ضلع R هستند، پس $\hat{O}_۱=\hat{O}_۲=۶۰^\circ$. در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۱۲۰° است. پس اندازهٔ $\overparen{AO'B}$ برابر ۱۲۰° است. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ محاطی ANB برابر است با $A\hat{N}B=\frac{\overparen{AO'B}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$.



۳۴۳ **۲** شکل تست به صورت زیر است (قسمتی از دایره رسم شده است). چون کمان‌های بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

$$AB||DE\Rightarrow \overparen{AE}=\overparen{BD}\Rightarrow AE=BD \qquad (۱)$$

از طرف دیگر چون AD نیمساز زاویهٔ BAC است، پس

$$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\Rightarrow \overparen{BD}=\overparen{DC}\Rightarrow BD=DC \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$AE=DC\Rightarrow \overparen{AE}=\overparen{DC}$$

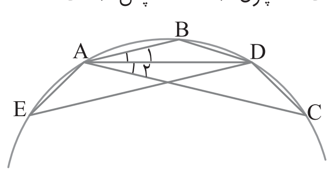
در ضمن با توجه به شکل،

$$\begin{cases} D\hat{A}E=\dfrac{\overparen{DC}+\overparen{CE}}{۲} \\ A\hat{D}C=\dfrac{\overparen{AE}+\overparen{CE}}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\overparen{AE}=\overparen{DC}}D\hat{A}E=A\hat{D}C$$

همچنین زاویه‌های C و E محاطی روبه‌رو به کمان AD هستند، پس مساوی‌اند. بنابراین

$$\begin{cases} DC=AE \\ A\hat{D}C=D\hat{A}E \\ \hat{C}=\hat{E}\end{cases}\xrightarrow{\text{(ز ض ز)}}\triangle ACD\cong\triangle DEA$$

در نتیجه $AC=DE$ ، چون $DE=۷$ ، پس $AC=۷$.

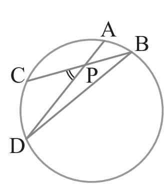


۳۴۴ **۳** زاویهٔ D محاطی روبه‌رو به کمان AB و زاویهٔ B محاطی روبه‌رو به کمان DC است. پس $\hat{D}=\frac{\overparen{AB}}{۲}$ و $\hat{B}=\frac{\overparen{DC}}{۲}$. از طرف دیگر $\hat{D}=\frac{۱}{۲}\hat{B}$

پس $\frac{۱}{۲}\overparen{AB}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\overparen{CD})\Rightarrow \overparen{AB}=\frac{۱}{۲}\overparen{CD}$

همچنین $\hat{P}$ زاویهٔ بین دو وتر دایره است، بنابراین

$$\hat{P}=\frac{۱}{۲}(\overparen{AB}+\overparen{CD})=\frac{۱}{۲}(\overparen{AB}+۲\overparen{AB})=\frac{۳}{۲}\overparen{AB}$$



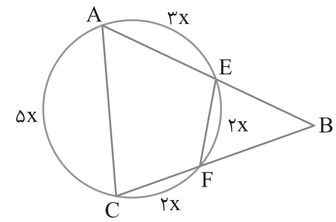
۳۴۵ (۲) مجموع اندازه‌های کمان‌های ایجاد شده روی دایره برابر ۳۶۰° است، پس

$$\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FC}+\overset{\frown}{AC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳x+۲x+۲x+۵x=۳۶۰^\circ$$

$$۱۲x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۳۰^\circ$$

در نتیجه $\overset{\frown}{AC}=۵x=۱۵۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF}=۲x=۶۰^\circ$. از طرف دیگر زاویهٔ B زاویهٔ بین امتداد دو وتر دایره است، پس

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{EF}}{۲}=\frac{۱۵۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$



۳۴۶ (۲) بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$OT^۲=OP\times OQ \Rightarrow OT^۲=OP(OP+PQ)$$

$$۴^۲=OP(OP+۸) \Rightarrow OP^۲+۸OP-۱۶=۰$$

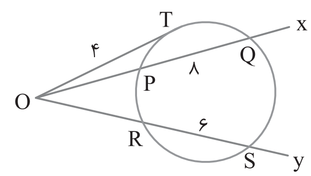
جواب مثبت این معادله $OP=۴\sqrt{۲}-۴$ است. همچنین بنابر رابطه های طولی در دایره،

$$OT^۲=OR\times OS \Rightarrow ۴^۲=OR(OR+RS)$$

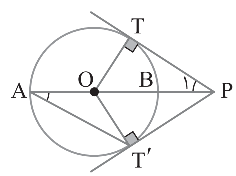
$$۱۶=OR(OR+۶) \Rightarrow OR^۲+۶OR-۱۶=۰$$

جواب مثبت این معادله $OR=۲$ است. بنابراین

$$OP+OR=۴\sqrt{۲}-۴+۲=۴\sqrt{۲}-۲$$



۳۴۷ (۴) بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب در شکل مقابل،



$$\begin{cases} PT \| AT' \\ \text{مورب } AP \end{cases} \Rightarrow \hat{A}=\hat{P}_۱$$

از طرف دیگر $\hat{A}$ زاویهٔ محاطی است، پس $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BT'}}{۲}$. در نتیجه $\hat{P}_۱=\frac{\overset{\frown}{BT'}}{۲}$.

درضمن $\hat{P}_۱$ زاویهٔ بین امتداد وتر و خط مماس بر دایره است، پس اندازهٔ آن نصف قدرمطلق تفاضل کمان‌های روبه‌روی آن است، یعنی $\hat{P}_۱=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}$.

همچنین می‌دانیم OP نیمساز زاویهٔ TOT' است، پس $\overset{\frown}{BT}=\overset{\frown}{BT'}$، بنابراین

$$\hat{P}_۱=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}\xrightarrow{\hat{P}_۱=\frac{\overset{\frown}{BT'}}{۲}}\frac{\overset{\frown}{BT'}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}$$

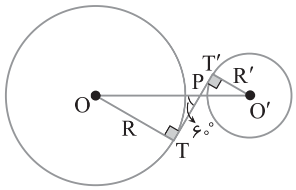
$$\xrightarrow{\overset{\frown}{BT'}=\overset{\frown}{BT}}\overset{\frown}{BT}=\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}\Rightarrow ۲\overset{\frown}{BT}=\overset{\frown}{AT}$$

چون AB قطر دایره است، پس

$$\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BT}=۶۰^\circ$$

بنابراین $\overset{\frown}{TBT'}=۲\overset{\frown}{BT}=۱۲۰^\circ$.

۳۴۸ (۱) با توجه به شکل مقابل، فرض کنید مماس مشترک داخلی TT' خط‌المرکزین OO' را در نقطهٔ P قطع کرده باشد، در این صورت $\hat{P}=۶۰^\circ$. از O' به T' و از O به T وصل می‌کنیم. در این صورت $\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ$. بنابراین با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی،



$$\triangle OPT:\hat{P}=۶۰^\circ \Rightarrow OT=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OP \Rightarrow ۷=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OP \Rightarrow OP=\frac{۱۴}{\sqrt{۳}}$$

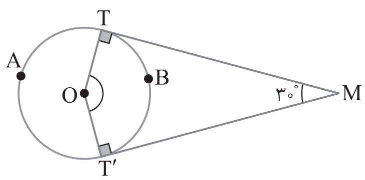
$$\triangle O'PT':\hat{P}=۶۰^\circ \Rightarrow O'T'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}O'P \Rightarrow R'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}O'P$$

$$O'P=\frac{۲R'}{\sqrt{۳}}$$

بنابر فرض $OO'=۶\sqrt{۳}$، بنابراین با توجه به شکل،

$$OP+O'P=OO' \Rightarrow \frac{۱۴}{\sqrt{۳}}+\frac{۲R'}{\sqrt{۳}}=۶\sqrt{۳} \Rightarrow ۱۴+۲R'=۱۸ \Rightarrow R'=۲$$

۳۴۹ (۳) زاویهٔ بین دو مماس MT و MT' مساوی ۳۰° است. شعاع‌های OT و OT' بر این دو مماس عمودند، پس چهارضلعی $OTMT'$ محاطی است، زیرا $\hat{T}+\hat{T}'=۱۸۰^\circ$. بنابراین $\hat{O}+\hat{M}=۱۸۰^\circ$. چون $\hat{M}=۳۰^\circ$، پس $\hat{O}=۱۵۰^\circ$ و چون $\hat{O}$ زاویهٔ مرکزی است، پس اندازهٔ آن با اندازهٔ کمان TBT' برابر است، یعنی $\overset{\frown}{TBT'}=۱۵۰^\circ$.



۳۵۰ (۳) ابتدا شکل را به صورت زیر رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس $BC=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$. توجه کنید که دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با شعاع r رسم شده است. اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه، $P=\frac{۳+۴+۵}{۲}=۶$ و

$$BH=P-b=۶-۳=۳,\quad CH=P-c=۶-۴=۲$$

$$AH'=P-a=۶-۵=۱$$

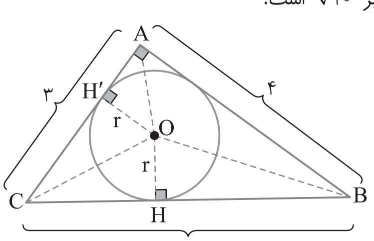
همچنین اگر S مساحت مثلث ABC باشد، آن‌گاه $r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{۱}{۲}\times۳\times۴}{۶}=۱$.
بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle OBH:OB=\sqrt{OH^۲+BH^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

$$\triangle OCH:OC=\sqrt{OH^۲+CH^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

$$\triangle AOH':OA=\sqrt{OH'^۲+AH'^۲}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

پس فاصلهٔ دورترین رأس این مثلث از محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن برابر $\sqrt{۱۰}$ است.



۳۵۱ **۱** بنابر فرض مسئله،

$$OA+R=۹\ ,\quad OA-R=۵$$

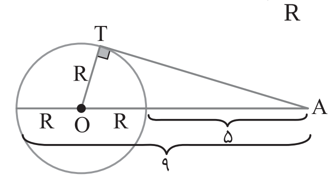
با حل دستگاه حاصل از دو معادلهٔ بالا به دست می‌آید

$$OA=۷\ ,\quad R=۲$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AT=\sqrt{OA^{۲}-OT^{۲}}=\sqrt{۷^{۲}-۲^{۲}}=۳\sqrt{۵}$$

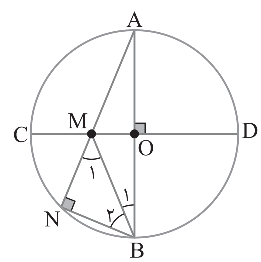
در نتیجه $\frac{AT}{R}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$.



۳۵۲ **۱** از نقطهٔ B به نقطهٔ M وصل می‌کنیم. زاویهٔ N محاطی روبه‌رو به قطر است، پس $\hat{N}=۹۰^\circ$، در نتیجه $\hat{B}_{۲}+\hat{M}_{۱}=۹۰^\circ$، از طرف دیگر بنابر فرض $MN=NB$، پس $\hat{B}_{۲}=\hat{M}_{۱}$. در نتیجه $۲\hat{M}_{۱}=۹۰^\circ$ و $\hat{M}_{۱}=۴۵^\circ$. در ضمن CD عمودمنصف AB است، پس نقطهٔ M از دو سر قطر AB به یک فاصله است، یعنی $MA=MB$، پس $\hat{A}=\hat{B}_{۱}$. چون $\hat{M}_{۱}$ زاویهٔ خارجی مثلث AMB است، پس

$$\hat{M}_{۱}=\hat{A}+\hat{B}_{۱}\Rightarrow ۴۵^\circ=\hat{A}+\hat{A}\Rightarrow \hat{A}=۲۲/۵^\circ$$

بنابراین اندازهٔ زاویهٔ A، $\frac{۱}{۴}$ قائمه است.

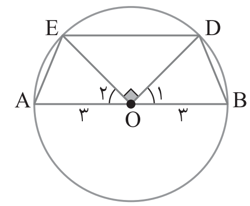


۳۵۳ **۱** می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند. بنابراین

$$DE||AB\Rightarrow \overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{AE}\Rightarrow \hat{O}_{۱}=\hat{O}_{۲}$$

چون $D\hat{O}E=۹۰^\circ$، پس $\hat{O}_{۱}=\hat{O}_{۲}=۴۵^\circ$. با توجه به شکل،

$$S_{ABDE}=S_{OAE}+S_{ODE}+S_{OBD}$$
$$=\frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin ۴۵^\circ+\frac{۱}{۲}(۳)(۳)+\frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin ۴۵^\circ$$
$$=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}+\frac{۹}{۲}+\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۹}{۲}=\frac{۹}{۲}(\sqrt{۲}+۱)$$



۳۵۴ **۱** چون AB قطر دایره است، پس

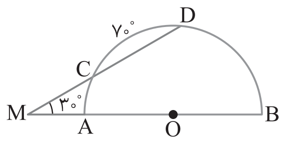
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AC}+۷۰^\circ+\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=۱۱۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ M زاویهٔ بین امتداد دو وتر دایره است، بنابراین

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow ۳۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}=۶۰^\circ$$

از تساوی‌های به‌دست آمده به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=۱۱۰^\circ\\ \overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}=۶۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{-}۲\overset{\frown}{AC}=۵۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۲۵^\circ$$

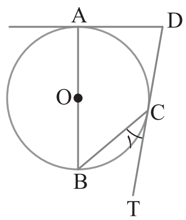


۳۵۵ **۲** مطابق شکل زیر، زاویهٔ $C_{۱}$ زاویهٔ ظلی است، پس

$$\hat{C}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow ۴۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۸۰^\circ$$

چون AB قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ$. در نتیجه $\overset{\frown}{AC}=۱۰۰^\circ$.
در ضمن زاویهٔ D زاویهٔ بین دو مماس بر دایره است، پس

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{ABC}-\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{(۱۸۰^\circ+۸۰^\circ)-۱۰۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ$$



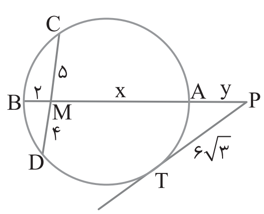
۳۵۶ **۱** بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MA\times MB=MC\times MD\Rightarrow ۲x=۵\times ۴\Rightarrow x=۱۰$$

از طرف دیگر،

$$PT^{۲}=PA\times PB\Rightarrow (۶\sqrt{۳})^{۲}=y(y+x+۲)$$
$$۱۰۸=y(y+۱۲)\Rightarrow y^{۲}+۱۲y-۱۰۸=۰\Rightarrow (y-۶)(y+۱۸)=۰$$

جواب مثبت این معادله $y=۶$ است.



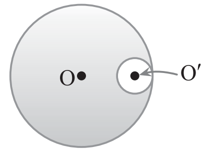
۳۵۷ **۴** اگر R و R′، (R>R′) شعاع‌های دو دایرهٔ مماس داخل باشند، آن‌گاه طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر $R-R'$ است. پس $R-R'=۴$.
از طرف دیگر مساحت ناحیهٔ محدود بین دو دایره $\pi R^{۲}-\pi R'^{۲}$ است. بنابراین

$$\pi R^{۲}-\pi R'^{۲}=۳۲\pi\Rightarrow R^{۲}-R'^{۲}=۳۲$$
$$(R-R')(R+R')=۳۲\xrightarrow{R-R'=۴}R+R'=۸$$

در نتیجه

$$\begin{cases}R+R'=۸\\ R-R'=۴\end{cases}\Rightarrow R=۶\ ,\ R'=۲$$

پس نسبت شعاع‌های این دو دایره برابر است با $\frac{R}{R'}=\frac{۶}{۲}=۳$.

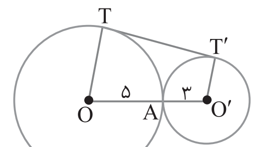


۳۵۸ **۳** دو دایره مماس بیرونی هستند، پس $OO'=۵+۳=۸$. از طرف دیگر $OT=۵$ و $O'T'=۳$، پس باید طول مماس مشترک خارجی TT' را به‌دست آوریم:

$$TT'=\sqrt{OO'^{۲}-(R-R')^{۲}}=\sqrt{۸^{۲}-(۵-۳)^{۲}}=\sqrt{۶۰}=۲\sqrt{۱۵}$$

بنابراین

$$\text{محیط } TOO'T'=OT+TT'+O'T'+OO'=۵+۲\sqrt{۱۵}+۳+۸$$
$$=۱۶+۲\sqrt{۱۵}=۲(۸+\sqrt{۱۵})$$



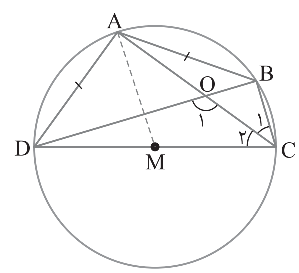
۳۵۹ **۲** **راه‌حل اول** چون چهارضلعی ABCD محاطی است، پس دایره‌ای از رأس‌های آن می‌گذرد. با رسم این دایره نتیجه می‌گیریم

$$AB=AD\Rightarrow\widehat{AB}=\widehat{AD}\xrightarrow[\hat{C}_{۲}=\frac{\widehat{AD}}{۲}]{\hat{C}_{۱}=\frac{\widehat{AB}}{۲}}\hat{C}_{۱}=\hat{C}_{۲}=۴۰^\circ$$

پس $\widehat{AB}=\widehat{AD}=۸۰^\circ$. از طرف دیگر زاویهٔ $O_{۱}$ زاویهٔ بین دو وتر دایره است. بنابراین

$$\hat{O}_{۱}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{DC}}{۲}\Rightarrow ۱۳۰^\circ=\frac{۸۰^\circ+\widehat{DC}}{۲}\Rightarrow\widehat{DC}=۱۸۰^\circ$$

در نتیجه DC قطر این دایره است، پس زاویهٔ DAC که زاویهٔ محاطی روبه‌رو به این قطر است، قائمه است. اگر M وسط DC باشد، آن‌گاه AM میانهٔ وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC است. چون شعاع دایره برابر ۸ است، پس $DC=۱۶$. بنابراین $AM=\frac{DC}{۲}=\frac{۱۶}{۲}=۸$.



راه‌حل دوم چون چهارضلعی ABCD محاطی است، پس زاویه‌های مقابل در آن مکمل‌اند، در نتیجه

$$\hat{C}+\hat{A}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{C}=۸۰^\circ}\hat{A}=۱۰۰^\circ$$

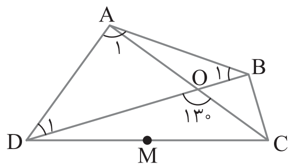
همچنین چون $AB=AD$، مثلث ABD متساوی‌الساقین است، بنابراین

$$\hat{D}_{۱}=\hat{B}_{۱}=\frac{۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$$

از طرف دیگر $C\hat{O}D=۱۳۰^\circ$. چون $C\hat{O}D$ زاویهٔ خارجی مثلث ADO است، پس

$$C\hat{O}D=\hat{A}_{۱}+\hat{D}_{۱}\xrightarrow{\hat{D}_{۱}=۴۰^\circ}۱۳۰^\circ=\hat{A}_{۱}+۴۰^\circ\Rightarrow\hat{A}_{۱}=۹۰^\circ$$

چون چهارضلعی ABCD محاطی است، در نتیجه DC قطر دایره است. پس $DC=۲\times۸=۱۶$. پس فاصلهٔ رأس A تا وسط DC همان میانهٔ نظیر ضلع DC در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC است. در نتیجه $AM=\frac{DC}{۲}=۸$.

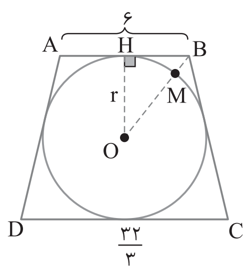


۳۶۰ **۳** می‌دانیم در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، قطر دایرهٔ محاطی واسطهٔ هندسی طول قاعده‌ها است، پس $۴r^{۲}=AB\times CD$، یعنی $۴r^{۲}=۶\times\frac{۳۲}{۳}$، بنابراین $r=۴$. از طرف دیگر چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است، پس $BH=\frac{۱}{۲}AB=۳$.

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$OB=\sqrt{OH^{۲}+BH^{۲}}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

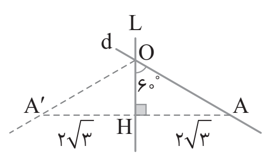
در نتیجه $BM=OB-OM=۵-۴=۱$.



۳۶۱ **۲** در شکل زیر L محور بازتاب و A' تصویر نقطهٔ A تحت این بازتاب است. توجه کنید که محور بازتاب (L) عمودمنصف AA' است، پس $AH=A'H=\frac{AA'}{۲}=۲\sqrt{۳}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH، چون $\hat{O}=۶۰^\circ$، پس

$$AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA\Rightarrow۲\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA$$

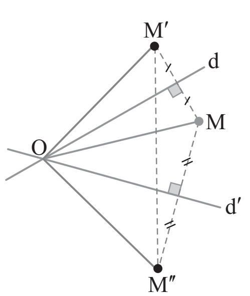
یعنی $OA=۴$.



۳۶۲ **۳** توجه کنید که خط d عمودمنصف پاره‌خط MM' و خط d' عمودمنصف پاره‌خط MM'' است، پس بنابر خاصیت عمودمنصف $OM=OM'=OM''=۳\sqrt{۲}$.

همچنین می‌دانیم $M'\hat{O}M''=۲\times۴۵^\circ=۹۰^\circ$، بنابراین مثلث $OM'M''$ قائم‌الزاویه است. در نتیجه

$$M'M''=\sqrt{OM'^{۲}+OM''^{۲}}=\sqrt{(۳\sqrt{۲})^{۲}+(۳\sqrt{۲})^{۲}}=۶$$



۳۶۳ (۲) ابتدا توجه کنید که شعاع دو دایره برابرند، زیرا انتقال تبدیلی طولپا است، پس

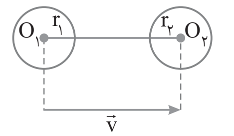
$$۲x+۳=x+۴ \Rightarrow x=۱$$

بنابراین $r_۱=r_۲=۵$. اکنون با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت

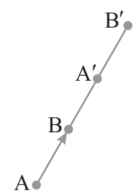
$$\text{طول بردار انتقال} > r_۱+r_۲ \Rightarrow ۵y-۵>۱۰$$

یعنی $y>۳$. چون x عددی طبیعی است و می‌خواهیم $x+y$ کمترین مقدار طبیعی ممکن باشد، پس $y=۴$. اکنون به‌دست می‌آید

$$\text{کمترین مقدار طبیعی } x+y=۱+۴=۵$$



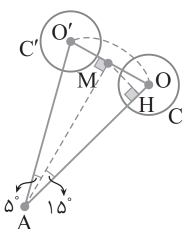
۳۶۴ (۳) بنابر صورت مسئله شکل زیر به‌دست می‌آید که در آن B و A' پاره‌خط AB' را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. بنابراین $\frac{AB'}{AA'}=\frac{۳}{۲}$ یعنی $۲AB'=۳AA'$.



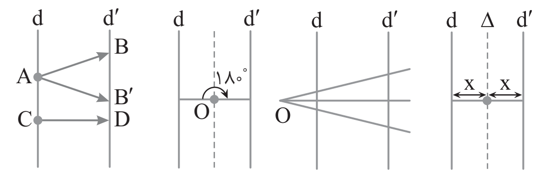
۳۶۵ (۳) تبدیل‌های دوران و بازتاب طولپا هستند. پس مساحت مثلث را تغییر نمی‌دهند. ولی تجانس با نسبت $-\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث را با ضریب $(-\frac{۱}{۴})^۲=\frac{۱}{۱۶}$ تغییر می‌دهد. از طرف دیگر مثلث با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ قائم‌الزاویه است، زیرا $۵^۲+۱۲^۲=۱۳^۲$. پس اگر S' مساحت مثلث خواسته شده و S مساحت مثلث اولیه باشد، آن‌گاه $S'=\frac{۱}{۱۶}S=\frac{۱}{۱۶}(\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۵)=\frac{۱۵}{۸}$.

۳۶۶ (۴) فرض کنید دایرهٔ $C'(O',\sqrt{۳})$ دوران‌یافتهٔ دایرهٔ $C(O,\sqrt{۳})$ به مرکز A با زاویهٔ ۳۰° باشد. بنابر فرض سؤال C' مجانس C نیز هست. چون C و C' مساوی‌اند، پس نسبت تجانس ۱ یا ۱− است. ولی نسبت تجانس ۱ درست نیست چون تجانس با نسبت ۱ تبدیل همانی است ولی در اینجا C بر C' منطبق نیست. بنابراین نسبت تجانس در اینجا ۱− است. بنابراین اگر M مرکز تجانس باشد، M وسط OO' است. پس در مثلث متساوی‌الساقین OAO'، پاره‌خط AM هم میانه، هم ارتفاع و هم نیمساز است. پس مثلث AOM قائم‌الزاویه است و $M\hat{A}O=۱۵^\circ$. بنابراین عمود MH در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOM، $\frac{۱}{۴}$ برابر وتر است و چون $AO=۸$. پس

$MH=\frac{۱}{۴}(۸)=۲$. پس فاصلهٔ مرکز تجانس M تا OA برابر ۲ است.



۳۶۷ (۴) دو خط $y=۳x+\frac{۴}{۵}$ و $y=۳x+\frac{۱}{۶}$ موازی‌اند پس با نامتناهی تبدیل انتقال، نامتناهی دوران ۱۸۰° و نامتناهی تجانس به یکدیگر تصویر می‌شوند ولی فقط بازتاب یکدیگر نسبت به خطی که به یک فاصله از آن‌ها است هستند.



d' بازتاب d فقط نسبت به خط Δ است.

d' مجانس d به مرکز هر نقطه روی صفحه به‌جز نقاط d و d' است.

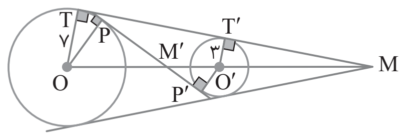
d' دوران‌یافتهٔ d به مرکز هر نقطه روی خط وسط با زاویهٔ ۱۸۰° است.

d' تصویر d با نامتناهی بردار انتقال است، که ابتدای آن‌ها روی d و انتهای آن‌ها روی d' است.

۳۶۸ (۳) نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره با خط‌المرکزین آن‌ها مرکز تجانس مستقیم این دو دایره است (نقطهٔ M در شکل).

$$\triangle MOT: OT||O'T' \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{O'T'}{OT}=\frac{MO'}{MO}$$

$$\frac{۳}{۷}=\frac{MO'}{MO} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۳}{۴}=\frac{MO'}{OO'} \Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{MO'}{۱۲} \Rightarrow MO'=۹$$



همچنین نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های داخلی دو دایره با خط‌المرکزین آن‌ها مرکز تجانس معکوس این دو دایره است. (نقطهٔ M' در شکل).

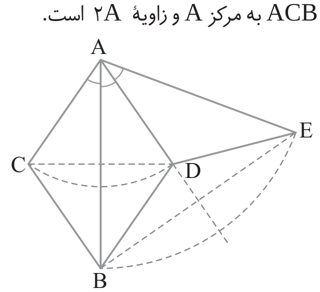
$$\triangle MOT: OP||O'P' \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیهٔ}} \frac{O'P'}{OP}=\frac{O'M'}{OM'} \Rightarrow \frac{۳}{۷}=\frac{O'M'}{OM'}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{۳}{۱۰}=\frac{O'M'}{OO'} \Rightarrow \frac{۳}{۱۰}=\frac{O'M'}{۱۲} \Rightarrow O'M'=۳/۶$$

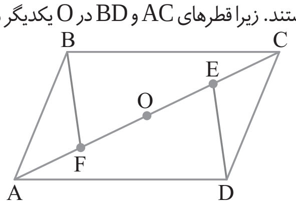
بنابراین فاصلهٔ مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس دو دایره برابر است با

$$MM'=O'M+O'M'=۹+۳/۶=۱۲/۶$$

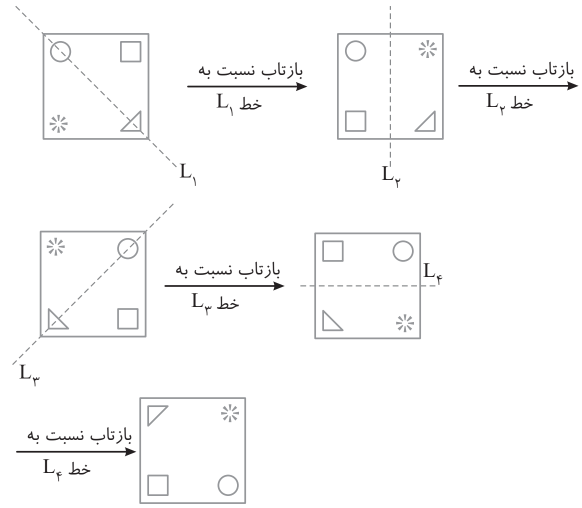
۳۶۹ (۴) می‌دانیم نتیجهٔ ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران با زاویهٔ دو برابر زاویهٔ بین دو محور بازتاب است. بنابراین مثلث ADE دوران‌یافتهٔ مثلث ACB به مرکز A و زاویهٔ $۲A$ است.



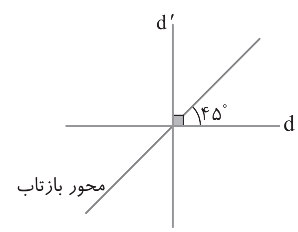
۳۷۰ (۲) بنابر فرض مسئله $OE=OF$ و $F\hat{O}E=۱۸۰^\circ$ ، پس E دوران‌یافتهٔ F تحت دوران به مرکز O و زاویهٔ ۱۸۰° است. با همین استدلال C تصویر A و D تصویر B تحت این دوران هستند. زیرا قطرهای AC و BD در O یکدیگر را نصف می‌کنند.



۳۷۱ (۳) به ترتیب بازتاب‌های خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:



۳۷۲ (۳) چون شیب خط d برابر $\frac{۳}{۲}$ و شیب خط d' برابر $-\frac{۲}{۳}$ است، پس دو خط برهم عمودند. محور بازتاب، نیمساز زاویهٔ بین خط و تصویرش تحت بازتاب است. پس زاویهٔ محور بازتاب، با هریک از این خط‌ها برابر ۴۵° است.



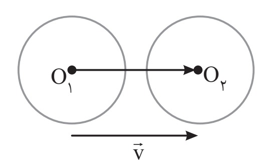
۳۷۳ (۳) ابتدا توجه کنید که شعاع دو دایره برابرند، زیرا انتقال تبدیلی طولپاست، پس $x-۱=۴ \Rightarrow x=۵$

اکنون با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\text{طول بردار انتقال} > R_۱+R_۲ \Rightarrow ۳y-۱>۴+۴ \Rightarrow ۳y-۱>۸$$

یعنی $y>۳$. چون x عددی طبیعی است و می‌خواهیم $x+y$ کمترین مقدار طبیعی ممکن باشد، بنابراین $y=۴$. در نتیجه

$$\text{کمترین مقدار طبیعی } x+y=۵+۴=۹$$



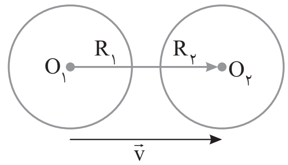
۳۷۴ (۲) عرض دو نقطهٔ A و B مساوی است، پس AB موازی محور x است. بنابراین خط d که عمودمنصف AB است، عمود بر محور x و در نتیجه موازی با محور y است.

۳۷۵ (۱) در دو حالت، بازتاب یک خط بر خودش نگاشته می‌شود: زمانی که خط بر محور بازتاب عمود باشد و یا خط بر محور بازتاب منطبق باشد.

حالت اول خط بر محور بازتاب عمود است: در این حالت شیب خط و محور بازتاب قرینه و معکوس یکدیگرند: $a+۱=-\frac{۱}{۳}$، یعنی $a=-\frac{۴}{۳}$.

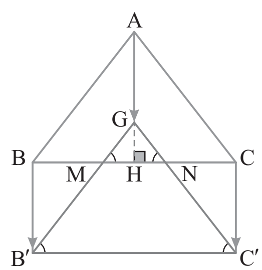
حالت دوم خط بر محور بازتاب منطبق است: توجه کنید که در این حالت باید $\frac{۲}{-۱}=\frac{a+۱}{۳}=\frac{۱}{۱}$ و این تساوی‌ها هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

۳۷۶ (۲) اندازهٔ بردار انتقال برابر $O_۱O_۲$ است، یعنی $|\vec{v}|=O_۱O_۲$، پس $|\vec{v}|>R_۱+R_۲$. اما چون دو دایره انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند، پس $R_۱=R_۲$ و $|\vec{v}|>۲R_۱$. همچنین $\vec{v}\,||\,\overrightarrow{O_۱O_۲}$، پس گزینهٔ (۲) نادرست است.



۳۷۷ (۱) توجه کنید که مثلث GMN هم متساوی‌الاضلاع است، پس با مثلث ABC متشابه است. بنابر ویژگی‌های میانه $GH=\frac{۱}{۳}AH$. چون در دو مثلث متشابه نسبت میانه‌ها با نسبت تشابه برابر است و نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت تشابه است، پس

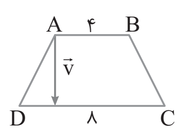
$$\frac{S_{GMN}}{S_{ABC}}=\left(\frac{GH}{AH}\right)^۲=\frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{S_{GMN}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۶^۲}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow S_{GMN}=\sqrt{۳}$$



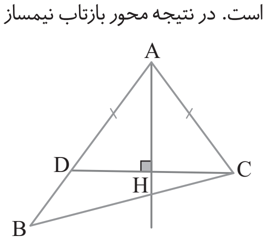
۳۷۸ (۳) می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است و بردار انتقال آن دو برابر برداری است که دو سر آن روی این دو خط موازی است و بر آن‌ها عمود است. بردار انتقال ترکیب این دو بازتاب، $۲\vec{v}$ است که $\vec{v}$ در شکل زیر نشان داده شده است. با توجه به شکل اندازهٔ بردار $\vec{v}$ برابر ارتفاع ذوزنقه است. اگر طول ارتفاع را h فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times h=۱۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۴+۸)\times h=۱۸$$

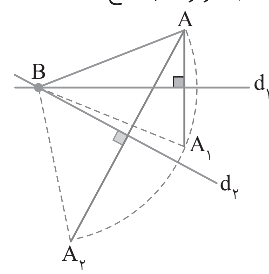
یعنی $h=۳$. در نهایت به‌دست می‌آید $OO''=۲\times(\text{اندازهٔ بردار } \vec{v})=۲\times۳=۶$.



۳۷۹ (۱) در شکل زیر، طبق فرض AD بازتاب ضلع AC است. بنابر تعریف بازتاب محور بازتاب عمودمنصف CD است. از طرف دیگر چون بازتاب طولپا است، $AC=AD$ پس بنابر خاصیت عمودمنصف A روی عمودمنصف پاره‌خط CD است. چون مثلث ACD متساوی‌الساقین است، عمودمنصف CD نیمساز زاویهٔ A است. در نتیجه محور بازتاب نیمساز زاویهٔ A است.



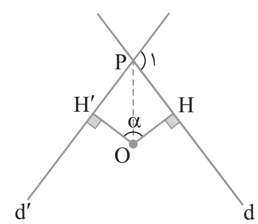
۳۸۰ (۱) با توجه به شکل زیر، خط $d_۱$ عمودمنصف $AA_۱$ است، بنابراین $BA=BA_۱$. همچنین $d_۲$ عمودمنصف $AA_۲$ است، پس $BA=BA_۲$. اگر A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خطی گذرا از B باشد، به سادگی معلوم می‌شود که $BA=BA'$. در نتیجه مکان هندسی نقطه‌هایی مانند A' دایره‌ای است به مرکز B و شعاع AB.



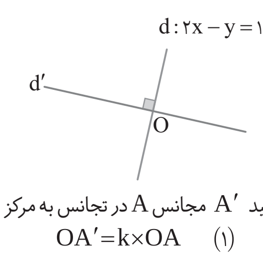
۳۸۱ (۴) در حالت کلی $\underbrace{R(R(R\cdots(R}_{n\ \text{مرتبه}}(A))\cdots))$، یعنی نقطهٔ A را حول نقطهٔ O به اندازهٔ $n\alpha$ دوران دهیم. چون $R(R(A))=A$، پس $۲\alpha=۳۶۰^\circ$، یعنی $\alpha=۱۸۰^\circ$. مسلماً مضرب‌های ۱۸۰° نیز می‌توانند زاویه‌های مورد قبول دیگر باشند.

۳۸۲ (۱) فرض کنید d' دوران‌یافتهٔ خط d به مرکز O با زاویهٔ α باشد. می‌دانیم زاویهٔ بین خط و دوران‌یافته‌اش با زاویهٔ دوران برابر است، البته آن زاویه‌ای که مرکز دوران درون آن نیست. پس با توجه به شکل $H\hat{O}H'=\hat{P}_۱=\alpha$. از طرف دیگر، OP نیمساز است، در نتیجه

$$O\hat{P}H=\frac{۱}{۲}H\hat{P}H'=\frac{۱۸۰^\circ-\alpha}{۲}=۹۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}$$



۳۸۳ (۱) توجه کنید که نقطهٔ O روی خط $۲x-y=۱$ قرار دارد. تصویر این خط، خطی است که از O می‌گذرد و بر خط $۲x-y=۱$ عمود است. اگر خط تصویر را d' فرض کنیم، آن‌گاه $m_{d'}=-\frac{۱}{m_d}=-\frac{۱}{۲}$. اکنون معادلهٔ خط d' را به شکل زیر می‌نویسیم: $d':y+۱=-\frac{۱}{۲}(x-۰)\Rightarrow ۲y+x=-۲$



۳۸۴ (۱) فرض کنید A' مجانس A در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد:

$$OA'=k\times OA \qquad (۱)$$

همچنین A'' مجانس A در تجانس به مرکز O و نسبت k' باشد:

$$OA''=k'\times OA \qquad (۲)$$

با تقسیم برابری (۱) بر برابری (۲) می‌توان نوشت

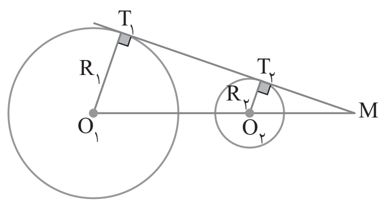
$$\frac{OA'}{OA''}=\frac{k}{k'}\Rightarrow OA'=(\frac{k}{k'})OA''$$

بنابراین A' مجانس A'' در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{k}{k'}$ است.
توجه کنید که نسبت $\frac{k'}{k}$ نیز می‌تواند درست باشد که در گزینه‌ها نیست.

۳۸۵ (۳) مرکز تجانس مستقیم محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین دو دایره است (نقطهٔ M در شکل زیر). اکنون توجه کنید که دو مثلث $MO_۱T_۱$ و $MO_۲T_۲$ متشابه‌اند و $\frac{O_۱M}{O_۲M}=\frac{R_۱}{R_۲}$، یعنی

$$\frac{O_۱M}{O_۱M-O_۱O_۲}=\frac{R_۱}{R_۲}$$

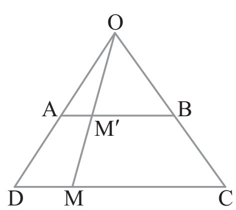
با حل این معادله به‌دست می‌آید $O_۱M=\frac{R_۱\times O_۱O_۲}{R_۱-R_۲}$. بنابراین فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر $O_۱M-R_۱=\frac{R_۱\times O_۱O_۲}{R_۱-R_۲}-R_۱$ است.



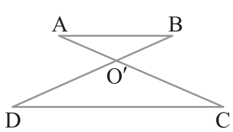
۳۸۶ (۱) نقطهٔ برخورد خط‌های AD و BC، یعنی نقطهٔ O، مرکز تجانس آن‌هاست، زیرا اگر M نقطه‌ای دلخواه روی CD باشد، از O به M وصل می‌کنیم تا AB را در M' قطع کند، آن‌گاه بنابر قضیهٔ تالس،

$$\triangle ODM: AM'\|DM \Rightarrow \frac{OA}{OD}=\frac{OM'}{OM}\Rightarrow OM=\frac{OD}{OA}OM'$$

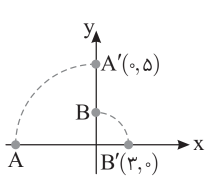
بنابراین هر نقطه روی پاره‌خط CD مجانس یکی از نقطه‌های پاره‌خط AB با نسبت $\frac{OD}{OA}$ است.



البته دقت کنید که نقطهٔ برخورد خط‌های AC و BD نیز می‌تواند مرکز تجانس دیگری برای این دو پاره‌خط باشد.



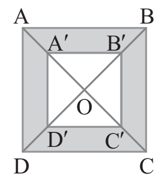
۳۸۷ (۱) در شکل زیر، نقاط $A'(۰,۵)$ و $B'(۳,۰)$ به ترتیب دوران‌یافتهٔ نقاط A و B به مرکز O با زاویهٔ ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت هستند. باید معادلهٔ خط $A'B'$ را به‌دست آوریم:



$$m_{A'B'}=\frac{y_{A'}-y_{B'}}{x_{A'}-x_{B'}}=\frac{۵-۰}{۰-۳}=-\frac{۵}{۳}$$

$$\text{خط } A'B': y-۰=-\frac{۵}{۳}(x-۳)\Rightarrow y=-\frac{۵}{۳}x+۵\Rightarrow ۳y+۵x=۱۵$$

۳۸۸ **۳** مجانس مربع $ABCD$ به مرکز O نقطهٔ تلاقی قطرهای آن با نسبت $\frac{۲}{۳}$ مربع $A'B'C'D'$ است. بنابر فرض سؤال مساحت قسمت رنگی برابر ۵ است و $A'B'=\frac{۲}{۳}AB$. پس



$$S_{ABCD}-S_{A'B'C'D'}=\text{مساحت قسمت رنگی}$$

$$۵=AB^{۲}-A'B'^{۲}\Rightarrow ۵=AB^{۲}-(\frac{۲}{۳}AB)^{۲}$$

$$۵=\frac{۵}{۹}AB^{۲}\Rightarrow AB^{۲}=۹\Rightarrow AB=۳$$

بنابراین محیط مربع $ABCD$ برابر $۱۲=۴\times۳$ است.

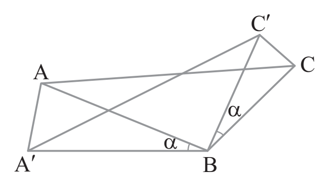
۳۸۹ **۳** در تجانس، نسبت مساحت تصویر به مساحت شکل اولیه مساوی توان دوم نسبت تجانس است. اگر مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC تحت این تجانس باشد، آن‌گاه

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^{۲}\Rightarrow\frac{۱۰۰}{۱۴۴}=k^{۲}\Rightarrow\frac{۲۵}{۳۶}=k^{۲}\Rightarrow k=\pm\frac{۵}{۶}$$

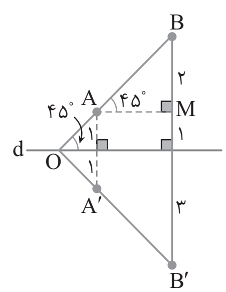
بنابراین $۱۵=۱۸\times\frac{۵}{۶}=$ طول پاره‌خط $\times|k|=$ اندازهٔ تصویر پاره‌خط

۳۹۰ **۳** در شکل زیر، $BA'C'$ دوران‌یافتهٔ BAC به مرکز B با زاویهٔ α در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. چون دوران طولپا است، پس $BC=BC'$ و $BA=BA'$. پس دو مثلث BCC' و BAA' متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس برابر هستند. بنابراین متشابه‌اند.

$$\triangle BAA'\sim\triangle BCC'\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AA'}{CC'}\Rightarrow\frac{۱۲}{۸}=\frac{۶}{CC'}\Rightarrow CC'=۴$$



۳۹۱ **۳** از A خطی موازی d رسم می‌کنیم تا BB' را در M قطع کند. در این صورت چون $B\hat{A}M=۴۵^\circ$، پس مثلث AMB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. در نتیجه $AM=BM=۲$ (شکل مقابل را ببینید). چهارضلعی $ABB'A'$ ذوزنقه است و ارتفاع آن AM است:



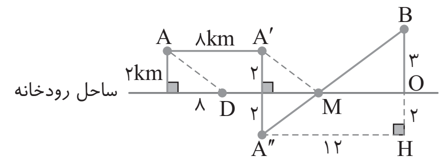
$$S_{ABB'A'}=\frac{۱}{۲}(AA'+BB')\times AM=\frac{۱}{۲}(۲+۶)\times۲=۸$$

۳۹۲ **۲** ابتدا نقطهٔ A را در راستای خط ساحل رودخانه $۸km$ به راست انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم. سپس با توجه به مسئلهٔ هرون بازتاب نقطهٔ A' را نسبت به خط ساحل رودخانه A'' نامیده از A'' به B وصل می‌کنیم تا خط ساحل رودخانه را در M قطع کند. اکنون M را در راستای خط ساحل، $۸km$ به چپ انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ D به‌دست آید. در این صورت مسیر $ADMB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده است. طول این مسیر برابر $AD+DM+MB$ است و چون $AD=A'M=A''M$، پس طول این مسیر برابر $A''M+DM+MB$ یا $A''B+DM$ است. پس کافی است $A''B$ را به‌دست آوریم. از A'' خطی عمود بر امتداد BO رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند.

با توجه به شکل،

$$\triangle A''BH: A''B^{۲}=A''H^{۲}+BH^{۲}=۱۲^{۲}+۵^{۲}=۱۶۹\Rightarrow A''B=۱۳$$

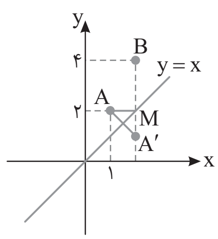
بنابراین $۲۱=۸+۱۳=DM+A''B=$ طول مسیر مینیمم.



۳۹۳ **۴** بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط $y=x$ به‌دست آورده A' می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تا خط $y=x$ را در M قطع کند. در این صورت مسیر AMB کوتاهترین مسیر است و چون بازتاب ایزومتری است، $AM=A'M$. بنابراین

$$A'B=A'M+MB=AM+MB=\text{طول مسیر } AMB$$

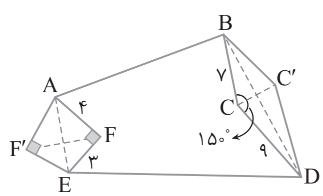
از طرف دیگر بازتاب نقطهٔ $A(۱,۲)$ نسبت به خط $y=x$ نقطهٔ $A'(۲,۱)$ است. در نتیجه $۳=\sqrt{(۲-۲)^{۲}+(۱-۴)^{۲}}=A'B=$ طول مسیر AMB.



۳۹۴ **۳** بازتاب F را نسبت به AE و بازتاب C را نسبت به BD به‌دست می‌آوریم. چندضلعی $ABC'DEF'$ چندضلعی مطلوب است. اکنون توجه کنید که میزان افزایش مساحت برابر است با

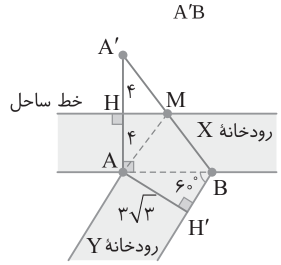
$$S_{AFEF'}+S_{BCDC'}=۲S_{AFE}+۲S_{BCD}$$

$$=۲(\frac{۱}{۲}\times۳\times۴)+۲(\frac{۱}{۲}\times۷\times۹\times\sin۱۵۰^\circ)=۱۲+\frac{۶۳}{۲}=\frac{۸۷}{۲}$$



۳۹۵ **۲** در مسیر $MABM$ چون AB ثابت است، پس باید $MA+MB$ کمترین باشد. فرض کنید A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط ساحل باشد، پس M نقطهٔ هرون برای A و B روی خط ساحل است. در مثلث ABH'، چون $\hat{B}=۶۰^\circ$، پس $AH'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB$ و چون $AH'=۳\sqrt{۳}$، پس $AB=۶$. در مثلث ABA' بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $A'B=\sqrt{AA'^{۲}+AB^{۲}}=\sqrt{۸^{۲}+۶^{۲}}=۱۰$. اکنون به‌دست می‌آید

$$۱۶=۱۰+۶=\underbrace{MA+MB}_{A'B}+AB=\text{کمترین طول مسیر } MABM$$

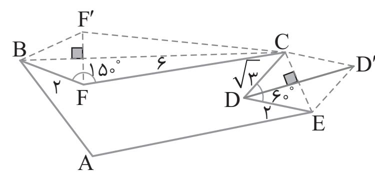


۳۹۶ (۱) اگر بازتاب D نسبت به خط CE نقطهٔ D′ و بازتاب F نسبت به خط BC نقطهٔ F′ باشد، آن‌گاه چندضلعی ABF′CD′E هم‌محیط با چندضلعی ABFCDE است ولی مساحت آن به اندازهٔ $S_{BFCF'}+S_{DCD'E}$ اضافه می‌شود.

$$S_{DCD'E}=۲S_{DCE}=۲(\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(۲)\sin ۶۰^\circ)=۳$$

$$S_{BFCF'}=۲S_{BFC}=۲(\frac{۱}{۲}(۲)(۶)\sin ۱۵۰^\circ)=۶$$

پس میزان افزایش مساحت برابر ۹=۳+۶ است.



۳۹۷ (۲) مطابق شکل زیر، نقطهٔ A را با برداری به طول ۱ (اندازهٔ عرض رودخانه) در راستای عمود بر راستای رودخانه انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ A′ برسیم. سپس از A′ به B وصل می‌کنیم تا خط d را در N قطع کند (شکل زیر را ببینید). از N عمودی بر خط d رسم می‌کنیم تا خط d′ را در M قطع کند. در این صورت MN پل مورد نظر و مسیر AMNB مسیر مینیمم است:

طول مسیر AMNB=AM+MN+NB

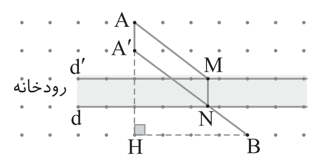
چون AA′NM متوازی‌الاضلاع است، پس AM=A′N. در نتیجه

طول مسیر AMNB=A′N+MN+NB=A′B+MN

مطابق شکل طول A′B را در مثلث قائم‌الزاویهٔ A′BH به‌دست می‌آوریم

$A'B^۲=A'H^۲+BH^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵\Rightarrow A'B=۵$

درضمن MN=۱. بنابراین ۶=۱+۵=طول مسیر AMNB.



۳۹۸ (۴) مطابق شکل زیر، نقطهٔ A را به اندازهٔ عرض رودخانه یعنی ۲ واحد منتقل می‌کنیم تا به A′ برسیم. سپس از A′ به B وصل می‌کنیم تا خط ساحل رودخانه را که در شکل مشخص شده در N قطع کند، آن‌گاه MN پل مورد نظر و مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. با توجه به شکل،

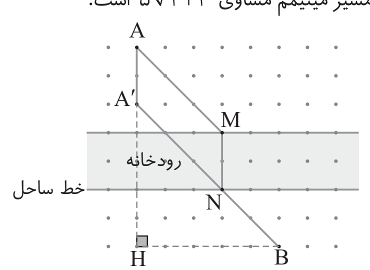
طول مسیر AMNB=AM+MN+NB

$\xrightarrow[AM=A'N]{MN=۲}$ طول مسیر AMNB=A′N+NB+۲=A′B+۲

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ A′HB می‌توان طول A′B را به‌دست آورد:

$$A'B=\sqrt{A'H^۲+BH^۲}=\sqrt{۵^۲+۵^۲}=۵\sqrt{۲}$$

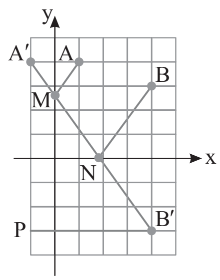
بنابراین طول مسیر مینیمم مساوی $۵\sqrt{۲}+۲$ است.



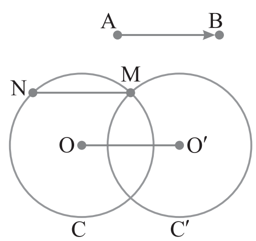
۳۹۹ (۴) بازتاب A را نسبت به محور y نقطهٔ A′ و بازتاب B را نسبت به محور x نقطهٔ B′ می‌نامیم. از A′ به B′ وصل می‌کنیم تا محورهای y و x را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند. در این صورت مسیر AMNB مسیر مینیمم است. چون بازتاب ایزومتری است، پس AM=A′M و BN=B′N. پس طول مسیر AMNB برابر طول پاره‌خط A′B′ است و A′B′ وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ A′B′P است. پس

$$A'B'^۲=A'P^۲+B'P^۲ \xrightarrow[B'P=۵]{A'P=۷} A'B'^۲=۷^۲+۵^۲=۷۴$$

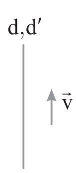
$$A'B'=\sqrt{۷۴}$$



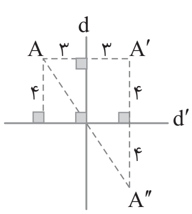
۴۰۰ (۴) دایرهٔ C(O,R) را تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم. فرض کنید انتقال‌یافتهٔ این دایره، دایرهٔ C′(O′,R) باشد و دایرهٔ C′ دایرهٔ C را در نقطهٔ M قطع کند. از M خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C را در نقطهٔ N قطع کند. در این صورت M انتقال‌یافتهٔ N تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ است. چون انتقال تبدیلی طولپا است و شیب خط را حفظ می‌کند، پس MN=AB و MN||AB. بنابراین برای پیدا کردن وتر مورد نظر از تبدیل انتقال استفاده می‌کنیم. مسلماً اگر AB>۲R، چنین وتری وجود ندارد.



۴۰۱ (۳) اگر بردار انتقال موازی با خط مورد نظر باشد، آن‌گاه تصویر خط تحت این انتقال بر خودش منطبق است. توجه کنید که بردار انتقال بردار صفر هم می‌تواند باشد که در گزینه‌ها نیست.

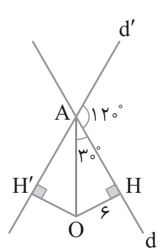


۴۰۲ (۴) بنابر اطلاعات داده شده و ویژگی‌های بازتاب نتیجه می‌گیریم مثلث AA′A″ در رأس A′ قائم‌الزاویه است. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در این مثلث به‌دست می‌آید $AA''=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$.



۴۰۳ (۳) می‌دانیم O روی نیمساز زاویهٔ A است و $H\hat{O}H'=۱۲۰^\circ$. چون مجموع زاویه‌های چهارضلعی AHOH′ برابر ۳۶۰° است، پس $H\hat{A}H'=۶۰^\circ$. بنابراین $O\hat{A}H=۳۰^\circ$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OAH چون $O\hat{A}H=۳۰^\circ$، پس ضلع مقابل به این زاویه نصف وتر است. بنابراین

$$OH=\frac{۱}{۲}OA\Rightarrow OA=۲OH=۱۲$$



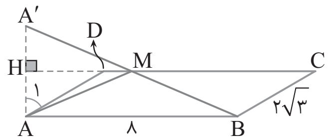
۴۰۴ **۱** بنابر مسئلهٔ هرون، اگر A' بازتاب A نسبت به خط CD باشد و از A' به B وصل کنیم تا DC را در M قطع کند، آن‌گاه مسیر AMB مینیمم است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH زاویهٔ A_1 برابر ۶۰° است. پس

$$DH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۲\sqrt{۳}=۳$$

درضمن MH با AB موازی است. پس بنابر قضیهٔ میان‌خط (H وسط AA') طول MH نصف AB و برابر ۴ است. پس

$$MD=MH-DH=۴-۳=۱\Rightarrow MC=۸-۱=۷$$

بنابراین $\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۷}$.

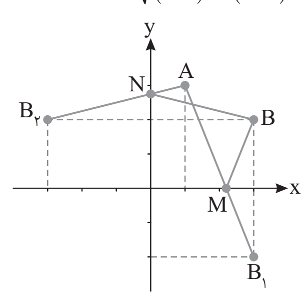


۴۰۵ **۲** فرض کنید R تبدیل دوران حول نقطهٔ O به اندازهٔ α باشد. در این صورت $\underbrace{R(R(\dots R}_{n\ \text{مرتبه}}(A)\dots))$ یعنی نقطهٔ A را حول O به اندازهٔ $n\alpha$ دوران دهیم. در اینجا $\alpha=۶۰^\circ$ و چون $\underbrace{R(R(\dots R}_{n\ \text{مرتبه}}(A)\dots))=A$، پس

$$n\times ۶۰^\circ=۳۶۰^\circ\Rightarrow n=۶$$

۴۰۶ **۲** B_1 قرینهٔ B نسبت به محور x و B_2 قرینهٔ B نسبت به محور y است. محل برخورد AB_1 با محور x نقطهٔ M و محل برخورد AB_2 با محور y نقطهٔ N است. اکنون توجه کنید که $MA+MB=AB_1$ و $NA+NB=AB_2$. چون $A(۱,۳)$، $B_1(۳,-۲)$، $B_2(-۳,۲)$، پس

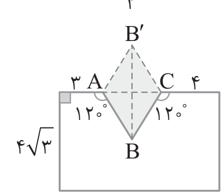
$$\frac{MA+MB}{NA+NB}=\frac{AB_1}{AB_2}=\frac{\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۲-۳)^۲}}{\sqrt{(۱+۳)^۲+(۳-۲)^۲}}=\sqrt{\frac{۲۹}{۱۷}}$$



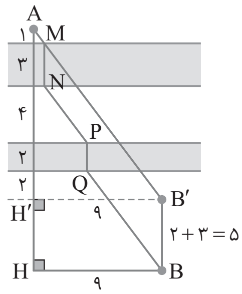
۴۰۷ **۳** با توجه به شکل زیر، اگر بازتاب نقطهٔ B را نسبت به AC، B' بنامیم، آن‌گاه به مساحت زمین اولیه مساحت چهارضلعی $ABCB'$ اضافه خواهد شد، بدون آنکه محیط زمین تغییر کند. با توجه به داده‌های شکل، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $AC=۱۱-(۳+۴)=۴$ است. بنابراین

مساحت زمین جدید $=$ (مستطیل به اضلاع ۱۱ و $۴\sqrt{۳}$)مساحت $+S_{AB'C}$

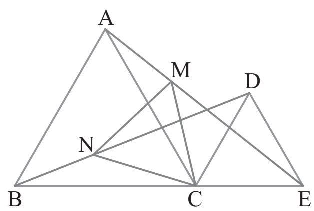
مساحت زمین جدید $=(۴\sqrt{۳})(۱۱)+\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲=۴۴\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}=۴۸\sqrt{۳}$



۴۰۸ **۲** مانند مسئلهٔ احداث پُل عمل می‌کنیم با این تفاوت که B' انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ B با برداری عمود بر راستای ساحل رودخانه‌ها و به طولی برابر مجموع عرض رودخانه‌ها است. مطابق شکل، مسیر مورد نظر $AMNPQB$ است که برابر $AB'+BB'$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AH'B'$ بنابر قضیهٔ فیثاغورس $AB'=\sqrt{AH'^۲+H'B'^۲}=\sqrt{۱۲^۲+۹^۲}=۱۵$. اکنون طول مسیر به‌دست می‌آید $AB'+BB'=۱۵+۵=۲۰$.



۴۰۹ **۲** توجه کنید که $CE=CD$ و $E\hat{C}D=۶۰^\circ$. همچنین $CA=CB$ و $A\hat{C}B=۶۰^\circ$. پس D دوران‌یافتهٔ E حول C با زاویهٔ ۶۰° و B دوران‌یافتهٔ A حول C با زاویهٔ ۶۰° است. در نتیجه DB دوران‌یافتهٔ EA تحت این دوران است. بنابراین هر نقطه روی DB، دوران‌یافتهٔ نقطه‌ای روی EA است. چون دوران ایزومتری است، پس N دوران‌یافتهٔ M است. در نتیجه $CM=CN$ و $M\hat{C}N=۶۰^\circ$. پس مثلث CMN متساوی‌الاضلاع است.



۴۱۰ **۲** از فرض تست و تعریف تبدیل تجانس نتیجه می‌شود

$$AN=۲ON\Rightarrow OA=۳ON$$

$$N\xrightarrow[\text{بانسبت۳}]{\text{تحت تجانس به مرکز } O}A$$

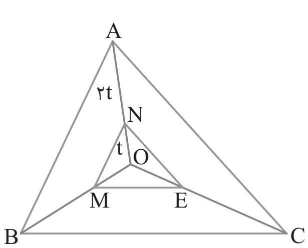
$$BM=۲OM\Rightarrow OB=۳OM$$

$$M\xrightarrow[\text{با نسبت ۳}]{\text{تحت تجانس به مرکز } O}B$$

$$CE=۲OE\Rightarrow OC=۳OE$$

$$E\xrightarrow[\text{با نسبت ۳}]{\text{تحت تجانس به مرکز } O}C$$

پس مثلث ABC مجانس مثلث NME به مرکز O با نسبت ۳ است. بنابراین این دو مثلث با نسبت ۳ متشابه‌اند، در نتیجه $\frac{S_{ABC}}{S_{NME}}=۳^۲=۹$، پس $\frac{S_{NME}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۹}$.



۴۱۱ ۳ بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow(۸\sqrt{۵})^۲=BH(BH+۴)$$

$$BH^۲+۴BH-۳۲۰=۰\Rightarrow(BH+۲۰)(BH-۱۶)=۰\Rightarrow BH=۱۶$$

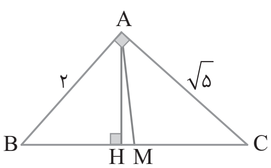
اکنون توجه کنید که $AH^۲=BH\times CH=۱۶\times۴=۶۴\Rightarrow AH=۸$

۴۱۲ ۴ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بدون اینکه کلیت راه‌حل تغییر کند می‌توانیم فرض کنیم $AB=۲$. در این صورت $AC=\sqrt{۵}$. در مثلث ABC، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۴+۵}=۳$

بنابر روابط طولی در مثلث ABC، $AB^۲=BH\times BC$، یعنی $۴=BH\times۳$. پس $BH=\frac{۴}{۳}$. از طرف دیگر چون AM میانهٔ وارد بر وتر BC است، $BM=\frac{BC}{۲}=\frac{۳}{۲}$.

در نتیجه $MH=BM-BH=\frac{۳}{۲}-\frac{۴}{۳}=\frac{۱}{۶}$. اکنون می‌توان نوشت

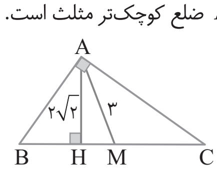
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{BC}{MH}=\frac{۳}{\frac{۱}{۶}}=۱۸$$



۴۱۳ ۳ در هر مثلث قائم‌الزاویه طول میانهٔ وارد بر وتر نصف طول وتر است. پس $BC=۶$ و $CM=۳$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AMH، $MH^۲=AM^۲-AH^۲=۹-۸=۱$. پس $CH=۴$. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^۲=CH\times BC=۴\times۶\Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}$$

توجه کنید $AB=۲\sqrt{۳}$ ضلع کوچک‌تر مثلث است.



۴۱۴ ۴ اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=۲R\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۳۰^\circ}=۲R\Rightarrow R=۲\sqrt{۳}$$

بنابراین $\pi R^۲=۱۲\pi$=مساحت دایره محیطی .

۴۱۵ ۱ شکل به صورت زیر است. بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

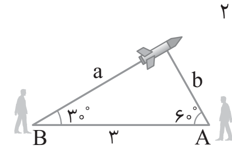
$$\frac{a}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{b}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow\frac{a}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{b}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow a=\sqrt{۳}b$$

از طرف دیگر مثلث قائم‌الزاویه است. پس

$$a^۲+b^۲=۳^۲\Rightarrow(\sqrt{۳}b)^۲+b^۲=۹\Rightarrow۴b^۲=۹\Rightarrow b^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

$$a=\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$$

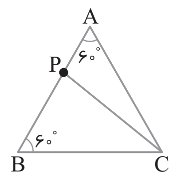
بنابراین $ab=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۴}\sqrt{۳}$.



۴۱۶ ۴ فرض کنید R و R' به ترتیب شعاع‌های دایره‌های محیطی مثلث‌های APC و BPC باشند، در این صورت بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\left.\begin{array}{l}\triangle APC:\frac{PC}{\sin\hat{A}}=۲R\Rightarrow\frac{PC}{\sin ۶۰^\circ}=۲R\\ \triangle BPC:\frac{PC}{\sin\hat{B}}=۲R'\Rightarrow\frac{PC}{\sin ۶۰^\circ}=۲R'\end{array}\right\}\Rightarrow ۲R=۲R'\Rightarrow R=R'$$

پس تفاضل شعاع دایره‌های محیطی دو مثلث همواره صفر است.



۴۱۷ ۳ فرض کنید R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، در این صورت بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R$$

$$\frac{a}{۲R}=\sin\hat{A},\quad\frac{b}{۲R}=\sin\hat{B},\quad\frac{c}{۲R}=\sin\hat{C}$$

اکنون از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a\sin\hat{A}+b\sin\hat{B}+c\sin\hat{C}}{۲}=a^۲+b^۲+c^۲$$

$$a(\frac{a}{۲R})+b(\frac{b}{۲R})+c(\frac{c}{۲R})=۲(a^۲+b^۲+c^۲)$$

$$\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲R}=۲(a^۲+b^۲+c^۲)\Rightarrow R=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $\pi R^۲=\frac{\pi}{۱۶}$=مساحت دایرهٔ محیطی .

۴۱۸ ۱ بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\frac{c}{\sin\hat{C}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{b}$$

اکنون از فرض نتیجه می‌گیریم

$$۲c=(b^۲-۲)\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}}\Rightarrow۲c=(b^۲-۲)\times\frac{c}{b}$$

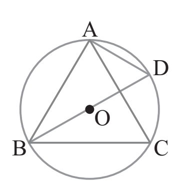
$$\frac{b^۲-۲}{b}=۲\Rightarrow b^۲-۲b-۲=۰$$

بنابراین $b=\frac{۲+\sqrt{۴+۸}}{۲}=\frac{۲+۲\sqrt{۳}}{۲}=۱+\sqrt{۳}$.

۴۱۹ ۴ شکل سؤال به صورت زیر است. بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\triangle ABC:\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}=\frac{\pi}{۶}}\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{AC}{\frac{۱}{۵}}\Rightarrow\frac{AB}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۴}{\frac{۱}{۵}}$$

$$AB=۱۰\Rightarrow AB^۲=۱۰۰$$

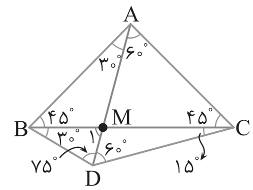


۴۲۰ **۲** چون مثلث ABC متساوی‌الساقین و مثلث ADC متساوی‌الاضلاع است، پس $AB=AC=AD=DC$. پس مثلث ABD متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 30° است. بنابراین $A\hat{B}D=A\hat{D}B=75^\circ$ ، در نتیجه $\hat{M}_1=75^\circ$ ، یعنی $BM=BD$ (شکل زیر را ببینید). اکنون از قضیهٔ سینوس‌ها نتیجه می‌شود

$$\triangle AMC: \frac{MC}{\sin 60^\circ}=\frac{AM}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \frac{4\sqrt3}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{AM}{\frac{\sqrt2}{2}}\Rightarrow AM=4\sqrt2$$

$$\triangle ABM: \frac{BM}{\sin 30^\circ}=\frac{AM}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \frac{BM}{\frac12}=\frac{4\sqrt2}{\frac{\sqrt2}{2}}\Rightarrow BM=4$$

بنابراین $BD=4$.



۴۲۱ **۳** بنابر فرض تست،

$$(a+b+c)(a+b-c)=3ab\Rightarrow (a+b)^2-c^2=3ab$$

$$a^2+2ab+b^2-c^2=3ab$$

یعنی $c^2=a^2+b^2-ab$ (۱) . از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C} \quad (2)$$

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\cos\hat{C}=\frac12$ ، پس $\hat{C}=60^\circ$.

۴۲۲ **۲** از قضیهٔ کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

در نتیجه $25=25+40\sqrt3-2bc\times\frac{\sqrt3}{2}$. بنابراین $bc=40$. اکنون می‌توان نوشت $S=\frac12 bc\sin\hat{A}=\frac12\times40\times\frac12=10$.

۴۲۳ **۲** مثلث BCD متساوی‌الساقین است، زیرا

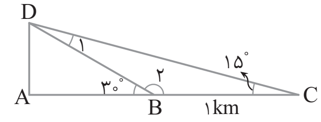
$$\hat{B}_2=180^\circ-30^\circ=150^\circ,\quad \hat{D}_1=180^\circ-\hat{B}_2-\hat{C}=15^\circ$$

بنابراین $DB=BC=1\,km$. برای محاسبهٔ فاصلهٔ کشتی C از محل انتشار نور، یعنی طول پاره‌خط DC ، بنابر به قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BCD،

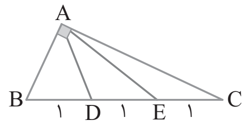
$$DC^2=DB^2+BC^2-2DB\times BC\times\cos\hat{B}_2=1^2+1^2-2(1)(1)\cos150^\circ$$

$$=2-2(-\frac{\sqrt3}{2})=2+\sqrt3$$

در نتیجه $DC=\sqrt{2+\sqrt3}$.



۴۲۴ **۲** در مثلث ABE ، پاره‌خط AD میانه است. پس بنابر قضیهٔ میانه‌ها، $2AD^2+\frac{BE^2}{2}=AB^2+AE^2$. همچنین در مثلث ADC ، پاره‌خط AE میانه است، پس $2AE^2+\frac{DC^2}{2}=AD^2+AC^2$. با جمع کردن این دو تساوی نتیجه می‌گیریم $AD^2+AE^2+4=AB^2+AC^2$. چون مثلث قائم‌الزاویه است، $AB^2+AC^2=BC^2=9$ ، پس $AD^2+AE^2=5$.



۴۲۵ **۱** قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها طول اضلاع این متوازی‌الاضلاع را به‌دست می‌آوریم:

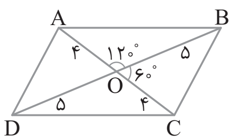
$$\triangle OAB: AB^2=OA^2+OB^2-2OA\times OB\cos120^\circ$$

$$AB^2=16+25-2\times4\times5\times\frac{-1}{2}\Rightarrow AB^2=16+25+20=61\Rightarrow AB=\sqrt{61}$$

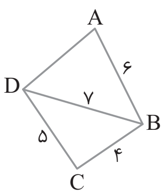
$$\triangle OBC: BC^2=OB^2+OC^2-2OB\times OC\cos60^\circ$$

$$BC^2=25+16-2\times5\times4\times\frac12\Rightarrow BC^2=25+16-20=21\Rightarrow BC=\sqrt{21}$$

بنابراین $\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{61}{21}}$.



۴۲۶ **۲** در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های مقابل مکمل‌اند، پس $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$. بنابراین $\cos\hat{A}=-\cos\hat{C}$ ، اکنون در مثلث BDC با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها مقدار $\cos\hat{C}$ را پیدا می‌کنیم



$$BD^2=BC^2+DC^2-2BC\times DC\cos\hat{C}$$

$$7^2=5^2+4^2-2(4)(5)\cos\hat{C}\Rightarrow\cos\hat{C}=-\frac15$$

در نتیجه $\cos\hat{A}=\frac15$ ، بنابراین

$$\triangle ABD: BD^2=AD^2+AB^2-2AD\times AB\cos\hat{A}$$

$$7^2=AD^2+6^2-2AD\times6\times\frac15\Rightarrow AD^2-\frac{12}{5}AD-13=0$$

$$5AD^2-12AD-65=0$$

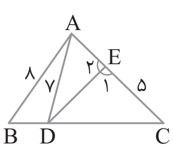
پس

$$AD=\frac{12\pm\sqrt{144+20\times65}}{10}=\frac{12\pm\sqrt{4(36+325)}}{10}$$

$$=\frac{12\pm2\sqrt{361}}{10}=\frac{12+19\times2}{10}=5$$

بنابراین محیط چهارضلعی ABCD برابر $5+5+4+6=20$ است.

۴۲۷ **۲** در مثلث ABD زاویهٔ B برابر 60° و ضلع AB برابر ۸ است. پس با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌توانیم طول BD را پیدا کنیم:



$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\times BD\cos60^\circ$$

$$49=64+BD^2-2(8)BD\times\frac12$$

$BD^2-8BD+15=0\Rightarrow(BD-3)(BD-5)=0\Rightarrow BD=3$ یا $BD=5$

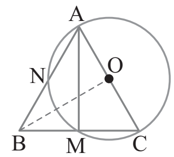
چون $CD>BD$ ، پس $BD=3$ قابل قبول است و $CD=8-3=5$. بنابراین $CD=5$ ، $CE=5$ و $\hat{C}=60^\circ$. پس مثلث DEC متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه $\hat{E}_1=60$ ، پس $A\hat{E}D=120^\circ$.

۴۲۸ (۳) بنابر قضیهٔ میانه‌ها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)$$

$$m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(۱۶+۲۵+۴۹)=\frac{۳}{۴}\times ۹۰=۶۷/۵$$

۴۲۹ (۱) از A به M وصل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ محاطی M روبه‌رو به قطر AC است، پس $\hat{M}=۹۰^\circ$. بنابراین AM ارتفاع و در نتیجه میانهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC است.



بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

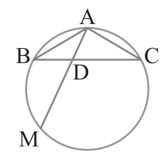
$$BN\times BA=BM\times BC\Rightarrow ۲\times ۹=\frac{BC}{۲}\times BC\Rightarrow BC^۲=۳۶\Rightarrow BC=۶$$

اکنون از قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC نتیجه می‌گیریم

$$AB^۲+BC^۲=۲OB^۲+\frac{AC^۲}{۲}\Rightarrow ۹^۲+۶^۲=۲OB^۲+\frac{۹^۲}{۲}$$

$$۱۱۷-\frac{۸۱}{۲}=۲OB^۲\Rightarrow OB^۲=\frac{۱۵۳}{۴}=\frac{۹\times ۱۷}{۴}\Rightarrow OB=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۷}$$

۴۳۰ (۱) بنابر رابطه‌های طولی در دایره،



$$AD\times DM=BD\times DC$$

$$۲AD=BD\times DC \qquad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ استوارت در مثلث ABC،

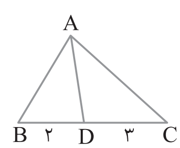
$$AB^۲\times DC+AC^۲\times BD=AD^۲\times BC+BD\times DC\times BC\xrightarrow{(۱)}$$

$$۳DC+۳BD=AD^۲\times BC+۲AD\times BC$$

$$۳BC=AD^۲\times BC+۲AD\times BC\xrightarrow[BC]{\text{حذف}}AD^۲+۲AD-۳=۰$$

بنابراین $AD=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۱۲}}{۲}=\frac{-۲+۴}{۲}=۱$.

۴۳۱ (۲) بنابر فرض سؤال، $AB+AC+BC=۱۵$ و $BC=۵$، پس $AB+AC=۱۰$. اکنون از قضیهٔ نیمسازها نتیجه می‌شود



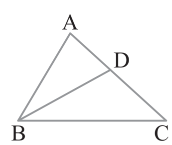
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{AB}{AC}\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{ترکیب در}}$$

$$\frac{۲+۳}{۳}=\frac{AB+AC}{AC} \quad \frac{۵}{۳}=\frac{AB+AC}{AC}$$

$$\frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{AC}\Rightarrow AC=۶\,,\,AB=۴$$

بنابراین طول بزرگ‌ترین ضلع این مثلث برابر است با $AC=۶$.

۴۳۲ (۲) با استفاده از قضیهٔ نیمساز ها،



$$\text{نیمساز } BD\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}$$

$$\frac{AD}{AD+DC}=\frac{AB}{AB+BC}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AB+BC}$$

$$AD=\frac{AB\times AC}{AB+BC} \qquad (۱)$$

با توجه به فرض $AB=\frac{۲}{۳}AC=\frac{۱}{۲}BC$، در نتیجه $AC=\frac{۳}{۲}AB$ و $BC=۲AB$. در نتیجه بنابر برابری (۱)،

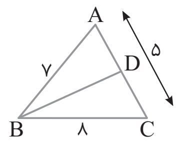
$$AD=\frac{AB\times\frac{۳}{۲}AB}{AB+۲AB}=\frac{\frac{۳}{۲}AB^۲}{۳AB}=\frac{۱}{۲}AB$$

۴۳۳ (۲) فرض می‌کنیم BD نیمساز زاویهٔ B باشد، بنابر قضیهٔ نیمسازها،

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{۷}{۸}$$

پس DC قطعهٔ بزرگ‌تر است و باید DC را به‌دست آوریم. با ترکیب در صورت تناسب به‌دست آمده می‌نویسیم:

$$\frac{AD+DC}{DC}=\frac{۷+۸}{۸}\xrightarrow{AC=۵}\frac{۵}{DC}=\frac{۱۵}{۸}\Rightarrow DC=\frac{۸}{۳}$$

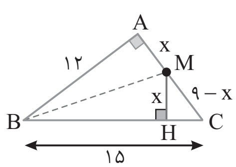


۴۳۴ (۴) می‌دانیم اگر d_a نیمساز زاویهٔ داخلی A باشد، آن‌گاه $d_a=\frac{۲bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{۲}$. در ضمن بنابر فرض،

$$\frac{\sqrt{۳}}{d_a}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{d_a}=\frac{b+c}{bc}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{\frac{۲bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{۲}}=\frac{b+c}{bc}$$

$$\cos\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{\hat{A}}{۲}=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۶۰^\circ$$

۴۳۵ (۲) چون عددهای ۹، ۱۲ و ۱۵ از ضرب ۳ در عددهای فیثاغورسی ۳، ۴ و ۵ به‌دست می‌آیند، پس عددهای فیثاغورسی هستند و مثلث قائم‌الزاویه است $(۹^۲+۱۲^۲=۱۵^۲)$. از طرف دیگر، چون M از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است، پس M روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد. اکنون بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{MA}{MC}=\frac{AB}{BC}$، یعنی $\frac{x}{۹-x}=\frac{۱۲}{۱۵}$. در نتیجه $x=۴$.



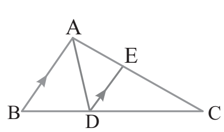
۴۳۶ (۲) چون $۵AB=۳AC=۶۰$، پس $AB=۱۲$ و $AC=۲۰$.

چون AD نیمساز است، بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (۱)

از طرف دیگر چون DE با AB موازی است، بنابر قضیهٔ تالس،

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{EC} \qquad (۲)$$

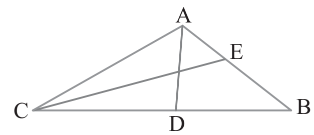
با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{EC}$، یعنی $\frac{AE}{EC}=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}$. با ترکیب در صورت می‌توان نوشت $\frac{AE+EC}{EC}=\frac{۳+۵}{۵}$، پس $\frac{AC}{EC}=\frac{۸}{۵}$، یعنی $\frac{۲۰}{EC}=\frac{۸}{۵}$، در نتیجه $EC=۱۲/۵$.



۴۳۷ (۲) AD نیمساز زاویهٔ A است، پس بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{۴}{۵}=\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. پس $AB=\frac{۴}{۵}AC$. به همین صورت CE نیمساز زاویهٔ C است، پس بنابر قضیهٔ نیمسازها، $\frac{۲}{۳}=\frac{AE}{EB}=\frac{AC}{BC}$. پس $BC=\frac{۳}{۲}AC$. محیط مثلث برابر ۶۶ است، بنابراین

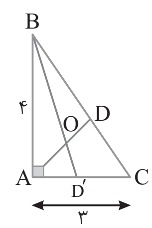
$$AB+AC+BC=۶۶\Rightarrow \frac{۴}{۵}AC+AC+\frac{۳}{۲}AC=۶۶$$

در نتیجه $AC=۲۰$. اکنون می‌توان نوشت $AB=\frac{۴}{۵}AC=\frac{۴}{۵}\times ۲۰=۱۶$.



۴۳۸ (۲) **راه‌حل اول** چون مثلث قائم‌الزاویه است، پس $BC=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$. در مثلث ABC، BD' نیمساز است، بنابراین $AD'=\frac{AC\times AB}{AB+BC}=\frac{۳\times ۴}{۴+۵}=\frac{۴}{۳}$. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABD'،

$$BD'=\sqrt{AB^۲+AD'^۲}=\sqrt{۴^۲+(\frac{۴}{۳})^۲}=\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۳}$$



راه‌حل دوم چون $a=۵$، $b=۳$ و $c=۴$، پس $P=\frac{a+b+c}{۲}=۶$. بنابراین

$$d_b=\frac{۲}{a+c}\sqrt{acP(P-b)}=\frac{۲}{۹}\sqrt{۵\times ۴\times ۶\times ۳}=\frac{۲}{۹}\sqrt{۴\times ۹\times ۲\times ۵}=\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۳}$$

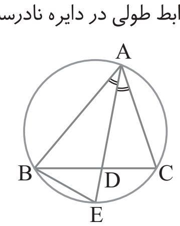
۴۳۹ (۴) دو مثلث ABE و ADC دو زاویهٔ مساوی دارند (زاویه‌های E و C هر دو محاطی روبه‌رو به کمان AB هستند و $B\hat{A}E=D\hat{A}C=\frac{\hat{A}}{۲}$)، پس متشابه‌اند. بنابراین اضلاع متناظر آن‌ها متناسب‌اند:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow AB\times AC=AD\times AE$$

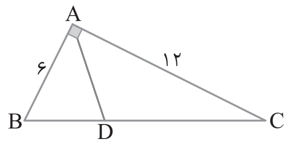
اگر در این تساوی به جای AE مقدار مساوی آن، یعنی $AD+DE$ را قرار دهیم، به دست می‌آید

$$AB\times AC=AD(AD+DE)=AD^۲+AD\times DE$$

بنابر روابط طولی در دایره $AD\times DE=BD\times DC$، پس $AD^۲=AB\times AC-BD\times DC$. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست هستند و گزینهٔ (۴) بنابر روابط طولی در دایره نادرست است.



۴۴۰ (۱) **راه‌حل اول** از شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۶^۲+۱۲^۲}=۶\sqrt{۵}$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیهٔ نیمسازها،

$$BD=\frac{BC\times AB}{AB+AC}=\frac{۶\sqrt{۵}\times ۶}{۱۸}=۲\sqrt{۵}$$

چون $DC=BC-BD$، پس $DC=۶\sqrt{۵}-۲\sqrt{۵}=۴\sqrt{۵}$. اکنون با استفاده از فرمول محاسبهٔ طول نیمساز می‌توان نوشت

$$AD^۲=AB\times AC-BD\times DC=۶\times ۱۲-۲\sqrt{۵}\times ۴\sqrt{۵}=۳۲$$

یعنی $AD=۴\sqrt{۲}$.

راه‌حل دوم چون $a=۶\sqrt{۵}$، $b=۱۲$ و $c=۶$، پس $P=\frac{a+b+c}{۲}=۹+۳\sqrt{۵}$. بنابراین

$$d_a=\frac{۲}{b+c}\sqrt{bcP(P-a)}=\frac{۲}{۱۸}\sqrt{۱۲\times ۶(۹+۳\sqrt{۵})(۹-۳\sqrt{۵})}$$

$$=\frac{۱}{۹}\sqrt{۲\times ۶\times ۶\times (۹^۲-۹\times ۵)}=\frac{۱}{۹}\sqrt{۲\times ۶\times ۶\times ۳۶}=۴\sqrt{۲}$$

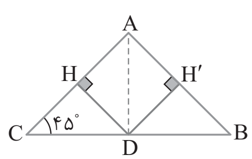
۴۴۱ (۲) می‌دانیم در هر مثلث نسبت طول دو ارتفاع برابر با عکس نسبت طول قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد می‌شوند. در نتیجه

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=\frac{۴}{۳}+\frac{۶}{۴}+\frac{۳}{۶}=\frac{۱۰}{۳}$$

۴۴۲ (۱) چون $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ و $\hat{A}+\hat{B}=۵\hat{C}$، پس $۵\hat{C}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$، یعنی $۶\hat{C}=۱۸۰^\circ$، بنابراین $\hat{C}=۳۰^\circ$. اکنون می‌توان مساحت مثلث را به صورت زیر به دست آورد:

$$S=\frac{۱}{۲}BC\times AC\times \sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times \frac{۱}{۲}=۶$$

۴۴۳ (۲) **راه‌حل اول** مساحت مثلث ABC را با S نشان می‌دهیم. مساحت را به دو روش به دست می‌آوریم:



$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times \sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۴}AC\times BC \quad (۱)$$

همچنین اگر عمود DH' را بر AB رسم کنیم، آن‌گاه

$$S=S_{ACD}+S_{ABD}=\frac{۱}{۲}DH\times AC+\frac{۱}{۲}DH'\times AB$$

چون D روی نیمساز زاویهٔ A است، پس $DH=DH'$، در نتیجه

$$S=\frac{۱}{۲}DH(AB+AC) \quad (۲)$$

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{۲}}{۴}AC\times BC=\frac{۱}{۲}DH(AB+AC)$$

بنابراین $\frac{AC\times BC}{DH(AB+AC)}=\sqrt{۲}$.

راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ نیمسازها $DC=\frac{BC\times AC}{AC+AB}$. همچنین

$$\sin\hat{C}=\sin ۴۵^\circ=\frac{DH}{DC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

یعنی $\frac{DC}{DH}=\sqrt{۲}$. پس $\frac{BC\times AC}{DH(AC+AB)}=\sqrt{۲}$

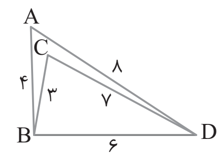
۴۴۴ (۱) به کمک دستور هرون مساحت‌های مثلث‌های ABD و BCD را به دست می‌آوریم. در مثلث ABD چون $P=\frac{۴+۸+۶}{۲}=۹$ ، پس

$$S_{ABD}=\sqrt{۹(۹-۴)(۹-۸)(۹-۶)}=\sqrt{۹\times۵\times۱\times۳}=۳\sqrt{۱۵}$$

در مثلث BCD چون $P=\frac{۳+۷+۶}{۲}=۸$ ، پس

$$S_{BCD}=\sqrt{۸(۸-۳)(۸-۷)(۸-۶)}=\sqrt{۸\times۵\times۱\times۲}=۴\sqrt{۵}$$

پس مساحت چهارضلعی مقعر ABCD مساوی $۳\sqrt{۱۵}-۴\sqrt{۵}$ است.



۴۴۵ (۲) چون $r=\frac{S}{P}$ و $r_a=\frac{S}{P-a}$ ، $r_b=\frac{S}{P-b}$ ، $r_c=\frac{S}{P-c}$. پس

$$r\,r_ar_br_c=\frac{S}{P}\times\frac{S}{P-a}\times\frac{S}{P-b}\times\frac{S}{P-c}=\frac{S^۴}{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

بنابر دستور هرون، $S^۲=P(P-a)(P-b)(P-c)$.

در نتیجه $r\,r_ar_br_c=\frac{S^۴}{S^۲}=S^۲$.

۴۴۶ (۱) با استفاده از قضیهٔ هرون مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\xrightarrow{P=\frac{۷+۴+۵}{۲}=۸}S=\sqrt{۸(۸-۵)(۸-۴)(۸-۷)}$$

$$=\sqrt{۸\times۳\times۴\times۱}=۴\sqrt{۶}$$

در هر مثلث، بزرگ‌ترین ارتفاع بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود، پس اگر h، طول بزرگ‌ترین ارتفاع این مثلث باشد، آن‌گاه

$$S=\frac{۱}{۲}a\times h\xrightarrow{a=۴}۴\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}\times۴h\Rightarrow h=۲\sqrt{۶}$$

۴۴۷ (۴) بنابر قضیهٔ استوارت،

$$AB^۲\times DC+AC^۲\times BD=AD^۲\times BC+DB\times DC\times BC$$

$$۱۶\times۶+۳۶\times۲=۸AD^۲+۲\times۶\times۸$$

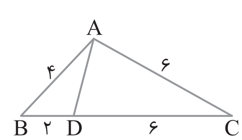
$$۹۶+۷۲=۸AD^۲+۹۶\Rightarrow AD^۲=۹\Rightarrow AD=۳$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ هرون مساحت مثلث ABD را پیدا می‌کنیم:

$$P=\frac{۴+۳+۲}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

$$S_{ABD}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{\frac{۹}{۲}(\frac{۹}{۲}-۴)(\frac{۹}{۲}-۳)(\frac{۹}{۲}-۲)}$$

$$=\sqrt{\frac{۹}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۵}{۲}}=\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۵}$$

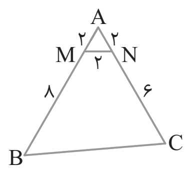


۴۴۸ (۴) مثلث AMN مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ است، پس $\hat{A}=۶۰^\circ$. بنابراین

$$S_{MNCB}=S_{ABC}-S_{AMN}$$

$$=\frac{۱}{۲}AB\times AC\sin۶۰^\circ-\frac{۱}{۲}AM\times AN\sin۶۰^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱۰)(۸)(\frac{\sqrt{۳}}{۲})-\frac{۱}{۲}(۲)(۲)(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۲۰\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۱۹\sqrt{۳}$$



۴۴۹ (۲) ابتدا با استفاده از روابط طولی در دایره طول BD و DC را به‌دست می‌آوریم:

$$BD^۲=BM\times BA=۱\times۴=۴\Rightarrow BD=۲$$

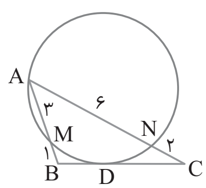
$$CD^۲=CN\times CA=۲\times۸=۱۶\Rightarrow CD=۴$$

پس $BC=۶$. اکنون به کمک قضیهٔ هرون مساحت ABC را پیدا می‌کنیم:

$$P=\frac{۴+۸+۶}{۲}=۹$$

$$S_{ABC}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۹(۹-۴)(۹-۸)(۹-۶)}$$

$$=\sqrt{۹\times۵\times۱\times۳}=۳\sqrt{۱۵}$$



۴۵۰ (۲) شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث BCD از رابطهٔ $r=\frac{S}{P}$ به‌دست می‌آید. برای محاسبهٔ مساحت مثلث BCD ، قطر BD را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD بنابر قضیهٔ فیثاغورس.

$$BD^۲=AB^۲+AD^۲=۶۰^۲+۸۰^۲=۱۰۰۰۰\Rightarrow BD=۱۰۰$$

به کمک قضیهٔ هرون مساحت مثلث BCD را به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۹۰+۵۰+۱۰۰}{۲}=۱۲۰$$

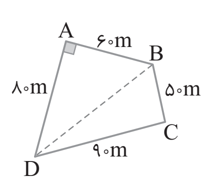
$$S_{BCD}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$=\sqrt{۱۲۰(۱۲۰-۹۰)(۱۲۰-۵۰)(۱۲۰-۱۰۰)}$$

$$=\sqrt{۱۲۰\times۳۰\times۷۰\times۲۰}=۱۰۰\sqrt{۱۲\times۳\times۷\times۲}$$

$$=۱۰۰\sqrt{۶\times۶\times۱۴}=۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

بنابراین $r=\frac{S}{P}=\frac{۶۰۰\sqrt{۱۴}}{۱۲۰}=۵\sqrt{۱۴}$.



۴۵۱ (۳) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}=\frac{a}{b}$$

بنابر فرض سؤال،

$$a=(۲b^۲-۳)\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}\Rightarrow a=(۲b^۲-۳)\times\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{۲b^۲-۳}{b}=۱$$

$$۲b^۲-b-۳=۰\Rightarrow b=-۱, b=\frac{۳}{۲}$$

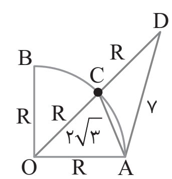
$b=-۱$ قابل قبول نیست، پس $b=\frac{۳}{۲}$.

۴۵۲ (۱) فرض می‌کنیم R شعاع ربع دایره باشد. بنابر فرض سؤال، داده‌های روی شکل را خواهیم داشت. پس در مثلث OAD پاره‌خط AC میانه است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ میانه‌ها،

$$OA^۲+AD^۲=۲AC^۲+\frac{OD^۲}{۲}\Rightarrow R^۲+۴۹=۲(۲\sqrt{۳})^۲+\frac{(۲R)^۲}{۲}$$

$$R^۲+۴۹=۲۴+۲R^۲\Rightarrow R^۲=۲۵\Rightarrow R=۵$$

بنابراین $\text{مساحت ربع دایره}=\frac{\pi R^۲}{۴}=\frac{\pi(۵)^۲}{۴}=\frac{۲۵}{۴}\pi$.



۴۵۳ (۴) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=۲b=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{a}{۲b},\sin\hat{C}=\frac{c}{۲b}$$

اکنون بنابر فرض،

$$\sin\hat{A}+\sin\hat{C}=a+c$$

$$\frac{a}{۲b}+\frac{c}{۲b}=a+c\Rightarrow\frac{a+c}{۲b}=a+c\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

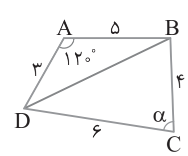
۴۵۴ (۲) ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$\triangle ABD: BD^۲=AB^۲+AD^۲-۲AB\times AD\cos ۱۲۰^\circ$$

$$BD^۲=۳^۲+۵^۲-۲(۵)(۳)(-\frac{۱}{۲})=۹+۲۵+۱۵=۴۹\Rightarrow BD=۷$$

$$\triangle BCD: BD^۲=BC^۲+DC^۲-۲BC\times DC\cos\alpha$$

$$۷^۲=۴^۲+۶^۲-۲(۴)(۶)\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱}{۱۶}$$



۴۵۵ (۴) با استفاده از قضیهٔ استوارت در مثلث ABC می‌نویسیم:

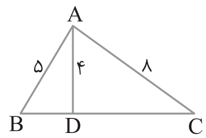
$$AB^۲\times DC+AC^۲\times BD=AD^۲\times BC+BD\times DC\times BC$$

با فرض $BD=x$، نتیجه می‌گیریم $CD=۲x$. پس

$$۵^۲(۲x)+۸^۲(x)=۴^۲(۳x)+(x)(۲x)(۳x)$$

$$۵۰x+۶۴x=۴۸x+۶x^۳\Rightarrow ۶x^۳=۶۶x\Rightarrow x^۲=۱۱\Rightarrow x=\sqrt{۱۱}$$

بنابراین $\text{(مثلث ADC) محیط}=۸+۴+۲\sqrt{۱۱}=۱۲+۲\sqrt{۱۱}$.



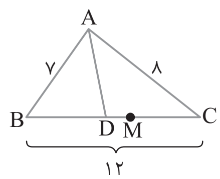
۴۵۶ (۲) با توجه به شکل زیر، زاویهٔ A زاویهٔ بزرگ‌تر مثلث ABC است و AD نیمساز $\hat{A}$ است. با استفاده از قضیهٔ نیمساز می‌نویسیم

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۷}{۸}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BD+DC}=\frac{۷}{۷+۸}\Rightarrow\frac{BD}{۱۲}=\frac{۷}{۱۵}$$

$$BD=\frac{۲۸}{۵}$$

در ضمن اگر M وسط BC باشد، آن‌گاه $BM=۶$. پس

$$DM=BM-BD=۶-\frac{۲۸}{۵}=\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}=۰/۴$$



۴۵۷ (۲) ابتدا با استفاده از قضیهٔ هرون مساحت مثلث BDC را به‌دست می‌آوریم:

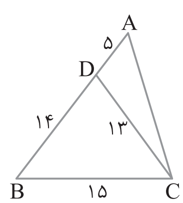
$$P=\frac{۱۴+۱۳+۱۵}{۲}=\frac{۴۲}{۲}=۲۱$$

$$S_{BDC}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۵)}$$

$$=\sqrt{۲۱\times۷\times۸\times۶}=\sqrt{۲۱\times۲۱\times۱۶}=۲۱\times۴=۸۴$$

از طرف دیگر دو مثلث BDC و ABC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{BDC}}{S_{ABC}}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{۸۴}{S_{ABC}}=\frac{۱۴}{۱۹}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۸۴\times۱۹}{۱۴}=۶\times۱۹=۱۱۴$$



۴۵۸ (۳) A روی عمودمنصف DC است، پس $AC=AD=۴۱$.
اکنون مساحت مثلث ADC را به کمک قضیهٔ هرون به‌دست می‌آوریم:

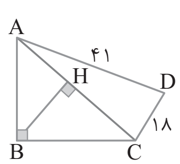
$$P=\frac{۴۱+۴۱+۱۸}{۲}=۵۰$$

$$S_{ADC}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۵۰(۵۰-۴۱)(۵۰-۴۱)(۵۰-۱۸)}$$

$$=\sqrt{۵۰\times۹\times۹\times۳۲}=۹\sqrt{۲۵\times۲\times۱۶\times۲}=۹\times۵\times۲\times۴=۳۶۰$$

بنابراین $S_{ABC}=S_{ABCD}-S_{ADC}=۴۰۱-۳۶۰=۴۱$. فاصلهٔ B از قطر AC برابر عمود BH است. پس

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH\times AC\Rightarrow ۴۱=\frac{۱}{۲}BH\times۴۱\Rightarrow BH=۲$$



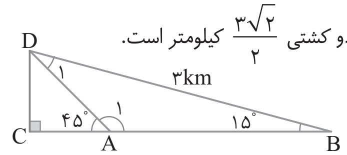
۴۵۹ (۲) زاویهٔ DAC زاویهٔ خارجی مثلث ABD است، بنابراین

$$۴۵^\circ=\hat{D}_۱+۱۵^\circ\Rightarrow\hat{D}_۱=۳۰^\circ$$

در مثلث ABD بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

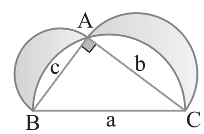
$$\frac{AB}{\sin\hat{D}_۱}=\frac{BD}{\sin\hat{A}_۱}\Rightarrow\frac{AB}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۳}{\sin ۱۳۵^\circ}\Rightarrow\frac{AB}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow AB=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین فاصلهٔ دو کشتی $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ کیلومتر است.



۴۶۰ (۲) بزرگ‌ترین میانه، میانهٔ وارد بر کوچک‌ترین ضلع است، یعنی باید m_a را به‌دست آوریم. بنابر قضیهٔ میانه‌ها، $b^۲+c^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}$. پس $۱۶+۹=۲m_a^۲+\frac{۷}{۲}$. با حل این معادله به دست می‌آید $m_a=\frac{\sqrt{۴۳}}{۲}$.

۴۶۱ (۲) از شکل مقابل استفاده می‌کنیم.



بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$a^۲=b^۲+c^۲$ (۱)

توجه کنید که مساحت کل شکل برابر است با

(مساحت مثلث ABC) + (مجموع مساحت‌های نیم‌دایره‌های به قطرهای b و c)

یعنی

مساحت کل شکل $=\frac{۱}{۲}\pi(\frac{b}{۲})^۲+\frac{۱}{۲}\pi(\frac{c}{۲})^۲+\frac{bc}{۲}=\frac{\pi}{۸}(b^۲+c^۲)+\frac{bc}{۲}$ (۲)

از طرف دیگر، مساحت کل شکل برابر است با

(مجموع مساحت‌های دو ناحیهٔ رنگی) + (مساحت نیم‌دایرهٔ به قطر a)

یعنی

مساحت کل شکل $=\frac{\pi}{۸}a^۲+$ (مجموع مساحت‌های دو ناحیهٔ رنگی) (۳)

از مقایسهٔ برابری‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

مجموع مساحت‌های دو ناحیهٔ رنگی $=\frac{bc}{۲}=\frac{۳\times۴}{۲}=۶$

۴۶۲ (۴) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۳}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{۳}{۲}>۱$$

در نتیجه چنین مثلثی وجود ندارد.

۴۶۳ (۴) اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ سینوس‌ها $a=۲R\sin\hat{A}$ و $b=۲R\sin\hat{B}$. بنابراین از تساوی $ab=۶۴\sin\hat{A}\sin\hat{B}$ نتیجه می‌گیریم

$$۴R^۲\sin\hat{A}\sin\hat{B}=۶۴\sin\hat{A}\sin\hat{B}\Rightarrow ۴R^۲=۶۴$$

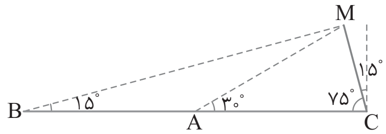
پس $R=۴$.

۴۶۴ (۱) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث AMC،

$$\frac{AM}{\sin ۷۵^\circ}=\frac{MC}{\sin ۳۰^\circ}\xrightarrow[MC=۵]{\sin ۷۵^\circ\simeq ۰/۹۵}\frac{AM}{۰/۹۵}=\frac{۵}{۰/۵}$$

بنابراین $AM=۹/۵$. از طرف دیگر زاویهٔ MAC زاویهٔ خارجی مثلث AMB است، پس $M\hat{A}C=A\hat{M}B+\hat{B}$، در نتیجه $A\hat{M}B=۱۵^\circ$. به عبارت دیگر مثلث AMB در رأس A، متساوی‌الساقین است. در نتیجه

$$AB=AM=۹/۵$$



۴۶۵ (۲) از تساوی داده شده نتیجه می‌گیریم

$$a^۴-۲(b^۲+c^۲)a^۲+b^۴+c^۴=۰$$

با حل این معادله نسبت به $a^۲$ به دست می‌آید

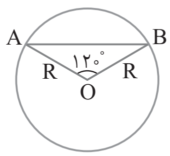
$a^۲=b^۲+c^۲\pm\sqrt{۲}\,bc$ (۱)

بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها، $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$ (۲)

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\cos\hat{A}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. در نتیجه

$\hat{A}=۴۵^\circ$ یا $\hat{A}=۱۳۵^\circ$

۴۶۶ (۳) در مثلث OAB بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،



$$AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA\times OB\times\cos ۱۲۰^\circ$$

$$=R^۲+R^۲-۲R\times R\times(-\frac{۱}{۲})=۳R^۲$$

پس $AB=\sqrt{۳}R$.

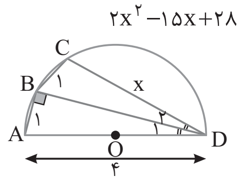
۴۶۷ (۳) به شکل زیر توجه کنید که در آن BD وتری از دایره است. در مثلث ABD چون $\hat{B}$ محاطی مقابل به قطر است، پس $\hat{B}=۹۰^\circ$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $BD=\sqrt{AD^۲-AB^۲}=\sqrt{۱۶-۱}=\sqrt{۱۵}$

چون دو وتر AB و BC با هم برابرند، پس کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند $(\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC})$ و در نتیجه $\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$. از طرف دیگر در مثلث ABD، $\cos\hat{D}_۱=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$، پس $\cos\hat{D}_۲=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$. اکنون بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BCD،

$$BC^۲=CD^۲+BD^۲-۲CD\times BD\times\cos\hat{D}_۲$$

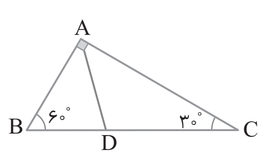
$$۱=x^۲+۱۵-۲x\times\sqrt{۱۵}\times\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$۲x^۲-۱۵x+۲۸=۰\Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=۳/۵$$

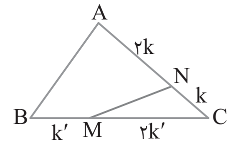


در نتیجه $x=CD=۳/۵$. توجه کنید که $x=۴$ قابل قبول نیست زیرا باید $CD<AD=۴$.

۴۶۸ (۱) از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\tan ۳۰^\circ=\frac{AB}{AC}$، یعنی $\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$. از طرف دیگر چون AD نیمساز زاویهٔ A است، پس $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$. اکنون توجه کنید که چون دو مثلث ABD و ACD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}$. بنابراین $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$.



۴۶۹ (۳) چون $\frac{CN}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{۱}{۳}$ پس اعدادی مانند k و k' وجود دارند به طوری که



$CN=k,\quad AC=۳k$

$BM=k',\quad BC=۳k'$

اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}CN\times CM\times \sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}AC\times BC\times \sin\hat{C}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times k\times ۲k'\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}\times ۳k\times ۳k'\sin\hat{C}}=\frac{۲}{۹}$$

۴۷۰ (۲) چون

$$r=\frac{S}{P},\quad r_a=\frac{S}{P-a},\quad r_b=\frac{S}{P-b},\quad r_c=\frac{S}{P-c}$$
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

پس

$$r\,r_a r_b r_c=\frac{S^۴}{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\frac{S^۴}{S^۲}=S^۲ \qquad (۱)$$

همچنین $h_a=\frac{۲S}{a}$ ، $h_b=\frac{۲S}{b}$ و $h_c=\frac{۲S}{c}$. بنابراین

$$h_a\,h_b\,h_c=\frac{۸S^۳}{abc} \qquad (۲)$$

با توجه به برابری‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{r\,r_a\,r_b\,r_c}{h_a\,h_b\,h_c}=\frac{S^۲}{\frac{۸S^۳}{abc}}=\frac{abc}{۸S}$$

می‌دانیم اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $R=\frac{abc}{۴S}$. پس

$$\frac{r\,r_a\,r_b\,r_c}{h_a h_b h_c}=\frac{۱}{۲}R=\frac{۱}{۲}\times ۱۶=۸$$

۴۷۱ (۱) چون $a_{ij}=i^۳+j^۳+ij$ ، پس به ازای هر i و j به‌دست می‌آید $a_{ij}=a_{ji}$. پس درایه‌های بالای قطر اصلی و درایه‌های پایین قطر اصلی نظیربه‌نظیر با هم برابرند. در نتیجه $x=y$ ، یعنی $\frac{x}{y}=۱$.

۴۷۲ (۱) طرفین برابری اول را در ۲ و طرفین برابری دوم را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا ماتریس A به‌دست آید:

$$\begin{cases}۴A+۶B=\begin{bmatrix}۴ & ۱۰\\ -۲ & ۸\end{bmatrix}\\ ۹A-۶B=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۶ & -۶\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow ۱۳A=\begin{bmatrix}۷ & ۱۰\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$$

یعنی $A=\begin{bmatrix}\frac{۷}{۱۳} & \frac{۱۰}{۱۳}\\ \frac{۴}{۱۳} & \frac{۲}{۱۳}\end{bmatrix}$. بنابراین

مجموع درایه‌های قطر اصلی A $=\frac{۷}{۱۳}+\frac{۲}{۱۳}=\frac{۹}{۱۳}$

۴۷۳ (۳) از برابری $۲A-B=I$ به‌دست می‌آید

$$B=۲A-I=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۴ & ۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}$$

بنابراین $۱-۲+۴-۱=۲$ = مجموع درایه‌های ماتریس B .

۴۷۴ (۲) به سادگی می‌توان نشان داد

$$\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ a & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ b & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ a+b & ۱\end{bmatrix}$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱+۲+\cdots+n & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ \frac{n(n+۱)}{۲} & ۱\end{bmatrix}$.

چون درایهٔ سطر دوم و ستون اول A برابر ۵۵ است، پس

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=۵۵\Rightarrow n=۱۰$$

۴۷۵ (۲) دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر برابر باشند:

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}۲m+n=۵\\ m-n=-۲\end{cases}\Rightarrow ۳m=۳\Rightarrow m=۱\Rightarrow n=۳$$
$$\begin{cases}p+۳=-t\\ p+۲=t-۱\end{cases}\Rightarrow ۲p+۵=-۱\Rightarrow p=-۳\Rightarrow t=۰$$

بنابراین $۲m-n+p+۳t=۲(۱)-۳-۳+۰=-۴$.

۴۷۶ (۴) ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}a & ۱\\ -۱ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & ۱\\ -۱ & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲-۱ & ۲a\\ -۲a & a^۲-۱\end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ برابر صفر است، پس

$$a^۲-۱+۲a-۲a+a^۲-۱=۰\Rightarrow ۲a^۲=۲\Rightarrow a=\pm ۱$$

پس مجموع مقادیر a برابر صفر است.

۴۷۷ (۲) ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۶\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}=۲A$$

می‌دانیم اگر $A^۲=kA$ ، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی n، $A^n=k^{n-۱}A$ ، پس $A^۶=۲^۵A=۳۲A$. بنابراین $k=۳۲$.

۴۷۸ (۲) از تساوی $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ نتیجه می‌گیریم $AB=BA$. پس

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & x\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & y\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳x+۱ & x+y\\ ۵ & ۲y+۱\end{bmatrix}$$
$$BA=\begin{bmatrix}۱ & y\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & x\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲y+۱ & x+y\\ ۵ & ۳x+۱\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AB=BA\Rightarrow ۳x+۱=۲y+۱\Rightarrow ۳x=۲y\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{۳}{۲}$$

۴۷۹ **۱** راه‌حل اول ابتدا ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&4\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\7&8\end{bmatrix}$$

از فرض تست نتیجه می‌گیریم

$$A^3=\alpha A+\beta I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\7&8\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta&0\\\alpha&2\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\\alpha=7\end{cases}\Rightarrow\beta=-6$$

دقت کنید چون مقادیر $\alpha=7$ و $\beta=-6$ در تساوی $2\alpha+\beta=8$ نیز صدق می‌کنند، پس این مقادیر قابل قبول هستند، پس $\alpha-\beta=7+6=13$.

راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ کیلی ـ همیلتون،

$$A^2=(1+2)A-(2-0)I_2\Rightarrow A^2=3A-2I_2$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{در } A} A^3=3A^2-2A$$

$$A^3=3(3A-2I_2)-2A\Rightarrow A^3=9A-6I_2-2A\Rightarrow A^3=7A-6I_2$$

با مقایسهٔ این تساوی با $A^3=\alpha A+\beta I_2$، نتیجه می‌گیریم $\alpha=7$ و $\beta=-6$. پس

$$\alpha-\beta=13$$

۴۸۰ **۲** راه‌حل اول از تساوی $A^2-A+I=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^2=A-I$. پس

$$A^4=A^2\times A^2=(A-I)(A-I)=A^2-2A+I$$

$$\xrightarrow{A^2=A-I} A^4=A-I-2A+I=-A$$

بنابراین

$$A^{400}=(A^4)^{100}=(-A)^{100}=A^{100}=(A^4)^{25}=(-A)^{25}$$
$$=-(A^4)^6\times A=-(-A)^6\times A=-A^7=-A^4\times A^3$$
$$=-(-A)A^3=A^4=-A$$

راه حل دوم طرفین فرض را در $A+I$ ضرب می‌کنیم:

$$(A+I)(A^2-A+I)=\bar{O}\Rightarrow A^3+I=\bar{O}\Rightarrow A^3=-I$$

اکنون می‌توان نوشت $A^{400}=(A^3)^{133}A=(-I)^{133}A=-IA=-A$

۴۸۱ **۳** از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix}m&-6\\-1&n\end{bmatrix}=[i^2-3j]_{2\times2}-[i]_{2\times2}=[i^2-i-3j]_{2\times2}$$

اگر $A=\begin{bmatrix}m&-6\\-1&n\end{bmatrix}$، آن‌گاه چون $a_{11}=m$ و $a_{22}=n$، پس $m=1-1-3=-3$ و $n=4-2-6=-4$، بنابراین $m+n=-3-4=-7$.

۴۸۲ **۴** ابتدا دو معادلهٔ داده شده را با هم جمع می‌کنیم، در این صورت $2X=A+B$. اکنون معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم

$$2Y=A-B\Rightarrow Y=\frac{A-B}{2}$$

در نتیجه $2X+Y=A+B+\frac{A-B}{2}=\frac{3A+B}{2}$، یعنی

$$2X+Y=\left[\frac{3(i-j)+i+j}{2}\right]_{2\times2}=[2i-j]_{2\times2}$$

پس $2X+Y=\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}$. در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $2X+Y$ برابر است با $1+0+3+2=6$.

۴۸۳ **۱** برای تعریف شدن ماتریس BC باید $n=3$. فرض کنید $D=BC$، در این صورت D ماتریسی از مرتبهٔ $m\times5$ است. از طرف دیگر، برای تعریف شدن ضرب ماتریسی $A_{2\times3}D_{m\times5}$ باید $m=3$. بنابراین $m+n=3+3=6$.

۴۸۴ **۱** چون $c_{13}=-2$، پس

$$\begin{bmatrix}a&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}=3a+2-1=-2$$

یعنی $a=-1$. همچنین از $c_{22}=0$ به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix}2&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\2\\2\end{bmatrix}=2b+8=0$$

یعنی $b=-4$. اکنون به‌دست می‌آید $a+b=-1-4=-5$.

۴۸۵ **۳** ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}120&144\\-100&-120\end{bmatrix}\begin{bmatrix}120&144\\-100&-120\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$$

بنابراین $A^{1399}=\bar{O}$.

۴۸۶ **۳** ماتریس $A+I$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

اکنون $(A+I)^2$ و $(A+I)^3$ را به‌دست می‌آوریم تا شاید بتوان از روی آن‌ها جواب را به‌دست آورد:

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^3=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&13\\13&14\end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های بالا، اگر درایهٔ واقع در سطر اول و ستون دوم را از درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول کم کنیم، حاصل برابر ۱ می‌شود، پس می‌توان حدس زد که $a-b=1$. توجه کنید که این استدلال برای تست به‌کار می‌رود و در مسئله‌های تشریحی جواب نمی‌دهد.

۴۸۷ (۴) بنابر فرض‌های مسئله،

$$A^3+B^3=AA^2+BB^2=AA+B(B-I)$$

$$=A^2+B^2-B=A+B-I-B=A-I$$

۴۸۸ (۱) بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون، $A^2=(1+0)A-(0+1)I=A-I$.
دو طرف این برابری را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^4=(A-I)(A-I)=A^2-2A+I$$

به جای A^2 مقدار $A-I$ را قرار می‌دهیم، در این صورت $A^4=(A-I)-2A+I=-A$. یعنی $\alpha=-1$ و $\beta=0$. در نتیجه $\alpha+\beta=-1$.

۴۸۹ (۱) بنابر فرض، $A^2+A+I=\bar{O}$. دو طرف این برابری را در $A-I$ ضرب می‌کنیم، در این صورت $(A-I)(A^2+A+I)=(A-I)\times\bar{O}$ ، یعنی $A^3-I=\bar{O}$ ، پس $A^3=I$. اکنون به‌دست می‌آید

$$A^{1398}=(A^3)^{466}=I^{466}=I$$

۴۹۰ (۳) توان‌های ماتریس A را تا جایی که بتوان حدس زد A^n چگونه است، به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2^2-1&2^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2^3-1&2^3\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\15&16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2^4-1&2^4\end{bmatrix}$$

می‌توان ثابت کرد به‌ازای هر عدد طبیعی n، $A^n=\begin{bmatrix}1&0\\2^n-1&2^n\end{bmatrix}$. در نتیجه

$$2^{n+1}=\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A^n$$

بنابر فرض مسئله $2^{n+1}=2^{10}$ ، در نتیجه $n=9$.

۴۹۱ (۴) تساوی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^3-2A^2+4A=-2I\Rightarrow A(A^2-2A+4I)=-2I$$

$$A\left(\frac{A^2-2A+4I}{-2}\right)=I\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}A^2+A-2I\right)=I$$

بنابراین A وارون‌پذیر است و $A^{-1}=-\frac{1}{2}A^2+A-2I$.

۴۹۲ (۴) از دو طرف تساوی $A^2=3I$ ، ماتریس $4I$ را کم می‌کنیم:

$$A^2=3I\Rightarrow A^2-4I=-I\Rightarrow(A-2I)(A+2I)=-I$$

$$(A-2I)(-A-2I)=I$$

چون حاصل‌ضرب دو ماتریس برابر ماتریس همانی است، پس این دو ماتریس وارون یکدیگرند، یعنی $(A-2I)^{-1}=-A-2I$.

۴۹۳ (۱) از $AC+2I=B$ به‌دست می‌آید $AC=B-2I$. برابری اخیر را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم

$$C=A^{-1}B-2A^{-1}\quad(1)$$

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{9-8}\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$$

اکنون از برابری (۱) ماتریس C را به‌دست می‌آوریم:

$$C=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&1\\-6&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-4\\-8&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&5\\2&-7\end{bmatrix}$$

۴۹۴ (۴) **راه‌حل اول** ابتدا ماتریس A^{-1} را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{9-8}\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$$

اکنون از برابری $\alpha A+\beta I=A^{-1}$ به‌دست می‌آید

$$\alpha\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\alpha+\beta&2\alpha\\4\alpha&3\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-4&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2\alpha=-2\longrightarrow\alpha=-1\\3\alpha+\beta=3\xrightarrow{\alpha=-1}\beta=6\end{cases}$$

توجه کنید که $\alpha=-1$ در معادلهٔ $4\alpha=-4$ نیز صدق می‌کند، پس $\alpha+\beta=5$.

راه‌حل دوم طرفین برابری $\alpha A+\beta I=A^{-1}$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$\alpha A^2+\beta A=I\Rightarrow A^2=-\frac{\beta}{\alpha}A+\frac{1}{\alpha}I$$

بنابر قضیهٔ کیلی - همیلتون،

$$A^2=(3+3)A-(9-8)I=6A-I$$

با مقایسهٔ این دو برابری به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}-\frac{\beta}{\alpha}=6\\\frac{1}{\alpha}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=6\\\alpha=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=5$$

۴۹۵ (۱) چون A وارون‌پذیر نیست، پس $|A|=0$ ، یعنی

$$3a+3-2a+2=0\Rightarrow a=-5$$

بنابراین $B=\begin{bmatrix}1&1\\-5&3\end{bmatrix}$. پس

$$B^{-1}=\frac{1}{3+5}\begin{bmatrix}3&-1\\5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\\\frac{5}{8}&\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

درنهایت $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=1$ = مجموع درایه‌های B^{-1} .

۴۹۶ (۴) از برابری $AX+2I=4A$ به‌دست می‌آید $AX=4A-2I$. در نتیجه $X=4A^{-1}A-2A^{-1}$ ، پس $X=4I-2A^{-1}$. بنابراین

$$X=4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-2\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&4\\1&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های X برابر ۸ است.

۴۹۷ (۳) از ماتریس $(A+I)^{-1}$ وارون می‌گیریم تا ماتریس $A+I$ به‌دست آید.

$$A+I=\begin{bmatrix}4&2\\3&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\-\frac{3}{2}&2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\-\frac{3}{2}&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$$

بنابراین:
$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1\\-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-1\\-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$4(A^2-A)=4\left(\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-1\\-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=4\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&0\\0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}=6I$$

۴۹۸ (۲) می‌دانیم $|B^{-1}|$ مساوی $\frac{1}{|B|}$ است. در اینجا $|B|=-2$ پس $|B^{-1}|=\frac{1}{-2}$. از طرف دیگر وارون ماتریس A^{-1} برابر A است. بنابراین

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}^{-1}\Rightarrow A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&-2\\0&1\end{bmatrix}$$

در نتیجه
$$|B^{-1}|A=\frac{1}{-2}\times\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&-2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $|B^{-1}|A$ برابر است با $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$.

۴۹۹ (۱) ابتدا عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم، سپس از برابری $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ استفاده می‌کنیم.

$$(A^{-1}+B)(B^{-1}-A)=A^{-1}B^{-1}-I+I-BA$$

$$=A^{-1}B^{-1}-BA=(BA)^{-1}-BA$$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-2&5\\-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-5\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-5\\1&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-5\\1&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $(A^{-1}+B)(B^{-1}-A)$ برابر -2 است.

۵۰۰ (۴) از تساوی $BA=I$ نتیجه می‌گیریم A وارون B است و از تساوی $CB=I$ نتیجه می‌گیریم C وارون B است. چون وارون هر ماتریس در صورت وجود یکتاست پس $A=C$، بنابراین

$$C^2=A^2=\begin{bmatrix}3&-2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-4\\2&-1\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس C^2 برابر -2 است.

۵۰۱ (۴) دستگاه معادلات داده شده را می‌توان به صورت تساوی ماتریسی $AX=B$ نوشت. در صورتی این دستگاه به روش ماتریس وارون قابل حل نیست که ماتریس ضرایب A وارون‌پذیر نباشد، پس باید $|A|$ برابر صفر باشد

$$|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1&-3\\-3&m\end{vmatrix}=0\Rightarrow m-9=0\Rightarrow m=9$$

۵۰۲ (۱) چون دستگاه داده شده بی‌شمار جواب دارد، پس

$$\frac{m+1}{1}=\frac{3}{m-1}=\frac{m}{-m}\Rightarrow m^2-1=3\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm2$$

اگر $m=2$، آن‌گاه تناسب بالا به‌صورت $3=3=-1$ است که درست نیست.
اگر $m=-2$، آن‌گاه تناسب بالا به‌صورت $-1=-1=-1$ است که درست است. بنابراین به ازای $m=-2$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۵۰۳ (۳) جواب‌های دستگاه معادلات $AX=B$ به روش ماتریس وارون به‌صورت زیر است:

$$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\k\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?\\4\end{bmatrix}\Rightarrow y=4$$

۵۰۴ (۳) در دستگاه $\begin{cases}ax+4y=7\\2x+by=4\end{cases}$، ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix}a&4\\2&b\end{bmatrix}$ است و بنابر فرض، $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&c\\-2&3\end{bmatrix}$.

$$A=\begin{bmatrix}a&4\\2&b\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ab-8}\begin{bmatrix}b&-4\\-2&a\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{ab-8}\begin{bmatrix}b&-4\\-2&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&c\\-2&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\frac{-2}{ab-8}=-2\Rightarrow ab-8=1\Rightarrow ab=9\\\frac{-4}{ab-8}=c\Rightarrow c=-4\end{cases}$$

بنابراین
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}\Rightarrow x=5,\quad y=-2$$

پس $x+y+xy=5-2-10=-7$.

۵۰۵ (۴) در حل دستگاه $AX=B$ به روش ماتریس وارون جواب‌ها به‌صورت $X=A^{-1}B$ محاسبه می‌شوند. در اینجا $A=\begin{bmatrix}a&2\\c&-5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$، پس $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}-5&-2\\-c&a\end{bmatrix}$.

چون $|A|=17$، پس $A^{-1}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-5&-2\\-c&a\end{bmatrix}$. بنابراین

$$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-5&-2\\-c&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-34\\?\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\?\end{bmatrix}$$

در نتیجه $x=-2$ (توجه کنید مقدار y مورد نظر نیست برای همین سطر دوم جواب را محاسبه نکردیم).

۵۰۶ (۴) دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ در صورتی بی‌شمار جواب دارد که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. بنابراین در دستگاه معادلات داده شده،

$$\frac{m}{m+۶}=\frac{m-۳}{-(m+۲)}=\frac{۲m+۱}{۱۰+۵m} \qquad (۱)$$

از تساوی $\frac{m}{m+۶}=\frac{۲m+۱}{۱۰+۵m}$ مقدار m را به‌دست می‌آوریم

$$m(۱۰+۵m)=(m+۶)(۲m+۱)\Rightarrow ۱۰m+۵m^۲=۲m^۲+۱۳m+۶$$

$$۳m^۲-۳m-۶=۰\Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$(m-۲)(m+۱)=۰\Rightarrow m=۲ \text{ یا } m=-۱$$

به‌ازای $m=۲$ برابری (۱) به‌صورت $\frac{۲}{۸}=\frac{-۱}{-۴}=\frac{۵}{۲۰}$ در می‌آید که درست است.

به‌ازای $m=-۱$ برابری (۱) به‌صورت $\frac{-۱}{۵}=\frac{-۴}{-۱}=\frac{-۱}{۵}$ در می‌آید که نادرست است.

پس $m=۲$ قابل قبول است.

۵۰۷ (۳) شرط جواب نداشتن این دستگاه به‌صورت زیر است:

$$\frac{m+۲}{۶}=\frac{-۱}{-(m+۱)}\neq\frac{۴}{۵} \qquad (۱)$$

$$\frac{m+۲}{۶}=\frac{-۱}{-(m+۱)}\Rightarrow (m+۲)(m+۱)=۶\Rightarrow m^۲+۳m-۴=۰$$

$$(m+۴)(m-۱)=۰\Rightarrow m=-۴ \text{ یا } m=۱$$

به ازای $m=-۴$ برابری (۱) به‌صورت $\frac{-۲}{۶}=\frac{۱}{-۳}\neq\frac{۴}{۵}$ در می‌آید که درست است.

به‌ازای $m=۱$ برابری (۱) به‌صورت $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\neq\frac{۴}{۵}$ در می‌آید که درست است.

پس هر دو مقدار ۴- و ۱ قابل‌قبول هستند. اکنون این مقادیر را در دستگاه دوم جایگزین می‌کنیم:

$$m=-۴\Rightarrow\begin{cases}x+y=-۲\\-۴x-۴y=۸\end{cases}$$

چون $\frac{-۲}{۸}=\frac{۱}{-۴}=\frac{۱}{-۴}$، پس در این حالت دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

$$m=۱\Rightarrow\begin{cases}x+y=-۲\\-۴x+y=۸\end{cases}$$

چون $\frac{۱}{-۴}\neq\frac{۱}{۱}$، پس در این حالت دستگاه یک جواب دارد.

۵۰۸ (۱) در حل دستگاه به روش ماتریس وارون، $X=A^{-۱}B$. در اینجا $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$. بنابراین

$$X=A^{-۱}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\-۲\end{bmatrix}$$

$$x=۵\,,\ y=-۲$$

از طرف دیگر وارون ماتریس $A^{-۱}$ همان ماتریس ضرایب یعنی $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ است. در نتیجه

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$a=۰,\ b=-۱,\ c=-۱,\ d=-۲$$

بنابراین $cy+bx+ad=(-۱)(-۲)+(-۱)(۵)+(۰)(-۲)=۲-۵+۰=-۳$

۵۰۹ (۲) دستگاه معادلات داده شده در صورتی بی‌شمار جواب دارد که

$$\frac{m}{۴}=\frac{-۳}{m-۸}=\frac{۵}{۳m+۴} \qquad (۱)$$

$$\frac{m}{۴}=\frac{-۳}{m-۸}\Rightarrow m^۲-۸m+۱۲=۰\Rightarrow(m-۶)(m-۲)=۰$$

$$m=۶ \text{ یا } m=۲$$

به‌ازای $m=۶$ برابری (۱) به‌صورت $\frac{۶}{۴}=\frac{-۳}{-۲}=\frac{۵}{۲۲}$ در می‌آید که نادرست است.

به ازای $m=۲$ برابری (۱) به‌صورت $\frac{۲}{۴}=\frac{-۳}{-۶}=\frac{۵}{۱۰}$ در می‌آید که درست است.

پس به ازای $m=۲$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

$$M=\begin{bmatrix}۲m-۱&\frac{m}{۲}\\m-۳&m-۲\end{bmatrix}\xrightarrow{m=۲}M=\begin{bmatrix}۳&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}$$

$$M^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۳\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $M^{-۱}$ برابر ۳ است.

۵۱۰ (۲) حل این دستگاه به روش ماتریس وارون به‌صورت زیر است:

$$X=A^{-۱}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۱\\-۷&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\k^۲-۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴k-k^۲+۱\\-۷k+۲k^۲-۲\end{bmatrix}$$

پس $x=۴k-k^۲+۱$ و $y=-۷k+۲k^۲-۲$، از طرف دیگر بنابر فرض سؤال،

$$x+y=۷\Rightarrow(۴k-k^۲+۱)+(-۷k+۲k^۲-۲)=۷\Rightarrow k^۲-۳k-۸=۰$$

در این معادله مجموع مقادیر k برابر $-\frac{-۳}{۱}=۳$ است.

۵۱۱ (۲) ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۰\\۲&۵\end{bmatrix}\ ,\quad B=\begin{bmatrix}۲&-۱&-۲\\-۱&۲&-۱\end{bmatrix}$$

پس $BA=\begin{bmatrix}۲&-۱&-۲\\-۱&۲&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۰\\۲&۰\\۲&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸&-۱۰\\۳&-۵\end{bmatrix}$.

بنابراین

$$|BA|=\begin{vmatrix}-۸&-۱۰\\۳&-۵\end{vmatrix}=۴۰+۳۰=۷۰$$

۵۱۲ (۳) درایه‌های ماتریس A هر کدام یک دترمینان ۲×۲ هستند. بنابراین ماتریس A برابر است با

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۱&-۱\\۲&۱\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}۳&۲\\-۱&۱\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-۱&-۲\\۳&۱\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-۲&۱\\۴&-۱\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+۲&۳+۲\\-۱+۶&۲-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۵\\۵&-۲\end{bmatrix}$$

بنابراین $|A|=\begin{vmatrix}۳&۵\\۵&-۲\end{vmatrix}=-۶-۲۵=-۳۱$.

۵۱۳ **۳** از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$۲A=\begin{bmatrix}|A| & -۱\\ ۴ & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow |۲A|=|A|^۲+۴\Rightarrow ۴|A|=|A|^۲+۴$$

$$|A|^۲-۴|A|+۴=۰\Rightarrow (|A|-۲)^۲=۰\Rightarrow |A|=۲$$

بنابراین $|-۳A^۲|=(-۳)^۲|A|^۲=۹|۲|^۲=۳۶$.

۵۱۴ **۲** دترمینان ۳×۳ داده شده در صورت سؤال را برحسب سطر دوم بسط می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ k-۱ & k+۲ & k\\ d & e & f\end{vmatrix}=۲۴$$

$$(k-۱)(-۱)^۳\underbrace{\begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix}}_{-۱}+(k+۲)(-۱)^۴\underbrace{\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix}}_{۲}+k(-۱)^۵\underbrace{\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}}_{-۴}=۲۴$$

$$k-۱+۲k+۴+۴k=۲۴\Rightarrow ۷k=۲۱\Rightarrow k=۳$$

۵۱۵ **۱** از تساوی داده شده به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$|۳AB-۲B|=۶۴\Rightarrow |(۳A-۲I)B|=۶۴\Rightarrow |۳A-۲I||B|=۶۴ \quad (۱)$$

اکنون ماتریس $۳A-۲I$ و سپس دترمینان آن را به‌دست می‌آوریم:

$$۳A-۲I=۳\begin{bmatrix}۳ & ۶\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱۸\\ ۳ & ۱۰\end{bmatrix}$$

$$|۳A-۲I|=۷۰-۵۴=۱۶$$

اکنون از تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم $۱۶|B|=۶۴\Rightarrow |B|=۴$

۵۱۶ **۴** محاسبهٔ این دترمینان با استفاده از تعریف وقت‌گیر است، به همین دلیل مقدار آن را در حالت خاص حساب می‌کنیم. با انتخاب $x=-۱$ و $z=۲$ مقدار y با توجه به فرض $y=x+z$ برابر ۱ می‌شود. با این مقادیر گزینهٔ (۱) برابر -۱، گزینهٔ (۲) برابر -۲، گزینهٔ (۳) برابر ۱ و گزینهٔ (۴) برابر ۲ می‌شود. اکنون مقدار دترمینان را با این اعداد به‌دست می‌آوریم و با گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}۱+x & x & y+z\\ ۱ & y & z+x\\ ۱ & z & x+y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۰ & -۱ & ۳\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{-۱(-۱)^۳\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}+۳(-۱)^۴\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}}_{\text{بسط برحسب سطر اول}}=۱(۰-۱)+۳(۲-۱)=-۱+۳=۲$$

این مقدار با عدد گزینهٔ (۴) مساوی است، پس گزینهٔ (۴) درست است.

۵۱۷ **۴** به درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس A عدد k را اضافه کرده‌ایم ولی حاصل دترمینان تغییر نکرده است. پس باید

$$\begin{vmatrix}x & ۶ & ۷\\ -۵ & a & b+k\\ ۲ & ۴ & ۹\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & ۶ & ۷\\ -۵ & a & b\\ ۲ & ۴ & ۹\end{vmatrix}$$

اکنون هر دو دترمینان را برحسب سطر دوم بسط می‌دهیم. چون همهٔ درایه‌های هر دو دترمینان به‌جز درایهٔ سطر دوم و ستون سوم برابر هستند، پس باید $A_{۲۳}=۰$، یعنی

$$(-۱)^۵\begin{vmatrix}x & ۶\\ ۲ & ۴\end{vmatrix}=۰\Rightarrow ۴x-۱۲=۰\Rightarrow x=۳$$

۵۱۸ **۳** ماتریس A از مرتبهٔ ۳×۳ است، پس به‌ازای هر عدد حقیقی k، $|kA|=k^۳|A|$. بنابراین

$$\left|\frac{۲A}{|A|}\right|=\left|\frac{۲}{|A|}A\right|=\left(\frac{۲}{|A|}\right)^۳|A|=\frac{۸}{|A|^۲}$$

$$\big||A|A\big|=|A|^۳|A|=|A|^۴$$

$$\big|\sqrt[۳]{۲}|A|A\big|=(\sqrt[۳]{۲}|A|)^۳|A|=۲|A|^۳|A|=۲|A|^۴$$

بنابراین

$$\left|\frac{۲A}{|A|}\right|+\big||A|A\big|=\big|\sqrt[۳]{۲}|A|A\big|\Rightarrow \frac{۸}{|A|^۲}+|A|^۴=۲|A|^۴$$

$$\frac{۸}{|A|^۲}=|A|^۴\Rightarrow |A|^۶=۸=۲^۳\Rightarrow |A|^۲=۲\Rightarrow |A|=\pm\sqrt{۲}$$

۵۱۹ **۱** می‌دانیم $AA^{-۱}=I$. در تساوی $|I+BA^{-۱}|=۶$ به جای I ماتریس $AA^{-۱}$ را جایگزین می‌کنیم. سپس از ماتریس $A^{-۱}$ فاکتور می‌گیریم:

$$|I+BA^{-۱}|=۶\Rightarrow |AA^{-۱}+BA^{-۱}|=۶\Rightarrow |(A+B)A^{-۱}|=۶$$

$$|A+B||A^{-۱}|=۶\xrightarrow{|A+B|=۳}۳|A^{-۱}|=۶\Rightarrow |A^{-۱}|=۲$$

$$\xrightarrow{|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}}\frac{۱}{|A|}=۲\Rightarrow |A|=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $|A^۲|=|A|^۲=\frac{۱}{۴}$.

۵۲۰ **۴** می‌دانیم $A^{-۱}A=I$، پس

$$|A^{-۱}+I|=۱۰\Rightarrow |A^{-۱}+A^{-۱}A|=۱۰\Rightarrow |A^{-۱}(I+A)|=۱۰$$

$$|A^{-۱}|\underbrace{|I+A|}_{۶}=۱۰\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱۰}{۶}\Rightarrow |A|=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$$

۵۲۱ **۱** **راه‌حل اول** ابتدا درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a_{۱۲}=۱-۲=-۱\\ a_{۱۳}=۱-۳=-۲\\ a_{۲۳}=۲-۳=-۱\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} & -۱ & -۲\\ ? & & -۱\\ ? & ? & \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}b_{۱۲}=۲-۱=۱\\ b_{۱۳}=۳-۱=۲\\ b_{۲۳}=۳-۲=۱\end{cases}\Rightarrow B=\begin{bmatrix} & ۱ & ۲\\ ? & & ۱\\ ? & ? & \end{bmatrix}$$

پس $A+B=\begin{bmatrix} & ۰ & ۰\\ ? & & ۰\\ ? & ? & \end{bmatrix}$.

بنابراین مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ برابر صفر است.

راه‌حل دوم بنابر جمع ماتریس‌ها، $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]=\begin{cases}۰ & i<j\\ ۲i & i\geq j\end{cases}$

بنابراین درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ همگی برابر صفر هستند. در نتیجه مجموع این درایه‌ها نیز برابر صفر است.

۵۲۲ (۱) ابتدا حاصل‌ضرب را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}3 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ -2 & -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+x & -1 & 7-2x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ -2 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 10\\ x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+x & -1 & 7-2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 10\\ x\end{bmatrix}=4+x-10+7x-2x^2$$

حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$4+x-10+7x-2x^2=0\Rightarrow 2x^2-8x+6=0$$

$$x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1,\quad x=3$$

پس مجموع مقادیر x برابر ۴ است.

۵۲۳ (۱) در عبارت خواسته شده از طرف چپ ماتریس A و از طرف راست ماتریس B را فاکتور می‌گیریم:

$$A\begin{bmatrix}1 & -5\\ 6 & -2\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}2 & 5\\ -6 & 5\end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix}1 & -5\\ 6 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 5\\ -6 & 5\end{bmatrix}\right)B$$

$$=A\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}B=A(3I)B=3AB=3\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9\\ -3 & 12\end{bmatrix}$$

۵۲۴ (۳) ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

می‌توان ثابت کرد $A^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. بنابراین

$$A^n \text{ مجموع درایه‌های ماتریس}=2+n=1388\Rightarrow n=1386$$

۵۲۵ (۴) از تساوی $B=I-A$ نتیجه می‌گیریم $A+B=I$. پس

$$A^2+AB+B=A\underbrace{(A+B)}_{I}+B=AI+B=A+B=I$$

۵۲۶ (۱) دو طرفِ برابری داده شده را در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1}(A^3-2A^2-A-I)=A^{-1}\times\bar{O}\Rightarrow A^2-2A-I-A^{-1}=\bar{O}$$

به‌دست می‌آید $A^{-1}=A^2-2A-I$.

۵۲۷ (۳) توجه کنید که $|A|=10-9=1$ و $|B|=2-3=-1$. بنابراین

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$2A^{-1}+3B^{-1}=\begin{bmatrix}10 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 9\\ 3 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix}$$

اکنون عبارتِ خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{|2A^{-1}+3B^{-1}|}=\frac{1}{-14+9}=-\frac{1}{5}$$

$$(2A^{-1}+3B^{-1})^{-1}=-\frac{1}{5}\times\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5}\end{bmatrix}$$

در نهایت

$$(2A^{-1}+3B^{-1})^{-1}\text{ مجموع درایه‌های ماتریس}=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}-\frac{7}{5}=-1.$$

۵۲۸ (۳) دو خط بر هم منطبق هستند، پس دستگاه معادلات $\begin{cases}mx+2(m^2+1)y=3m+2\\ 2x+5my=4\end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد.

$$\text{شرط بی‌شمار جواب}:\ \frac{m}{2}=\frac{2(m^2+1)}{5m}=\frac{3m+2}{4}\qquad(1)$$

$$\frac{m}{2}=\frac{2(m^2+1)}{5m}\Rightarrow 5m^2=4m^2+4\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

باید $m=\pm 2$ در تساوی (۱) صدق کنند:

$$m=2\xrightarrow{(1)}\frac{2}{2}=\frac{10}{10}\neq\frac{8}{4}$$

$$m=-2\xrightarrow{(1)}\frac{-2}{2}=\frac{10}{-10}=-\frac{4}{4}$$

پس فقط مقدار $m=-2$ قابل قبول است.

۵۲۹ (۲) ابتدا ماتریس M را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0 & -2\\ 1 & 14 & -3\\ 4 & 8 & -4\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 6 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

پس

$$M=AB-(A+B)+I$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 0 & -2\\ 1 & 14 & -3\\ 4 & 8 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 6 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & 9 & -6\\ 3 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

اکنون دترمینان ماتریس M را با بسط دادن برحسب سطر اول آن به‌دست می‌آوریم:

$$|M|=\begin{vmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & 9 & -6\\ 3 & 6 & -6\end{vmatrix}$$

$$=4(-1)^2\begin{vmatrix}9 & -6\\ 6 & -6\end{vmatrix}+1(-1)^3\begin{vmatrix}2 & -6\\ 3 & -6\end{vmatrix}-4(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 9\\ 3 & 6\end{vmatrix}$$

$$=4(-18)-1(6)-4(-15)=-72-6+60=-18$$

۵۳۰ (۲) طرفین فرض $۲B-A=kBA$ را از سمت چپ در $B^{-۱}$ و از سمت راست در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$۲B-A=kBA \xrightarrow{B^{-۱}\times} ۲B^{-۱}B-B^{-۱}A=kB^{-۱}BA$$

$$۲I-B^{-۱}A=kA \xrightarrow{\times A^{-۱}} ۲IA^{-۱}-B^{-۱}AA^{-۱}=kAA^{-۱}$$

$$۲A^{-۱}-B^{-۱}=kI \Rightarrow |۲A^{-۱}-B^{-۱}|=|kI|=k^{۲}$$

۵۳۱ (۴) چون ماتریس AB تعریف شده است، پس تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر است، یعنی تعداد سطرهای B برابر ۴ است. در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۴) این ویژگی را دارد.

۵۳۲ (۳) ضرب‌های سمت چپ تساوی داده شده را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}-x+۱ & -۲x-۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow x(-x+۱)+۲(-۲x-۱)+۰=۰$$

یعنی $-x^{۲}-۳x-۲=۰$. بنابراین $x_۱=-۲$ و $x_۲=-۱$، در نتیجه

$$x_۱+x_۲=-۳$$

۵۳۳ (۴) بنابر تعریف توان و خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها،

$$A(BA)^{۵}B=A(BA)(BA)(BA)(BA)(BA)B$$

$$=(AB)(AB)(AB)(AB)(AB)(AB)=(AB)^{۶}=C^{۶}$$

۵۳۴ (۴) ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-۳ & -۶\\ -۵ & -۸\end{bmatrix}$$

پس $AB=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳ & -۶\\ -۵ & -۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & -۶\\ -۱۹ & -۳۴\end{bmatrix}$. بنابراین

$$AB-B=\begin{bmatrix}-۳ & -۶\\ -۱۹ & -۳۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۳ & -۶\\ -۵ & -۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ -۱۴ & -۲۶\end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $AB-B$ برابر -۴۰ است.

۵۳۵ (۲) بنابر قضیهٔ کیلی ـ همیلتون،

$$A^{۲}=(۲+۴)A-(۸+۳)I_۲ \Rightarrow A^{۲}=۶A-۱۱I_۲$$

بنابراین $\alpha=۶$ و $\beta=-۱۱$، در نتیجه $۲\alpha+\beta=۱۲-۱۱=۱$.

۵۳۶ (۴) می‌دانیم $A=(A^{-۱})^{-۱}$. پس

$$A=\frac{۱}{۸-۶}\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -\frac{۳}{۲} & ۱\end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید $۲A=\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}$.

۵۳۷ (۲) طرفین برابری $A^{۳}=A$ را در $A^{-۱}$ و طرفین برابری $B^{۳}=B$ را در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم، در این صورت $A^{۲}=I$ و $B^{۲}=I$. اکنون توجه کنید که

$$(۳A^{۲}-B^{۲})^{-۱}=(۳I-I)^{-۱}=(۲I)^{-۱}=\frac{۱}{۲}I^{-۱}=\frac{۱}{۲}I$$

۵۳۸ (۱) جواب‌های دستگاه معادلات در روش ماتریس وارون به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$X=A^{-۱}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ ۱-m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳m+۱-m\\ ۵m+۲-۲m\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x=۲m+۱\\ y=۳m+۲\end{cases}$$

از طرف دیگر بنابر فرض نقطهٔ $(۴-m,n-۱)$ جواب این دستگاه است، پس

$$\begin{cases}۴-m=۲m+۱\Rightarrow m=۱\\ n-۱=۳m+۲\Rightarrow n-۱=۵\Rightarrow n=۶\end{cases}$$

بنابراین $۲n-m=۱۲-۱=۱۱$.

۵۳۹ (۳) بنابر فرض سؤال، اختلاف دترمینان $\begin{vmatrix}۳ & ۲ & a\\ ۴ & -۲ & ۷\\ ۰ & ۵ & ۶\end{vmatrix}$ از دترمینان $\begin{vmatrix}۳ & ۲ & a\\ ۵ & -۱ & ۸\\ ۰ & ۵ & ۶\end{vmatrix}$ برابر ۶ است. هر دو دترمینان را با بسط دادن برحسب سطر سوم حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}۳ & ۲ & a\\ ۵ & -۱ & ۸\\ ۰ & ۵ & ۶\end{vmatrix}=۵(-۱)^{۵}\begin{vmatrix}۳ & a\\ ۵ & ۸\end{vmatrix}+۶(-۱)^{۶}\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۵ & -۱\end{vmatrix}$$

$$=-۵(۲۴-۵a)+۶(-۳-۱۰)=-۱۲۰+۲۵a-۷۸=۲۵a-۱۹۸$$

$$\begin{vmatrix}۳ & ۲ & a\\ ۴ & -۲ & ۷\\ ۰ & ۵ & ۶\end{vmatrix}=۵(-۱)^{۵}\begin{vmatrix}۳ & a\\ ۴ & ۷\end{vmatrix}+۶(-۱)^{۶}\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۴ & -۲\end{vmatrix}$$

$$=-۵(۲۱-۴a)+۶(-۶-۸)=-۱۰۵+۲۰a-۸۴=۲۰a-۱۸۹$$

بنابراین

$$\begin{vmatrix}۳ & ۲ & a\\ ۵ & -۱ & ۸\\ ۰ & ۵ & ۶\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}۳ & ۲ & a\\ ۴ & -۲ & ۷\\ ۰ & ۵ & ۶\end{vmatrix}=۶$$

$$(۲۵a-۱۹۸)-(۲۰a-۱۸۹)=۶\Rightarrow ۵a-۹=۶\Rightarrow ۵a=۱۵\Rightarrow a=۳$$

۵۴۰ (۱) **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\left|A+\frac{A}{|A|}\right|=۴\Rightarrow\left|(۱+\frac{۱}{|A|})A\right|=۴\Rightarrow(۱+\frac{۱}{|A|})^{۲}|A|=۴$$

$$(۱+\frac{۱}{|A|^{۲}}+\frac{۲}{|A|})|A|=۴\Rightarrow|A|+\frac{۱}{|A|}+۲=۴\xrightarrow{\text{در }|A|\text{ ضرب می‌کنیم}}$$

$$|A|^{۲}+۱+۲|A|=۴|A|\Rightarrow|A|^{۲}-۲|A|+۱=۰\Rightarrow(|A|-۱)^{۲}=۰\Rightarrow|A|=۱$$

راه‌حل دوم ماتریس I در رابطهٔ $\left|A+\frac{A}{|A|}\right|=۴$ صدق می‌کند:

$\left|I+\frac{I}{|I|}\right|=|۲I|=\begin{vmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{vmatrix}=۴$. بنابراین جواب برابر $|I|=۱$ است.

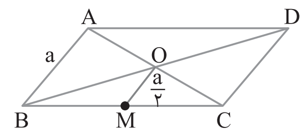
۵۴۱ (۴) اگر صفحهٔ قاطع که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع می‌کند، شامل محور سطح مخروطی نباشد، مقطع مخروطی حاصل هذلولی است و اگر شامل محور سطح مخروطی باشد، مقطع حاصل دو خط متقاطع است که در اینجا دو خط متقاطع مورد نظر سؤال است.

۵۴۲ (۳) فرض کنید O نقطهٔ تلاقی دو قطر متوازی‌الاضلاع ABCD باشد. از O به نقطهٔ M وسط ضلع BC وصل می‌کنیم. بنابر قضیهٔ میان خط،

$$\left.\begin{matrix}AO=OC\\BM=MC\end{matrix}\right\}\Rightarrow OM=\frac{AB}{۲}=\frac{a}{۲}\qquad(۱)$$

چون ضلع BC ثابت است، پس نقطهٔ M وسط BC ثابت است. پس بنابر تساوی (۱) فاصلهٔ نقطهٔ متغیر O از نقطهٔ ثابت M برابر مقدار ثابت $\frac{a}{۲}$ است.

پس مکان هندسی O دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{a}{۲}$ است.



۵۴۳ (۱) مکان هندسی نقاطی که از F و S به یک فاصله هستند، عمودمنصف FS است و مکان هندسی نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۱۰ هستند دو خط موازی L است که در اینجا یکی را در نظر گرفته‌ایم (d). محل برخورد این دو مکان هندسی نقطهٔ A است. با توجه به شکل و بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle ASN: AS^۲=AN^۲+SN^۲ \xrightarrow{AS=x} x^۲=(۶-AM)^۲+۴$$

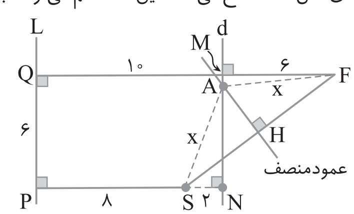
$$\triangle AMF: AF^۲=AM^۲+MF^۲ \xrightarrow{AF=AS=x} x^۲=AM^۲+۳۶$$

تساوی دوم را از تساوی اول کم می‌کنیم:

$$۰=۳۶+AM^۲-۱۲AM+۴-AM^۲-۳۶\Rightarrow AM=\frac{۱}{۳}$$

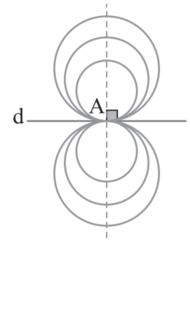
بنابراین $x^۲=AM^۲+۳۶\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۹}+۳۶\Rightarrow x^۲=\frac{۳۲۵}{۹}\Rightarrow x=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۳}$

دقت کنید مکان هندسی نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۱۰ هستند دو خط موازی L است. اگر خط d' را در طرف دیگر L به فاصلهٔ ۱۰ از L رسم کنیم، عمودمنصف SF آن را در نقطه‌ای مثل A' قطع می‌کند. این نقطه هم می‌تواند جواب باشد.

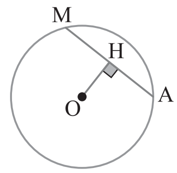


۵۴۴ (۴) مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. این خط (عمودمنصف پاره‌خط AB) دایره را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند.

۵۴۵ (۳) چون شعاع دایره، در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس مکان هندسی مورد نظر خطی است که از A می‌گذرد و بر خط d عمود است.



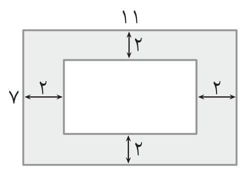
۵۴۶ (۲) در شکل زیر H وسط وتر AM از دایرهٔ $C(O,r)$ است. می‌دانیم اگر از مرکز دایره به وسط وتری از دایره وصل کنیم این پاره‌خط بر وتر عمود است، پس $A\hat{H}O=۹۰^\circ$. در نتیجه مکان هندسی وسط وترهای AM دایره‌ای به قطر OA است.



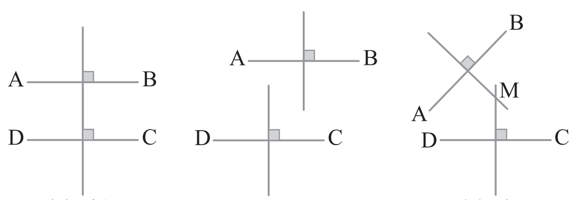
۵۴۷ (۴) مجموعهٔ نقطه‌های مورد نظر، نقاط مشترک عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ A است. از طرف دیگر حداکثر تعداد نقاط، مورد نظر است، پس با فرض اینکه مثلث در رأس A متساوی‌الساقین باشد، چون عمودمنصف پاره‌خط BC و نیمساز زاویهٔ A بر هم منطبق هستند، در این حالت نامتناهی نقطه به‌دست می‌آید.

۵۴۸ (۲) مطابق شکل زیر، مرکز سکه که باید درون مستطیل باشد از هر ضلع مستطیل به فاصلهٔ حداکثر ۲ است. پس مکان هندسی مورد نظر قسمت رنگی است که مساحت بین مستطیل به اضلاع ۱۱ و ۷ و مستطیل به اضلاع ۷ و ۳ است. پس

مساحت خواسته شده $=۱۱\times۷-۷\times۳=۷\times۸=۵۶$

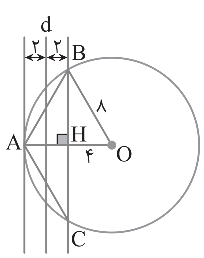


۵۴۹ (۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله‌اند عمودمنصف CD است. این دو خط عمودمنصف یا در یک نقطه متقاطع‌اند، یا موازی‌اند یا منطبق‌اند (شکل‌های زیر را ببینید). پس این مسئله یا یک جواب دارد یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد. پس حالتی که دو نقطه ایجاد شود وجود ندارد.



شکل (۳) شکل (۲) شکل (۱)

۵۵۰ (۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۲ هستند دو خط موازی d است. چون دقیقاً سه نقطه روی دایره وجود دارد که از d به فاصلهٔ ۲ هستند پس مطابق شکل مقابل، یکی از دو خط موازی، مماس بر دایره و خط دیگر دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر نقاط برخورد و تماس را B، C و A بنامیم، آن‌گاه مساحت مثلث ABC مورد نظر است. ارتفاع AH برابر ۴ است، پس $OH=۴$. در نتیجه بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$\triangle OBH: BH^۲=۸^۲-۴^۲=۶۴-۱۶=۴۸\Rightarrow BH=۴\sqrt{۳}\Rightarrow BC=۸\sqrt{۳}$$

بنابراین $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}(۴)(۸\sqrt{۳})=۱۶\sqrt{۳}$.

۵۵۱ **۳** دو دایرهٔ f و f' مماس خارج‌اند، پس طول خط‌المرکزین آن‌ها مساوی مجموع شعاع‌های آن‌ها است:

$$f:(x-۳)^۲+y^۲=۹\Rightarrow O(۳,۰),\ r=۳$$

$$f':x^۲+y^۲-۱۴x-m=۰$$

$$\begin{cases}O'(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۷,۰)\\ r'=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۹۶+۴m}}{۲}=\sqrt{۴۹+m}\end{cases}$$

پس $OO'=r+r'\Rightarrow ۴=۳+\sqrt{۴۹+m}\Rightarrow ۱=\sqrt{۴۹+m}\Rightarrow m=-۴۸$

درضمن دو دایرهٔ f و f'' مماس داخل هستند، پس طول خط‌المرکزین آن‌ها مساوی قدر مطلق تفاضل شعاع‌های آن‌ها است:

$$f'':x^۲+y^۲-۸x-n=۰$$

$$\begin{cases}O''(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۴,۰)\\ r''=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۶۴+۴n}}{۲}=\sqrt{۱۶+n}\end{cases}$$

پس $OO''=|r-r''|\Rightarrow ۱=|۳-\sqrt{۱۶+n}|\Rightarrow\begin{cases}n=۰\\ n=-۱۲\end{cases}$

بنابراین کمترین مقدار $m+n$ مساوی $-۴۸-۱۲=-۶۰$ است.

۵۵۲ **۳** دو دایره به مراکز O و O' و شعاع‌های r و r' مماس خارج‌اند هرگاه $OO'=r+r'$. پس

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,-۱)\\ r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۴+۱۶}}{۲}=۳\end{cases}$$

چون $O'(-۱,۳)$، پس $OO'=\sqrt{۹+۱۶}=۵$. بنابراین

$$OO'=r+r'\Rightarrow ۵=۳+r'\Rightarrow r'=۲$$

۵۵۳ **۲** دو خط $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$ موازی‌اند. پس مرکز دایره روی خط موازی آن‌ها و به یک فاصله از آن‌ها به معادلهٔ $y=۲x+۵$ قرار دارد. اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد، آن‌گاه O نقطهٔ $(\alpha,۲\alpha+۵)$ است. چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصلهٔ O تا مبدأ مساوی فاصلهٔ O تا خط $y=۲x$ است. بنابراین

$$\sqrt{\alpha^۲+(۲\alpha+۵)^۲}=\frac{|۲\alpha+۵-۲\alpha|}{\sqrt{۵}}$$

$$\alpha^۲+۴\alpha^۲+۲۵+۲۰\alpha=\frac{۲۵}{۵}\Rightarrow ۵\alpha^۲+۲۰\alpha+۲۰=۰$$

$$\alpha^۲+۴\alpha+۴=۰\Rightarrow(\alpha+۲)^۲=۰\Rightarrow\alpha=-۲\Rightarrow O(-۲,۱)$$

۵۵۴ **۱** با توجه به شکل زیر و فرض $MN=۲\sqrt{۷}$ نتیجه می‌گیریم $MH=\sqrt{۷}$. از طرف دیگر،

$$\text{فاصلهٔ } A \text{ تا خط}=AH=\frac{|-۲-۱۲+۱|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

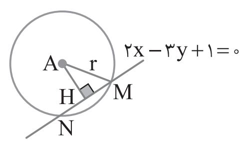
$$\triangle AMH: AM^۲=AH^۲+MH^۲\Rightarrow r^۲=\sqrt{۱۳}^۲+\sqrt{۷}^۲=۲۰$$

$$r=\sqrt{۲۰}$$

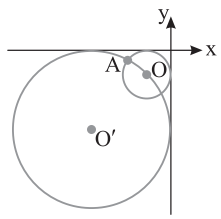
معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $A(-۱,۴)$ و شعاع $\sqrt{۲۰}$ به‌صورت $(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است. اکنون معادلهٔ حاصل از برخورد دایره با خط $y=۲$ را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰\\ y=۲\end{cases}\Rightarrow(x+۱)^۲+۴=۲۰\Rightarrow(x+۱)^۲=۱۶$$

$$\begin{cases}x+۱=۴\Rightarrow x=۳\\ x+۱=-۴\Rightarrow x=-۵\end{cases}$$



۵۵۵ **۳** مرکز چنین دایره‌ای در ناحیهٔ سوم مختصات قرار دارد و از محورهای مختصات به فاصلهٔ r است (r شعاع دایره)، پس نقطهٔ $(-r,-r)$، مرکز این دایره است. بنابراین معادلهٔ این دایره به‌صورت زیر است:

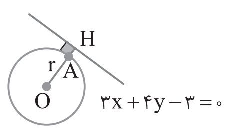


$$(x+r)^۲+(y+r)^۲=r^۲\xrightarrow{A\in\text{دایره}}(-۹+r)^۲+(-۲+r)^۲=r^۲$$

$$۸۱+r^۲-۱۸r+۴+r^۲-۴r=r^۲\Rightarrow r^۲-۲۲r+۸۵=۰$$

$$(r-۵)(r-۱۷)=۰\Rightarrow r=۵ \text{ یا } r=۱۷$$

۵۵۶ **۲** با توجه به شکل مقابل، کمترین فاصلهٔ نقاط دایره از خط برابر $AH=OH-r$ است.



$$x^۲+y^۲+۴x+۸y+۴=۰\Rightarrow\begin{cases}O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۲,-۴)\\ r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۶۴-۱۶}}{۲}=۴\end{cases}$$

$$OH=\frac{|-۶-۱۶-۳|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

بنابراین $AH=OH-r=۵-۴=۱$.

۵۵۷ **۴** می‌دانیم طول مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(x,y)=۰$ برابر $\sqrt{C(A)}$ است. ابتدا معادلهٔ دایره را به ۳ تقسیم می‌کنیم زیرا زمانی می‌توانیم از فرمول‌های مربوط به دایره استفاده کنیم که ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر یک باشند. پس

$$۳x^۲+۳y^۲-mx+۳y-\frac{۱۵}{۲}=۰\Rightarrow x^۲+y^۲-\frac{mx}{۳}+y-\frac{۵}{۲}=۰$$

$$\text{طول مماس}=\sqrt{C(A)}\Rightarrow ۲\sqrt{۳}=\sqrt{۴+۱+\frac{۲m}{۳}+۱-\frac{۵}{۲}}$$

$$۱۲=\frac{۲m}{۳}+\frac{۷}{۲}\Rightarrow ۷۲=۴m+۲۱\Rightarrow ۴m=۵۱\Rightarrow m=\frac{۵۱}{۴}=۱۲/۷۵$$

۵۵۸ **۴** با انتخاب دو مقدار برای m دو قطر دایره را به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ برخورد آن‌ها مرکز دایره است.

$$\left.\begin{matrix}m=-۳\Rightarrow -x+۲=۰\Rightarrow x=۲\\ m=-۲\Rightarrow y+۲=۰\Rightarrow y=-۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow\text{مرکز دایره}=O(۲,-۲)$$

از طرف دیگر فاصلهٔ مرکز O تا خط مماس $۳x-۴y+۶=۰$ برابر شعاع دایره است.

$$r=OH=\frac{|۶+۸+۶|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

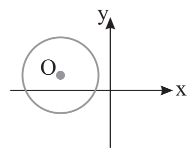
بنابراین $\text{مساحت دایره}=\pi r^۲=۱۶\pi$.

۵۵۹ (۳) معادلهٔ مقطع مخروطی داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲x+۶)^{۲}+(۲-۲y)^{۲}=۳۲\Rightarrow(۲(x+۳))^{۲}+(-۲(y-۱))^{۲}=۳۲$$

$$۴(x+۳)^{۲}+۴(y-۱)^{۲}=۳۲\Rightarrow(x+۳)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۸$$

پس این مقطع مخروطی، دایرهٔ به مرکز $(-۳,۱)$ و شعاع $۲\sqrt{۲}=\sqrt{۸}$ است. چون $۲\sqrt{۲}$ کوچکتر از $|-۳|$ است، پس دایره محور y را قطع نمی‌کند (شکل مقابل را ببینید). بنابراین دایره در ناحیه‌های دوم و سوم قرار دارد. در نتیجه این دایره در ناحیه‌های اول و چهارم قرار ندارد.



۵۶۰ (۱) نقطهٔ A روی دایرهٔ $(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۲$ قرار دارد. پس شیب خط مماس در نقطهٔ A، عکس و قرینهٔ شیب OA است (O مرکز دایره است).

$$O(۲,-۱)\Rightarrow m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{-۲+۱}{۳-۲}=-۱$$

بنابراین شیب خط مماس برابر ۱ است. پس

$$\text{معادلهٔ خط مماس}: y+۲=(x-۳)\xrightarrow[x=۰]{\text{برخورد با محور } y}$$

$$y+۲=-۳\Rightarrow y=-۵$$

۵۶۱ (۳) در معادلهٔ دایره ضرایب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ با هم برابرند، پس $a=۲$. معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x^{۲}+۲y^{۲}-۴x-۴my-۱=۰\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲my-\frac{۱}{۲}=۰$$

مرکز دایره نقطهٔ $O(۱,m)$ است. قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد، پس

$$۲m-m=۱\Rightarrow m=۱$$

در نتیجه معادلهٔ دایره $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ است. پس

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}\Rightarrow ۲r=\sqrt{۱۰}$$

۵۶۲ (۴) **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم معادلهٔ دایره به صورت $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}&A\in\text{دایره}\Rightarrow ۱+۴+a-۲b+c=۰\\&B\in\text{دایره}\Rightarrow ۹+۴+۳a-۲b+c=۰\Rightarrow\\&C\in\text{دایره}\Rightarrow ۹+۴+۳a+۲b+c=۰\end{aligned}\begin{cases}a-۲b+c=-۵\\۳a-۲b+c=-۱۳\\۳a+۲b+c=-۱۳\end{cases}$$

معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم: $۲a=-۸\Rightarrow a=-۴$

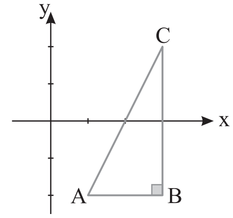
معادلهٔ دوم را از معادلهٔ سوم کم می‌کنیم: $۴b=۰\Rightarrow b=۰$

بنابراین $c=-۱$ و شعاع دایره برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۰+۴}=\sqrt{۵}$$

پس $\pi r^{۲}=۵\pi$ = مساحت دایره.

راه‌حل دوم نقطه‌های A، B و C را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. با توجه به شکل مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس شعاع دایرهٔ گذرنده از این سه نقطه برابر است با $r=\frac{AC}{۲}=\frac{\sqrt{۲^{۲}+۴^{۲}}}{۲}=\sqrt{۵}$.



پس $\pi r^{۲}=۵\pi$ = مساحت دایره.

۵۶۳ (۳) چون شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره، شیب OA را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y=۳,\quad O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۱)$$

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$$

پس شیب خط مماس برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. در نتیجه معادلهٔ خط مماس به صورت مقابل است: $y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۴$

پس عرض از مبدأ این خط، یعنی عرض برخورد آن با محور y برابر ۴ است.

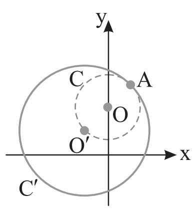
۵۶۴ (۳) فرض کنید $O(۰,\beta)$ مرکز دایرهٔ C و O' مرکز دایرهٔ داده شده باشد. در این صورت O'، A و O روی یک خط هستند:

$$\begin{cases}O'(-۱,۱)\\A(۱,۳)\end{cases}\Rightarrow m_{O'A}=\frac{۳-۱}{۱+۱}=۱$$

$$O'A\ \text{معادلهٔ خط}: y-۱=۱(x+۱)\Rightarrow y=x+۲$$

مختصات مرکز O باید در معادلهٔ خط $O'A$ صدق کنند. پس $\beta=۲$. بنابراین $O(۰,۲)$ مرکز دایرهٔ C است. شعاع دایرهٔ C برابر OA است. بنابراین

$$r=OA=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$



۵۶۵ (۱) امتداد خط‌المرکزین $O_۱O_۲$ دایرهٔ $C_۱$ را در نقطهٔ A قطع می‌کند (شکل زیر را ببینید). نقطهٔ A دورترین نقطهٔ دایرهٔ $C_۱$ از $C_۲$ است، پس از A بلندترین مماس را می‌توان بر $C_۲$ رسم کرد:

$$\begin{cases}O_۱(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,۳)\\O_۲(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۲,۰)\end{cases}\Rightarrow O_۱O_۲=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$r_۱=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۳۶-۴a}}{۲}=\sqrt{۱۳-a}$$

$$r_۲=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۲۰}}{۲}=۳$$

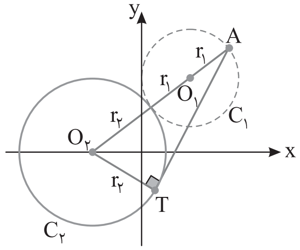
دو دایره مماس خارج هستند، پس

$$O_۱O_۲=r_۱+r_۲\Rightarrow ۵=\sqrt{۱۳-a}+۳\Rightarrow a=۹\Rightarrow r_۱=\sqrt{۱۳-۹}=۲$$

با توجه به شکل، طول مماس AT را به‌دست می‌آوریم:

$$\triangle O_۲AT: AT=\sqrt{AO_۲^{۲}-O_۲T^{۲}}=\sqrt{(۲r_۱+r_۲)^{۲}-r_۲^{۲}}$$

$$\sqrt{(۴+۳)^{۲}-۳^{۲}}=\sqrt{۴۹-۹}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$



توجه کنید که اگر نقطهٔ تماس دو دایره را $B_۱$ و محل تلاقی امتداد $AO_۲$ با دایرهٔ $C_۲$ را $B_۲$ بنامیم، برای محاسبهٔ طول AT می‌توانستیم از برابری $AT^{۲}=AB_۱\times AB_۲$ نیز استفاده کنیم.

۵۶۶ (۱) فرض کنید $C(x,y): x^{۲}+y^{۲}+۴x-۲y-m$. پاره‌خط AB درون دایرهٔ $C(x,y)=۰$ قرار دارد، پس هر دو نقطهٔ A و B درون این دایره واقع‌اند. بنابراین اگر مختصات A و B را در $C(x,y)$ قرار دهیم باید عددی منفی به‌دست آید. پس

$$C(A)<۰\Rightarrow ۴+۱+۸+۲-m<۰\Rightarrow m>۱۵$$

$$C(B)<۰\Rightarrow ۴+۹+۸-۶-m<۰\Rightarrow m>۱۵$$

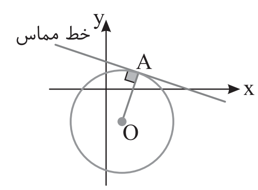
پس حدود تغییرات m به‌صورت $m>۱۵$ است. درضمن توجه کنید به ازای همه این مقادیر معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۴x-۲y-m=۰$ معادلهٔ یک دایره است، زیرا $a^{۲}+b^{۲}-۴c$ به ازای آن‌ها مثبت است.

۵۶۷ (۳) اگر O مرکز دایره باشد، آن‌گاه شیب خط مماس، عکس و قرینهٔ شیب شعاع OA است.

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۲),\quad m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{۱+۲}{۲-۱}=۳$$

پس شیب خط مماس $-\frac{۱}{۳}$ و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۱=-\frac{۱}{۳}(x-۲)\xrightarrow{x=۰}y-۱=\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{۵}{۳}$$



۵۶۸ (۱) نقاط تلاقی دایره را با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم:

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۲y-۴=۰\xrightarrow{y=۰}x^{۲}-۴x-۴=۰$$

$$x=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۱۶}}{۲}\Rightarrow x=\frac{۴\pm۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\pm۲\sqrt{۲}$$

پس نقاط تلاقی دایره با محور x دو نقطهٔ $A(۲+۲\sqrt{۲},۰)$ و $B(۲-۲\sqrt{۲},۰)$ هستند. پس $AB=۴\sqrt{۲}$.

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۲y-۴=۰\xrightarrow{x=۰}y^{۲}-۲y-۴=۰$$

$$y=\frac{۲\pm\sqrt{۴+۱۶}}{۲}\Rightarrow y=\frac{۲\pm۲\sqrt{۵}}{۲}=۱\pm\sqrt{۵}$$

پس نقاط تلاقی دایره با محور y دو نقطهٔ $C(۰,۱+\sqrt{۵})$ و $D(۰,۱-\sqrt{۵})$ هستند. پس $CD=۲\sqrt{۵}$. بنابراین نسبت طول این دو وتر برابر است با $\frac{AB}{CD}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}$.

۵۶۹ (۴) اگر $W(۰,۰)$ مبدأ مختصات، O مرکز دایره و r شعاع دایره باشد، آن‌گاه فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره تا W برابر $WO+r$ است.

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y=۰\Rightarrow\begin{cases}O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۱,۱)\\ r=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۴}}{۲}=\sqrt{۲}\end{cases}$$

پس

$$OW=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲},\quad \text{بیشترین فاصله}=OW+r=\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

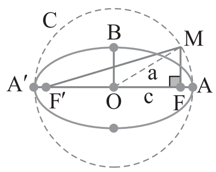
۵۷۰ (۱) دایرهٔ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r بر محور y مماس است، هرگاه $|\alpha|=r$.

$$x^{۲}+y^{۲}+۴x+my+۴=۰$$

$$\begin{cases}O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۲,-\frac{m}{۲})\\ r=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+m^{۲}-۱۶}}{۲}=\frac{|m|}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $|\alpha|=r\Rightarrow ۲=\frac{|m|}{۲}\Rightarrow |m|=۴\Rightarrow m=\pm۴$

۵۷۱ (۱) شعاع دایرهٔ C، برابر a است، پس $OM=a$. در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMF بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$MF=\sqrt{a^{۲}-c^{۲}}=\sqrt{b^{۲}}=b$$

از طرف دیگر بنابر فرض سؤال،

$$\text{قطر بزرگ}=۸\Rightarrow ۲a=۸\Rightarrow a=۴$$

$$\text{قطر کوچک}=۴\Rightarrow ۲b=۴\Rightarrow b=۲$$

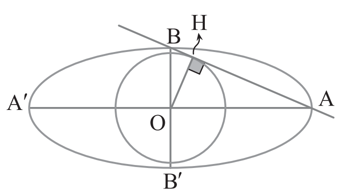
$$c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۱۶-۴=۱۲\Rightarrow c=۲\sqrt{۳}$$

بنابراین $S_{MFF'}=\frac{۱}{۲}MF\times FF'=\frac{۱}{۲}b\times۲c=bc=۲\times۲\sqrt{۳}=۴\sqrt{۳}$.

۵۷۲ (۴) قطر بزرگ بیضی برابر ۲a و قطر کوچک بیضی برابر ۲b است. پس $OA=a=۱۲$ و $OB=b=۵$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB ارتفاع OH را رسم می‌کنیم. OH شعاع دایرهٔ مماس بر AB است. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle OAB: AB^{۲}=OB^{۲}+OA^{۲}=۵^{۲}+۱۲^{۲}=۱۶۹\Rightarrow AB=۱۳$$

$$\triangle OAB: OH\times AB=OB\times OA\Rightarrow OH=\frac{۵\times۱۲}{۱۳}=\frac{۶۰}{۱۳}$$



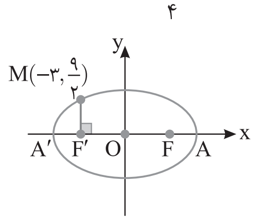
۵۷۳ (۲) مبدأ مختصات (مرکز بیضی) وسط دو کانون F و F′ است. در نتیجه $F'(-۳,۰)$ کانون دیگر این بیضی است. چون دو نقطهٔ M و F′ دارای طول‌های مساوی‌اند، پس MF′، عمود بر قطر بزرگ AA′ است (شکل زیر را ببینید). در نتیجه $MF'=\frac{b^{۲}}{a}$. از طرف دیگر $MF'=\frac{۹}{۲}$، پس $\frac{b^{۲}}{a}=\frac{۹}{۲}$، در نتیجه $b^{۲}=\frac{۹}{۲}a$. درضمن $c=OF=۳$، بنابراین

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow a^{۲}=\frac{۹}{۲}a+۹\Rightarrow ۲a^{۲}-۹a-۱۸=۰$$

$$a=\frac{۹\pm\sqrt{۸۱+۱۴۴}}{۴}=\frac{۹\pm۱۵}{۴}\Rightarrow a=\frac{۹+۱۵}{۴}=۶$$

در نتیجه

$$\text{خروج از مرکز}=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$



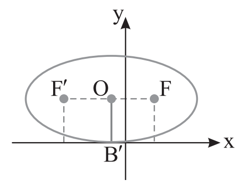
۵۷۴ **۳** وسط دو کانون F و F′ مرکز بیضی است. پس $O=\frac{F+F'}{2}=(-1,3)$. بنابراین شکل بیضی به‌صورت زیر است و بیضی در نقطهٔ B′ بر محور x مماس است پس $b=OB'=y_O=3$. درضمن

$$2c=FF'=6\Rightarrow c=3$$

در نتیجه

$$a^2=b^2+c^2=9+9=18\Rightarrow a=3\sqrt{2}$$

دورترین فاصلهٔ نقاط هر بیضی از یکدیگر برابر 2a است، پس $2a=6\sqrt{2}$.

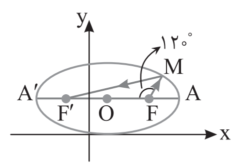


۵۷۵ **۲** بنابر ویژگی بازتابندگی بیضی بازتابش این پرتو نور از کانون دیگر بیضی یعنی F′ می‌گذرد. با توجه به شکل نقطهٔ F′ از مرکز O به فاصلهٔ c قرار دارد. اکنون بنابر فرض سؤال،

$$AA'=8\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4 ,\quad \text{قطر کوچک}=4\Rightarrow 2b=4\Rightarrow b=2$$

$$c^2=a^2-b^2=16-4=12\Rightarrow c=2\sqrt{3} ,\quad O=\frac{A+A'}{2}=(1,2)$$

بنابراین مختصات کانون F′ به‌صورت $(1-2\sqrt{3},2)$ است.



۵۷۶ **۳** طول BB′ برابر قطر کوچک بیضی است. پس

$$2b=BB'=2\sqrt{2}\Rightarrow b=\sqrt{2}$$

درضمن خروج از مرکز بیضی را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\Rightarrow\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{1-\frac{2}{a^2}}\Rightarrow\frac{5}{7}=1-\frac{2}{a^2}\Rightarrow\frac{2}{a^2}=1-\frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{a^2}=\frac{2}{7}\Rightarrow a^2=7$$

پس

$$c^2=a^2-b^2=7-2=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$$

دایرهٔ به قطر فاصلهٔ کانونی، دایرهٔ به شعاع c است. پس مساحت این دایره برابر است با $\pi c^2=5\pi$.

۵۷۷ **۴** ابتدا تساوی داده شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\frac{3MB+2MA}{5-MA}=1\Rightarrow 3MB+2MA=5-MA$$

$$3MB+3MA=5\Rightarrow MB+MA=\frac{5}{3}$$

مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت $\frac{5}{3}$ است ولی این مقدار از فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B کوچک‌تر است. پس مکان هندسی M تهی است.

۵۷۸ **۱** بنابر فرض‌های سؤال $2a=10$ و $2b=4\sqrt{2}$ ، پس $a=5$ ، و $b=2\sqrt{2}$

$$c^2=a^2-b^2=5^2-(2\sqrt{2})^2=17\Rightarrow c=\sqrt{17}$$

بنابراین $FF'=2c=2\sqrt{17}$. پس میانهٔ OM در مثلث MFF′ نصف FF′ است. پس این مثلث قائم‌الزاویه است، یعنی $F\hat{M}F'=90^\circ$. در نتیجه

$$MF^2+MF'^2=FF'^2\xrightarrow{FF'=2\sqrt{17}}MF^2+MF'^2=68\quad(1)$$

از طرف دیگر، $MF+MF'=2a=10$. بنابراین $MF=10-MF'$ ، پس از تساوی (1) نتیجه می‌گیریم

$$(10-MF')^2+MF'^2=68$$

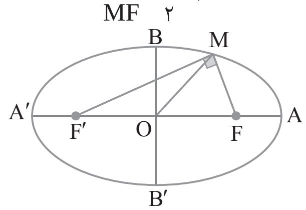
$$100+MF'^2-20MF'+MF'^2=68$$

$$2MF'^2-20MF'+32=0\Rightarrow MF'^2-10MF'+16=0$$

$$(MF'-2)(MF'-8)=0\Rightarrow MF'=2 \text{ یا } MF'=8$$

با توجه به شکل $MF'=8$ قابل قبول است. پس $MF=10-8=2$. در نتیجه

$$\frac{MF'}{MF}=\frac{8}{2}=4$$



۵۷۹ **۲** طول وتر کانونی MN برابر $\frac{2b^2}{a}$ است. بنابر فرض سؤال $a=OA=8$ و $AF=a-c=2$. بنابراین $c=6$ ، در نتیجه

$$b^2=a^2-c^2=8^2-6^2=64-36=28$$

در مثلث OMN ارتفاع برابر $OF=c=6$ و قاعده برابر $MN=\frac{2b^2}{a}$ است. پس

$$S_{OMN}=\frac{1}{2}OF\times MN=\frac{1}{2}(c)(\frac{2b^2}{a})=\frac{b^2c}{a}=\frac{28\times6}{8}=21$$

۵۸۰ **۲** **راه‌حل اول** بنابر فرض‌های سؤال $OF=6$ و $AF=6$ ، پس $c=6$ و $a=12$. از D به کانون F′ وصل می‌کنیم. چون D روی بیضی است، پس $DF+DF'=2a$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle DFF':DF'^2=DF^2+FF'^2\xrightarrow[FF'=2c]{DF'=2a-DF}$$

$$(2a-DF)^2=DF^2+(2c)^2\xrightarrow[c=6]{a=12}(24-DF)^2=DF^2+12^2$$

$$24^2+DF^2-48DF=DF^2+12^2\Rightarrow 48DF=24^2-12^2$$

$$48DF=(24+12)(24-12)\Rightarrow 48DF=36\times12\Rightarrow DF=9$$

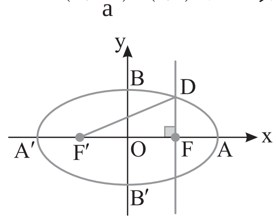
مطابق شکل، DF برابر عرض نقطهٔ D و OF برابر طول نقطهٔ D است. بنابراین

$$D(OF,DF)=(6,9)$$

راه‌حل دوم می‌دانیم اندازهٔ DF برابر $\frac{b^2}{a}$ است. چون

$$b^2=a^2-c^2=12^2-6^2=108$$

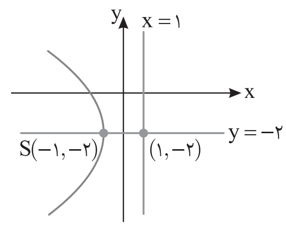
پس مختصات D برابر است با $(c,\frac{b^2}{a})=(6,9)$.



۵۸۱ **۲** با توجه به فرض‌های سؤال خط $y=-۲$ محور تقارن و خط $x=۱$ خط هادی این سهمی است. چون رأس سهمی روی محور تقارن قرار دارد و طول آن ۱- است، پس رأس سهمی $S(h,k)=(-۱,-۲)$ است. درضمن فاصلهٔ رأس S تا خط هادی برابر a است، پس $a=۲$. از طرف دیگر از موقعیت خط هادی و رأس نسبت به هم نتیجه می‌گیریم دهانهٔ این سهمی رو به چپ است، پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$(y-k)^۲=-۴a(x-h)\Rightarrow(y+۲)^۲=-۸(x+۱)$$

در بین نقاط داده شده فقط مختصات نقطه $(-۳,-۶)$ در این سهمی صدق می‌کنند.



۵۸۲ **۱** در معادلهٔ سهمی داده شده به جای a از حرف m استفاده می‌کنیم تا a با فاصلهٔ کانونی سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادلهٔ سهمی $۲y^۲+۴y-mx=۰$ است. درضمن کمترین فاصلهٔ نقاط سهمی از کانون آن برابر فاصلهٔ کانونی یا همان a است. در سهمی $Ay^۲+By+Cx+D=۰$ عدد a را از برابری زیر می‌توان به‌دست آورد:

$$a=\frac{|C|}{|۴A|}\xrightarrow{a=\frac{۳}{۸}}\frac{۳}{۸}=\frac{|-m|}{۴\times۲}\Rightarrow|m|=۳\Rightarrow m=\pm۳$$

۵۸۳ **۳** اگر S رأس و d خط هادی این سهمی باشد، آن‌گاه دایره به قطر SH دایرهٔ مورد نظر است. معادلهٔ سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

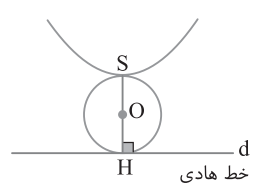
$$y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+۲\Rightarrow۲y=x^۲-۶x+۴\Rightarrow۲y=(x-۳)^۲-۹+۴$$

$$(x-۳)^۲=۲y+۵\Rightarrow(x-۳)^۲=۲(y+\frac{۵}{۲})$$

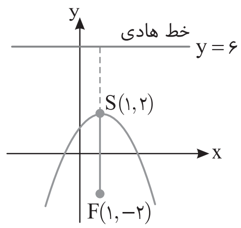
پس دهانهٔ این سهمی رو به بالا و $S(h,k)=(۳,-\frac{۵}{۲})$ رأس آن است.

همچنین $۴a=۲$، پس $a=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه خط $x=۳$ محور این سهمی و خط $y=k-a=-\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}=-۳$ خط هادی آن است. نقطهٔ تلاقی این دو خط نقطهٔ H است. پس $H(۳,-۳)$، بنابراین

$O=\frac{S+H}{۲}=(۳,-\frac{۱۱}{۴})$ مرکز دایره ، $r=\frac{SH}{۲}=\frac{a}{۲}=\frac{۱}{۴}$ شعاع دایره



۵۸۴ **۲** با توجه به موقعیت رأس و کانون این سهمی نسبت به هم نتیجه می‌گیریم دهانهٔ این سهمی رو به پایین است و $a=FS=۴$. از طرف دیگر، اگر $S(h,k)$ رأس این سهمی باشد، آن‌گاه $y=k+a$ خط هادی این سهمی است، در نتیجه $y=۲+۴=۶$ معادلهٔ خط هادی این سهمی است.



۵۸۵ **۲** برای اینکه حرف a در معادلهٔ این سهمی با فاصلهٔ کانونی سهمی اشتباه گرفته نشود در اینجا به جای a از حرف m استفاده می‌کنیم. پس معادلهٔ سهمی $y^۲-۶y+۲x+m=۰$ است. معادلهٔ سهمی را استاندارد کرده تا خط هادی آن به‌دست آید:

$$y^۲-۶y+۲x+m=۰\Rightarrow(y-۳)^۲-۹+۲x+m=۰$$

$$(y-۳)^۲=-۲x-m+۹\Rightarrow(y-۳)^۲=-۲(x+\frac{m}{۲}-\frac{۹}{۲})$$

پس دهانهٔ این سهمی رو به چپ و رأس آن $S(h,k)=(-\frac{m}{۲}+\frac{۹}{۲},۳)$ است.

همچنین $۴a=۲$، پس $a=\frac{۱}{۲}$. خط هادی این سهمی به‌صورت زیر است:

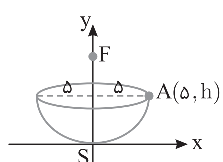
$$d:x=h+a\Rightarrow x=-\frac{m}{۲}+\frac{۹}{۲}+\frac{۱}{۲}\xrightarrow{(\frac{۳}{۲},۳)\in d}\frac{۳}{۲}=۵-\frac{m}{۲}$$

$$\frac{m}{۲}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow m=۷$$

۵۸۶ **۲** مطابق شکل زیر، دیش را روی دستگاه مختصات قرار می‌دهیم. اگر h گودی این دیش باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A(۵,h)$ روی آن قرار خواهد داشت. درضمن بنابر فرض $a=SF=۶$. از روبه‌رو این دیش یک سهمی با دهانهٔ رو به بالا دیده می‌شود. پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$x^۲=۴ay\xrightarrow{a=۶}x^۲=۲۴y\xrightarrow{A\in \text{سهمی}}$$

$$۲۵=۲۴h\Rightarrow h=\frac{۲۵}{۲۴}$$



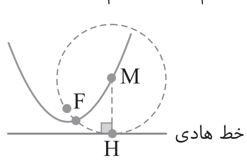
۵۸۷ **۴** بنابر تعریف سهمی این دایره‌ها بر خط هادی سهمی مماس هستند.

$$x^۲-۲x-۲=۳y\Rightarrow(x-۱)^۲-۱-۲=۳y$$

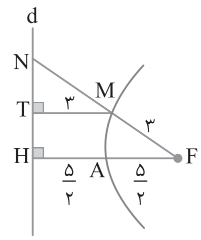
$$(x-۱)^۲=۳y+۳\Rightarrow(x-۱)^۲=۳(y+۱)$$

پس دهانهٔ این سهمی رو به بالا و $S(h,k)=(۱,-۱)$ رأس آن است. همچنین $۴a=۳$. در نتیجه $a=\frac{۳}{۴}$. معادلهٔ خط هادی این سهمی به‌صورت زیر است:

$$y=k-a\Rightarrow y=-۱-\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۷}{۴}\Rightarrow۴y+۷=۰$$



۵۸۸ (۲) MT و FH بر خط d عمودند، پس موازی‌اند. درضمن نقاط M و A روی این سهمی هستند، پس $MT=MF=3$ و $FA=AH$. از طرف دیگر کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط سهمی از خط هادی آن برابر a و در شکل برابر AH است. بنابراین $FA=AH=\frac{5}{2}$. در نتیجه



$$\triangle NHF: MT \parallel FH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{MN}{NF}=\frac{MT}{FH} \Rightarrow \frac{MN}{NF}=\frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل درمخرج}} \frac{MN}{NF-MN}=\frac{3}{5-3} \Rightarrow \frac{MN}{MF}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{MN}{3}=\frac{3}{2} \Rightarrow MN=\frac{9}{2}=4.5$$

۵۸۹ (۴) بنابر ویژگی بازتابندگی سهمی هر پرتو نوری که موازی با محور سهمی بر آن تابیده شود بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد. پس نقطهٔ مورد نظر سؤال کانون این سهمی است.

$$y^2+2y+3x-2=0 \Rightarrow (y+1)^2-1+3x-2=0$$

$$(y+1)^2=-3x+3 \Rightarrow (y+1)^2=-3(x-1)$$

پس دهانهٔ این سهمی رو به چپ و نقطهٔ $S(h,k)=(1,-1)$ رأس آن است.

همچنین $4a=3$. پس $a=\frac{3}{4}$. کانون این سهمی به صورت زیر است:

$$F(h-a,k)=(1-\frac{3}{4},-1)=(\frac{1}{4},-1)$$

۵۹۰ (۳) معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$2x^2-4y+4x-8=0 \Rightarrow 2(x^2+2x)=4y+8$$

$$2((x+1)^2-1)=4y+8 \Rightarrow 2(x+1)^2=4y+10$$

$$(x+1)^2=2(y+\frac{5}{2})$$

پس رأس این سهمی $S(h,k)=(-1,-\frac{5}{2})$ و دهانهٔ آن رو به بالا است.

همچنین $4a=2$، پس $a=\frac{1}{2}$.

پس کانون این سهمی $F(h,k+a)=(-1,-\frac{5}{2}+\frac{1}{2})=(-1,-2)$ است. اکنون وضعیت نقطهٔ $F(-1,-2)$ را نسبت به دایرهٔ $C: x^2+y^2-x+2y-1=0$ بررسی می‌کنیم. برای این کار مختصات نقطهٔ F را در معادلهٔ $C(x,y)=x^2+y^2-x+2y-1$ قرار می‌دهیم:

$$C(-1,-2)=1+4+1-4-1=1>0$$

پس F بیرون این دایره است. بنابراین از نقطهٔ F دو مماس بر این دایره رسم می‌شود.

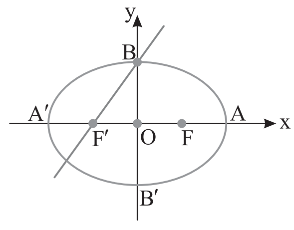
۵۹۱ (۱) نقاط تلاقی خط $2y-3x=6$ را با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم تا کانون F' و رأس B را پیدا کنیم.

$$\text{برخورد با محور } x \Rightarrow \begin{cases} 2y-3x=6 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-2 \Rightarrow F'(-2,0)$$

$$\text{برخورد با محور } y \Rightarrow \begin{cases} 2y-3x=6 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=3 \Rightarrow B(0,3)$$

بنابراین $c=OF'=2$ و $b=OB=3$. پس $a^2=b^2+c^2=9+4=13$. درضمن $FB=a$. پس مساحت دایرهٔ به قطر FB برابر است با

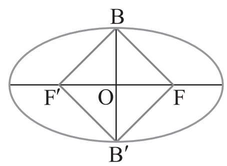
$$\pi(\frac{FB}{2})^2=\frac{\pi a^2}{4}=\frac{13\pi}{4}$$



۵۹۲ (۲) در مربع قطرها مساوی‌اند. چون چهارضلعی $BFB'F'$ مربع است، پس $BB'=FF'$، یعنی $2b=2c$، پس $b=c$. در نتیجه

$$a^2=b^2+c^2=b^2+b^2=2b^2 \Rightarrow a=\sqrt{2}b$$

بنابراین $\frac{\text{قطر بزرگ}}{\text{قطر کوچک}}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}b}{b}=\sqrt{2}$.



۵۹۳ (۲) نقطهٔ $M(10,1)$ روی بیضی با کانون‌های $F(2,5)$ و $F'(2,-3)$ قرار دارد. پس بنابر تعریف بیضی،

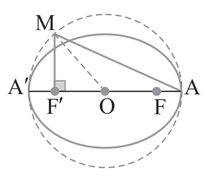
$$MF+MF'=2a \Rightarrow \sqrt{(10-2)^2+(1-5)^2}+\sqrt{(10-2)^2+(1+3)^2}=2a$$

$$\sqrt{64+16}+\sqrt{64+16}=2a \Rightarrow 2\sqrt{80}=2a \Rightarrow a=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

از طرف دیگر، $2c=FF'=\sqrt{(2-2)^2+(5+3)^2}=8 \Rightarrow c=4$

بنابراین $\text{خروج از مرکز}=\frac{c}{a}=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

۵۹۴ (۴) می‌دانیم در بیضی $AA'=2a$، پس $a=6$. در ضمن $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$، پس $c=4$. همچنین اگر از مرکز O به M وصل کنیم، آن‌گاه $OM=a$ و $OF'=c$. پس



$$\triangle MF'O: MF'^2=OM^2-OF'^2=a^2-c^2=36-16=20$$

بنابراین

$$\triangle AMF': AM^2=MF'^2+AF'^2 \xrightarrow{AF'=a+c} AM^2=20+(a+c)^2$$

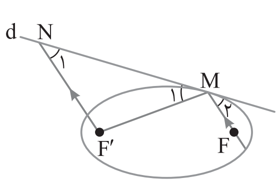
$$AM^2=20+(6+4)^2=120 \Rightarrow AM=2\sqrt{30}$$

۵۹۵ (۲) شکل سؤال به صورت زیر است. از ویژگی بازتابندگی بیضی نتیجه می‌گیریم $\hat{M}_1=\hat{M}_2$. از طرف دیگر،

$$\left.\begin{matrix} NF' \parallel MF \\ d \text{ مورب} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{N}_1=\hat{M}_2 \xrightarrow{\hat{M}_1=\hat{M}_2} \hat{N}_1=\hat{M}_1$$

پس مثلث MNF' متساوی‌الساقین است. ولی اگر این مثلث قائم‌الزاویه باشد، یعنی $\hat{F}'=90^\circ$، آن‌گاه $F'\hat{M}F=90^\circ$. این نتیجه در حالت کلی لزومی ندارد درست باشد.

همچنین اگر این مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، یعنی $\hat{F}'=60^\circ$، آن‌گاه $F'\hat{M}F=60^\circ$. این نتیجه هم در حالت کلی لزومی ندارد درست باشد.



۵۹۶ **۴** رأس سهمی نزدیک‌ترین نقطهٔ سهمی تا کانون آن است. بنابراین باید مقدار ثابت a را به‌دست آوریم

$$a=\left|\frac{\text{ضریب متغیری که عبارت نسبت به آن درجهٔ ۱ است}}{۴\times(\text{ضریب متغیر درجهٔ ۲})}\right|$$

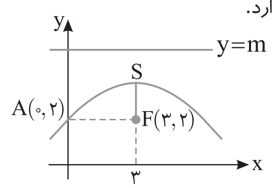
$$=\left|\frac{۵}{۴\times(-۷)}\right|=\frac{۵}{۲۸}$$

۵۹۷ **۴** **راه‌حل اول** شکل تقریبی این سهمی به صورت زیر است. فرض می‌کنیم خط $y=m$ خط هادی این سهمی باشد. می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی به یک اندازه است. پس نقطهٔ $A(۰,۲)$ که روی سهمی قرار دارد، این ویژگی را دارد:

$$\sqrt{(۰-۳)^۲+(۲-۲)^۲}=|۲-m|\Rightarrow ۳=|۲-m|\Rightarrow\begin{cases}۲-m=۳\Rightarrow m=-۱\\ ۲-m=-۳\Rightarrow m=۵\end{cases}$$

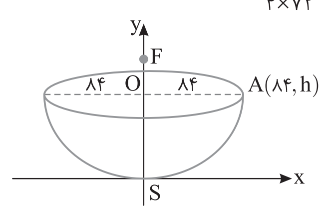
$m=-۱$ قابل قبول نیست زیرا خط $y=-۱$ سهمی را قطع می‌کند، پس نمی‌تواند خط هادی باشد. بنابراین $y=۵$ خط هادی است.

راه‌حل دوم فاصلهٔ $A(۰,۲)$ تا کانون $F(۳,۲)$ برابر ۳ است. پس گزینه‌ای درست است که بالاتر از A باشد و فاصلهٔ A تا آن برابر ۳ باشد که فقط گزینهٔ (۴) این ویژگی‌ها را دارد.



۵۹۸ **۲** آینهٔ سهموی این تلسکوپ انعکاسی از روبه‌رو یک سهمی با رأس $S(۰,۰)$ و دهانهٔ رو به بالا دیده می‌شود. معادلهٔ این سهمی $x^۲=۴ay$ است. بنابر فرض، فاصلهٔ رأس تا کانون ۷۲ است، پس $a=۷۲$. بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $x^۲=۴\times۷۲y$ است. فرض می‌کنیم فاصلهٔ رأس S تا مرکز قاعدهٔ این آینهٔ سهموی یعنی O برابر h باشد. در این صورت نقطهٔ $A(۸۴,h)$ روی این سهمی است.

$$A\in\text{سهمی}\Rightarrow ۸۴^۲=۴\times۷۲\times h\Rightarrow h=\frac{۸۴\times۸۴}{۴\times۷۲}=۲۴/۵$$



۵۹۹ **۳** در سهمی $y^۲=۸(x-۲)$ رأس، نقطهٔ $S(۲,۰)$ است. همچنین $۴a=۸$، بنابراین $a=۲$. پس $OF=۲a=۴$. در شکل MH موازی OF است. پس

$$\triangle NOF: MH||OF\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{NH}{OH}=\frac{MN}{MF}$$

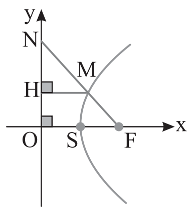
$$\xrightarrow[\text{چون M روی سهمی است}]{MF=MH}\frac{NH}{OH}=\frac{MN}{MH}\qquad(۱)$$

$$\triangle NOF: MH||OF\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{MN}{FN}=\frac{MH}{OF}$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی‌های تناسب}}\frac{MN}{MH}=\frac{FN}{OF}\qquad(۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{NH}{OH}=\frac{FN}{OF}\Rightarrow OF=\frac{OH\times FN}{NH}\xrightarrow{OF=۴}\frac{OH\times FN}{NH}=۴$$



۶۰۰ **۳** بنابر خاصیت بازتابندگی سهمی هر پرتو نوری که موازی با محور سهمی بر سهمی، بتابد بازتابش از کانون سهمی می‌گذرد. پس در این سؤال نقطهٔ $(۱,-۳)$ کانون سهمی است. بنابراین لازم است کانون این سهمی را پیدا کنیم:

$$x^۲-۲x+my+۹=۰\Rightarrow(x-۱)^۲-۱+my+۹=۰$$

$$(x-۱)^۲=-my-۸\Rightarrow(x-۱)^۲=-m(y+\frac{۸}{m})$$

پس دهانهٔ این سهمی رو به پایین است، چون با فرض $m>۰$ مقدار $-m$ منفی است. همچنین رأس این سهمی $S(h,k)=(۱,-\frac{۸}{m})$ است و $۴a=m$، پس $a=\frac{m}{۴}$. مختصات کانون این سهمی به‌صورت زیر است:

$$F(h,k-a)=(۱,-\frac{۸}{m}-\frac{m}{۴})=(۱,-۳)$$

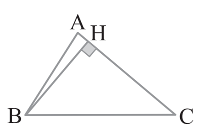
بنابراین

$$-\frac{۸}{m}-\frac{m}{۴}=-۳\Rightarrow m^۲+۳۲=۱۲m\Rightarrow m^۲-۱۲m+۳۲=۰$$

$$(m-۴)(m-۸)=۰\Rightarrow m=۴\ ,\ m=۸$$

$m=۸$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۶۰۱ **۳** طول ارتفاع وارد بر ضلع AC معلوم است، پس رأس B از خط AC به فاصلهٔ ثابتی قرار دارد. بنابراین مکان هندسی رأس B دو خط موازی AC به فاصلهٔ BH از آن است.

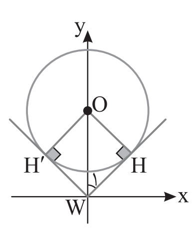


۶۰۲ **۳** مرکز دایره‌ای که بر نیمسازهای ناحیه‌های اول و دوم مماس است روی محور y قرار دارد، چون هر نقطه روی محور y از این دو نیمساز به یک فاصله است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OWH (W مبدأ مختصات است) زاویهٔ $W_۱$ برابر ۴۵° است، پس مثلث OWH متساوی‌الساقین نیز هست. در نتیجه $WH=OH=۳\sqrt{۲}$. بنابراین

$$\triangle OWH: OW^۲=OH^۲+WH^۲=(۳\sqrt{۲})^۲+(۳\sqrt{۲})^۲=۳۶$$

$$OW=۶$$

پس معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $x^۲+(y-۶)^۲=۱۸$ یا $x^۲+y^۲-۱۲y+۱۸=۰$ است.



۶۰۳ (۱) ابتدا وضعیت نسبی دو دایره را مشخص می‌کنیم:

$$C: x^۲+y^۲-۲x+۶y+۹=۰$$

$$\begin{cases} O(۱,-۳) \\ r=\dfrac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\dfrac{\sqrt{۴+۳۶-۳۶}}{۲}=۱ \end{cases}$$

$$C': x^۲+y^۲-۸x-۲y+۱۳=۰$$

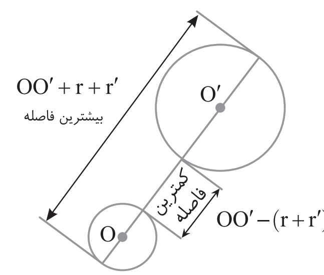
$$\begin{cases} O'(۴,۱) \\ r'=\dfrac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\dfrac{\sqrt{۶۴+۴-۵۲}}{۲}=۲ \end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

چون $OO'>r+r'$ پس دو دایره متخارج‌اند. توجه کنید که بیشترین و کمترین فاصلهٔ بین نقاط روی دو دایرهٔ متخارج برابرند با

$OO'-(r+r')=۲$: کمترین فاصله , $OO'+r+r'=۸$: بیشترین فاصله

بنابراین باید $۲\le MN\le ۸$. در بین گزینه‌ها، فقط گزینهٔ (۱) در این نابرابری‌ها صدق نمی‌کند.



۶۰۴ (۳) چون شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، با به‌دست آوردن مختصات مرکز O در دایره و شیب OA، شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

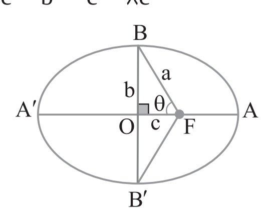
$$x^۲+y^۲-۴x+۲y=۴ \Rightarrow O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,-۱)$$

پس $m_{OA}=\dfrac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\dfrac{-۱+۱}{۵-۲}=۰$. بنابراین شیب خط مماس بر دایره در نقطهٔ A تعریف نشده است، پس معادلهٔ خط مماس به صورت $x=۵$ است.

۶۰۵ (۲) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBF، بنابر روابط مثلثاتی، $\tan\theta=\dfrac{OB}{OF}=\dfrac{b}{c}$. توجه کنید که

$$\tan(B\hat{F}B')=\tan ۲\theta=\frac{۲\tan\theta}{۱-\tan^۲\theta}=\frac{۲\times\frac{b}{c}}{۱-\frac{b^۲}{c^۲}}=\frac{۲bc}{c^۲-b^۲} \qquad (۱)$$

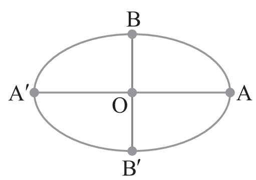
از طرف دیگر $\dfrac{c}{a}=\dfrac{۱}{۳}$ و $a^۲=b^۲+c^۲$، در نتیجه $(۳c)^۲=b^۲+c^۲$. با ساده کردن این برابری به‌دست می‌آید $b=۲\sqrt{۲}c$. اکنون می‌توان برابری (۱) را به شکل زیر نوشت: $\tan(B\hat{F}B')=\dfrac{۲bc}{c^۲-b^۲}=\dfrac{۴\sqrt{۲}c^۲}{c^۲-۸c^۲}=-\dfrac{۴\sqrt{۲}}{۷}$.



۶۰۶ (۱) دو سر قطر بزرگ این بیضی عرض برابر دارند، پس خط AA' موازی محور x است. بنابراین محدودهٔ تغییرات y بین عرض نقاط B و B' (دو سر قطر کوچک این بیضی) است. اکنون توجه کنید که

$$۲a=AA' \Rightarrow ۲a=۸ \Rightarrow a=۴ \ , \qquad \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{c}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow c=۲\sqrt{۳}$$

مرکز بیضی وسط قطر بزرگ آن است، بنابراین $O=\dfrac{A+A'}{۲}=(۲,۱)$. از طرف دیگر، $b^۲=a^۲-c^۲=۱۶-۱۲=۴$، در نتیجه $b=۲$. نقاط B و B' از مرکز O در راستای محور y به اندازهٔ $b=۲$ واحد بالاتر و پایین‌تر هستند. پس $B(۲,۱+۲)=(۲,۳)$ و $B'(۲,۱-۲)=(۲,-۱)$. بنابراین تغییرات y در این بیضی در فاصلهٔ $[-۱,۳]$ است.



۶۰۷ (۳) بنابر فرض‌های سؤال شکل زیر را خواهیم داشت. طول پاره‌خط PA' را می‌خواهیم. از M به کانون دیگر بیضی یعنی F' وصل می‌کنیم و از F' به موازات MF خطی رسم می‌کنیم تا خط مماس را در نقطهٔ N قطع کند. توجه کنید که

$$\left.\begin{array}{l} ۲a=۱۲ \Rightarrow a=۶ \\ ۲c=۶ \Rightarrow c=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=۳۶-۹=۲۷ \Rightarrow b=۳\sqrt{۳}$$

$$MF=\frac{b^۲}{a}=\frac{۲۷}{۶}=\frac{۹}{۲}$$

از طرف دیگر بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ و بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{M}_۱=\hat{N}$، پس $\hat{M}_۲=\hat{N}$. در نتیجه $MF'=NF'$. چون M روی بیضی است،

$$MF+MF'=۲a \Rightarrow \frac{۹}{۲}+MF'=۱۲ \Rightarrow MF'=\frac{۱۵}{۲} \Rightarrow NF'=\frac{۱۵}{۲}$$

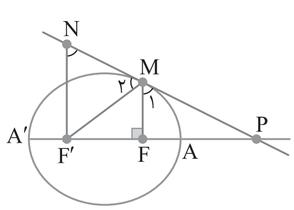
از تعمیم قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم

$$\triangle PNF': MF \| NF' \Rightarrow \frac{PF}{PF'}=\frac{MF}{NF'} \Rightarrow \frac{PF}{PF'}=\frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۱۵}{۲}}=\frac{۳}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{PF}{PF'-PF}=\frac{۳}{۵-۳} \Rightarrow \frac{PF}{FF'}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{PF}{۶}=\frac{۳}{۲}$$

$$PF=۹ \xrightarrow{FA=a-c=۳} PA+۳=۹ \Rightarrow PA=۶$$

بنابراین $PA'=PA+۲a=۶+۱۲=۱۸$.



۶۰۸ **۴** ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم

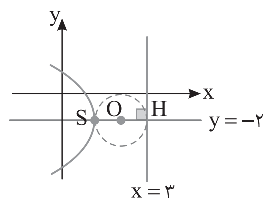
$$y^2+4y+2x-1=0\Rightarrow (y+2)^2-4+2x-1=0$$

$$(y+2)^2=-2x+5\Rightarrow (y+2)^2=-2(x-\frac{5}{2})$$

دهانهٔ این سهمی رو به چپ و رأس آن $S(h,k)=(\frac{5}{2},-2)$ است. همچنین $4a=2$، پس $a=\frac{1}{2}$. بنابراین معادلهٔ خط هادی این سهمی به‌صورت زیر است:

$$x=h+a=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow x=3$$

پس اگر عمود SH را بر خط هادی رسم کنیم، دایرهٔ به قطر SH جواب سؤال است. با توجه به شکل H نقطهٔ $(3,-2)$ است پس مختصات O مرکز دایره $O=\frac{S+H}{2}=(\frac{11}{4},-2)$ و شعاع دایره مساوی $\frac{SH}{2}=\frac{a}{2}=\frac{1}{4}$ است. پس معادلهٔ دایره $(x-\frac{11}{4})^2+(y+2)^2=\frac{1}{16}$ است.

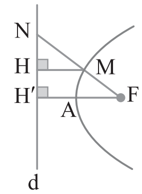


۶۰۹ **۳** فاصلهٔ کانونی دیش از برابری زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{فاصلهٔ کانونی دیش}=\frac{(\text{قطر دهانهٔ دیش})^2}{16\times(\text{عمق دیش})}$$

در نتیجه $\text{فاصلهٔ کانونی دیش}=\frac{(64)^2}{16\times 32}=8$.

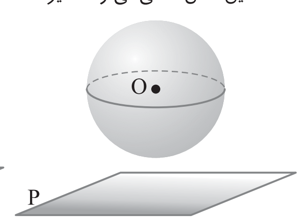
۶۱۰ **۲** هر نقطهٔ سهمی از کانون و خط هادی آن به یک فاصله است، پس $MH=MF=\frac{9}{2}$. همچنین $AF=AH'$، پس $FH'=2AH'=\frac{15}{2}$. درضمن دو پاره‌خط MH و FH′ بر خط d عمودند پس موازی‌اند. درنتیجه



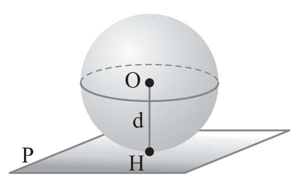
$$\triangle NH'F: MH||FH' \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{MH}{FH'}=\frac{MN}{NF}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{MN}{MN+\frac{9}{2}}\Rightarrow 3MN+\frac{27}{2}=5MN\Rightarrow 2MN=\frac{27}{2}\Rightarrow MN=\frac{27}{4}$$

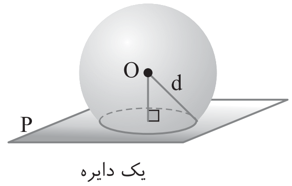
۶۱۱ **۴** مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطهٔ O به فاصلهٔ d هستند، کره‌ای به مرکز O و شعاع d است. محل تلاقی صفحهٔ P با این کره جواب است. این محل تلاقی می‌تواند دایره، نقطه یا تهی باشد (شکل‌های زیر را ببینید).



تهی



یک نقطه



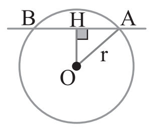
یک دایره

۶۱۲ **۳** از معادلهٔ دایره به‌دست می‌آید: $O(-1,1)$ و $r=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$.
به کمک دستور فاصلهٔ نقطه از خط به‌دست می‌آید $OH=\frac{|-1+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{3-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

می‌دانیم عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند، پس

$$AB=2AH=2(\frac{\sqrt{10}}{2})=\sqrt{10}$$



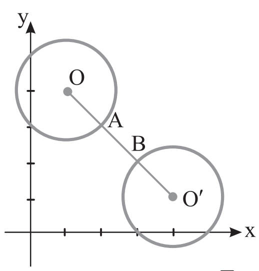
۶۱۳ **۲** ابتدا با پیدا کردن مرکزهای دو دایره و شعاع‌های آن‌ها، وضعیت نسبی دو دایره را بررسی می‌کنیم:

$$x^2+y^2-2x-8y+15=0\Rightarrow O(1,4),\quad r=\frac{\sqrt{4+64-60}}{2}=\sqrt{2}$$

$$x^2+y^2-8x-2y+15=0\Rightarrow O'(4,1),\quad r'=\frac{\sqrt{64+4-60}}{2}=\sqrt{2}$$

چون $OO'=3\sqrt{2}$ و $OO'>r+r'$، مطابق شکل مقابل، دو دایره متخارج هستند و AB قطر کوچک‌ترین دایرهٔ مماس بر آن‌ها است:

$$AB=OO'-(r+r')=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

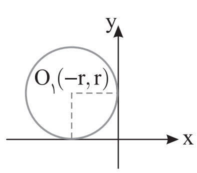


پس شعاع دایرهٔ مماس مساوی $\frac{AB}{2}$، یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۶۱۴ **۴** با توجه به مختصات $A(-2,1)$ دایرهٔ مورد نظر در ربع دوم قرار دارد. مرکز دایره‌ای به شعاع r که در ربع دوم بر هر دو محور مختصات مماس است به صورت $O_1(-r,r)$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره به شکل $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$ است. مختصات A در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

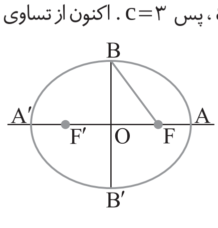
$$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2\Rightarrow r^2-4r+4+r^2-2r+1=r^2\Rightarrow r^2-6r+5=0$$

در نتیجه $r=1$ یا $r=5$.



۶۱۵ **۳** قطر BB′ برابر $2b$ است، پس مساحت دایرهٔ به قطر BB′ برابر πb^2 است، یعنی کافی است b را به‌دست آوریم. می‌دانیم در بیضی فاصلهٔ کانون تا نقطهٔ B برابر a است، یعنی $FB=a$. بنابر فرض، چون $FB=5$، پس $a=5$، چون $AF'=a+c$، پس $a+c=8$. چون $a=5$، پس $c=3$. اکنون از تساوی $a^2=b^2+c^2$ به‌دست می‌آید $5^2=b^2+3^2$، یعنی $b=4$. در نتیجه

$$\text{مساحت دایرهٔ به قطر } BB'=\pi b^2=16\pi$$

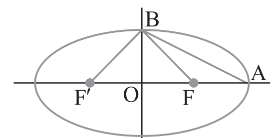


۶۱۶ **۲** در مثلث $F'BA$، ارتفاع $OB=b$ و قاعده $F'A=a+c$ است. در مثلث OBF، ارتفاع $OB=b$ و قاعده $OF=c$ است. بنابر فرض،

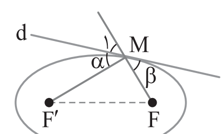
$$S_{F'BA}=5S_{OBF}\Rightarrow \frac{1}{2}OB\times F'A=5(\frac{1}{2}OB\times OF)$$

$$F'A=5OF\Rightarrow a+c=5c\Rightarrow a=4c$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{4c}=\frac{1}{4}$.



۶۱۷ **۳** نقطهٔ M روی بیضی قرار دارد، پس $MF+MF'=2a$. سایر نقاط خط d بیرون این بیضی هستند، بنابراین مجموع فاصله‌های آن‌ها از کانون‌های F و F' بزرگ‌تر از $2a$ است. پس از بین همهٔ نقاط روی خط d مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد. از طرف دیگر، بنابر ویژگی بازتابندگی بیضی، دو زاویهٔ α و β مساوی‌اند. در ضمن $\hat{M}_1=\beta$، پس $\hat{M}_1=\alpha$، یعنی خط d نیمساز خارجی مثلث MFF' است. پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند و در حالت کلی لزومی ندارد زاویهٔ FMF' قائمه باشد.



۶۱۸ **۲** معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم، معادلهٔ خط هادی را به‌دست می‌آوریم و با $x=-\frac{7}{2}$ مقایسه می‌کنیم. درضمن در معادلهٔ سهمی به‌جای متغیر a از m استفاده می‌کنیم تا با فاصلهٔ کانونی سهمی اشتباه نشود:

$$y^2=my+2x+5\Rightarrow y^2-my=2x+5\Rightarrow (y-\frac{m}{2})^2-\frac{m^2}{4}=2x+5$$

$$(y-\frac{m}{2})^2=2x+5+\frac{m^2}{4}\Rightarrow (y-\frac{m}{2})^2=2(x+\frac{5}{2}+\frac{m^2}{8})$$

پس دهانهٔ این سهمی رو به راست و رأس آن $S(h,k)=(-\frac{5}{2}-\frac{m^2}{8},\frac{m}{2})$ است. همچنین $4a=2$، در نتیجه $a=\frac{1}{2}$. پس خط هادی این سهمی به صورت زیر است:

$$x=h-a\Rightarrow x=-\frac{5}{2}-\frac{m^2}{8}-\frac{1}{2}\xrightarrow{x=-\frac{7}{2}}-\frac{7}{2}=-\frac{6}{2}-\frac{m^2}{8}$$

$$\frac{m^2}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

بنابراین $a=\pm 2$.

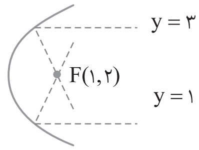
۶۱۹ **۳** از معادلهٔ سهمی نتیجه می‌شود رأس آن $S(h,k)=(-m,-2)$ است و $a=2$. همچنین دهانهٔ این سهمی رو به پایین است. در این سهمی کانون $F(h,k-a)=(-m,-4)$ است. مختصات F در معادلهٔ $3x+y=2$ صدق می‌کنند:

$$3(-m)-4=2\Rightarrow m=-2$$

۶۲۰ **۱** معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد در می‌آوریم:

$$y^2-4y=8x+4\Rightarrow (y-2)^2-4=8x+4\Rightarrow (y-2)^2=8(x+1)$$

پس دهانهٔ این سهمی رو به راست و نقطهٔ $S(h,k)=(-1,2)$ رأس آن است. همچنین $a=2$، بنابراین کانون این سهمی $F(h+a,k)=(1,2)$ است. توجه کنید که چون هر دو شعاع نور موازی محور سهمی هستند، پس بازتاب آن‌ها از کانون سهمی می‌گذرد. در نتیجه محل برخورد بازتاب‌ها، کانون سهمی است.



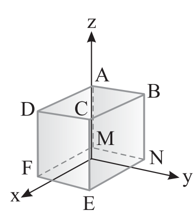
۶۲۱ **۴** ناحیهٔ رنگی درون و روی دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع ۲ و پایین و روی خط گذرنده از نقاط $A(2,0)$ و $B(0,-2)$ است.

معادلهٔ دایره: $x^2+y^2=4\Rightarrow$ درون و روی دایره: $x^2+y^2\le 4$

معادلهٔ خط AB: $y-0=\frac{0+2}{2-0}(x-2)\Rightarrow y=x-2\Rightarrow x-y=2$

پایین خط $x-y=2$ در رابطهٔ $x-y\ge 2$ صدق می‌کند. بنابراین رابطهٔ ناحیهٔ رنگی به صورت $\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ x-y\ge 2\end{cases}$ است.

۶۲۲ **۴** وجه‌های این مکعب مستطیل موازی با صفحه‌های مختصات هستند. نقطهٔ $(3,3,2)$ رأس C است و این نقطه روی سه وجه DCEF، BCEN و ABCD قرار دارد، پس قابل قبول نیست. نقطهٔ $(3,-1,1)$ روی یال DF قرار دارد، زیرا یال DF به معادلهٔ $\begin{cases}x=3\\ y=-1\\ -3\le z\le 2\end{cases}$ است. پس این نقطه روی دو وجه ADFM و DCEF است، پس قابل قبول نیست. در ضمن نقطهٔ $(0,0,0)$ درون این مکعب مستطیل قرار دارد، زیرا تمام نقاط درون این مکعب مستطیل در معادلات $-2<x<3, -1<y<3, -3<z<2$ صدق می‌کنند. ولی نقطهٔ $(3,2,-1)$ فقط روی وجه DCEF قرار دارد زیرا معادلهٔ این وجه به‌صورت $\begin{cases}x=3\\ -1\le y\le 3\\ -3\le z\le 2\end{cases}$ است.



۶۲۳ **۲** نقطهٔ A روی محور y قرار دارد، پس مختصات A به‌صورت $(0,y,0)$ است و نقطهٔ B روی خط $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\ y=-3\sqrt{2}\end{cases}$ است، پس مختصات B به‌صورت $(2\sqrt{2},-3\sqrt{2},z)$ است. بنابراین

$$|AB|=\sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2+(y+3\sqrt{2})^2+(z-0)^2}=\sqrt{8+(y+3\sqrt{2})^2+z^2}$$

چون کمترین مقدار عبارت‌های $(y+3\sqrt{2})^2$ و z^2 برابر صفر است، پس کمترین طول پاره‌خط AB برابر $\sqrt{8}$ یا $2\sqrt{2}$ است.

۶۲۴ (۴) تصویر قائم $A(x,y,z)$ بر صفحهٔ xz نقطهٔ $A'(x,۰,z)$ و تصویر قائم A بر صفحهٔ yz نقطه $A''(۰,y,z)$ است. پس

$$\begin{cases} A(۲,۳,-۱) \xrightarrow[\text{صفحهٔ } xz]{\text{تصویر روی}} A'(۲,۰,-۱) \\ B(۴,-۱,۱) \xrightarrow[\text{صفحهٔ } yz]{\text{تصویر روی}} B'(۰,-۱,۱) \end{cases}$$

$$|A'B'|=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۹}=۳$$

۶۲۵ (۳) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$|OA|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\Rightarrow ۳=\sqrt{(a-۱)^۲+a^۲+a^۲}$$

$$۳=\sqrt{a^۲-۲a+۱+a^۲+a^۲}\Rightarrow ۳=\sqrt{۳a^۲-۲a+۱}\Rightarrow ۹=۳a^۲-۲a+۱$$

$$۳a^۲-۲a-۸=۰\Rightarrow a=۲,\ a=-\frac{۴}{۳}$$

اگر $a=۲$، آن‌گاه $A(۱,۲,۲)$، بنابراین

$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ } A \text{ از محور } x=\sqrt{y^۲+z^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

عدد $۲\sqrt{۲}$ در گزینه‌ها وجود دارد، پس نیازی به بررسی حالت $a=-\frac{۴}{۳}$ نیست.

۶۲۶ (۲) فرض کنید M نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد:

$$M=\frac{A+B}{۲}=(m-۱,-۱,۱)$$

می‌دانیم $|MC|=۳\sqrt{۲}$، بنابراین

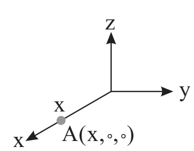
$$\sqrt{(m-۱+۱)^۲+(-۱-۳)^۲+(۱-۱)^۲}=۳\sqrt{۲}$$

در نتیجه $\sqrt{m^۲+۱۶}=۳\sqrt{۲}$، پس $m=\pm\sqrt{۲}$.

۶۲۷ (۳) می‌دانیم اگر $A(x,y,z)$، آن‌گاه تصویر قائم A روی محور x نقطهٔ $H(x,۰,۰)$ و قرینهٔ A نسبت به محور x نقطهٔ $A'(x,-y,-z)$ است. طبق فرض، دو نقطهٔ H و A' بر هم منطبق هستند. بنابراین

$$(x,۰,۰)=(x,-y,-z)\Rightarrow y=۰,\ z=۰$$

بنابراین A نقطهٔ $(x,۰,۰)$ است، پس فاصلهٔ A از مبدأ مختصات، محور y، محور z و صفحهٔ yz برابر $|x|$ است و فاصلهٔ A از صفحهٔ xy برابر صفر است، پس گزینهٔ (۳) پاسخ سؤال است.



۶۲۸ (۲) تصویر قائم نقطهٔ (x,y,z) روی صفحهٔ yz نقطهٔ $(۰,y,z)$ و قرینهٔ آن نسبت به محور y نقطهٔ $(-x,y,-z)$ است. بنابراین

$$M(m-۱,۱,-۱)\xrightarrow[\text{صفحهٔ } yz]{\text{تصویر روی}} A(۰,۱,-۱)$$

$$M(m-۱,۱,-۱)\xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} B(-m+۱,۱,۱)$$

$$|AB|=\sqrt{(۱-m)^۲+۰+۴}$$

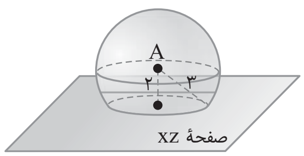
چون $|AB|=\sqrt{(۱-m)^۲+۴}$، پس کمترین فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از هم وقتی به‌دست می‌آید که $(۱-m)^۲$ برابر صفر شود. بنابراین مینیمم فاصلهٔ A از B برابر است با $\sqrt{۴}=۲$.

۶۲۹ (۴) **راه‌حل اول** هر نقطه روی صفحهٔ xz به‌صورت $M(x,۰,z)$ است. طبق فرض تست، $|AM|=۳$، بنابراین

$$\sqrt{(x-۱)^۲+۴+(z+۱)^۲}=۳\Rightarrow (x-۱)^۲+(z+۱)^۲=۵ \qquad (۱)$$

پس نقاطی از صفحهٔ xz که در رابطهٔ (۱) صدق می‌کنند، جواب این تست هستند. در نتیجه مسئله نامتناهی جواب دارد.

راه‌حل دوم مکان هندسی نقاطی از فضا که از A به فاصلهٔ ۳ هستند کره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ xz برابر $|y|$ یعنی ۲ است. پس کره‌ای به مرکز A و شعاع ۳، صفحهٔ xz را قطع می‌کند و محل تقاطع یک دایره است، پس مسئله نامتناهی جواب دارد.



۶۳۰ (۳) نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC است. پس

$$M=\frac{B+C}{۲}=\left(\frac{۲m+۱-۱}{۲},\frac{۳+۵}{۲},\frac{m+m+۴}{۲}\right)=(m,۴,m+۲)$$

چون $|AM|=۲$، پس

$$\sqrt{(m+۱)^۲+(۴-۲)^۲+(m+۲-۱)^۲}=۲\Rightarrow\sqrt{۲(m+۱)^۲+۴}=۲$$

$$۲(m+۱)^۲+۴=۴\Rightarrow(m+۱)^۲=۰\Rightarrow m=-۱$$

پس M نقطهٔ $(-۱,۴,۱)$ است. در نتیجه مجموع مختصات M برابر $-۱+۴+۱=۴$ است.

۶۳۱ (۴) می‌دانیم $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$. پس

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{۳}{۲}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=-\frac{۳}{۲}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=-\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OB}+\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=-\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OB}+\frac{۵}{۲}\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OM}=-\frac{۳}{۲}(-۱,-۱,۳)+\frac{۵}{۲}(۲,-۱,۰)=\left(\frac{۱۳}{۲},-۱,-\frac{۹}{۲}\right)$$

پس مختص عرض $\overrightarrow{OM}$ برابر -۱ است.

۶۳۲ (۳) بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ برابر $۲(\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{k})-(\vec{j}+m\vec{k})$ یا $۲\vec{i}+\vec{j}+(۴-m)\vec{k}$ است. بنابراین

$$|۲\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۴+۱+(۴-m)^۲}=\sqrt{۵+۱۶+m^۲-۸m}=\sqrt{m^۲-۸m+۲۱}$$

بنابر فرض سؤال،

$$\frac{|۲\vec{a}-\vec{b}|+۱۲}{۲|\vec{a}|+|\vec{b}|}=\sqrt{۶}\Rightarrow\frac{\sqrt{m^۲-۸m+۲۱}+۱۲}{۲\sqrt{۱+۱+۴}+\sqrt{۱+m^۲}}=\sqrt{۶}$$

$$\sqrt{m^۲-۸m+۲۱}+۱۲=۱۲+\sqrt{۶}\sqrt{۱+m^۲}$$

$$m^۲-۸m+۲۱=۶+۶m^۲\Rightarrow ۵m^۲+۸m-۱۵=۰$$

مجموع مقادیر m در معادلهٔ به‌دست آمده برابر $-\frac{۸}{۵}$ است.

۶۳۳ (۲) در صورتی که سه نقطهٔ A، B و C بر هم منطبق باشند، از آن‌ها نامتناهی خط می‌گذرد که در این سؤال سه نقطه متمایز هستند. در صورتی که سه نقطهٔ A، B و C در یک راستا باشند، از آنها یک خط می‌گذرد و در غیر این صورت از آن‌ها خطی عبور نمی‌کند.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۳,۶,۱)-(۱,۵,-۲)=(۲,۱,۳)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-۱,۴,-۵)-(۱,۵,-۲)=(-۲,-۱,-۳)$$

پس $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$، در نتیجه $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$. بنابراین نقاط A، B و C روی یک خط قرار دارند.

۶۳۴ (۳) نقطهٔ A روی خط $\begin{cases} x=۴ \\ y=-۳ \end{cases}$ است، پس A نقطهٔ $(۴,-۳,z)$ است و نقطهٔ B روی خط $\begin{cases} x=۲ \\ z=۰ \end{cases}$ است. پس B نقطهٔ $(۲,y,۰)$ است. پس $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-۲,y+۳,-z)$، از طرف دیگر

$$\overrightarrow{AB}\|\vec{a}\Rightarrow\frac{-۲}{۱}=\frac{y+۳}{-۲}=\frac{-z}{۱}\Rightarrow\begin{cases} y+۳=۴\Rightarrow y=۱ \\ -z=-۲\Rightarrow z=۲ \end{cases}$$

بنابراین

$$\overrightarrow{AB}=(-۲,۴,-۲)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{۴+۱۶+۴}=۲\sqrt{۶}$$

۶۳۵ (۴) اگر $\vec{a}=(x,y,z)$، آن‌گاه

$$\text{طول تصویر } \vec{a} \text{ بر صفحهٔ } xy=\sqrt{x^۲+y^۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$\text{طول تصویر } \vec{a} \text{ بر صفحهٔ } xz=\sqrt{x^۲+z^۲}=۲$$

$$\text{طول تصویر } \vec{a} \text{ بر صفحهٔ } yz=\sqrt{y^۲+z^۲}=\sqrt{۶}$$

در نتیجه $x^۲+y^۲=۸$ ، $x^۲+z^۲=۴$ و $y^۲+z^۲=۶$. از جمع این برابری‌ها به‌دست می‌آید $۲(x^۲+y^۲+z^۲)=۱۸$، پس $x^۲+y^۲+z^۲=۹$، بنابراین

$$\text{اندازهٔ بردار } \vec{a}=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۹}=۳$$

۶۳۶ (۴) توجـه کنیـد کـه $\vec{a}+\vec{b}=(۲,۰,۱)$. چـون $\vec{c}$ در خـلاف جهت $\vec{a}+\vec{b}$ اسـت، پـس عـددی منفـی ماننـد m وجـود دارد کـه بـه ازای آن $\vec{c}=m(\vec{a}+\vec{b})$ ، یعنی

$$\vec{c}=(۲m,۰,m)\ ,\ m<۰$$

طول بردار $\vec{c}$ برابر ۳ است، پس

$$\sqrt{۴m^۲+m^۲}=۳\Rightarrow\sqrt{۵}|m|=۳\Rightarrow|m|=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

چون m منفی است، پس $m=-\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ و $\vec{c}=(-\frac{۶}{\sqrt{۵}},۰,-\frac{۳}{\sqrt{۵}})$. در نهایت به‌دست می‌آید

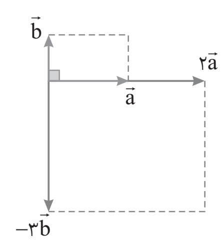
$$\text{مجموع مؤلفه‌های بردار } \vec{c}=-\frac{۶}{\sqrt{۵}}+۰-\frac{۳}{\sqrt{۵}}=-\frac{۹}{\sqrt{۵}}$$

۶۳۷ (۳) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ضلع‌های مجاور این متوازی‌الاضلاع باشـند، آن‌گاه $\vec{a}+\vec{b}=(۳,۵,۴)$ و $\vec{a}-\vec{b}=(-۳,-۱,-۸)$. بنابراین

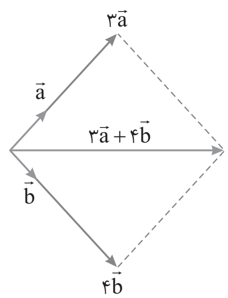
$$\vec{b}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})}{۲}=(۳,۳,۶),\quad \vec{a}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})}{۲}=(۰,۲,-۲)$$

واضح است که $\vec{a}$ ضلع کوچک‌تر است و $|\vec{a}|=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$.

۶۳۸ (۳) توجـه کنید کـه $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۹+۱+۴۹}=\sqrt{۵۹}$. در نتیجه متوازی‌الاضلاع سـاخته شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مستطیل است، یعنی $\vec{a}\perp\vec{b}$. در نتیجه $۲\vec{a}\perp(-۳\vec{b})$.



۶۳۹ (۲) چـون $۳\vec{a}+۴\vec{b}$ نیمسـاز زاویـهٔ بیـن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ اسـت، پـس متوازی‌الاضلاع ایجاد شـده روی $۳\vec{a}$ و $۴\vec{b}$ لوزی اسـت، پس $|۳\vec{a}|=|۴\vec{b}|$، یعنی $۳|\vec{a}|=۴|\vec{b}|$ ، در نتیجه $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{۴}{۳}$.



۶۴۰ (۲) توجه کنید که $\vec{a}'=(-۲,۳,-۶)$ و $\vec{b}'=(۱,\beta,-\gamma)$. چون $\vec{a}'$ و $\vec{b}'$ در یک امتداد هستند، پس $\frac{-۶}{-\gamma}=\frac{۳}{\beta}=\frac{-۲}{۱}$ ، یعنی $\beta=-\frac{۳}{۲}$ و $\gamma=-۳$. پس

$$|\vec{a}'+\vec{b}'|=|(-۲+۱,۳-\frac{۳}{۲},-۶+۳)|=|(-۱,\frac{۳}{۲},-۳)|=\sqrt{۱+\frac{۹}{۴}+۹}=\frac{۷}{۲}$$

۶۴۱ (۴) رابطهٔ داده شده سطح بین دو دایره است، زیرا

$$-۴\le x^۲+y^۲-۴x-۸y\le۱۲\Rightarrow-۴\le(x-۲)^۲-۴+(y-۴)^۲-۱۶\le۱۲$$

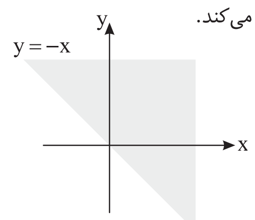
$$-۴\le(x-۲)^۲+(y-۴)^۲-۲۰\le۱۲\Rightarrow۱۶\le(x-۲)^۲+(y-۴)^۲\le۳۲$$

رابطهٔ فوق سطح بین دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های $\sqrt{۳۲}$ و $\sqrt{۱۶}$ است. بنابراین

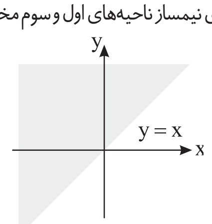
مساحت دایرهٔ کوچک‌تر − مساحت دایرهٔ بزرگ‌تر = مساحت خواسته شده

$$=\pi(\sqrt{۳۲})^۲-\pi(\sqrt{۱۶})^۲=۳۲\pi-۱۶\pi=۱۶\pi$$

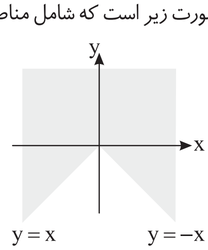
۶۴۲ (۳) نمـودار $x+y\ge۰$ ،بالا و روی نیمسـاز ناحیه‌هـای دوم و چهارم مختصات را مشخص می‌کند.



نمودار $y-x\ge۰$ ، بالا و روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم مختصات را مشخص می‌کند.



پس نمودار $A\cup B$ به صورت زیر است که شامل مناطق (۱)، (۳) و (۴) است.



۶۴۳ (۳) تصویر قائم نقطهٔ $A(a,b,c)$ بر محور x نقطهٔ $A'(a,۰,۰)$ است. بنابر فرض سؤال $A'(۲,۰,۰)$، پس $a=۲$. از طرف دیگر قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b,c)$ نسبت به صفحهٔ xy نقطهٔ $A''(a,b,-c)$ است و بنابر فرض سؤال $A''(a,۳,۴)$، پس $b=۳$ و $c=-۴$. بنابراین A نقطهٔ $(۲,۳,-۴)$ است. در نتیجه قرینهٔ A نسبت به محور y نقطهٔ $(-۲,۳,۴)$ است.

۶۴۴ (۲) برای به‌دست آوردن قرینهٔ یک نقطه نسبت به محور z باید دو مؤلفهٔ x و y را قرینه کنیم و z را بدون تغییر بنویسیم. بنابراین قرینهٔ نقطهٔ $A(m+n,۴,m+۲)$ نسبت به محور z نقطهٔ $A'(-m-n,-۴,m+۲)$ است. از طرف دیگر بنابر فرض سؤال A' نقطهٔ $(۲,۲m-n,n)$ است، پس

$$(-m-n,-۴,m+۲)=(۲,۲m-n,n)$$

$$\begin{cases}-m-n=۲\\ ۲m-n=-۴\\ m+۲=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+n=-۲\\ m-n=-۲\end{cases}\Rightarrow m=-۲,n=۰$$

توجه کنید که این مقادیر در برابری $۲m-n=-۴$ صدق می‌کنند. در نتیجه نقطهٔ $A''(-m,-۲m,n)$ نقطهٔ $A''(۲,۴,۰)$ است و $A(m+n,۴,m+۲)$ نقطهٔ $A(-۲,۴,۰)$ است. پس دو نقطهٔ A و A'' قرینهٔ یکدیگر نسبت به محور y هستند.

۶۴۵ (۲) رأس‌های A، B و C از این مکعب نقطه‌های $A(۰,۰,۲)$، $B(۲,۰,۰)$ و $C(۰,۲,۰)$ هستند. پس

$$|AB|=|AC|=|BC|=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۲}$ است. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}|AB|^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times(۲\sqrt{۲})^۲=۲\sqrt{۳}$$

۶۴۶ (۳) بردار $\vec{a}$ روی هر دو صفحهٔ xz و xy قرار دارد، پس بردار $\vec{a}$ روی فصل مشترک این دو صفحه، یعنی محور x قرار دارد. بنابراین باید مؤلفه‌های y و z این بردار صفر باشند. پس

$$x^۲-x=۰\Rightarrow x(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰,x=۱$$

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱,x=-۱$$

بنابراین $x=۱$ قابل قبول است. در نتیجه $\vec{a}=(۲,۰,۰)\Rightarrow|\vec{a}|=۲$

۶۴۷ (۱) فرض کنید $\vec{a}=(x,y,z)$. در این صورت طول تصویر $\vec{a}$ روی محور z برابر $|z|$ است. در نتیجه $|z|=۳$. به این ترتیب،

$$|\vec{a}|=۴\Rightarrow\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=۴\xrightarrow{|z|=۳}\sqrt{x^۲+y^۲+۹}=۴$$

$$x^۲+y^۲+۹=۱۶\Rightarrow x^۲+y^۲=۷$$

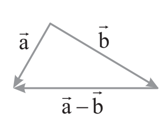
از طرف دیگر، اندازهٔ تصویر بردار $\vec{a}=(x,y,z)$ روی صفحهٔ xy برابر $\sqrt{x^۲+y^۲}$ است. بنابراین

$$\text{طول تصویر } \vec{a} \text{ روی صفحهٔ } xy=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۷}$$

۶۴۸ (۳) چون بردارها از مبدأ مختصات شروع می‌شوند، پس بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از یک نقطه شروع می‌شوند. در نتیجه ضلع سوم مثلث با توجه به شکل $\vec{a}-\vec{b}$ است. پس

$$\vec{a}-\vec{b}=(۱-x)\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\xrightarrow{|\vec{a}-\vec{b}|=۳\sqrt{۲}}۳\sqrt{۲}=\sqrt{(۱-x)^۲+۱+۱}$$

$$۱۸=(۱-x)^۲+۲\Rightarrow(۱-x)^۲=۱۶\Rightarrow ۱-x=\pm۴\Rightarrow x=۵ \text{ یا } x=-۳$$



۶۴۹ (۴) بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند. متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش بر هم عمود باشند، لوزی است. پس دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ اضلاع مجاور یک لوزی و در نتیجه هم‌اندازه هستند. بنابراین

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|\Rightarrow\sqrt{m^۲+۴+۱}=\sqrt{۴۱}\Rightarrow m^۲=۳۶\Rightarrow m=\pm۶$$

چون $m>۰$، پس $m=۶$ قابل قبول است.

۶۵۰ (۲) اگر O مبدأ مختصات باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ و مختصات نقطهٔ M در تساوی $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{۲}$ صدق می‌کنند. پس

$$(۲,-۱,۱)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\quad(۱)$$

$$(۳,۱,۲)=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{۲}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(۶,۲,۴)\quad(۲)$$

برابری اول را از برابری دوم کم می‌کنیم

$$۲\overrightarrow{OA}=(۴,۳,۳)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(۲,\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲})$$

چون مختصات بردار $\overrightarrow{OA}$ همان مختصات نقطهٔ A است، پس ارتفاع نقطهٔ A برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۶۵۱ (۲) فرض می‌کنیم اندازهٔ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر x باشد. اگر θ زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow ۳۶=x^۲+x^۲+۲x^۲\cos\theta$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow ۱۲=x^۲+x^۲-۲x^۲\cos\theta$$

از جمع دو تساوی بالا نتیجه می‌گیریم

$$۴۸=۴x^۲\Rightarrow x^۲=۱۲\Rightarrow x=۲\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$۳۶=۲x^۲+۲x^۲\cos\theta\Rightarrow ۳۶=۲(۲\sqrt{۳})^۲+۲(۲\sqrt{۳})^۲\cos\theta$$

$$۳۶=۲۴+۲۴\cos\theta\Rightarrow ۲۴\cos\theta=۱۲\Rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

۶۵۲ (۴) می‌دانیم $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. پس از فرض سؤال به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\vec{a}+۲\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{b}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|-\vec{b}|^۲$$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(-\vec{b})\cdot(-\vec{b})$$

$$|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲\vec{a}\cdot\vec{b}+۲\vec{a}\cdot\vec{c}+۲\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|^۲$$

$$۱۶+۲۵+۲(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=۰\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{۴۱}{۲}$$

۶۵۳ (۲) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}+\vec{c}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})}(\vec{b}+\vec{c})$$

بردار $\vec{b}+\vec{c}$ به مختصات $(۲,-۳,۶)$ است، پس

$$\vec{a}'=\frac{(-۱,-۳,۰)\cdot(۲,-۳,۶)}{(۲,-۳,۶)\cdot(۲,-۳,۶)}(۲,-۳,۶)$$

$$=\frac{-۲+۹+۰}{۴+۹+۳۶}(۲,-۳,۶)=\frac{۷}{۴۹}(۲,-۳,۶)=\frac{۱}{۷}(۲,-۳,۶)$$

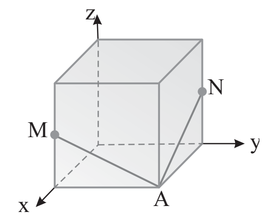
۶۵۴ (۳) زاویهٔ بین بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{k}$ (بردار واحد محور z) زاویهٔ خواسته شده است. پس

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{(\sqrt{2},-1,1).(0,0,1)}{\sqrt{2+1+1}\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

۶۵۵ (۱) مطابق شکل، یال‌های مکعب را در راستای محورهای مختصات قرار می‌دهیم. اگر طول ضلع مکعب را ۲ در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$A(2,2,0),\ M(2,0,1),\ N(0,2,1)\ ,\quad \overrightarrow{AM}=(0,-2,1),\ \overrightarrow{AN}=(-2,0,1)$$

$$\cos M\hat{A}N=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AN}|}=\frac{0+0+1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$$



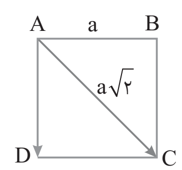
۶۵۶ (۲) در مربع ABCD، نقاط A و C دو سر قطر هستند. پس اگر a ضلع مربع باشد، آن‌گاه اندازه AC برابر $a\sqrt{2}$ است. بنابراین

$$|AC|=\sqrt{(2-2)^2+(-2-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{9+16}=5\Rightarrow\sqrt{2}a=5$$

$$a=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

از طرف دیگر، در مربع قطر نیمساز است، پس زاویهٔ بین $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ برابر 45° است. به این ترتیب،

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos45^\circ=(5)\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{25}{2}$$



۶۵۷ (۴) می‌دانیم اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ و $|\vec{b}|\cos\theta$ برابر اندازهٔ تصویر قائم $\vec{b}$ روی امتداد بردار $\vec{a}$ است. بنابراین $\vec{a}\cdot\vec{b}$ معادل حاصل‌ضرب اندازهٔ بردار $\vec{a}$ در اندازهٔ تصویر بردار $\vec{b}$ روی بردار $\vec{a}$ است. در شکل داده شده، از نقاط C، E، F و D بر AB عمود می‌کنیم. بنابر آنچه گفته شد،

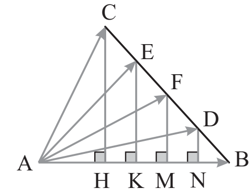
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|(\text{اندازهٔ تصویر قائم } AC \text{ بر } AB)=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}|(\text{اندازهٔ تصویر قائم } AE \text{ بر } AB)=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AK}|$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AB}|(\text{اندازهٔ تصویر قائم } AF \text{ بر } AB)=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|(\text{اندازهٔ تصویر قائم } AD \text{ بر } AB)=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AN}|$$

با توجه به شکل و مقادیر به‌دست آمده، حاصل $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AN}|$ از بقیه بزرگ‌تر است.



۶۵۸ (۱) از فرض‌های سؤال نتیجه می‌شود

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}+\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}+\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=6\vec{a}\cdot\vec{b}\xrightarrow{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=30}-30=6\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$$

۶۵۹ (۳) بنابر فرض $OM=4$. پس $\sqrt{a^2+b^2+\frac{c^2}{4}}=4$. اکنون فرض کنید $\vec{u}=(a,b,\frac{c}{2})$ و $\vec{v}=(1,2,6)$. در این صورت بنابر نابرابری کوشی - شوارتز،

$$|\vec{u}.\vec{v}|\le|\vec{u}||\vec{v}|\Rightarrow|a+2b+3c|\le\underbrace{\sqrt{a^2+b^2+\frac{c^2}{4}}}_{4}\sqrt{\underbrace{1+4+36}_{41}}$$

$$|a+2b+3c|\le4\sqrt{41}$$

پس بیشترین مقدار $a+2b+3c$ برابر $4\sqrt{41}$ است.

۶۶۰ (۳) اندازهٔ زاویهٔ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ اندازهٔ زاویهٔ A است:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,-1,0),\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-1,0,1)$$

بنابراین

$$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-1+0+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\hat{A}=120^\circ$$

۶۶۱ (۱) می‌دانیم $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$، $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$. اکنون عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})+\vec{i}-\vec{j}\times\vec{k})\times\vec{k}=(\vec{i}\times\vec{i}+\vec{i}-\vec{i})\times\vec{k}=\vec{0}\times\vec{k}=\vec{0}$$

۶۶۲ (۳) ابتدا بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ و سپس بردار $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&0\\0&1&3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&-1\\-3&-3&1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$$

مختص عرض $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر ۱ است.

۶۶۳ (۱) از تساوی داده شده در صورت سؤال به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$$

پس بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ موازی هستند. بنابراین مختصات این دو بردار متناسب هستند. بنابراین

$$\vec{a}=(2,-1,1),\ \vec{b}-\vec{c}=(m-1,1,-1)$$

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}-\vec{c}\Rightarrow\frac{m-1}{2}=\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}\Rightarrow m-1=-2\Rightarrow m=-1$$

۶۶۴ (۱) فرض می‌کنیم زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد. در این صورت

$$|2\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=36\Rightarrow|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=|\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}+\vec{a}\times\vec{b}|=18\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=18$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=18\Rightarrow(6)(5)\sin\theta=18\Rightarrow\sin\theta=\frac{3}{5}$$

پس $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5}$. بنابر فرض $\theta>90^\circ$، پس $\cos\theta=-\frac{4}{5}$. در نتیجه

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=36+6\times5\left(-\frac{4}{5}\right)=12$$

۶۶۵ (۲) ابتدا با داشتن طول بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $۲\vec{a}-۳\vec{b}$، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست می‌آوریم. اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه

$$|۲\vec{a}-۳\vec{b}|^۲=|۲\vec{a}|^۲+|۳\vec{b}|^۲-۲|۲\vec{a}||۳\vec{b}|\cos\theta$$

$$(۲\sqrt{۱۳})^۲=۴(۴)^۲+۹(۲)^۲-۱۲(۴)(۲)\cos\theta$$

$$۵۲=۶۴+۳۶-۹۶\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ$$

بنابراین $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=(۴)(۲)\sin۶۰^\circ=۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۴\sqrt{۳}$.

۶۶۶ (۱) ضرب داخلی و ضرب خارجی روی جمع بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارند. چون دو بردار واحد $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند، پس $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$. بنابراین

$$|(۳\vec{a}+۲\vec{b})\times(۲\vec{a}-\vec{b})|=|۶\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{o}}-۳\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{-\vec{b}\times\vec{a}}+۴\vec{b}\times\vec{a}-۲\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{o}}|$$

$$=|۷\vec{b}\times\vec{a}|=۷|\vec{b}||\vec{a}|\sin۹۰^\circ=۷\qquad(۱)$$

$$(۳\vec{a}+۲\vec{b})\cdot(۲\vec{a}-\vec{b})=۶\vec{a}\cdot\vec{a}-۳\vec{a}\cdot\vec{b}+۴\vec{a}\cdot\vec{b}-۲\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=۶\underbrace{|\vec{a}|^۲}_{۱}+\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{۰}-۲\underbrace{|\vec{b}|^۲}_{۱}=۴\qquad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$|(۳\vec{a}+۲\vec{b})\times(۲\vec{a}-\vec{b})|+(۳\vec{a}+۲\vec{b})\cdot(۲\vec{a}-\vec{b})=۷+۴=۱۱$$

۶۶۷ (۳) چون $\vec{o}=\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$. پس دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{c}$ موازی‌اند. بنابراین مختصات این دو بردار متناسب‌اند:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۳&-۱&۱\\ ۰&۱&۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-۱&۱\\ ۱&۲\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۳&۱\\ ۰&۲\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۳&-۱\\ ۰&۱\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=(-۳,-۶,۳)$$

بنابراین

$$\vec{a}\times\vec{b}\,||\,\vec{c}\Rightarrow\frac{-۳}{۳m}=\frac{-۶}{۲-n}=\frac{۳}{m+n}\Rightarrow\frac{-۱}{۳m}=\frac{-۲}{۲-n}=\frac{۱}{m+n}$$

پس

$$\begin{cases}\dfrac{-۱}{۳m}=\dfrac{-۲}{۲-n}\\ \dfrac{-۱}{۳m}=\dfrac{۱}{m+n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲-n=۶m\\ ۳m=-m-n\end{cases}$$

$$\begin{cases}۶m+n=۲\\ ۴m+n=۰\end{cases}\xrightarrow{-}۲m=۲\Rightarrow m=۱,\ n=-۴$$

در نتیجه $۴m-n=۴+۴=۸$.

۶۶۸ (۳) می‌دانیم اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$، آن‌گاه

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

پس

$$|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}|=|a\times b|=۲$$

۶۶۹ (۳) مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار ساخته می‌شود مساوی اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی آن دو بردار است:

$$S=|(۳\vec{b}+۵\vec{a})\times(۴\vec{a}+۶\vec{b})|=|\underbrace{۱۲\vec{b}\times\vec{a}}_{-۱۲\vec{a}\times\vec{b}}+۱۸\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{o}}+۲۰\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{o}}+۳۰\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$=|۱۸\vec{a}\times\vec{b}|=۱۸|\vec{a}\times\vec{b}|=۱۸|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۱۸\times۲\times۴\sin۱۲۰^\circ=۷۲\sqrt{۳}$$

۶۷۰ (۲) راه‌حل اول ابتدا بردارهای $۳\vec{a}+۲\vec{b}$، $۲\vec{a}-\vec{b}$ و $۲\vec{a}-۳\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{c}=۳\vec{a}+۲\vec{b}=۳(-۱,۰,۲)+۲(۰,۲,-۱)=(-۳,۴,۴)$$

$$\vec{d}=۲\vec{a}-\vec{b}=۲(-۱,۰,۲)-(۰,۲,-۱)=(-۲,-۲,۵)$$

$$\vec{e}=۲\vec{a}-۳\vec{b}=۲(-۱,۰,۲)-۳(۰,۲,-۱)=(-۲,-۶,۷)$$

می‌دانیم حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{c}$، $\vec{d}$ و $\vec{e}$ برابر $|\vec{c}\cdot(\vec{d}\times\vec{e})|$ است. پس ابتدا $\vec{d}\times\vec{e}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{d}\times\vec{e}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ -۲&-۲&۵\\ -۲&-۶&۷\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-۲&۵\\ -۶&۷\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-۲&۵\\ -۲&۷\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-۲&-۲\\ -۲&-۶\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=(۱۶,۴,۸)$$

در نتیجه $\vec{c}\cdot(\vec{d}\times\vec{e})=(-۳,۴,۴)\cdot(۱۶,۴,۸)=-۴۸+۱۶+۳۲=۰$. بنابراین بردارهای فوق در یک صفحه هستند و متوازی‌السطوحی تشکیل نمی‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که بردارهای $۳\vec{a}+۲\vec{b}$، $۲\vec{a}-\vec{b}$ و $۲\vec{a}-۳\vec{b}$ ترکیب‌های خطی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند. در نتیجه این بردارها در صفحهٔ شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند. پس این سه بردار در یک صفحه واقع‌اند. در نتیجه حجم متوازی‌السطوح تشکیل شده روی این سه بردار برابر صفر است.

۶۷۱ (۳) کافی است زاویهٔ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}$ را به‌دست آوریم، زیرا ضرایب مثبت اندازهٔ بردارها را عوض می‌کنند، ولی زاویهٔ بین آن‌ها را تغییر نمی‌دهند.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۱,۳,۴)-(۱,۲,۳)=(۰,۱,۱)$$

اگر θ زاویهٔ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}$ باشد، آن‌گاه

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{v}|}=\frac{(۰,۱,۱)\cdot(۱,۰,-۱)}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

۶۷۲ (۱) در مستطیل ABCD زاویهٔ B قائمه است، پس بردارهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ بر هم عمودند. بنابراین ضرب داخلی این دو بردار صفر است.

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(m-۲,-۲,۲)$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-۳,۱,۰)$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=۰\Rightarrow-۳m+۶-۲=۰\Rightarrow m=\frac{۴}{۳}$$

۶۷۳ (۴) بنابر فرض‌های سؤال $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ و $\vec{a}||\vec{d}$، پس $\vec{a}$ مضربی از $\vec{d}$ است. بنابراین عددی مانند m وجود دارد به طوری‌که $\vec{a}=m\vec{d}=(۰,-m,۲m)$. همچنین $\vec{b}\perp\vec{c}$، پس $\vec{b}\cdot\vec{c}=۰$. در نتیجه

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\xrightarrow[\text{ضرب داخلی می‌کنیم}]{\text{طرفین را در }\vec{c}}\vec{a}\cdot\vec{c}+\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{۰}=\vec{c}\cdot\vec{c}$$

$$(۰,-m,۲m)\cdot(\frac{\sqrt{۵}}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})=|\vec{c}|^۲$$

$$-\frac{۱}{۴}m+m=\frac{۵}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۳}{۴}m=\frac{۲۰+۱+۴}{۱۶}\Rightarrow۳m=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow m=\frac{۲۵}{۱۲}$$

در نتیجه

$$\vec{a}=(۰,-\frac{۲۵}{۱۲},\frac{۲۵}{۶})\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\frac{۶۲۵}{۱۴۴}+\frac{۶۲۵}{۳۶}}=\sqrt{\frac{۶۲۵+۴\times۶۲۵}{۱۴۴}}=\sqrt{\frac{۵\times۶۲۵}{۱۴۴}}$$
$$=\frac{۲۵}{۱۲}\sqrt{۵}$$

۶۷۴ (۴) اندازهٔ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را برابر x در نظر می‌گیریم. اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه بنابر فرض سؤال،

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=3|\vec{a}+\vec{b}|^2$$

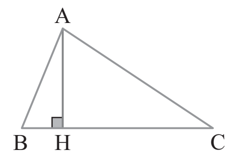
$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)$$

$$x^2+x^2-2x^2\cos\theta=3(x^2+x^2+2x^2\cos\theta)$$

$$8x^2\cos\theta=-4x^2\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=120^\circ$$

۶۷۵ (۴) شکل فرضی زیر را ببینید. توجه کنید که CH اندازهٔ تصویر $\overrightarrow{CA}$ بر $\overrightarrow{CB}$ است، یعنی

$$CH=\frac{|\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CB}|}=\frac{|(1,2,-1)\cdot(3,4,0)|}{|(3,4,0)|}=\frac{3+8+0}{\sqrt{9+16}}=\frac{11}{5}$$



۶۷۶ (۳) ابتدا بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ و سپس بردار $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & m+1\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=(2-m-1)\vec{i}-(-2+2m+2)\vec{j}-\vec{k}$$

$$=(1-m,-2m,-1)$$

بنابراین

$$|\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})|=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{(1-m)^2+4m^2+1}=\sqrt{2}$$

$$1+m^2-2m+4m^2+1=2\Rightarrow 5m^2-2m=0\Rightarrow m=0,\quad m=\frac{2}{5}$$

۶۷۷ (۴) **راه‌حل اول** حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است. پس بردار $\vec{a}$ موازی بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ است:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix}=(-1,-3,-7)$$

چون بردار $\vec{a}$ با بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ موازی است، پس مؤلفه‌های دو بردار متناسب هستند:

$$\frac{m+1}{-1}=\frac{-1}{-3}=\frac{n}{-7}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m+1}{-1}=\dfrac{-1}{-3}\Rightarrow m+1=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{4}{3}\\[2mm] \dfrac{-1}{-3}=\dfrac{n}{-7}\Rightarrow n=-\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

بنابراین $2m+n=-\frac{8}{3}-\frac{7}{3}=-\frac{15}{3}=-5$.

راه‌حل دوم بردار $\vec{a}$ بر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است، پس حاصل‌ضرب داخلی $\vec{a}$ با بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر صفر است:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow m+1-2-n=0\quad,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0\Rightarrow m+1+5+2n=0$$

$$\begin{cases}m-n=1\\ m+2n=-6\end{cases}\xrightarrow{-}3n=-7\Rightarrow n=-\frac{7}{3},\ m=-\frac{4}{3}\Rightarrow 2m+n=-5$$

۶۷۸ (۲) ابتدا با داشتن طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. در این صورت

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=|2\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|2\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$6^2=4\times3^2+6^2-4(3)(6)\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

از طرف دیگر، مساحت مثلثی که روی $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+3\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با

$$S=\frac{1}{2}|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+3\vec{b})|=\frac{1}{2}|\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}+3\vec{a}\times\vec{b}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{-\vec{a}\times\vec{b}}-3\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}|=\frac{1}{2}|4\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$=2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=2(3)(6)(\sin60^\circ)=36\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$$

۶۷۹ (۲) حاصل $|\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{BC}|$ مساوی مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است. چون در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند، پس مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چهار برابر مساحت مثلث OBC است. از طرف دیگر $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$، پس

$$\overrightarrow{BO}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=5\vec{j}-5\vec{k}$$

$$S_{OBC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BO}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین $|\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{BC}|=S_{ABCD}=4S_{OBC}=4(\frac{5\sqrt{2}}{2})=10\sqrt{2}$.

۶۸۰ (۴) نقاط A، B، C و D در یک صفحه هستند، هرگاه

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0$$

توجه کنید که

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1,2,0)-(1,0,2)=(-2,2,-2)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3,1,1)-(1,0,2)=(2,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(0,1,m)-(1,0,2)=(-1,1,m-2)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & m-2\end{vmatrix}=(m-1)\vec{i}-(2m-5)\vec{j}+3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0\Rightarrow(-2,2,-2)\cdot(m-1,-2m+5,3)=0$$

$$-2m+2-4m+10-6=0\Rightarrow-6m+6=0\Rightarrow m=1$$

۶۸۱ (۳) نمودار $y=x^2$ یک سهمی است و رابطهٔ $-2\le x<3$ از $x=-2$ (توپر) تا $x=3$ (توخالی) از این سهمی را نمایش می‌دهد. پس شکل گزینهٔ (۳) درست است.

۶۸۲ (۳) فرض کنید $A(x_0,y_0,z_0)$ و فاصلهٔ A از محورهای x، y و z به‌ترتیب ۳، ۴ و ۵ باشد، در این صورت

$$\text{فاصلهٔ } A \text{ از محور } x=\sqrt{y_0^2+z_0^2}=3\Rightarrow y_0^2+z_0^2=9$$

$$\text{فاصلهٔ } A \text{ از محور } y=\sqrt{x_0^2+z_0^2}=4\Rightarrow x_0^2+z_0^2=16$$

$$\text{فاصلهٔ } A \text{ از محور } z=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=5\Rightarrow x_0^2+y_0^2=25$$

با جمع کردن این سه برابری به‌دست می‌آید $2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=50$ یا $x_0^2+y_0^2+z_0^2=25$. اکنون به‌دست می‌آید

$$|OA|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{25}=5$$

۶۸۳ (۳) دو بردار $\vec a+\vec b$ و $\vec a-\vec b$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که $\vec a$ و $\vec b$ دو ضلع مجاور آن هستند. چون

$$|\vec a+\vec b|=|\vec a-\vec b|=\sqrt{(\frac{7}{3})^2+(\frac{2}{5})^2+1^2}$$

پس در این متوازی‌الاضلاع دو قطر هم‌اندازه هستند. در نتیجه این متوازی‌الاضلاع مستطیل است و اضلاع مجاور مستطیل بر هم عمودند. بنابراین $\vec a\perp\vec b$، پس $5\vec a\perp 3\vec b$.

۶۸۴ (۲) اگر $\vec a$ و $\vec b$ دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه $\vec a+\vec b$ و $\vec a-\vec b$ قطرهای این متوازی‌الاضلاع هستند. فرض کنید $\vec a+\vec b=(-1,3,5)$ و $\vec a-\vec b=(3,-1,1)$. در این صورت

$$\begin{cases}2\vec a=(\vec a+\vec b)+(\vec a-\vec b)=(2,2,6)\Rightarrow\vec a=(1,1,3)\Rightarrow|\vec a|=\sqrt{11}\\ 2\vec b=(\vec a+\vec b)-(\vec a-\vec b)=(-4,4,4)\Rightarrow\vec b=(-2,2,2)\Rightarrow|\vec b|=\sqrt{12}\end{cases}$$

پس نسبت اندازهٔ ضلع بزرگ‌تر به اندازهٔ ضلع کوچک‌تر این متوازی‌الاضلاع برابر است با $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{11}}$.

۶۸۵ (۲) راه‌حل اول فرض کنید $\vec a'$ تصویر قائم بردار $\vec a$ بر امتداد بردار $\vec c$ و $\vec b'$ تصویر قائم $\vec b$ بر امتداد بردار $\vec c$ باشد و $\vec a'=-\vec b'$. می‌دانیم $\vec a'=\frac{\vec a\cdot\vec c}{|\vec c|^2}\vec c$ و $\vec b'=\frac{\vec b\cdot\vec c}{|\vec c|^2}\vec c$. بنابراین

$$\vec a'=-\vec b'\Rightarrow\frac{\vec a\cdot\vec c}{|\vec c|^2}\vec c=-\frac{\vec b\cdot\vec c}{|\vec c|^2}\vec c\Rightarrow(\vec a\cdot\vec c)\vec c+(\vec b\cdot\vec c)\vec c=\vec o$$

$$(\vec a\cdot\vec c+\vec b\cdot\vec c)\vec c=\vec o$$

چون بردار $\vec c$ غیرصفر است، پس لازم است $\vec a\cdot\vec c+\vec b\cdot\vec c=0$. بنابراین $(\vec a+\vec b)\cdot\vec c=0$، یعنی بردار $\vec a+\vec b$ بر بردار $\vec c$ عمود است. پس گزینه‌ای می‌تواند $\vec a+\vec b$ باشد که بر بردار $\vec c$ عمود باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $(2,1,-1)\cdot(2,-1,2)=4-1-2\neq0$، پس گزینهٔ (۱) درست نیست.

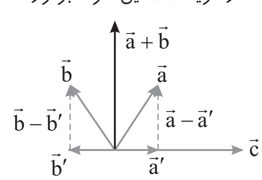
گزینهٔ (۲) $(1,1,-\frac12)\cdot(2,-1,2)=2-1-1=0$، پس گزینهٔ (۲) درست است.

بنابراین نیازی به بررسی گزینه‌های دیگر نیست.

راه‌حل دوم مطابق شکل، بردارهای $\vec a-\vec a'$ و $\vec b-\vec b'$ بر بردار $\vec c$ عمودند. پس مجموع آن‌ها بر $\vec c$ عمود است:

$$\vec a-\vec a'+\vec b-\vec b'=(\vec a+\vec b)-\underbrace{(\vec a'+\vec b')}_{\vec o}=\vec a+\vec b\Rightarrow\vec a+\vec b\perp\vec c$$

که در بین گزینه‌ها فقط در گزینهٔ (۲) این شرط برقرار است.



۶۸۶ (۲) فرض می‌کنیم $\vec a=(x,y,z)$ و $\vec b=(2,1,1)$. در این صورت بنابر نابرابری کوشی – شوارتز،

$$|\vec a\cdot\vec b|\le|\vec a||\vec b|\Rightarrow|2x+y+z|\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{4+1+1}$$

$$|2x+y+z|\le\sqrt6\sqrt6\Rightarrow|2x+y+z|\le6$$

بنابراین بیشترین مقدار $2x+y+z$ برابر ۶ است.

۶۸۷ (۱) بردار $\vec c=\vec a\times\vec b$ هم بر $\vec a$ عمود است و هم بر $\vec b$، پس $\vec c\cdot\vec a=0$. از طرف دیگر،

$$\vec c=\vec a\times\vec b\Rightarrow|\vec c|=|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin30^\circ\Rightarrow|\vec c|=3\times\frac{8}{3}\times\frac12\Rightarrow|\vec c|=4$$

بنابراین $|\vec c+\vec a|=\sqrt{|\vec c|^2+|\vec a|^2+2\vec c\cdot\vec a}=\sqrt{4^2+3^2+0}=5$.

۶۸۸ (۳) ابتدا با استفاده از اتحاد لاگرانژ اندازهٔ $\vec a\times\vec b$ را به‌دست می‌آوریم:

$$|\vec a\times\vec b|^2+(\vec a\cdot\vec b)^2=|\vec a|^2|\vec b|^2\Rightarrow|\vec a\times\vec b|^2+9=4\times9$$

$$|\vec a\times\vec b|^2=27\Rightarrow|\vec a\times\vec b|=3\sqrt3$$

بنابراین

$$|(3\vec a+2\vec b)\times(2\vec a-\vec b)|=|\underbrace{6\vec a\times\vec a}_{\vec o}\underbrace{-3\vec a\times\vec b}_{3\vec b\times\vec a}+4\vec b\times\vec a-\underbrace{2\vec b\times\vec b}_{\vec o}|$$

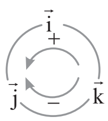
$$=|7\vec b\times\vec a|=7|\vec b\times\vec a|=7|\vec a\times\vec b|=7(3\sqrt3)=21\sqrt3$$

۶۸۹ (۴) ضرب خارجی روی جمع بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. به کمک این ویژگی عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$2\vec i\times(\vec j+2\vec k)-\vec j\times(2\vec i-\vec k)+3\vec k\times(2\vec j-\vec i)$$

$$=2\vec i\times\vec j+4\vec i\times\vec k-2\vec j\times\vec i+\vec j\times\vec k+6\vec k\times\vec j-3\vec k\times\vec i$$

اکنون با استفاده از نمودار چرخشی زیر ضرب خارجی بردارهای $\vec i$، $\vec j$ و $\vec k$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\vec i\times\vec j=\vec k,\quad \vec i\times\vec k=-\vec j,\quad \vec j\times\vec i=-\vec k$$

$$\vec j\times\vec k=\vec i,\quad \vec k\times\vec j=-\vec i,\quad \vec k\times\vec i=\vec j$$

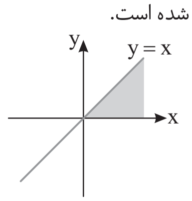
بنابراین عبارت داده شده $=2\vec k-4\vec j+2\vec k+\vec i-6\vec i-3\vec j=-5\vec i-7\vec j+4\vec k$

۶۹۰ (۱) طرفین تساوی $\vec a-\vec b=\vec a\times\vec c$ را در $\vec a$ ضرب داخلی می‌کنیم. چون $\vec a\times\vec c$ بر $\vec a$ عمود است، پس $\vec a\cdot(\vec a\times\vec c)$ برابر صفر است. بنابراین

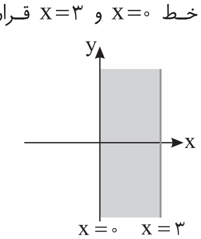
$$\vec a-\vec b=\vec a\times\vec c\Rightarrow\vec a\cdot(\vec a-\vec b)=\vec a\cdot(\vec a\times\vec c)\Rightarrow\vec a\cdot\vec a-\vec a\cdot\vec b=0$$

$$|\vec a|^2-|\vec a||\vec b|\cos\theta=0\Rightarrow3^2-3\times4\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{9}{12}=\frac34$$

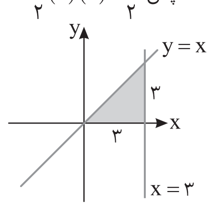
۶۹۱ (۳) نمودار $y=x$ همان نیمساز ناحیه‌های اول و سوم است و ناحیهٔ $0\le y\le x$ در شکل رنگ شده است.



ناحیهٔ $0\le x\le3$ بین دو خط $x=0$ و $x=3$ قرار دارد که در شکل زیر مشخص شده است.



بنابراین ناحیهٔ مورد نظر، اشتراک دو شکل بالا است که یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمهٔ ۳ و ۳ است. پس مساحت ناحیهٔ مورد نظر $=\frac12(3)(3)=\frac92$.



۶۹۲ (۱) تصویر قائم نقطهٔ $A(x,y,z)$ روی صفحهٔ xz نقطهٔ $H(x,0,z)$ و قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به صفحهٔ yz نقطهٔ $B(-x,y,z)$ است. پس

$$A(2,-1,3)\xrightarrow[\text{صفحهٔ xz}]{\text{تصویر قائم A روی}}A'(2,0,3)$$

$$A(2,-1,3)\xrightarrow[\text{صفحهٔ yz}]{\text{قرینهٔ A نسبت به}}A''(-2,-1,3)$$

اگر M وسط $A'A''$ باشد، مختصات M به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$M=\frac{A'+A''}{2}=(0,\frac{-1}{2},3)\Rightarrow x_M+y_M+z_M=0-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$$

۶۹۳ (۲) بردار $\vec{c}$ هم‌راستا و غیر هم‌جهت با بردار $\vec{a}+\vec{b}$ است، پس $\vec{c}$ یک مضرب منفی $\vec{a}+\vec{b}$ است. توجه کنید که

$$\vec{a}+\vec{b}=(1,-1,2)+(3,1,4)=(4,0,6)$$

در بین گزینه‌ها فقط بردار $(\frac{-4}{\sqrt{13}},0,\frac{-6}{\sqrt{13}})$ مضرب منفی $\vec{a}+\vec{b}$ است.

۶۹۴ (۲) نقاط A ، B و C روی یک خط قرار دارند هرگاه $\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}$.
پس باید مختصات بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متناسب باشند:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(n,0,3)-(-2,n-1,m+1)=(n+2,-n+1,2-m)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-1,n,0)-(-2,n-1,m+1)=(1,1,-m-1)$$

بنابراین

$$\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}\Rightarrow\frac{n+2}{1}=\frac{-n+1}{1}=\frac{2-m}{-m-1}$$

$$\frac{n+2}{1}=\frac{-n+1}{1}\Rightarrow 2n=-1\Rightarrow n=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{n+2}{1}=\frac{2-m}{-m-1}\Rightarrow\frac{-1}{2}+2=\frac{2-m}{-m-1}$$

$$2-m=-\frac{3}{2}m-\frac{3}{2}\Rightarrow m=-7$$

در نتیجه $m+n=-7-\frac{1}{2}=-7/5$.

۶۹۵ (۱) از $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ نتیجه می‌گیریم $\vec{a}\perp\vec{b}$ و چون $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$، پس $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای یک مربع و در نتیجه هم‌اندازه هستند، یعنی $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$. پس $|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|=0$.

۶۹۶ (۱) عبارت خواسته شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=\vec{b}\cdot\underbrace{(\vec{a}+\vec{c})}_{-\vec{b}}+\vec{a}\cdot\underbrace{(\vec{b}+\vec{c})}_{-\vec{a}}=-\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}=-|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=-9-4=-13$$

۶۹۷ (۲) می‌دانیم ضرب داخلی روی جمع بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. ابتدا طرف راست تساوی داده شده را ساده می‌کنیم. توجه کنید که بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود است، پس $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ و $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$. بنابراین

$$2\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}\times2\vec{b}+\vec{a})=$$

$$\underbrace{2\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}_{0}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{a}\times2\vec{b})}_{0}-\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

پس تساوی داده شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}=1\Rightarrow\tan\theta=1\Rightarrow\theta=45^\circ$$

۶۹۸ (۳) ضرب خارجی روی جمع بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. بنابراین

$$|2\vec{a}\times(\vec{a}-\frac{\vec{b}}{2})|=8\Rightarrow|\underbrace{2\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}-\vec{a}\times\vec{b}|=8\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=8$$

اکنون از اتحاد $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ استفاده و مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را تعیین می‌کنیم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\Rightarrow8^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=3^2\times4^2$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=144-64=80\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm4\sqrt{5}$$

چون زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه است، پس $\vec{a}\cdot\vec{b}$ منفی است، یعنی جواب $-4\sqrt{5}$ درست است. بنابراین

$$2\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{b}=2\vec{b}\cdot\vec{a}+2|\vec{b}|^2=2(-4\sqrt{5})+2(3)^2$$

$$=18-8\sqrt{5}$$

۶۹۹ (۲) می‌دانیم $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$. اکنون به‌دست می‌آید

$$((\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j})\times\vec{k}=(\vec{k}\times\vec{j})\times\vec{k}=(-\vec{i})\times\vec{k}=\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\qquad(1)$$

$$\vec{j}\times(\vec{i}-\vec{k})=\vec{j}\times\vec{i}-\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}-\vec{i}\qquad(2)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$((\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j})\times\vec{k}-\vec{j}\times(\vec{i}-\vec{k})-\vec{j}=\vec{j}+\vec{k}+\vec{i}-\vec{j}=\vec{i}+\vec{k}$$

در نتیجه طول بردار مورد نظر برابر است با $|\vec{i}+\vec{k}|=\sqrt{2}$.

۷۰۰ (۴) طرفین تساوی داده شده را در $\vec{a}$ ضرب داخلی می‌کنیم. چون $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$. پس

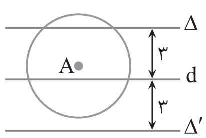
$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

$$\begin{vmatrix}m&-1&2\\2&-1&2\\-1&3&5\end{vmatrix}=0$$

$$m\begin{vmatrix}-1&2\\3&5\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&2\\-1&5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&-1\\-1&3\end{vmatrix}=0$$

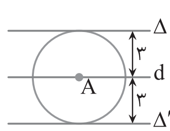
$$-11m+12+10=0\Rightarrow-11m=-22\Rightarrow m=2$$

۷۰۱ (۲) نقاطی که از A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر قرار دارند و نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند روی دو خط موازی Δ و Δ' در طرفین خط d و به‌فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن واقع‌اند. وضعیت‌های مختلف دایره و خطوط Δ و Δ' را نسبت به هم بررسی می‌کنیم.

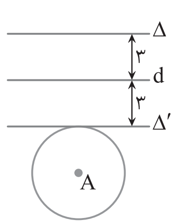


شکل (۱)

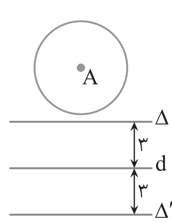
۱- فقط یکی از دو خط Δ و Δ' دایره را در دو نقطه قطع می‌کند (شکل (۱)).
۲- دایره بر هر دو خط Δ و Δ' مماس می‌شود (شکل (۲)).
۳- دایره فقط بر یکی از خطوط Δ و Δ' مماس می‌شود (شکل (۳)).
۴- دایره اصلاً هیچ‌یک از خطوط Δ و Δ' را قطع نمی‌کند (شکل (۴)).
بنابراین حداکثر ۲ نقطه با این شرایط وجود دارند.



شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)

۷۰۲ ۴ می‌دانیم در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، پس

$$x+۲<۲x-۳+۴x-۷\Rightarrow ۱۲<۵x\Rightarrow x>\frac{۱۲}{۵}$$

$$۲x-۳<x+۲+۴x-۷\Rightarrow ۲<۳x\Rightarrow x>\frac{۲}{۳}$$

$$۴x-۷<۲x-۳+x+۲\Rightarrow x<۶$$

اشتراک این نابرابری‌ها به صورت $\frac{۱۲}{۵}<x<۶$ است. توجه کنید که در این ناحیه $x+۲$ ، $۲x-۳$ و $۴x-۷$ مثبت هستند.

۷۰۳ ۴ با توجه به شکل زیر نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases}\hat{C}_۱=\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ-۲y\\ \hat{B}_۱=\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ-۲x\end{cases}\xrightarrow{+}\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۳۶۰^\circ-۲x-۲y\qquad(۱)$$

از طرف دیگر در مثلث ABC ،

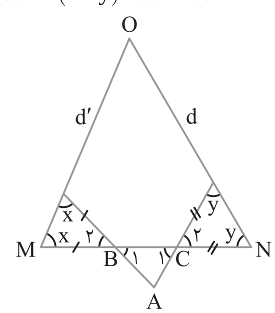
$$\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{A}\Rightarrow\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ\qquad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

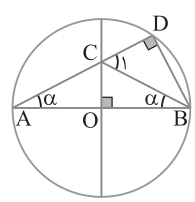
$$۸۰^\circ=۳۶۰^\circ-۲x-۲y\Rightarrow x+y=۱۴۰^\circ$$

اکنون اگر نقطهٔ تلاقی دو خط d و d' را O در نظر بگیریم، آن‌گاه در مثلث OMN ،

$$\hat{O}=۱۸۰^\circ-(x+y)=۱۸۰^\circ-۱۴۰^\circ\Rightarrow\hat{O}=۴۰^\circ$$



۷۰۴ ۳ با توجه به شکل مقابل چون زاویهٔ $C_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ABC است، پس $\hat{C}_۱=۲\alpha$. همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC ، بنابر نسبت‌های مثلثاتی، $\cos\hat{C}_۱=\frac{CD}{CB}$. از طرف دیگر، $CB=CA$ ، در نتیجه $\cos\hat{C}_۱=\frac{CD}{CA}$ ، یعنی $\cos ۲\alpha=\frac{CD}{CA}$.



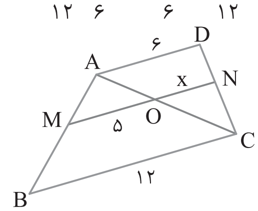
۷۰۵ ۳ بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\triangle ABC:\ OM\parallel BC\Rightarrow\frac{OM}{BC}=\frac{AO}{AC}\Rightarrow\frac{۵}{۱۲}=\frac{AO}{AC}\qquad(۱)$$

$$\triangle ADC:\ ON\parallel AD\Rightarrow\frac{ON}{AD}=\frac{OC}{AC}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{OC}{AC}\qquad(۲)$$

با جمع تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۵}{۱۲}+\frac{x}{۶}=\frac{AO+OC}{AC}\Rightarrow\frac{۵}{۱۲}+\frac{x}{۶}=۱\Rightarrow\frac{x}{۶}=۱-\frac{۵}{۱۲}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$$



۷۰۶ ۱ از قضیهٔ میان‌خط نتیجه می‌شود

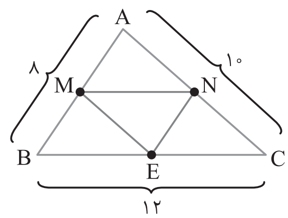
$$\begin{cases}M\ \text{وسط}\ AB\\ N\ \text{وسط}\ AC\end{cases}\Rightarrow MN=\frac{BC}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

$$\begin{cases}N\ \text{وسط}\ AC\\ E\ \text{وسط}\ BC\end{cases}\Rightarrow NE=\frac{AB}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

$$\begin{cases}E\ \text{وسط}\ BC\\ M\ \text{وسط}\ AB\end{cases}\Rightarrow EM=\frac{AC}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

بنابراین

$$\frac{\text{محیط}\ MNEB}{\text{محیط}\ MNCE}=\frac{MN+NE+EB+BM}{MN+NC+CE+EM}=\frac{۶+۴+۶+۴}{۶+۵+۶+۵}=\frac{۲۰}{۲۲}=\frac{۱۰}{۱۱}$$



۷۰۷ ۱ ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول AB را به دست می‌آوریم

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow ۲۵^۲=AB^۲+۷^۲\Rightarrow ۲۵^۲-۷^۲=AB^۲$$

$$AB^۲=(۲۵-۷)(۲۵+۷)=۱۸\times۳۲=۳۶\times۱۶\Rightarrow AB=۶\times۴=۲۴$$

پس ضلع AB ضلع متوسط این مثلث است. اگر CM میانهٔ وارد بر ضلع AB باشد، آن‌گاه

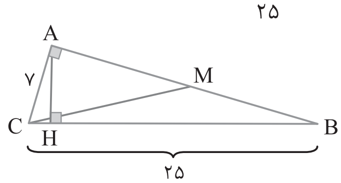
$$\triangle AMC:\ CM^۲=AC^۲+AM^۲=۷^۲+\left(\frac{۲۴}{۲}\right)^۲$$

$$=۴۹+۱۴۴=۱۹۳\Rightarrow CM=\sqrt{۱۹۳}$$

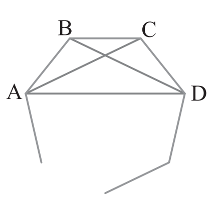
از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه طول ارتفاع AH را به دست می‌آوریم:

$$AB\times AC=AH\times BC\Rightarrow ۲۴\times۷=AH\times۲۵\Rightarrow AH=\frac{۱۶۸}{۲۵}$$

بنابراین $\frac{CM}{AH}=\frac{\sqrt{۱۹۳}}{\frac{۱۶۸}{۲۵}}=\frac{۲۵\sqrt{۱۹۳}}{۱۶۸}$.



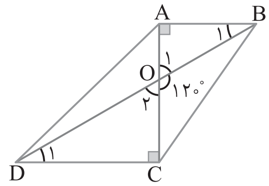
۷۰۸ ۱ از هر رأس n ضلعی محدب $n-۳$ قطر می‌گذرد. پس ظاهراً از چهار رأس متوالی آن $۴(n-۳)$ قطر عبور می‌کند ولی سه تا از قطرها دو بار حساب شده‌اند. مثلاً، در شکل مقابل از رأس A دو قطر AD و AC دو بار حساب می‌شوند، یک بار از رأس A و بار دیگر از رأس‌های C و D ، به طور مشابه قطر BD دو بار حساب می‌شود. بنابراین تعداد قطرهای رسم شده از چهار رأس متوالی برابر $۴(n-۳)-۳$ است. پس



$$۴(n-۳)-۳=۳۳\Rightarrow ۴(n-۳)=۳۶\Rightarrow n-۳=۹\Rightarrow n=۱۲$$

در نتیجه تعداد قطرها $=\frac{۱}{۲}n(n-۳)=\frac{۱}{۲}(۱۲)(۱۲-۳)=۵۴$.

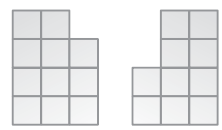
۷۰۹ (۱) زاویهٔ BOC برابر ۱۲۰° است، پس $\hat{O}_1=\hat{O}_2=60^\circ$. بنابراین $\hat{B}_1=\hat{D}_1=30^\circ$. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است. پس



$$\begin{cases}\triangle OAB:\ \hat{B}_1=30^\circ \Rightarrow OA=\frac{1}{2}OB \\ \triangle OCD:\ \hat{D}_1=30^\circ \Rightarrow OC=\frac{1}{2}OD\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} OA+OC=\frac{1}{2}(OB+OD)\Rightarrow AC=\frac{1}{2}BD$$

۷۱۰ (۱) نمای چپ و نمای روبه‌روی شکل داده شده به صورت مقابل است: نمای چپ از ۱۱ مربع کوچک و نمای روبه‌رو از ۱۰ مربع کوچک تشکیل شده است. پس نسبت مساحت نمای چپ به مساحت نمای روبه‌رو برابر $\frac{11}{10}$ است.



۷۱۱ (۱) بنابر فرض‌های سؤال شکل زیر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویهٔ مجاور قاعده مساوی‌اند، پس

$$BM=BA\Rightarrow \hat{M}_1=x+z,\quad CN=CA\Rightarrow \hat{N}_1=x+y$$

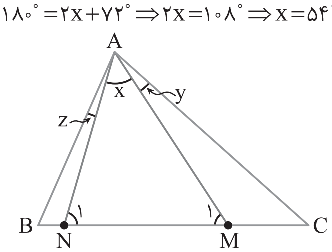
با جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{M}_1+\hat{N}_1=2x+y+z \xrightarrow{\hat{M}_1+\hat{N}_1=180^\circ-x}$$

$$180^\circ-x=2x+y+z\Rightarrow 180^\circ=2x+x+y+z$$

از طرف دیگر چون $\hat{A}=72^\circ$، پس $x+y+z=72^\circ$. بنابراین

$$180^\circ=2x+72^\circ\Rightarrow 2x=108^\circ\Rightarrow x=54^\circ$$

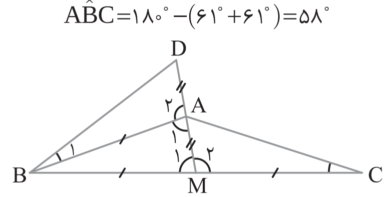


۷۱۲ (۳) مثلث ABM متساوی‌الساقین است، پس $\hat{M}_1=\hat{A}_1$. در نتیجه $\hat{M}_2=\hat{A}_2$، بنابراین

$$\begin{cases}AD=AM \\ AB=MC \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle ABD\cong\triangle MCA\Rightarrow \hat{C}=\hat{B}_1 \\ \hat{A}_2=\hat{M}_2\end{cases}$$

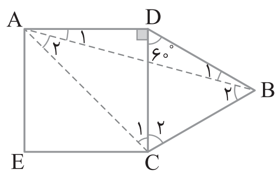
چون $\hat{C}+\hat{D}=61^\circ$، پس $\hat{B}_1+\hat{D}=61^\circ$. از طرف دیگر، زاویهٔ A_1 زاویهٔ خارجی مثلث ABD است. پس $\hat{A}_1=\hat{B}_1+\hat{D}=61^\circ$، بنابراین $\hat{M}_1=61^\circ$. در نتیجه

$$A\hat{B}C=180^\circ-(61^\circ+61^\circ)=58^\circ$$



۷۱۳ (۲) با توجه به شکل زیر، مثلث ABD متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۵۰° است. پس $\hat{B}_1=\hat{A}_1=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$

مثلث BDC متساوی‌الاضلاع است، پس $\hat{B}_2=60^\circ-15^\circ=45^\circ$. از طرف دیگر، قطر مربع نیمساز است، پس $\hat{C}_1=45^\circ$. بنابراین $A\hat{C}B=45^\circ+60^\circ=105^\circ$.
در ضمن $\hat{A}_1+\hat{A}_2=45^\circ$، پس $15^\circ+\hat{A}_2=45^\circ$، در نتیجه $\hat{A}_2=30^\circ$.
بنابراین بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ABC برابر ۱۰۵° و کوچک‌ترین زاویهٔ آن ۳۰° است، پس نسبت این دو زاویه برابر $\frac{105^\circ}{30^\circ}=\frac{7}{2}$ است.



۷۱۴ (۳) فرض کنید $AB=x$. در این صورت تناسب‌های زیر به دست می‌آید

$$\frac{x}{2}=\frac{4}{6}\Rightarrow x=\frac{4}{3}\ ,\qquad \frac{x}{4}=\frac{6}{2}\Rightarrow x=12\ ,\qquad \frac{x}{6}=\frac{2}{4}\Rightarrow x=3$$

پس سه مقدار مختلف برای طول پاره‌خط AB به دست می‌آید.

۷۱۵ (۴) بنابر فرض تست اگر MB را برابر x در نظر بگیریم، آن‌گاه $AM=2x$. چون محیط متوازی‌الاضلاع برابر ۲۰ است، پس

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع}=2(BM+MN)\Rightarrow 20=2(x+MN)$$

$$10=x+MN\Rightarrow MN=10-x$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC،

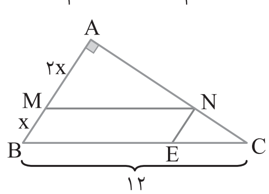
$$MN\|BC\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow \frac{2x}{3x}=\frac{10-x}{12}\Rightarrow 24x=30x-3x^2$$

$$3x^2=6x\Rightarrow x=2\Rightarrow AB=6$$

اکنون می‌توانیم اندازهٔ ضلع AC را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به دست آوریم:

$$AC^2=BC^2-AB^2=12^2-6^2=108\Rightarrow AC=6\sqrt{3}$$

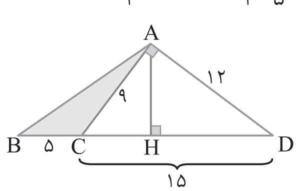
بنابراین $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}(6)(6\sqrt{3})=18\sqrt{3}$.



۷۱۶ (۳) اعداد ۹، ۱۲ و ۱۵ طول‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه هستند، زیرا $9^2+12^2=15^2$. پس مثلث ACD در رأس A قائم‌الزاویه است. ارتفاع AH در این مثلث قائم‌الزاویه را رسم می‌کنیم. مسلماً AH ارتفاع مثلث ABC نیز هست. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD،

$$AH\times CD=AC\times AD\Rightarrow AH\times 15=9\times 12\Rightarrow AH=\frac{36}{5}$$

بنابراین $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}(\frac{36}{5})(5)=18$.



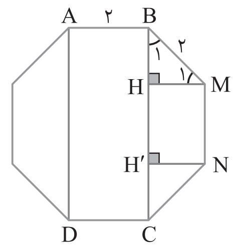
۷۱۷ (۱) اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی هشت‌ضلعی منتظم برابر $۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۱۳۵^\circ$ است. پس اگر عمودهای MH و NH′ را بر BC وارد کنیم، آن‌گاه مثلث‌های BMH و NCH′ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند. چون $BM=۲$، پس

$$MH^۲+BH^۲=BM^۲\Rightarrow ۲BH^۲=۴\Rightarrow BH=\sqrt{۲}$$

به همین ترتیب $CH'=\sqrt{۲}$. در ضمن چهارضلعی MHH′N مستطیل است، پس $HH'=MN=۲$. در نتیجه

$$BC=BH+HH'+CH'=\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}+۲$$

بنابراین $S_{ABCD}=AB\times BC=۲(۲\sqrt{۲}+۲)=۴(\sqrt{۲}+۱)$.

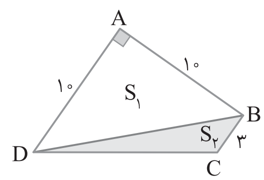


۷۱۸ (۲) راه‌حل اول توجه کنید که مساحت ذوزنقهٔ ABCD برابر است با

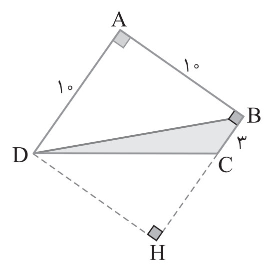
$$S=\frac{۱}{۲}AB\times(AD+BC)=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times(۱۰+۳)=۶۵$$

از طرف دیگر $S_۱=\frac{۱}{۲}AD\times AB=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۱۰=۵۰$. اکنون به دست می‌آید

$$S_۲=S-S_۱=۶۵-۵۰=۱۵$$



راه‌حل دوم ارتفاع وارد بر ضلع BC در مثلث DBC را رسم می‌کنیم. طول این ارتفاع برابر ۱۰ است، پس $S_{DBC}=\frac{۱}{۲}(۱۰)\times ۳=۱۵$



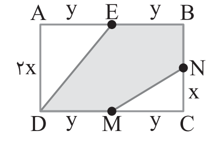
۷۱۹ (۱) مساحت قسمت رنگی مساوی مساحت مستطیل منهای مجموع مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE و MNC است، پس

$$۵۲=S_{ABCD}-(S_{ADE}+S_{MNC})$$

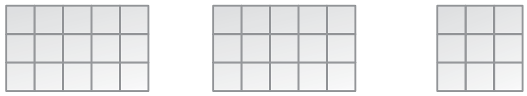
$$۵۲=(۲x)(۲y)-(\frac{۱}{۲}(۲x)(y)+\frac{۱}{۲}xy)$$

$$۵۲=۴xy-\frac{۳}{۲}xy\Rightarrow ۵۲=\frac{۵}{۲}xy\Rightarrow xy=\frac{۲\times ۵۲}{۵}$$

مساحت مستطیل برابر ۴xy است، پس $\text{مساحت مستطیل}=۴(\frac{۲\times ۵۲}{۵})=\frac{۴۱۶}{۵}$.



۷۲۰ (۱) نماهای مختلف این شکل به صورت زیر است:



نمای روبه‌رو: $n_۱=۱۵$ — نمای بالا: $n_۲=۱۵$ — نمای چپ: $n_۳=۹$

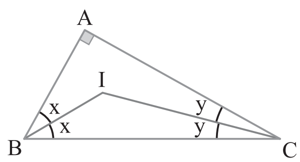
پس $\frac{n_۱+n_۲}{n_۳}=\frac{۱۵+۱۵}{۹}=\frac{۱۰}{۳}$.

۷۲۱ (۲) راه‌حل اول با توجه به فرض سؤال شکل زیر به دست می‌آید. پس

$$\hat{A}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow ۲x+۲y=۹۰^\circ\Rightarrow x+y=۴۵^\circ$$

بنابراین

$$B\hat{I}C=۱۸۰^\circ-(x+y)=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$$



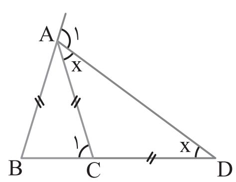
راه‌حل دوم می‌دانیم $B\hat{I}C=\frac{\hat{A}}{۲}+۹۰^\circ$، در نتیجه $B\hat{I}C=\frac{۹۰^\circ}{۲}+۹۰^\circ=۱۳۵^\circ$.

۷۲۲ (۴) بنابر فرض‌های تست شکل زیر به دست می‌آید. چون $CA=CD$، پس $C\hat{A}D=\hat{D}=x$. در ضمن $\hat{C}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ACD است، پس $\hat{C}_۱=۲x$ و چون $AB=AC$، پس $\hat{B}=\hat{C}_۱=۲x$. از طرف دیگر $\hat{A}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ABD است، بنابراین

$$\hat{A}_۱=\hat{B}+\hat{D}\Rightarrow ۱۰۲^\circ=۲x+x\Rightarrow ۳x=۱۰۲^\circ\Rightarrow x=۳۴^\circ$$

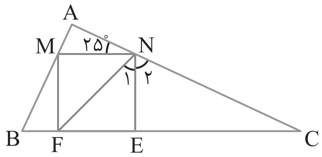
پس $\hat{B}=\hat{C}_۱=۶۸^\circ$، در نتیجه $B\hat{A}C=۱۸۰^\circ-(۶۸^\circ+۶۸^\circ)=۴۴^\circ$.

بنابراین اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث ABC برابر ۴۴° است.



۷۲۳ (۳) می‌دانیم در مربع قطر نیمساز است، پس $\hat{N}_۱=۴۵^\circ$. از طرف دیگر $MN\|BC$ و NC مورب است، بنابراین $\hat{C}=A\hat{N}M=۲۵^\circ$. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ NEC، $\hat{N}_۲=۹۰^\circ-۲۵^\circ=۶۵^\circ$. بنابراین

$$F\hat{N}C=\hat{N}_۱+\hat{N}_۲=۴۵^\circ+۶۵^\circ=۱۱۰^\circ$$



۷۲۴ (۴) با استفاده از ویژگی‌های تناسب نتیجه می‌شود:

$$a=\frac{b}{۲}=\frac{c}{۳}=\frac{d}{۴}\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{۱+۲+۳+۴}=\frac{d}{۴}\Rightarrow a+b+c+d=\frac{۱۰}{۴}d=۲/۵d$$

۷۲۵ **۲** مثلث‌های ADE ، ACE و ABD در ارتفاع رسم شده از رأس A مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع در آن‌ها است. بنابر فرض مسئله،

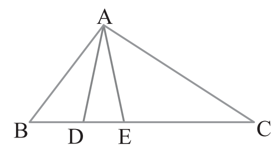
$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}}=۴\Rightarrow\frac{CE}{DE}=۴\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{CE}{DC}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow DC=\frac{۵}{۴}CE$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=۳\Rightarrow\frac{CE}{BD}=۳\Rightarrow BD=\frac{۱}{۳}CE$$

با توجه به برابری‌های $DE=\frac{۱}{۴}CE$ و $BD=\frac{۱}{۳}CE$ نتیجه می‌شود:

$$BE=BD+DE=\frac{۱}{۳}CE+\frac{۱}{۴}CE=\frac{۷}{۱۲}CE$$

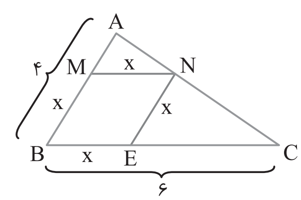
بنابراین $\frac{DC}{BE}=\frac{\frac{۵}{۴}CE}{\frac{۷}{۱۲}CE}=\frac{۱۵}{۷}$.



۷۲۶ **۳** طول هر ضلع لوزی را برابر x در نظر می‌گیریم. چون NE و AB موازی هستند، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{NE}{AB}=\frac{CE}{CB}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۶-x}{۶}\Rightarrow x=۲/۴$$

بنابراین محیط لوزی $BMNE$ مساوی $۴x=۹/۶$ است.



۷۲۷ **۴** اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم برابر $۱۸۰^\circ-(\frac{۳۶۰}{n})^\circ$ است، پس هر چقدر n بزرگ‌تر باشد $(\frac{۳۶۰}{n})^\circ$ کوچک‌تر و در نتیجه $۱۸۰^\circ-(\frac{۳۶۰}{n})^\circ$ بزرگ‌تر است. بنابراین یازده‌ضلعی منتظم در بین گزینه‌ها بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی را دارد.

۷۲۸ **۱** ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ وتر BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=(۲\sqrt{۵})^۲+(۴\sqrt{۵})^۲=۲۰+۸۰=۱۰۰\Rightarrow BC=۱۰$$

اکنون اندازهٔ ارتفاع AH را با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه تعیین می‌کنیم:

$$AB\times AC=AH\times BC\Rightarrow ۲\sqrt{۵}\times۴\sqrt{۵}=AH\times۱۰\Rightarrow AH=۴$$

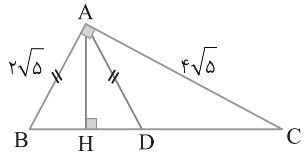
بنابراین

$$\triangle ABH:\ BH^۲=AB^۲-AH^۲=(۲\sqrt{۵})^۲-۴^۲=۲۰-۱۶=۴$$

$$BH=۲$$

در مثلث متساوی‌الساقین ABD ارتفاع AH میانه هم هست، پس

$$BD=۲BH=۴$$



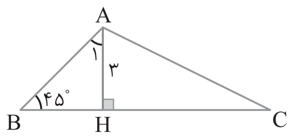
۷۲۹ **۴** چون $\hat{B}=۴۵^\circ$ ، پس $\hat{A}_۱=۴۵^\circ$ ، در نتیجه $BH=AH=۳$.

از طرف دیگر،

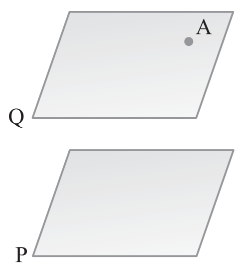
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow\frac{۹}{۲}(۱+\sqrt{۳})=\frac{۱}{۲}(۳)(BC)\Rightarrow BC=۳+۳\sqrt{۳}$$

چون $BH=۳$ و $BC=۳+۳\sqrt{۳}$ ، پس $HC=۳\sqrt{۳}$. در نتیجه بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle AHC:\ AC^۲=AH^۲+CH^۲=۳^۲+(۳\sqrt{۳})^۲=۳۶\Rightarrow AC=۶$$



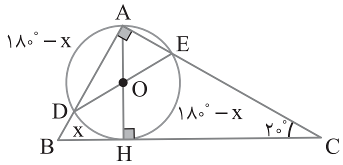
۷۳۰ **۳** تمام خطوط گذرنده از A و موازی P در صفحه‌ای شامل A و موازی صفحهٔ P قرار دارند (صفحهٔ Q در شکل زیر). اگر خط d در نقطهٔ A بر صفحهٔ Q عمود باشد، آن‌گاه بر P هم عمود است و تعداد خطوط گذرنده از A در صفحهٔ Q که بر d عمود هستند، بی‌نهایت است. پس کافی است $d\perp P$. توجه کنید که باید A روی خط d باشد تا شرایط سؤال برقرار باشد.



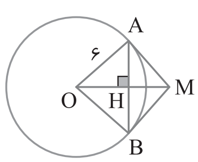
ریاضی خارج از کشور - ۹۵

۷۳۱ **۳** چون DE و AH قطرهای دایره هستند. با فرض $\overset{\frown}{DH}=x$ نتیجه می‌شود $\overset{\frown}{EH}=\overset{\frown}{AD}=۱۸۰^\circ-x$. اکنون به دست می‌آید

$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{ADH}-\overset{\frown}{EH}}{۲}\Rightarrow۲۰^\circ=\frac{x}{۲}\Rightarrow x=۴۰^\circ$$



۷۳۲ **۴** مرکز O را به نقاط A و B وصل می‌کنیم. چون $OA=OB$ و $MA=MB$ ، پس OM عمودمنصف AB است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،



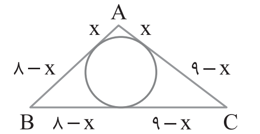
$$\triangle OAM: MA^۲=OM^۲-OA^۲=۸^۲-۶^۲=۲۸\Rightarrow MA=۲\sqrt{۷}$$

$$\triangle OAM: AH\times OM=OA\times MA\Rightarrow AH\times۸=۶\times۲\sqrt{۷}$$

$$AH=\frac{۳\sqrt{۷}}{۲}$$

بنابراین $AB=۲AH=۳\sqrt{۷}$.

۷۳۳ (۱) ابتدا اندازهٔ x را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم طول دو مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره مساوی‌اند. پس با توجه به شکل،



$$BC=۱۳\Rightarrow ۸-x+۹-x=۱۳\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲$$

پس $y=۸-x=۶$. بنابراین $\frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$.

۷۳۴ (۱) **راه‌حل اول** در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند و نیمساز زاویه‌ها نیز هستند. پس مثلث AOD قائم‌الزاویه است و در آن $\hat{A}_۱=۱۵^\circ$. پس ارتفاع OH در این مثلث ربع وتر است. بنابراین

$$OH=\frac{۱}{۴}AD\xrightarrow{AD=۸}OH=۲$$

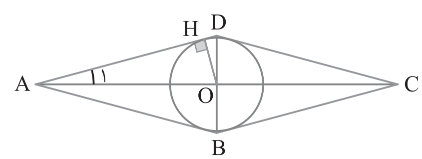
بنابراین شعاع دایرهٔ محاطی این لوزی برابر ۲ است.

راه‌حل دوم شعاع دایرهٔ محاطی هر چندضلعی محیطی برابر $\frac{S}{P}$ است که در آن S مساحت چندضلعی و P نصف محیط آن است. بنابراین

$$\text{مساحت لوزی}=AB^۲\sin ۳۰^\circ=۸^۲\times\frac{۱}{۲}=۳۲\Rightarrow S=۳۲$$

$$\text{محیط لوزی}=۴\times۸=۳۲\Rightarrow P=۱۶$$

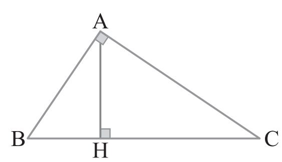
پس $\text{شعاع دایرهٔ محاطی لوزی}=\frac{S}{P}=\frac{۳۲}{۱۶}=۲$.



۷۳۵ (۱) سه مثلث ABH ، ACH و ABC دوبه‌دو متشابه‌اند. توجه کنید که نسبت شعاع‌های دایره‌های محاطی مثلث‌های متشابه برابر نسبت اضلاع نظیر آن‌ها یا همان نسبت تشابه آن‌ها است. بنابراین

$$\triangle ABH\sim\triangle CBA\Rightarrow\frac{r_۱}{r}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{r_۱}{AB}=\frac{r}{BC}$$

$$\triangle ACH\sim\triangle BCA\Rightarrow\frac{r_۲}{r}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{r_۲}{AC}=\frac{r}{BC}$$



پس $\frac{r}{BC}=\frac{r_۱}{AB}=\frac{r_۲}{AC}$.

در نتیجه بنابر ویژگی‌های تناسب

$$\frac{r}{BC}=\frac{r+r_۱+r_۲}{BC+AB+AC}$$

می‌دانیم $BC+AB+AC=۲P$ و $r=\frac{S}{P}$ که S مساحت مثلث ABC است.

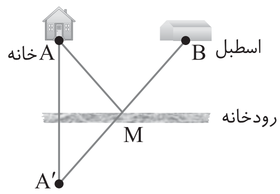
در نتیجه

$$\frac{\frac{S}{P}}{BC}=\frac{r+r_۱+r_۲}{۲P}\Rightarrow r+r_۱+r_۲=\frac{۲S}{BC}$$

چون $S=\frac{۱}{۲}AH\times BC$ ، پس $r+r_۱+r_۲=AH$.

۷۳۶ (۳) دو دایرهٔ $C(O,r)$ و $C'(O',r)$ انتقال‌یافتهٔ یکدیگر با بردار OO' هستند و همین دو دایره دوران‌یافتهٔ یکدیگر با زاویه‌ای به اندازهٔ ۱۸۰° و به مرکز وسط OO' هستند. همچنین این دو دایره مجانس معکوس یکدیگر به مرکز وسط OO' و با نسبت -۱ هستند. ولی مماس مشترک‌های خارجی این دو دایره موازی‌اند، پس نمی‌توانند مجانس مستقیم یکدیگر باشند.

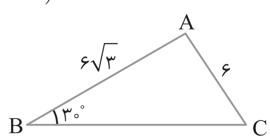
۷۳۷ (۳) موقعیت خانه را با نقطهٔ A و موقعیت اسطبل را با نقطهٔ B مشخص می‌کنیم. بازتاب A را نسبت به خط ساحل رودخانه به‌دست آورده و A' می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تا خط ساحل رودخانه را در M قطع کند. بنابر مسئلهٔ هرون مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر است. پس تبدیل بازتاب برای پیدا کردن کمترین مسیر به کار برده می‌شود.



۷۳۸ (۲) بنابر قضیهٔ سینوس‌ها،

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{۶\sqrt{۳}}{\sin\hat{C}}=\frac{۶}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{\sin\hat{C}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\sin\hat{C}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین $\hat{C}=۶۰^\circ$ یا $\hat{C}=۱۲۰^\circ$. پس $\hat{A}=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۳۰^\circ)=۹۰^\circ$ یا $\hat{A}=۱۸۰^\circ-(۱۲۰^\circ+۳۰^\circ)=۳۰^\circ$



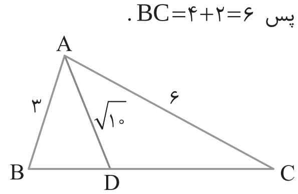
۷۳۹ (۴) از قضیهٔ نیمسازها نتیجه می‌شود

$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow DC=۲BD$$

$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow AD^۲=AB\times AC-BD\times DC$$

$$۱۰=۳\times۶-BD(۲BD)\Rightarrow ۲BD^۲=۸\Rightarrow BD=۲$$

بنابراین $DC=۴$ ، پس $BC=۴+۲=۶$.



۷۴۰ (۲) فرض می‌کنیم مثلث ABC مثلث مورد نظر باشد. بنابراین

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\sin\hat{A}\Rightarrow\sqrt{۱۸۹}=\frac{۱}{۲}(۵)(۶)\sin\hat{A}$$

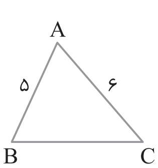
$$\sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۱۸۹}}{۱۵}=\frac{۳\sqrt{۲۱}}{۱۵}=\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

پس $\cos\hat{A}=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\hat{A}}=\pm\sqrt{۱-\frac{۲۱}{۲۵}}=\pm\frac{۲}{۵}$. اگر $\cos\hat{A}=\frac{۲}{۵}$ ، از قضیهٔ کسینوس‌ها نتیجه می‌شود

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\cos\hat{A}=۵^۲+۶^۲-۲(۵)(۶)(\frac{۲}{۵})$$

$$=۲۵+۳۶-۲۴=۳۷\Rightarrow BC=\sqrt{۳۷}$$

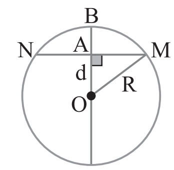
چون $BC=\sqrt{۳۷}$ در گزینه‌ها وجود دارد، پس دیگر لازم نیست حالت $\cos\hat{A}=\frac{-۲}{۵}$ را در نظر بگیریم.



۷۴۱ **(۲)** **راه‌حل اول** با توجه به شکل زیر و فرض‌های سؤال $R-d=۲$ و $R^۲-d^۲=AM^۲=۴^۲$. در نتیجه

$$(R-d)(R+d)=۱۶\Rightarrow ۲(R+d)=۱۶$$

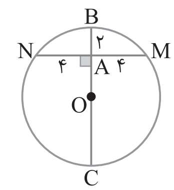
یعنی $R+d=۸$ =فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره تا A.



راه‌حل دوم با توجه به شکل زیر و روابط طولی در دایره،

$$AB\times AC=AM\times AN\Rightarrow ۲\times AC=۴\times ۴\Rightarrow AC=۸$$

پس فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره تا نقطهٔ A برابر ۸ است.



۷۴۲ **(۴)** طول مماس مشترک خارجی و مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های R و R′ و خط‌المرکزین d از برابری‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\text{طول مماس مشترک خارجی}$$

$$۸=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}\Rightarrow ۶۴=d^۲-(R-R')^۲$$

$$\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}=\text{طول مماس مشترک داخلی}$$

$$۶=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}\Rightarrow ۳۶=d^۲-(R+R')^۲$$

از تفاضل تساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم

$$۲۸=-(R-R')^۲+(R+R')^۲$$

$$۲۸=-R^۲-R'^۲+۲RR'+R^۲+R'^۲+۲RR'$$

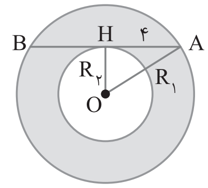
$$۲۸=۴RR'\Rightarrow RR'=۷$$

۷۴۳ **(۳)** فرض کنید $R_۱$ شعاع دایرهٔ بزرگ و $R_۲$ شعاع دایرهٔ کوچک باشد. با توجه به شکل زیر در مثلث OAH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$OA^۲-OH^۲=AH^۲\Rightarrow R_۱^۲-R_۲^۲=۱۶$$

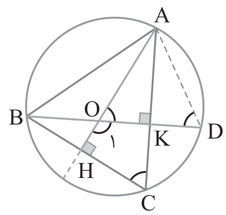
بنابراین مساحت ناحیهٔ بین دو دایره برابر است با

$$\pi R_۱^۲-\pi R_۲^۲=\pi(R_۱^۲-R_۲^۲)=۱۶\pi$$



۷۴۴ **(۴)** زاویهٔ AOD مکمل زاویهٔ $O_۱$ است، یعنی $A\hat{O}D+\hat{O}_۱=۱۸۰^\circ$.
چهارضلعی OHCK محاطی است، چون $\hat{H}+\hat{K}=۱۸۰^\circ$. پس $\hat{C}+\hat{O}_۱=۱۸۰^\circ$. در نتیجه $\hat{C}=A\hat{O}D$. از طرف دیگر دو زاویهٔ C و D زاویه‌های محاطی روبه‌رو به کمان AB هستند، پس $\hat{C}=\hat{D}$. بنابراین $A\hat{O}D=\hat{D}$، در نتیجه $A\hat{O}D=A\hat{D}O$.

ریاضی - ۹۲



۷۴۵ **(۳)** در هر n ضلعی تعداد قطرها برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است، پس بنابر فرض سؤال،

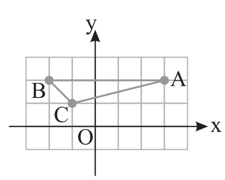
$$\frac{۱}{۲}n(n-۳)=n+۱۸\Rightarrow n^۲-۳n=۲n+۳۶$$

$$n^۲-۵n-۳۶=۰\Rightarrow (n-۹)(n+۴)=۰\Rightarrow n=۹$$

از طرف دیگر هر n ضلعی منتظم دایرهٔ محیطی خود را به n کمان مساوی تقسیم می‌کند به‌طوری که اندازهٔ هر کمان برابر $(\frac{۳۶۰}{n})^\circ$ است. در نتیجه، زاویهٔ بین دو قطر متوالی گذرنده از یک رأس در n ضلعی منتظم زاویه‌ای محاطی روبه‌رو به کمان $(\frac{۳۶۰}{n})^\circ$ است، پس اندازهٔ این زاویه برابر $(\frac{۱۸۰}{n})^\circ$ است. در نتیجه زاویهٔ بین دو قطر متوالی گذرنده از یک رأس در نه‌ضلعی منتظم مساوی $(\frac{۱۸۰}{۹})^\circ=۲۰^\circ$ است.

۷۴۶ **(۱)** می‌دانیم در تبدیل بازتاب اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود. پس تبدیل بازتاب نامتناهی نقطهٔ ثابت دارد. ولی انتقال در حالت کلی (به جز انتقال با بردار صفر) نقطهٔ ثابت ندارد و تجانس و دوران یک نقطهٔ ثابت دارند.

۷۴۷ **(۲)** فرض کنید S مساحت مثلث ABC و S′ مساحت مجانس آن باشد. اگر نسبت تجانس برابر k باشد، آن‌گاه $S'=k^۲S$. بنابراین باید مساحت مثلث ABC را به‌دست آوریم و ۹ برابر کنیم. با توجه به شکل، ارتفاع نظیر ضلع AB برابر ۱ و طول ضلع AB برابر ۵ است. پس $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}(۱)(۵)=\frac{۵}{۲}$، در نتیجه $S'=۹\times\frac{۵}{۲}=\frac{۴۵}{۲}$.



۷۴۸ **(۱)** از قضیهٔ سینوس‌ها نتیجه می‌شود

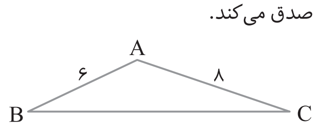
$$\frac{BC}{\sin\hat{A}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{۱۲}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{۱۲}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین $\hat{B}=۶۰^\circ$ یا $\hat{B}=۱۲۰^\circ$. چون مثلث ABC منفرجه است، پس $\hat{B}=۱۲۰^\circ$ قابل قبول است. در نتیجه $\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۱۲۰^\circ+۳۰^\circ)=۳۰^\circ$.

۷۴۹ **(۳)** چون زاویهٔ A منفرجه است، پس

$$BC^۲>AB^۲+AC^۲\Rightarrow BC^۲>۶^۲+۸^۲\Rightarrow BC^۲>۱۰۰\Rightarrow BC>۱۰$$

از طرف دیگر بنابر نابرابری‌های مثلث $BC<۶+۸$. بنابراین باید طول ضلع BC در نابرابری‌های $۱۰<BC<۱۴$ صدق کند. در بین گزینه‌ها تنها عدد ۱۳ در این نابرابری‌ها صدق می‌کند.



۷۵۰ (۳) از قضیهٔ نیمسازها نتیجه می‌شود

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AB=\frac{۳}{۴}AC$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

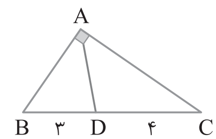
$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow ۷^۲=(\frac{۳}{۴}AC)^۲+AC^۲$$

$$۴۹=\frac{۹}{۱۶}AC^۲+AC^۲\Rightarrow ۲۵AC^۲=۴۹\times ۱۶$$

$$AC^۲=\frac{۴۹\times ۱۶}{۲۵}\Rightarrow AC=\frac{۷\times ۴}{۵}=\frac{۲۸}{۵}$$

پس $AB=\frac{۳}{۴}\times\frac{۲۸}{۵}=\frac{۲۱}{۵}$، در نتیجه

$$\text{تفاضل طول دو ضلع زاویهٔ قائمه}=AC-AB=\frac{۲۸}{۵}-\frac{۲۱}{۵}=\frac{۷}{۵}=۱/۴$$

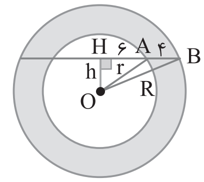


۷۵۱ (۲) راه‌حل اول فرض کنید R شعاع دایرهٔ بزرگ و r شعاع دایرهٔ کوچک باشد. با توجه به شکل در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OHB و OHA بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $R^۲-h^۲=۱۰^۲$ و $r^۲-h^۲=۶^۲$. در نتیجه

$$(R^۲-h^۲)-(r^۲-h^۲)=۱۰^۲-۶^۲$$

یعنی $R^۲-r^۲=۸^۲$، اکنون توجه کنید که

$$\text{مساحت ناحیهٔ محدود بین دو دایره}=(R^۲-r^۲)\pi=۶۴\pi$$

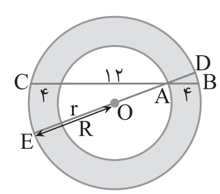


راه‌حل دوم بنابر فرض‌های سؤال شکل زیر را رسم می‌کنیم. توجه کنید که بنابر روابط طولی در دایرهٔ بزرگ‌تر، $AD\times AE=AB\times AC=۴\times ۱۶=۶۴$

از طرف دیگر، $AD=R-r$ و $AE=R+r$، پس

$$(R-r)\ (R+r)=۶۴\Rightarrow R^۲-r^۲=۶۴$$

در نتیجه مساحت ناحیهٔ بین دو دایره برابر است با $\pi(R^۲-r^۲)=۶۴\pi$



۷۵۲ (۳) با توجه به فرض‌های سوال شکل زیر را رسم کرده‌ایم. از A عمود AE را بر مماس CD رسم می‌کنیم. AE با BD موازی و AD مورب است، پس

$\hat{A}_۱=۳۴^\circ$ (۱)

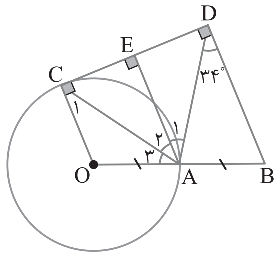
در ذوزنقهٔ $OBDC$، AE میان‌خط است، در نتیجه مثلث ACD متساوی‌الساقین است و AE ارتفاع و نیمساز است، در نتیجه $\hat{A}_۲=\hat{A}_۱=۳۴^\circ$ (۲)

OC و AE موازی هستند و AC مورب است، پس $\hat{C}_۱=\hat{A}_۲=۳۴^\circ$.

همچنین مثلث OAC متساوی‌الساقین است، در نتیجه $\hat{A}_۳=\hat{C}_۱=۳۴^\circ$ (۳)

اکنون از برابری‌های (۱)، (۲) و (۳) به دست می‌آید

$$O\hat{A}D=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{A}_۳=۳\times ۳۴^\circ=۱۰۲^\circ$$



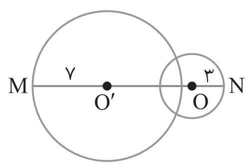
ریاضی - ۹۴

۷۵۳ (۴) با توجه به شکل زیر MN فاصلهٔ بین دورترین نقاط دو دایره از یکدیگر است و $MN=OO'+۳+۷=OO'+۱۰$. از طرف دیگر چون دو دایره متقاطع‌اند، پس فقط مماس مشترک خارجی دارند و طول مماس مشترک خارجی دو دایره به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی}=\sqrt{OO'^۲-(R-R')^۲}$$

$$۳=\sqrt{OO'^۲-(۳-۷)^۲}\Rightarrow ۹=OO'^۲-۱۶\Rightarrow OO'^۲=۲۵\Rightarrow OO'=۵$$

بنابراین $MN=۵+۱۰=۱۵$.



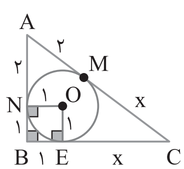
۷۵۴ (۳) از مرکز O به نقاط تماس N و E وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). چهارضلعی $ONBE$ مربعی به طول ضلع ۱ است. از طرف دیگر، طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره برابر هستند. در نتیجه بنابر قضیهٔ فیثاغورس و اطلاعات روی شکل،

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow (۲+x)^۲=۳^۲+(۱+x)^۲$$

$$۴+x^۲+۴x=۹+۱+x^۲+۲x\Rightarrow ۲x=۶\Rightarrow x=۳$$

بنابراین

$$\text{محیط مثلث}\ (ABC)=AB+AC+BC=۳+۲+x+۱+x=۶+۲x=۱۲$$

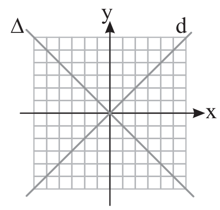


۷۵۵ (۱) تعداد قطرهای هر n ضلعی برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است. پس بنابر فرض سؤال، $\frac{۱}{۲}n(n-۳)=۴n\Rightarrow n^۲-۳n=۸n\Rightarrow n^۲=۱۱n\Rightarrow n=۱۱$.

از طرف دیگر هر n ضلعی منتظم در یک دایره محاط است و دایرهٔ محیطی خود را به n کمان مساوی که اندازهٔ هر کدام برابر $(\frac{۳۶۰}{n})^\circ$ است تقسیم می‌کند.

پس زاویهٔ بین دو قطر متوالی گذرنده از یک رأس در n ضلعی منتظم، زاویه‌ای محاطی روبه‌رو به کمان $(\frac{۳۶۰}{n})^\circ$ است. در نتیجه اندازهٔ این زاویه برابر $(\frac{۱۸۰}{n})^\circ$ است. بنابراین در یازده‌ضلعی منتظم اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر متوالی گذرنده از یک رأس برابر $(\frac{۱۸۰}{۱۱})^\circ$ است.

۷۵۶ (۳) با توجه به شکل خط d در راستای نیمساز ناحیه‌های اول و سوم و خط Δ در راستای نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم قرار دارد. پس این دو خط بر هم عمودند. بنابراین خط Δ دوران‌یافتهٔ خط d با زاویهٔ ۹۰° و به مرکز مبدأ مختصات است.

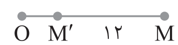


۷۵۷ (۳) بنابر تعریف تجانس، شکل سؤال به صورت زیر است. فرض می‌کنیم $OM'=x$. در نتیجه $OM=OM'+MM'=x+۱۲$. از طرف دیگر بنابر تعریف تجانس،

$$OM'=\frac{۱}{۴}OM \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}(x+۱۲) \Rightarrow ۴x=x+۱۲ \Rightarrow ۳x=۱۲ \Rightarrow x=۴$$

پس $OM'=۴$ و $OM=۱۶$. بنابراین

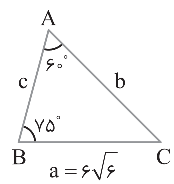
$$OM^۲+OM'^۲=۱۶^۲+۴^۲=۲۵۶+۱۶=۲۷۲$$



۷۵۸ (۲) اندازهٔ زاویهٔ C برابر است با

$$۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۷۵^\circ)=۴۵^\circ$$

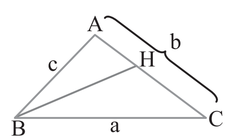
بنابر قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC،



$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{۶\sqrt{۶}}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{c}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow \frac{۶\sqrt{۶}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow c=۱۲$$

۷۵۹ (۴) در این سؤال $AB^۲=۳۶$ و $AC^۲+BC^۲=۵^۲+۴^۲=۴۱$. پس $AB^۲<AC^۲+BC^۲$. بنابراین $\hat{C}<۹۰^\circ$، پس $\hat{C}>۹۰^\circ$ نادرست است.

۷۶۰ (۲) بنابر فرض سؤال BH نیمساز زاویهٔ B است. پس از قضیهٔ نیمسازها نتیجه می‌شود



$$\frac{AH}{HC}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}$$

$$\frac{AH}{AC}=\frac{c}{a+c} \xrightarrow{AC=b} AH=\frac{bc}{a+c}$$

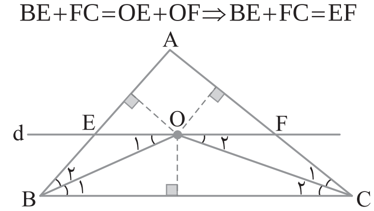
۷۶۱ (۳) چون نقطهٔ O از اضلاع مثلث ABC به یک فاصله است. پس O نقطهٔ تلاقی نیمسازهای مثلث ABC است. بنابراین اگر از O به رأس‌های B و C وصل کنیم، آن‌گاه OB و OC به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های B و C هستند. در نتیجه

$$OE \| BC \xrightarrow[\text{مورب}]{OB} \hat{O}_۱=\hat{B}_۱ \xrightarrow{\hat{B}_۱=\hat{B}_۲} \hat{O}_۱=\hat{B}_۲ \Rightarrow BE=OE$$

$$OF \| BC \xrightarrow[\text{مورب}]{OC} \hat{O}_۲=\hat{C}_۲ \xrightarrow{\hat{C}_۱=\hat{C}_۲} \hat{O}_۲=\hat{C}_۱ \Rightarrow FC=OF$$

از جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

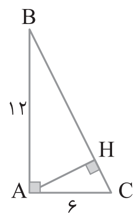
$$BE+FC=OE+OF \Rightarrow BE+FC=EF$$



۷۶۲ (۴) فرض کنید AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد. از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه نتیجه می‌شود

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۱۴۴+۳۶=۱۸۰ \Rightarrow BC=۶\sqrt{۵}$$

$$AH\times BC=AB\times AC \Rightarrow AH\times ۶\sqrt{۵}=۱۲\times ۶ \Rightarrow AH=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$



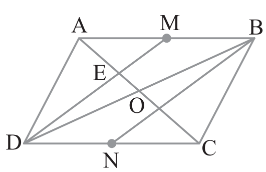
بنابراین $\frac{AH}{BC}=\frac{\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}}{۶\sqrt{۵}}=\frac{۲}{۵}$.

۷۶۳ (۴) مساحت چندضلعی شبکه‌ای به کمک قضیهٔ پیک به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱ \xrightarrow{S=۳} ۳=\frac{b}{۲}+i-۱ \Rightarrow i=۴-\frac{b}{۲} \quad (۱)$$

اگر $b=۴$ و $i=۲$، آن‌گاه رابطهٔ (۱) درست است.
اگر $b=۶$ و $i=۱$، آن‌گاه رابطهٔ (۱) درست است.
اگر $b=۸$ و $i=۰$، آن‌گاه رابطهٔ (۱) درست است.
اگر $b=۱۰$ و $i=۳$، آن‌گاه رابطهٔ (۱) نادرست است. پس $(۱۰,۳)$ نمی‌تواند دوتایی (b,i) باشد.

۷۶۴ (۳) **راه‌حل اول** قطر BD را رسم می‌کنیم تا قطر AC را در O قطع کند. در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین در مثلث ABD پاره‌خط‌های AO و DM میانه هستند. بنابراین نقطهٔ E، نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABD است. بنابراین



$$DE=\frac{۲}{۳}DM\ ,\ \ EM=\frac{۱}{۳}DM \Rightarrow \frac{DE}{EM}=۲$$

راه‌حل دوم چون $AM \| DC$، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$\triangle AME \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{DE}{EM}=\frac{DC}{AM}=۲$$

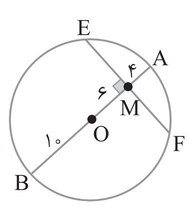
۷۶۵ (۴) نمای بالا و روبه‌روی شکل داده شده در گزینهٔ (۴) به درستی رسم شده است.

۷۶۶ (۱) **راه‌حل اول** از M به مرکز O وصل می‌کنیم. سپس OM را از دو طرف امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. در این صورت با توجه به شکل A نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا M است. پس بنابر فرض $MA=۴$. کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M در این دایره وتر EF عمود بر OM است. در ضمن چون OM بر EF عمود است، پس وتر EF در نقطهٔ M نصف می‌شود. یعنی $ME=MF$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$ME\times MF=MA\times MB \xrightarrow[MB=۲۰-۴=۱۶]{MA=۴}$$

$$ME\times ME=۴\times ۱۶ \Rightarrow ME^۲=۶۴ \Rightarrow ME=۸$$

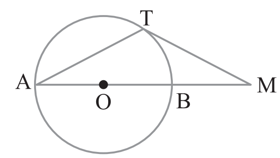
پس $EF=۱۶$.



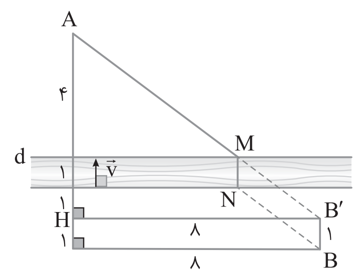
راه‌حل دوم بنابر قضیهٔ فیثاغورس $MF=\sqrt{OF^۲-OM^۲}=\sqrt{۱۰^۲-۶^۲}=۸$.
پس $EF=۱۶$.

۷۶۷ (۲) اندازهٔ زاویهٔ M برابر $\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}$ است. از طرف دیگر $MT=AT$، پس $\hat{A}=\hat{M}$. در ضمن زاویهٔ A زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان BT است، پس $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}$. توجه کنید که $\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}\Rightarrow ۲\overset{\frown}{BT}=\overset{\frown}{AT}$

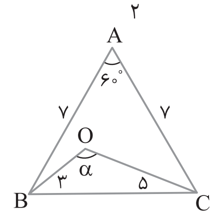
چون AB قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ$. در نتیجه
$$۲\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۳\overset{\frown}{BT}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BT}=۶۰^\circ$$
پس $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$. در نتیجه زاویهٔ A، $\frac{۱}{۳}$ زاویهٔ قائمه است.



۷۶۸ (۳) نقطهٔ B را با بردار $\vec{v}$ انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم. توجه کنید که $\vec{v}$ عمود بر راستای رودخانه، به اندازهٔ ۱ و از پایین به بالا است. محل برخورد AB' با خط d نقطهٔ M است و از روی آن پُل MN به دست می‌آید. با توجه به مسئلهٔ احداث پل، طول کوتاه‌ترین مسیر برابر $AB'+MN$ است. در مثلث $AB'H$ بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $AB'=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰$. در نتیجه
$$۱۰+۱=۱۱=\text{طول کوتاه‌ترین مسیر}$$

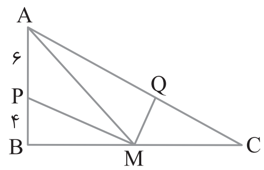


۷۶۹ (۱) از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، زیرا دو ضلع مساوی دارد و زاویهٔ بین این دو ضلع مساوی ۶۰° است. پس $BC=۷$. اکنون از قضیهٔ کسینوس‌ها نتیجه می‌شود
$$\triangle OBC:\ BC^۲=OB^۲+OC^۲-۲OB\times OC\cos\alpha$$
$$۷^۲=۳^۲+۵^۲-۲(۳)(۵)\cos\alpha\Rightarrow ۴۹=۹+۲۵-۳۰\cos\alpha$$
$$۱۵=-۳۰\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=۱۲۰^\circ$$

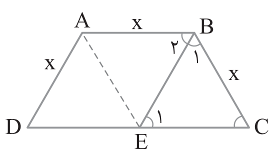


۷۷۰ (۴) از قضیهٔ نیمسازها نتیجه می‌شود
$$\begin{cases}\triangle AMB:\ \text{نیمساز } MP\Rightarrow\frac{AP}{BP}=\frac{AM}{MB}\\ \triangle AMC:\ \text{نیمساز } MQ\Rightarrow\frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{MC}\end{cases}$$
$$\xrightarrow{MB=MC}\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow\frac{۶}{۴}=\frac{AQ}{QC}$$
$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{AQ}{AC}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

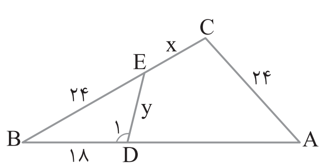
در ضمن دو مثلث AMQ و AMC در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، بنابراین
$$\frac{S_{AMQ}}{S_{AMC}}=\frac{AQ}{AC}=\frac{۳}{۵}\qquad(۱)$$
دو مثلث AMC و ABC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس
$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{MC}{BC}=\frac{۱}{۲}\qquad(۲)$$
از ضرب تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $\frac{S_{AMQ}}{S_{ABC}}=\frac{۳}{۱۰}$.



۷۷۱ (۲) فرض کنید در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD طول دو ساق و طول قاعدهٔ کوچک برابر x باشند. پس بنابر فرض سؤال،
$$\text{محیط ذوزنقه}=۵x\Rightarrow x+x+x+DC=۵x\Rightarrow DC=۲x$$
اکنون از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی ABED متوازی‌الاضلاع است. پس $BE=DE=x$، در نتیجه $EC=x$. بنابراین مثلث BEC متساوی‌الاضلاع است، در نتیجه $\hat{B}_۱=\hat{E}_۱=\hat{C}=۶۰^\circ$. چون در ذوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق مکمل هم هستند، پس $\hat{B}_۲=۶۰^\circ$. بنابراین BE نیمساز زاویهٔ B است. به همین ترتیب ثابت می‌شود AE نیمساز زاویهٔ A است. پس نقطهٔ تلاقی نیمسازهای دو زاویهٔ بزرگ‌تر ذوزنقه وسط قاعدهٔ بزرگ‌تر است.

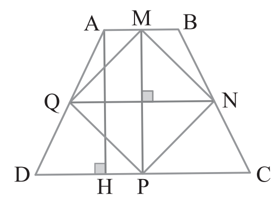


۷۷۲ (۲) دو مثلث BDE و BCA به حالت (زز) متشابه‌اند، بنابراین $\frac{BD}{BC}=\frac{DE}{AC}=\frac{BE}{AB}$، یعنی $\frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{y}{۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}$. در نتیجه $x=۱۲$ و $y=۱۲$. اکنون به دست می‌آید $y-x=۱۲-۱۲=۰$.



۷۷۳ (۲) با استفاده از قضیهٔ پیک مساحت چندضلعی شبکه‌ای به صورت زیر تعیین می‌شود:
$$S=\frac{b}{۲}+i-۱\Rightarrow ۷=\frac{b}{۲}+i-۱\Rightarrow i=۸-\frac{b}{۲}$$
چون می‌خواهیم i بیشترین مقدار ممکن باشد، پس باید b کمترین مقدار خود را داشته باشد. از طرف دیگر، همواره $b\geq ۳$ و i عدد طبیعی یا صفر است، در نتیجه $b\geq ۴$. بنابراین کمترین مقدار b برابر ۴ و بیشترین تعداد نقاط درونی برابر $i=۸-\frac{۴}{۲}=۶$ است.

۷۷۴ (۳) می‌دانیم با وصل کردن وسط‌های ضلع‌های مجاور یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین یک لوزی ایجاد می‌شود. بنابر فرض، $AH=\frac{۱}{۲}(AB+CD)$. در نتیجه $MP=\frac{۱}{۲}(AB+CD)$. همچنین NQ میان‌خط ذوزنقه است، پس $NQ=\frac{۱}{۲}(AB+CD)$. در نتیجه $MNPQ$ یک لوزی است که دو قطر آن با هم برابرند $(NQ=MP)$، یعنی این چهارضلعی مربع است.



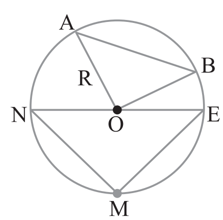
۷۷۵ (۳) از دوران مربع حول AB یک استوانه و از دوران دایره حول AB یک کره ایجاد می‌شود. شکل حاصل از دوران قسمت رنگی حول AB استوانه‌ای است که یک کره از آن جدا شده است.

۷۷۶ (۳) فرض کنید شعاع دایره برابر R باشد. چون $\overset{\frown}{AB}=۹۰^\circ$، پس زاویهٔ مرکزی AOB قائمه است، بنابراین مثلث OAB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر چون $\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{ME}$، پس وترهای MN و ME مساوی‌اند. همچنین زاویهٔ NME زاویهٔ محاطی رو به قطر است، پس قائمه است. بنابراین مثلث MNE قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین OAB و MNE متشابه‌اند. از طرف دیگر بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle OAB:\ AB^۲=OA^۲+OB^۲=R^۲+R^۲=۲R^۲\Rightarrow AB=R\sqrt{۲}$$

در نتیجه

$$\frac{S_{OAB}}{S_{MNE}}=\left(\frac{AB}{NE}\right)^۲=\left(\frac{R\sqrt{۲}}{۲R}\right)^۲=\frac{۱}{۲}$$



۷۷۷ (۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس

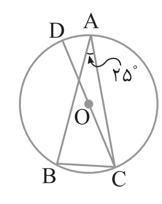
$$\hat{B}=\frac{۱۸۰^\circ-۲۵^\circ}{۲}=\frac{۱۵۵^\circ}{۲}$$

$\hat{B}$ زاویهٔ محاطی رو به کمان AC است $\Rightarrow \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۲\hat{B}=۱۵۵^\circ$

چون DC قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{AD}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{AC}=۱۸۰^\circ-۱۵۵^\circ=۲۵^\circ$.
از طرف دیگر، بین طول کمان AD و اندازهٔ آن رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\text{اندازهٔ کمان } AD}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان } AD}{۲\pi R}\Rightarrow\frac{۲۵^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان } AD}{۶\pi}$$

$$\text{طول کمان } AD=\frac{۲۵^\circ\times ۶\pi}{۳۶۰^\circ}=\frac{۵\pi}{۱۲}$$



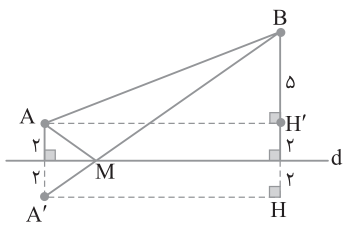
۷۷۸ (۲) برای یافتن نقطهٔ M بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d، یعنی نقطهٔ A' را پیدا می‌کنیم. محل برخورد $A'B$ با خط d نقطهٔ M است. می‌دانیم طول $A'B$ طول کوتاه‌ترین مسیر است. با توجه به شکل و فرض سؤال،

$$A'B=۱۵\ ,\quad BH=۷+۲=۹$$

$$\triangle A'BH:\ A'H^۲=A'B^۲-BH^۲=۱۵^۲-۹^۲=۱۴۴$$

$$A'H=۱۲\Rightarrow AH'=۱۲$$

$$\triangle ABH':\ AB^۲=BH'^۲+AH'^۲=۵^۲+۱۲^۲=۱۶۹\Rightarrow AB=۱۳$$

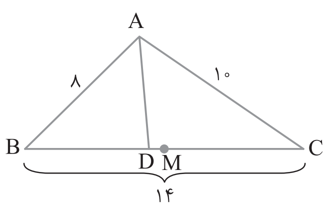


۷۷۹ (۴) با توجه به اندازه‌ها در شکل زیر زاویهٔ A بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث است. اگر AD نیمساز زاویهٔ A و M وسط ضلع بزرگ‌تر BC باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ نیمسازها،

$$\text{نیمساز داخلی } AD\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۸}{۱۰}$$

$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{BD}{BC}=\frac{۸}{۱۸}\Rightarrow\frac{BD}{۱۴}=\frac{۸}{۱۸}\Rightarrow BD=\frac{۵۶}{۹}$$

بنابراین $DM=BM-BD=\frac{۱۴}{۲}-\frac{۵۶}{۹}=\frac{۷}{۹}$.



۷۸۰ (۴) فرض کنید در مثلث ABC زاویهٔ بین دو ضلع با طول‌های $a=۷$ و $b=۴$ برابر θ باشد. در این صورت بنابر برابری سینوسی مساحت مثلث،

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta\Rightarrow ۷=\frac{۱}{۲}(۷)(۴)\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\theta=۳۰^\circ$ یا $\theta=۱۵۰^\circ$ که $\theta=۱۵۰^\circ$ در گزینه‌ها هست.

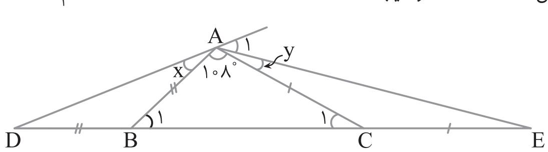
۷۸۱ (۳) بنابر فرض‌های سؤال شکل زیر را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل،

$$\begin{cases}BA=BD\Rightarrow\hat{D}=x\\ CA=CE\Rightarrow\hat{E}=y\end{cases}\xrightarrow{+}\hat{D}+\hat{E}=x+y\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، زاویه‌های $B_۱$ و $C_۱$ به ترتیب زاویه‌های خارجی مثلث‌های ABD و ACE هستند، پس $\hat{B}_۱=۲x$ و $\hat{C}_۱=۲y$. در ضمن

$$\triangle ABC:\ \hat{B}_۱+\hat{C}_۱+۱۰۸^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲x+۲y=۷۲^\circ\Rightarrow x+y=۳۶^\circ$$

بنابراین $D\hat{A}E=x+y+۱۰۸^\circ=۳۶^\circ+۱۰۸^\circ=۱۴۴^\circ$. چون DAE بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی مثلث ADE است، پس $\hat{A}_۱$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی این مثلث است. در نتیجه $\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-D\hat{A}E=۱۸۰^\circ-۱۴۴^\circ=۳۶^\circ$.



۷۸۲ (۳) فرض کنید در چهارضلعی $ABCD$ دو قطر AC و BD برابر باشند و نقاط M، N، E و F وسط‌های اضلاع این چهارضلعی باشند. بنابر قضیهٔ میان‌خط،

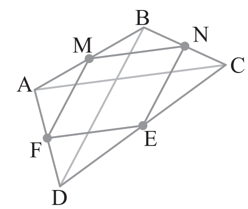
$$\begin{cases} M \text{ وسط } AB \\ N \text{ وسط } BC \end{cases} \Rightarrow MN \| AC\ ,\ \ MN=\frac{AC}{۲}$$

$$\begin{cases} E \text{ وسط } DC \\ F \text{ وسط } AD \end{cases} \Rightarrow EF \| AC\ ,\ \ EF=\frac{AC}{۲}$$

$$\begin{cases} M \text{ وسط } AB \\ F \text{ وسط } AD \end{cases} \Rightarrow MF \| BD\ ,\ \ MF=\frac{BD}{۲}$$

$$\begin{cases} N \text{ وسط } BC \\ E \text{ وسط } DC \end{cases} \Rightarrow NE \| BD\ ,\ \ NE=\frac{BD}{۲}$$

چون $AC=BD$، پس $MN=NE=EF=MF$. بنابراین چهارضلعی $MNEF$ لوزی است.



۷۸۳ (۲) بنابر قضیهٔ پیک، $S=\frac{b}{۲}+i-۱$. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۶}{۲}+۳-۱=۵$

گزینهٔ (۲): $S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۶}{۲}+۶-۱=۸$

گزینهٔ (۳): $S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۱۲}{۲}+۲-۱=۷$

گزینهٔ (۴): $S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۶}{۲}+۴-۱=۶$

پس چندضلعی شبکه‌ای با داده‌های $b=۶$ و $i=۶$ بیشترین مساحت را دارد.

۷۸۴ (۲) می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس $AM=\frac{BC}{۲}$. در ضمن چون $AH<AM$، پس بنابر فرض سؤال $\frac{AH}{AM}=\frac{۲}{۳}$، در نتیجه

$$\frac{AH}{AM}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{AH}{\frac{۱}{۲}BC}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow AH=\frac{۱}{۳}BC \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

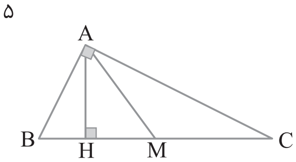
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH \times BC \xrightarrow{(۱)} ۲۴=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳}BC)BC$$

$$BC^۲=۶\times۲۴ \Rightarrow BC=۱۲$$

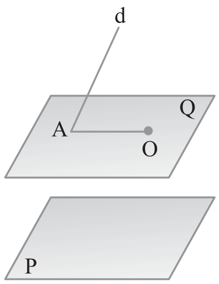
بنابراین $AH=۴$ و $AM=۶$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle AHM:\ MH^۲=AM^۲-AH^۲ \Rightarrow MH^۲=۶^۲-۴^۲=۲۰$$

$$MH=۲\sqrt{۵}$$



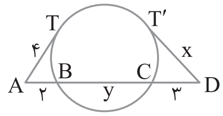
۷۸۵ (۳) تمام خطوط گذرنده از O و موازی P در صفحه‌ای شامل O و موازی P هستند. پس از نقطهٔ O صفحهٔ Q را موازی با صفحهٔ P رسم می‌کنیم. اگر خط d صفحهٔ Q را در نقطهٔ A قطع کند، آن‌گاه OA موازی P و متقاطع با d است. مسلماً وقتی خط d صفحهٔ Q را قطع کند، صفحهٔ P را نیز قطع می‌کند. یعنی باید d با P متقاطع باشد. توجه کنید که چون فقط یک خط گذرا از O، موازی P و متقاطع با d هست، پس O نباید روی خط d باشد.



۷۸۶ (۳) فرض کنید اندازهٔ وتر BC برابر y باشد. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$AT^۲=AB\times AC \Rightarrow ۴^۲=۲(۲+y) \Rightarrow ۸=۲+y \Rightarrow y=۶$$

$$DT'^۲=DC\times DB \Rightarrow x^۲=۳(۳+۶) \Rightarrow x^۲=۲۷ \Rightarrow x=۳\sqrt{۳}$$



۷۸۷ (۳) طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های R و R' و طول خط‌المرکزین d از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی}=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}$$

$$۱۵=\sqrt{d^۲-(۳+۵)^۲} \Rightarrow ۱۵^۲=d^۲-۶۴ \Rightarrow d^۲=۲۲۵+۶۴=۲۸۹$$

$$d=۱۷$$

چون $d>R+R'$، پس دو دایره متخارج هستند. مطابق شکل زیر، بیشترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایره برابر طول پاره‌خط AB است و

$$AB=OO'+R+R' \xrightarrow[R=۳,R'=۵]{OO'=۱۷} AB=۱۷+۳+۵=۲۵$$

۷۸۸ (۲) تبدیل T را تبدیل همانی می‌گوییم هرگاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، $T(A)=A$، یعنی در تبدیل همانی هر نقطهٔ صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کنیم. در نتیجه هر تبدیل همانی طولپاست، پس گزارهٔ (الف) درست است.

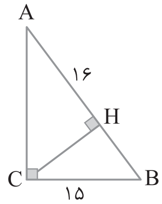
گزارهٔ (ب) نادرست است، زیرا انتقال با بردار صفر، همانی است.

گزارهٔ (پ) نادرست است، زیرا تجانس با نسبت $k=۱$ تبدیل همانی است.

دوران با زاویهٔ ۳۶۰° تبدیل همانی است، زیرا دوران‌یافتهٔ هر نقطه به هر مرکزی بر خودش منطبق می‌شود، پس گزارهٔ (ت) درست است.

پس دو تا از گزاره‌های داده شده درست هستند.

۷۸۹ (۲) بنابر فرض‌های سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم. با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،



$$BC^۲=BH\times AB \Rightarrow ۱۵^۲=BH(BH+۱۶)$$

$$BH^۲+۱۶BH-۲۲۵=۰$$

$$(BH+۲۵)(BH-۹)=۰$$

$$BH=۹ \Rightarrow AB=۱۶+۹=۲۵$$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$AC^۲=AB^۲-BC^۲=۲۵^۲-۱۵^۲=(۲۵-۱۵)(۲۵+۱۵)$$

$$=۱۰\times۴۰=۴۰۰ \Rightarrow AC=۲۰$$

۷۹۰ **۱** راه‌حل اول ابتدا با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها طول ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}-۲AB\times AC\cos\hat{A}$$

$$=۱۶+۸۱-۲(۴)(۹)\cos ۶۰^{\circ}=۹۷-۳۶=۶۱\Rightarrow BC=\sqrt{۶۱}$$

بنابر قضیهٔ نیمسازها،

AD نیمساز زاویهٔ داخلی $\hat{A}$ است $\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۴}{۹}$

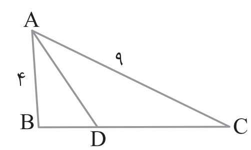
$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{BD}{BC}=\frac{۴}{۱۳}\Rightarrow\frac{BD}{\sqrt{۶۱}}=\frac{۴}{۱۳}$$

$$BD=\frac{۴\sqrt{۶۱}}{۱۳}\ ,\ DC=\frac{۹\sqrt{۶۱}}{۱۳}$$

$$AD^{۲}=AB\times AC-BD\times DC=۴\times۹-\frac{۴\sqrt{۶۱}}{۱۳}\times\frac{۹\sqrt{۶۱}}{۱۳}$$

$$=۳۶(۱-\frac{۶۱}{۱۶۹})=۳۶(\frac{۱۰۸}{۱۶۹})$$

$$AD=\frac{۶}{۱۳}\sqrt{۱۰۸}=\frac{۶\times۶\sqrt{۳}}{۱۳}=\frac{۳۶\sqrt{۳}}{۱۳}$$



راه‌حل دوم اگر d_a طول نیمساز زاویهٔ داخلی A باشد، آن‌گاه

$$d_a=\frac{۲bc\times\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c}=\frac{۲(۹)(۴)\cos\frac{۶۰^{\circ}}{۲}}{۹+۴}=\frac{۲(۳۶)(\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{۱۳}=\frac{۳۶\sqrt{۳}}{۱۳}$$

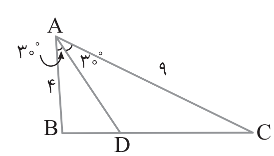
راه‌حل سوم با توجه به شکل زیر،

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$$

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC\sin ۶۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}AB\times AD\sin ۳۰^{\circ}+\frac{۱}{۲}AD\times AC\sin ۳۰^{\circ}$$

$$۴\times۹\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۴AD(\frac{۱}{۲})+۹AD(\frac{۱}{۲})$$

$$۳۶\sqrt{۳}=۱۳AD\Rightarrow AD=\frac{۳۶\sqrt{۳}}{۱۳}$$



۷۹۱ **۳** بنابر فرض، $AB=AC$، پس $\hat{B}=\hat{C}_۱=x$. چون $\hat{A}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ABC است، پس $\hat{A}_۱=\hat{B}+\hat{C}_۱=۲x$. از طرف دیگر، $CA=CD$، بنابراین $\hat{A}_۱=\hat{D}$، در نتیجه $\hat{D}=۲x$. در ضمن،

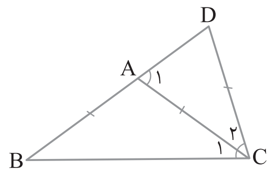
$$BD=BC\Rightarrow\hat{D}=\hat{C}_۱+\hat{C}_۲\Rightarrow ۲x=x+\hat{C}_۲\Rightarrow\hat{C}_۲=x$$

در مثلث BDC مجموع زاویه‌های داخلی برابر ۱۸۰° است، بنابراین

$$\hat{B}+\hat{D}+\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow x+۲x+x+x=۱۸۰^{\circ}$$

$$۵x=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow x=۳۶^{\circ}$$

پس $B\hat{A}C=۱۸۰^{\circ}-۲x=۱۸۰^{\circ}-۲(۳۶^{\circ})=۱۰۸^{\circ}$.



۷۹۲ **۱** با توجه به فرض‌های سؤال اندازه‌های روی شکل را خواهیم داشت. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$MP\|AB\Rightarrow\frac{MP}{AB}=\frac{CP}{AC}\Rightarrow\frac{x+y}{۱۰}=\frac{y-x+۶}{۵}$$

$$۵x+۵y=۱۰y-۱۰x+۶۰\Rightarrow ۱۵x-۵y=۶۰\Rightarrow ۳x-y=۱۲\qquad(۱)$$

از طرف دیگر با توجه به شکل،

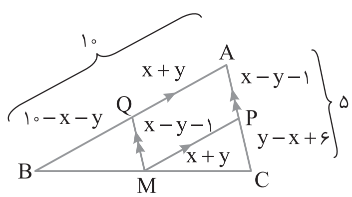
$$AP<AC\Rightarrow x-y-۱<۵\xrightarrow{(۱)}$$

$$x+۱۲-۳x-۱<۵\Rightarrow -۲x<-۶\Rightarrow x>۳$$

$$AQ<AB\Rightarrow x+y<۱۰\xrightarrow{(۱)}$$

$$x+۳x-۱۲<۱۰\Rightarrow ۴x<۲۲\Rightarrow x<\frac{۱۱}{۲}$$

از اشتراک نابرابری‌های به دست آمده به نابرابری $۳<x<\frac{۱۱}{۲}$ می‌رسیم. توجه کنید که در این ناحیه $x+y>۰$ و $x-y-۱>۰$.

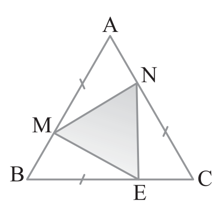


۷۹۳ **۴** راه‌حل اول مثلث‌های AMN ، CNE و BEM به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند، پس مساحت‌های برابر دارند. طول اضلاع مثلث ABC را برابر x انتخاب می‌کنیم، در این‌صورت،

$$S_{MNE}=S_{ABC}-۳S_{AMN}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}-۳(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}x\times\frac{۲}{۳}x\sin ۶۰^{\circ})$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}x^{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}x^{۲}$$

اکنون می‌توانیم نسبت خواسته شده را به دست آوریم: $\frac{S_{MNE}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}x^{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}}=\frac{۱}{۳}$



راه‌حل دوم فرض کنید $AN=t$ و $AM=۲t$. بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$MN^{۲}=t^{۲}+۴t^{۲}-۲(t)(۲t)\cos ۶۰^{\circ}=۵t^{۲}-۲t^{۲}=۳t^{۲}\Rightarrow MN=\sqrt{۳}t$$

به همین صورت $ME=NE=\sqrt{۳}t$. بنابراین مثلث MNE متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه مثلث MNE با مثلث ABC به حالت (ض‌ض‌ض) و نسبت تشابه $\frac{\sqrt{۳}t}{۳t}$ متشابه است. پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث توان دوم نسبت تشابه آن‌هاست، یعنی $\frac{S_{MNE}}{S_{ABC}}=(\frac{\sqrt{۳}t}{۳t})^{۲}=\frac{۱}{۳}$

۷۹۴ **(۴)** چون $\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، پس عددی مانند k وجود دارد به‌طوری که $AB=\sqrt{۳}k$ و $AC=۲k$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

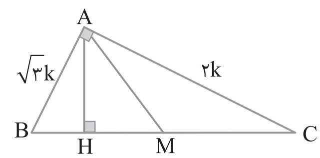
$$BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=\sqrt{۳k^۲+۴k^۲}=\sqrt{۷}k$$

AM میانهٔ وارد بر وتر است، پس $AM=\frac{۱}{۲}BC=\frac{\sqrt{۷}}{۲}k$

بنابـر روابط طولـی در مثلث قائم‌الزاویـه $AH\times BC=AB\times AC$، در نتیجه $AH=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}}k$. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AMH،

$$MH=\sqrt{AM^۲-AH^۲}=\sqrt{\frac{۷}{۴}k^۲-\frac{۱۲}{۷}k^۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}k$$

بنابراین $\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{\frac{۱}{۲}AB\times AC}{\frac{۱}{۲}AH\times MH}=\frac{\sqrt{۳}k^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۱۴}k^۲}=۱۴$.



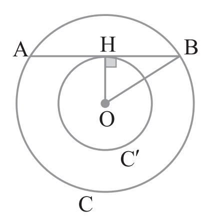
۷۹۵ **(۴)** چهارضلعـی ABEF متوازی‌الاضلاع اسـت (زیرا $AB||EF$ و $AB=EF$)، پس دو خط AF و BE موازی‌اند، نه متنافر.

۷۹۶ **(۱)** توجه کنید که دو دایره هم‌مرکز هستند. اگر وتر AB از دایرهٔ C بر دایرهٔ C′ مماس باشد، OH عمود بر AB و H وسط AB است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle OBH:\ BH^۲=OB^۲-OH^۲=۸^۲-۵^۲=۶۴-۲۵=۳۹$$

$$BH=\sqrt{۳۹}$$

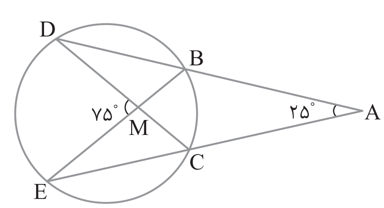
پس $AB=۲\sqrt{۳۹}$.



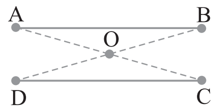
۷۹۷ **(۳)** توجه کنید که

$$\begin{cases}\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC}}{۲}\xrightarrow{\hat{A}=۲۵^\circ}\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC}=۵۰^\circ\\ \hat{M}=\frac{\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC}}{۲}\xrightarrow{\hat{M}=۷۵^\circ}\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC}=۱۵۰^\circ\end{cases}$$

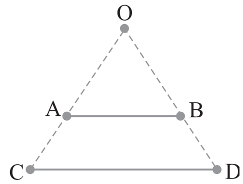
$$۲\overset{\frown}{BC}=۱۰۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BC}=۵۰^\circ$$



۷۹۸ **(۳)** اگـر دو پاره‌خط مجانس هم باشـند، آن‌گاه موازی هسـتند، چون تجانس شـیب خط را حفظ می‌کند. همچنین اگر دو پاره‌خط AB و CD موازی و مسـاوی باشـند، آن‌گاه مجانس هم هستند. در این صورت مرکز تجانس نقطهٔ تلاقی AC و BD و نسبت تجانس برابر -۱ است (شکل زیر ببینید).



اگر دو پاره‌خط AB و CD موازی و نامساوی باشند، آن‌گاه مجانس هم هستند. می‌توانیـد مرکـز تجانـس را نقطهٔ تلاقی AC و BD و نسـبت تجانـس را برابر $\frac{OA}{OC}$ در نظر بگیرید (شکل زیر را ببینید).



۷۹۹ **(۴)** بنابر فرض سؤال شکل زیر به دست می‌آید. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

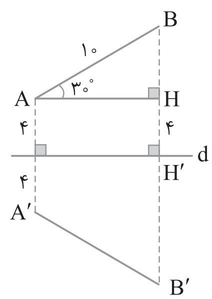
$$\hat{A}=۳۰^\circ\Rightarrow BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵,\quad BH'=۵+۴=۹\Rightarrow B'H'=۹$$

پس $BB'=۱۸$. از طرف دیگر،

$$\triangle ABH:\ \hat{B}=۶۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱۰)=۵\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$S_{ABB'A'}=\frac{۱}{۲}AH(AA'+BB')=\frac{۱}{۲}(۵\sqrt{۳})(۸+۱۸)$$
$$=\frac{۱}{۲}(۵\sqrt{۳})(۲۶)=۶۵\sqrt{۳}$$



۸۰۰ **(۴)** مثلث به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ قائم‌الزاویه است، زیرا $۶^۲+۸^۲=۱۰^۲$. مطابق شکل BC وتر این مثلث و AH ارتفاع نظیر بزرگ‌ترین ضلع است. همچنین BD نیمساز زاویهٔ متوسط است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

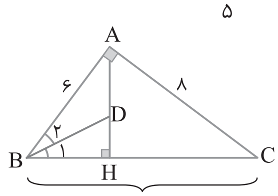
$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow ۶^۲=BH\times ۱۰\Rightarrow BH=\frac{۳۶}{۱۰}=\frac{۱۸}{۵}$$

$$AH\times BC=AB\times AC\Rightarrow AH\times ۱۰=۶\times ۸\Rightarrow AH=\frac{۶\times ۸}{۱۰}=\frac{۲۴}{۵}$$

اکنون از قضیهٔ نیمسازها نتیجه می‌شود

$$\text{نیمساز زاویهٔ داخلی B است } BD\Rightarrow\frac{AD}{DH}=\frac{AB}{BH}=\frac{۶}{\frac{۱۸}{۵}}$$

$$\frac{AD}{DH}=\frac{۵}{۳}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{AD}{AH}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{AD}{\frac{۲۴}{۵}}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow AD=۳$$



۸۰۱ (۳) طرفین فرض $A^{۲}+۳A=I$ را در ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A^{۲}+۳A=I\xrightarrow{A\times}A^{۳}+۳A^{۲}=A\Rightarrow A^{۳}=-۳A^{۲}+A$$

از طرف دیگر از برابری $A^{۲}+۳A=I$ نتیجه می‌شود $A^{۲}=-۳A+I$، پس

$$A^{۳}=-۳(-۳A+I)+A$$

بنابرایـن $A^{۳}=۱۰A-۳I$. با مقایسـهٔ این برابـری با فرض $A^{۳}=\alpha A+\beta I$ نتیجه می‌گیریم $\alpha=۱۰\ ,\ \beta=-۳\Rightarrow\alpha\beta=-۳۰$

۸۰۲ (۱) حاصل دترمینان را برحسب سطر اول حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & m \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -m \end{vmatrix}=۱(-۱)^{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & -m \end{vmatrix}+m(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=-m-۲m=-۳m$$

بنابر فرض سؤال این دترمینان برابر ۴- است، پس $-۳m=-۴\Rightarrow m=\frac{۴}{۳}$

۸۰۳ (۴) ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}=۴I$$

بنابراین $A^{۴}=(A^{۲})^{۲}=(۴I)^{۲}=۱۶I$، پس $۴A^{۴}=۶۴I$. در نتیجه

$$(۴A^{۴})^{-۱}=(۶۴I)^{-۱}=\frac{۱}{۶۴}I$$

۸۰۴ (۳) ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دسـتگاه داده شده است. بنابر فرض سؤال $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$. بنابراین

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-۱}\begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ -۲ \end{bmatrix}\Rightarrow x=۴\ ,\ y=-۲$$

از طرف دیگر،

$$A=(A^{-۱})^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

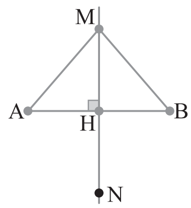
$$=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a=۰ \\ b=-۱ \\ c=۱ \end{cases}$$

در نتیجه $xy+abc=-۸+۰=-۸$.

۸۰۵ (۴) مـکان هندسـی نقاطی کـه از دو نقطهٔ A و B به یـک فاصله‌اند، عمودمنصـف پاره‌خط AB اسـت. اگر نقطهٔ M روی عمودمنصف AB باشـد به‌طوری که $S_{AMB}<۱۲$، آن‌گاه مطابق شکل زیر،

$$\frac{۱}{۲}MH\times AB<۱۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}MH\times ۹<۱۲\Rightarrow MH<\frac{۸}{۳}$$

بـه همیـن ترتیـب در طرف دیگـر پاره‌خـط AB نقطهٔ N با شـرط $NH<\frac{۸}{۳}$ می‌تواند این شـرط را داشـته باشـد. بنابراین مکان هندسـی مورد نظر، پاره‌خط MN به طول $\frac{۱۶}{۳}$ است.



۸۰۶ (۳) با توجه به شکل زیر R و h را به دست می‌آوریم:

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y-۱=۰\Rightarrow O(-۱,۱)\ ,\ R=\sqrt{۳}$$

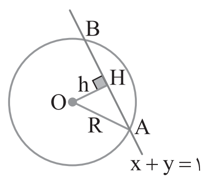
$$x+y=۱ \text{ از خط } O \text{ فاصلهٔ نقطهٔ}=h=\frac{|-۱+۱-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle OAH:\ AH=\sqrt{R^{۲}-h^{۲}}=\sqrt{۳-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

در نتیجه

$$AB=۲AH=۲\times\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$$



۸۰۷ (۱) چون M روی این بیضی است، پس

$$۲a=MF+MF'=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}+\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}=۵+۵=۱۰$$

اکنون باید بررسـی کنیم که کدام نقطه در بین گزینه‌ها مجموع فاصله‌هایش از F و F′ برابر ۱۰ است. در بین گزینه‌ها تنها گزینهٔ (۱) این شرط را دارد.

بررسی گزینهٔ (۱):

$$\sqrt{(-۳-۱)^{۲}+(-۵+۲)^{۲}}+\sqrt{(-۳-۰)^{۲}+(-۵+۱)^{۲}}$$

$$=\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}+\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵+۵=۱۰$$

۸۰۸ (۴) در متوازی‌الاضلاع مجموع مختصات دو رأس مقابل به هم، برابر مجموع مختصات دو رأس دیگر است. بنابراین

$$ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع}\Rightarrow A+C=B+D$$

$$(a,۲,۳)+(۲,۱,۲)=(-۳,b,۱)+(۴,-۱,c)$$

$$(a+۲,۳,۵)=(۱,b-۱,۱+c)$$

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱,\quad b-۱=۳\Rightarrow b=۴,\quad ۱+c=۵\Rightarrow c=۴$$

پس $abc=-۱۶$.

۸۰۹ (۱) چون $\vec{a}$ با $\vec{b}$ موازی است، پس قرینهٔ $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$ خودش است.

۸۱۰ (۱) مسـاحت مثلثی که توسـط بردارهای $\vec{a}-۲\vec{b}$ و $۳\vec{a}+۲\vec{b}$ تولید می‌شود برابر است با $S=\frac{۱}{۲}|(\vec{a}-۲\vec{b})\times(۳\vec{a}+۲\vec{b})|$. توجه کنید که

$$(\vec{a}-۲\vec{b})\times(۳\vec{a}+۲\vec{b})=۳\vec{a}\times\vec{a}-۶\vec{b}\times\vec{a}+۲\vec{a}\times\vec{b}-۴\vec{b}\times\vec{b}$$

$$=۶\vec{a}\times\vec{b}+۲\vec{a}\times\vec{b}=۸\vec{a}\times\vec{b}$$

بنابراین

$$S=\frac{۱}{۲}|۸\vec{a}\times\vec{b}|=۴|\vec{a}\times\vec{b}|=۴|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{۴}=۴\times۵\times۵\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۵۰\sqrt{۲}$$

۸۱۱ **۴** ماتریس $A^۲+AB+BA+B^۲$ مساوی $(A+B)^۲$ است. پس لازم است ابتدا ماتریس $A+B$ را به دست آوریم:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۵ & -۷ & ۱۱ \\ ۶ & ۴ & ۱۳ \\ ۱۲ & ۰ & -۸ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & ۷ & -۱۱ \\ -۶ & -۳ & -۱۳ \\ -۱۲ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^۲+AB+BA+B^۲=(A+B)^۲=I^۲=I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

مجموع درایه‌های ماتریس فوق برابر ۳ است.

۸۱۲ **۴** ابتدا هر دو دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ m & m-n & n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر سوم}}$$

$$m(-۱)^۴\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix}+(m-n)(-۱)^۵\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}+n(-۱)^۶\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=m(-۴-۱)+(n-m)(۸-۳)+n(۲+۳)$$

$$=-۵m+۵n-۵m+۵n=۱۰n-۱۰m$$

$$\begin{vmatrix} m & m-n & n \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}}$$

$$m(-۱)^۲\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}+(m-n)(-۱)^۳\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}+n(-۱)^۴\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$=m(۲+۴)+(n-m)(۳-۸)+n(-۳-۴)$$

$$=۶m-۵n+۵m-۷n=۱۱m-۱۲n$$

بنابراین

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ m & m-n & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m & m-n & n \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{vmatrix}=۴$$

$$۱۰n-۱۰m+۱۱m-۱۲n=۴\Rightarrow m-۲n=۴\Rightarrow ۲n-m=-۴$$

۸۱۳ **۲** ماتریسی وارون‌پذیر است که دترمینان آن نامساوی صفر باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $\begin{vmatrix} a+۱ & ۰ \\ ۰ & a^۲-۱ \end{vmatrix}=(a+۱)(a^۲-۱)=۰\Rightarrow a=-۱, a=۱$

پس این ماتریس به‌ازای $a=۱$ و $a=-۱$ وارون‌پذیر نیست.

گزینهٔ (۲): $\begin{vmatrix} ۰ & a^۲+۱ \\ -۱-a^۲ & ۰ \end{vmatrix}=-(a^۲+۱)(-۱-a^۲)=(a^۲+۱)^۲$

این عبارت همواره غیرصفر است، پس ماتریس گزینهٔ (۲) همواره وارون‌پذیر است.

گزینهٔ (۳): $\begin{vmatrix} a^۲ & ۰ \\ ۰ & a^۲ \end{vmatrix}=a^۴=۰\Rightarrow a=۰$

پس ماتریس گزینهٔ (۳) به ازای $a=۰$ وارون‌پذیر نیست.

گزینهٔ (۴): $\begin{vmatrix} ۰ & a^۲ \\ a^۲+۱ & ۰ \end{vmatrix}=-a^۲(a^۲+۱)=۰\Rightarrow a=۰$

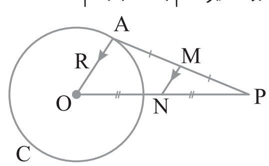
پس ماتریس گزینهٔ (۴) به ازای $a=۰$ وارون‌پذیر نیست.

۸۱۴ **۲** اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه داده شده باشد، بنابر فرض سؤال $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$. پس

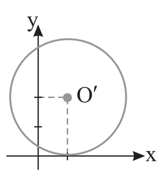
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-۱}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴ \\ ۱۱ \end{bmatrix}\Rightarrow x=۱۴\ ,\ y=۱۱$$

بنابراین $۲x-۳y=۲(۱۴)-۳(۱۱)=۲۸-۳۳=-۵$.

۸۱۵ **۴** در شکل زیر نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ و M وسط پاره‌خط PA است. از نقطهٔ M پاره‌خط MN را موازی OA رسم کرده‌ایم. توجه کنید که در مثلث OAP، پاره‌خط MN میان‌خط است. در نتیجه $MN=\frac{۱}{۲}R$ و N وسط پاره‌خط OP است. بنابراین نقطهٔ M از نقطهٔ ثابت N به فاصلهٔ ثابت $\frac{۱}{۲}R$ است. در نتیجه مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز N و شعاع $\frac{۱}{۲}R$ است. توجه کنید که اگر P درون دایره هم باشد، باز هم مکان هندسی یک دایره است.

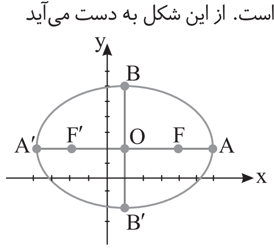


۸۱۶ **۱** می‌دانیم اگر $O'(\alpha,\beta)$ مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، آن‌گاه شعاع این دایره برابر $\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲-c}$ است. بنابراین شعاع دایرهٔ داده شده برابر است با $R=\sqrt{۱+۴-۱}=۲$. اکنون این دایره را رسم می‌کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود، سطح دایره در نواحی اول و دوم قرار دارد. دقت کنید که در حل این سؤال لزومی به پیدا کردن m و n نیست.



۸۱۷ **۳** فاصلهٔ دو کانون بیضی برابر $۲c$ است، بنابراین $۲c=FF'=۶\Rightarrow c=۳$. از طرف دیگر $\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$، پس $\frac{۳}{a}=\frac{۳}{۵}$، بنابراین $a=۵$.

از برابری $a^۲=b^۲+c^۲$ به دست می‌آید $۲۵=b^۲+۹$، در نتیجه $b^۲=۱۶$، یعنی $b=۴$. شکل بیضی به صورت زیر است. از این شکل به دست می‌آید



$$O(\alpha,\beta)=\frac{F+F'}{۲}=(۱,۲)$$

$$y\in[\beta-b,\beta+b]=[۲-۴,۲+۴]=[-۲,۶]$$

۸۱۸ **۳** از تساوی $xy=0$ نتیجه می‌گیریم $x=0$ یا $y=0$. در فضای $\mathbb{R}^2$ هر کدام از معادلات $x=0$ و $y=0$ یک خط هستند، پس مکان هندسی مورد نظر دو خط است.

۸۱۹ **۲** توجه کنید که

$$|\vec a+\vec b|^2+|\vec a-\vec b|^2=2(|\vec a|^2+|\vec b|^2)\Rightarrow 30^2+|\vec a-\vec b|^2=2(11^2+23^2)$$

$$900+|\vec a-\vec b|^2=1300\Rightarrow|\vec a-\vec b|^2=400\Rightarrow|\vec a-\vec b|=20$$

۸۲۰ **۱** بنابر فرض مسئله، $36=|(2\vec a+3\vec b)\times(2\vec a-3\vec b)|\frac{1}{2}$، پس

$$\frac{1}{2}|4\underbrace{\vec a\times\vec a}_{\vec o}-6\vec a\times\vec b+6\vec b\times\vec a-9\underbrace{\vec b\times\vec b}_{\vec o}|=36$$

$$\frac{1}{2}|-12\vec a\times\vec b|=36\Rightarrow 6|\vec a\times\vec b|=36\Rightarrow|\vec a\times\vec b|=6$$

مساحت مثلث بنا شده روی دو بردار $\vec a-\vec b$ و $\vec a+2\vec b$ برابر است با

$$S=\frac{1}{2}|(\vec a-\vec b)\times(\vec a+2\vec b)|=\frac{1}{2}|\underbrace{\vec a\times\vec a}_{\vec o}+2\vec a\times\vec b-\vec b\times\vec a-2\underbrace{\vec b\times\vec b}_{\vec o}|$$

$$=\frac{1}{2}|3\vec a\times\vec b|=\frac{3}{2}|\vec a\times\vec b|\xrightarrow{|\vec a\times\vec b|=6}S=\frac{3}{2}\times 6=9$$

۸۲۱ **۳** طرفین برابری داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^2=2A-3I\Rightarrow A^4=(2A-3I)^2=4A^2+9I^2-12AI$$

$$\xrightarrow{A^2=2A-3I}A^4=4(2A-3I)+9I-12A$$

$$A^4=8A-12I+9I-12A=-4A-3I$$

۸۲۲ **۴** با انتخاب $x=1$، $y=0$ و $z=0$ حاصل دترمینان اول را به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix}1&x&y\\1&y&z\\1&z&x\end{vmatrix}=m\xrightarrow[y=z=0]{x=1}\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{vmatrix}=m$$

$$\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر دوم}}1(-1)^3\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=m\Rightarrow m=-1$$

اکنون با همین مقادیر حاصل دترمینان دوم را به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix}x&2x-4y+3&3\\y&2y-4z+3&3\\z&2z-4x+3&3\end{vmatrix}\xrightarrow[y=z=0]{x=1}$$

$$\begin{vmatrix}1&5&3\\0&3&3\\0&-1&3\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{بسط برحسب}}1(-1)^2\begin{vmatrix}3&3\\-1&3\end{vmatrix}=12$$

چون $m=-1$، پس حاصل این دترمینان برابر $-12m$ است.

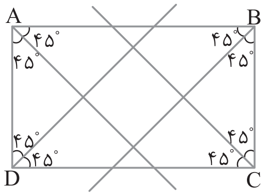
۸۲۳ **۳** می‌دانیم اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه برابر ماتریس همانی I باشد، آن‌گاه این دو ماتریس وارون یکدیگرند. توجه کنید که

$$A^3=\bar O\Rightarrow 8A^3=\bar O\xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}]{-27I\ \text{را به دو طرف}}$$

$$8A^3-27I=-27I\Rightarrow(2A-3I)(4A^2+6A+9I)=-27I$$

$$(2A-3I)\frac{4A^2+6A+9I}{-27}=I\Rightarrow(2A-3I)^{-1}=-\frac{1}{27}(4A^2+6A+9I)$$

۸۲۴ **۱** مکان هندسی نقاطی که از اضلاع مستطیل $ABCD$ به یک فاصله‌اند، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های این مستطیل است، ولی نیمسازهای زاویه‌های مستطیل در حالت کلی همرس نیستند. بنابراین نقطه‌ای که از هر چهار ضلع مستطیل به یک فاصله باشد، وجود ندارد.



۸۲۵ **۳** راه‌حل اول فاصلهٔ M از دو خط مماس برابر است. بنابراین اگر نقاط تماس را H و H' در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$|MH|=|MH'|\Rightarrow\frac{|2\sqrt5-2b|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|b-4\sqrt5|}{\sqrt{1+4}}$$

$$\begin{cases}2\sqrt5-2b=b-4\sqrt5\Rightarrow b=2\sqrt5\Rightarrow M(2\sqrt5,2\sqrt5)\\2\sqrt5-2b=-b+4\sqrt5\Rightarrow b=-2\sqrt5\Rightarrow M(2\sqrt5,-2\sqrt5)\end{cases}$$

اگر $M(2\sqrt5,2\sqrt5)$ مرکز این دایره باشد، آن‌گاه

$$R=|MH|=\frac{|2\sqrt5-4\sqrt5|}{\sqrt5}=2$$

اگر $M(2\sqrt5,-2\sqrt5)$ مرکز دایره انتخاب شود، آن‌گاه

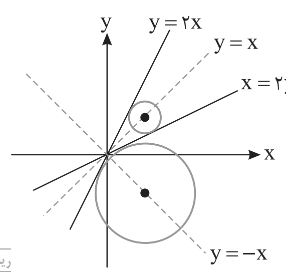
$$R=|MH|=\frac{|2\sqrt5+4\sqrt5|}{\sqrt5}=6$$

بنابراین شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر ۲ است.

راه‌حل دوم مرکز M روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط $y=2x$ و $x=2y$ قرار دارد و با توجه به شکل زیر، خطوط $y=x$ و $y=-x$ نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط هستند:

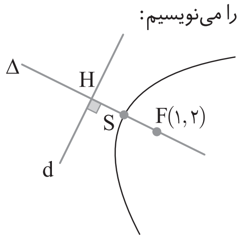
M روی خط $y=x$ است $\Rightarrow M(2\sqrt5,2\sqrt5)\Rightarrow R=|MH|=2$

M روی خط $y=-x$ است $\Rightarrow M(2\sqrt5,-2\sqrt5)\Rightarrow R=|MH|=6$



ریاضی خارج از کشور - ۹۲

۸۲۶ **۳** توجه کنید که S وسط پاره‌خط FH است (شکل زیر را ببینید). معادلهٔ خط Δ گذرنده از F و عمود بر خط d را می‌نویسیم:



$$m_d=2\Rightarrow m_\Delta=-\frac{1}{2}$$

معادلهٔ خط Δ : $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$

$$x+2y-5=0$$

محل برخورد دو خط d و Δ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix}\Delta\\d\end{matrix}\begin{cases}x+2y-5=0\\2x-y+10=0\end{cases}\Rightarrow x+2(2x+10)-5=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow y=4$$

$$H(-3,4)$$

در نهایت به دست می‌آید $S=\frac{F+H}{2}=\frac{(1,2)+(-3,4)}{2}=(-1,3)$.

۸۲۷ **۳** وقتی نقطهٔ M روی یک سر قطر کوچک این بیضی قرار می‌گیرد، فاصلهٔ M از مرکز بیضی کمترین مقدار خود را که برابر b است می‌گیرد. پس $b=3\sqrt{2}$. در نتیجه

$$S_{MFF'}=9\Rightarrow\frac{1}{2}(b)(2c)=9\Rightarrow bc=9\Rightarrow 3\sqrt{2}c=9\Rightarrow c=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

بنابراین $a^2=b^2+c^2=(3\sqrt{2})^2+(\frac{3}{\sqrt{2}})^2=18+\frac{9}{2}=\frac{45}{2}$. چون طول قطر بزرگ هر بیضی برابر $2a$ است، پس مربع طول قطر بزرگ این بیضی $4a^2$ است. در نتیجه $4a^2=4(\frac{45}{2})=90$

۸۲۸ **۲** در قرینه کردن نسبت به محور x، محور z و مبدأ مختصات، عرض نقطه باید قرینه شود، در حالی که n^2+4 و ۵ هیچ‌گاه نمی‌توانند قرینهٔ یکدیگر باشند، زیرا $n^2+4=-5\Rightarrow n^2=-9\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

۸۲۹ **۳** می‌دانیم $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. بنابراین

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=1+4+20+0+0+0=25\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=5$$

۸۳۰ **۴** اندازهٔ تصویر بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ از برابری $\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ به دست می‌آید. در نتیجه $\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{1}{2}|\vec{b}|$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{|\vec{a}||\vec{b}||\cos 30^\circ|}{|\vec{b}|}=\frac{1}{2}|\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}|\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}|\vec{b}|\Rightarrow\sqrt{3}|\vec{a}|=|\vec{b}|$$

در نهایت به دست می‌آید $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|^2}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\sin 30^\circ}{|\vec{a}|^2}=\frac{|\vec{a}|\times\sqrt{3}|\vec{a}|\times\frac{1}{2}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

۸۳۱ **۴** با توجه به فرض مسئله معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

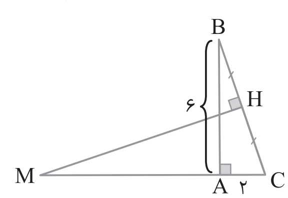
$$(n-2)\times 180^\circ=4\times 360^\circ\Rightarrow n=10$$

۸۳۲ **۲** شکل مسئله به صورت زیر است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،

$$BC^2=AB^2+AC^2=6^2+2^2=40\Rightarrow BC=2\sqrt{10}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و HMC در زاویهٔ C مشترک هستند، پس متشابه‌اند. بنابراین

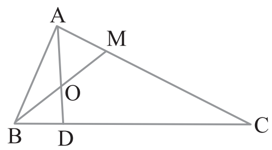
$$\frac{MC}{BC}=\frac{CH}{AC}\Rightarrow\frac{MA+2}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\Rightarrow MA+2=10\Rightarrow MA=8$$



۸۳۳ **۴** در مثلث ABM پاره‌خط AO میانه است، پس دو مثلث OAB و AOM هم‌مساحت‌اند. در نتیجه $S_{OAB}=\frac{1}{2}S_{ABM}$. از طرف دیگر، دو مثلث ABM و ABC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، بنابراین $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{AM}{AC}$. از طرف دیگر، بنابر فرض سؤال $\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$. با ترکیب در مخرج این تناسب به تساوی $\frac{AM}{AC}=\frac{1}{4}$ می‌رسیم. بنابراین

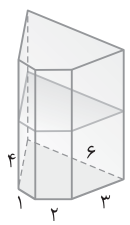
$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}\xrightarrow{S_{ABM}=2S_{OAB}}\frac{2S_{OAB}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}=\frac{1}{8}$$

عدد $\frac{1}{8}$ معادل ۱۲/۵ درصد است.



۸۳۴ **۳** صفحه‌ای افقی این منشور را در یک پنج‌ضلعی همنهشت با قاعدهٔ آن برش می‌دهد. پس محیط سطح مقطع حاصل برابر محیط قاعدهٔ منشور است:

محیط سطح مقطع $=1+2+3+6+4=16$



۸۳۵ **۳** از مرکز O به نقطهٔ تماس T وصل می‌کنیم. زاویهٔ OTM برابر 90° است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM ضلع OT نصف وتر OM است، پس $\hat{M}=30^\circ$، در نتیجه $\hat{O}=60^\circ$. پس مساحت قطاع OAT برابر است با

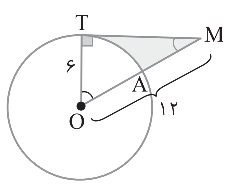
$$(\text{قطاع } OAT)\text{مساحت}=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi R^2=\frac{1}{6}\pi(6)^2=6\pi$$

از طرف دیگر، مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM برابر است با

$$(\text{مثلث } OTM)\text{مساحت}=\frac{1}{2}OT\times OM\sin 60^\circ=\frac{1}{2}(6)(12)(\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$=18\sqrt{3}$$

در نتیجه

$$(\text{قطاع } OAT)\text{مساحت}-(\text{مثلث } OTM)\text{مساحت}=\text{مساحت قسمت رنگی}$$
$$=18\sqrt{3}-6\pi$$

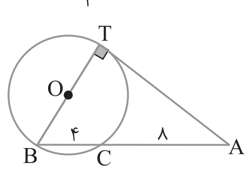


۸۳۶ **۱** بنابر فرض سؤال $AC=8$ و $BC=4$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره، $AT^2=AC\times AB=8(8+4)=96$، پس $AT=4\sqrt{6}$. چون قطر دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث ABT در رأس T قائم‌الزاویه است. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$BT^2=AB^2-AT^2=12^2-(4\sqrt{6})^2=144-96=48$$

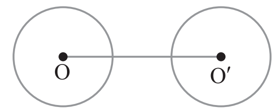
پس $BT=4\sqrt{3}$. در نتیجه

$$S_{ABT}=\frac{1}{2}AT\times BT=\frac{1}{2}(4\sqrt{6})(4\sqrt{3})=8\sqrt{18}=24\sqrt{2}$$



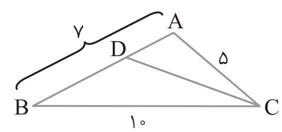
۸۳۷ گزینهٔ ۲ برای انتقال دادن دایرهٔ $C(O,\sqrt{۵})$ ابتدا مرکز O را با بردار به طول ۹ منتقل می‌کنیم تا به نقطهٔ O' برسیم. سپس دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $\sqrt{۵}$ رسم می‌کنیم. پس طول خط‌المرکزین OO' برابر طول بردار انتقال، یعنی ۹ است، در نتیجه

$$\text{طول مماس مشترک داخلی}=\sqrt{OO'^{۲}-(R+R')^{۲}}=\sqrt{۹^{۲}-(\sqrt{۵}+\sqrt{۵})^{۲}}$$
$$=\sqrt{۸۱-۲۰}=\sqrt{۶۱}$$



۸۳۸ گزینهٔ ۳ فرض کنید نیمساز زاویهٔ C ضلع AB را در نقطهٔ D قطع کند. بنابر قضیهٔ نیمسازها،

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{ترکیب در}}\frac{AB}{BD}=\frac{۳}{۲}$$
$$\frac{۷}{BD}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow BD=\frac{۱۴}{۳}$$



۸۳۹ گزینهٔ ۴ ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^{۴}=(A^{۲})^{۲}=I^{۲}=I\ ,\quad A^{۷}=(A^{۲})^{۳}\times A=I^{۳}\times A=A$

پس
$$A^{۷}-A^{۴}=A-I=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۳&-۳\end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های این ماتریس برابر صفر است.

۸۴۰ گزینهٔ ۳ حاصل دترمینان را برحسب سطر سوم حساب می‌کنیم تا در محاسبات از متغیر a فقط یک‌بار استفاده شود و راه‌حل کوتاه‌تری داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix}۲&۳&۵\\۴&-۱&۲\\۶&a&۷\end{vmatrix}=۶(-۱)^{۴}\begin{vmatrix}۳&۵\\-۱&۲\end{vmatrix}+a(-۱)^{۵}\begin{vmatrix}۲&۵\\۴&۲\end{vmatrix}$$
$$+۷(-۱)^{۶}\begin{vmatrix}۲&۳\\۴&-۱\end{vmatrix}=۶(۶+۵)-a(۴-۲۰)+۷(-۲-۱۲)$$
$$=۶۶+۱۶a-۹۸=۱۶a-۳۲$$

بنابر فرض سؤال حاصل دترمینان برابر صفر است، پس

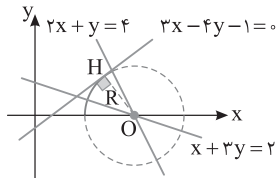
$$۱۶a-۳۲=۰\Rightarrow ۱۶a=۳۲\Rightarrow a=۲$$

۸۴۱ گزینهٔ ۱ چون دو خط $x+۳y=۲$ و $۲x+y=۴$ بر دایره عمود هستند، پس هر دوی آن‌ها از مرکز دایره می‌گذرند، یعنی محل برخورد آن‌ها مرکز دایره است. بنابراین

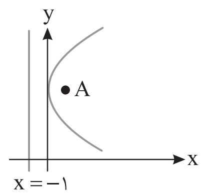
$$\begin{cases}۲x+y=۴\\x+۳y=۲\end{cases}\Rightarrow ۲x+\frac{۲-x}{۳}=۴\Rightarrow ۶x+۲-x=۱۲\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۰$$

بنابراین $O(۲,۰)$ مرکز دایره است. اکنون فاصلهٔ مرکز دایره را از خط مماس حساب می‌کنیم تا شعاع دایره به‌دست آید: $R=\frac{|۶-۰-۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۱$. در نهایت به‌دست می‌آید

$$\text{مساحت دایره}=\pi\times ۱^{۲}=\pi$$



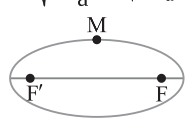
۸۴۲ گزینهٔ ۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت و یک خط ثابت به یک فاصله‌اند سهمی‌ای است که در آن نقطهٔ ثابت، کانون و خط ثابت، خط هادی است. در این سؤال نقطهٔ $A(۱,۴)$ کانون سهمی و خط $x=-۱$ خط هادی است. با توجه به موقعیت کانون و خط هادی این سهمی نسبت به هم، دهانهٔ آن رو به راست است.



۸۴۳ گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن برابر ۲a است، پس

$$MF+MF'=۲a\Rightarrow\sqrt{(۲-۴)^{۲}+(۳-۲)^{۲}}+MF'=۲\sqrt{۵}$$
$$\sqrt{۵}+MF'=۲\sqrt{۵}\Rightarrow MF'=\sqrt{۵}$$

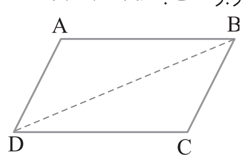
پس $MF=MF'$، در نتیجه M روی یک سر قطر کوچک بیضی قرار دارد. بنابراین فاصلهٔ M از خط FF' برابر b است. خط FF' موازی محور x است، پس معادلهٔ آن به صورت $y=۲$ است و فاصلهٔ $M(۲,۳)$ از این خط برابر ۱ است. پس $b=۱$ و $e=\sqrt{۱-\frac{b^{۲}}{a^{۲}}}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$.



۸۴۴ گزینهٔ ۱ قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۱,۱)$ نسبت به محور x و محور y به‌ترتیب $B(۲,۱,-۱)$ و $C(-۲,-۱,-۱)$ هستند. اگر BD قطر متوازی‌الاضلاع باشد، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع مورد نظر است و در این متوازی‌الاضلاع،

$$A+C=B+D\Rightarrow D=A+C-B$$
$$D=(۲,-۱,۱)+(-۲,-۱,-۱)-(۲,۱,-۱)=(-۲,-۳,۱)$$

فاصلهٔ D تا محور y برابر است با $\sqrt{x^{۲}+z^{۲}}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$.



۸۴۵ گزینهٔ ۲ فرض کنید $\vec{a}=(x,y,z)$ و زاویهٔ بین $\vec{a}$ و محور x برابر α باشد. در این صورت $\vec{a}\cdot\vec{i}=x$ ، $\vec{a}\cdot\vec{j}=y$ و $\vec{a}\cdot\vec{k}=z$. بنابراین

$$\vec{a}\cdot\vec{i}=۱\Rightarrow x=۱$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{j}-\vec{k})=۱\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{j}-\vec{a}\cdot\vec{k}=۱\Rightarrow y-z=۱$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{k})=۱\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{i}+\vec{a}\cdot\vec{j}+۲\vec{a}\cdot\vec{k}=۱\Rightarrow x+y+۲z=۱$$

پس
$$\begin{cases}y-z=۱\\y+۲z=۰\end{cases}\Rightarrow z=-\frac{۱}{۳},\ y=\frac{۲}{۳}$$

در نتیجه $\vec{a}=(۱,\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳})$، بنابراین $\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۹}}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$.

۸۴۶ ۳ چون $a=\frac{۲S}{h_a}$ ، $b=\frac{۲S}{h_b}$ و $c=\frac{۲S}{h_c}$ ، بنابراین معکوس طول ارتفاع‌های مثلث در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند، پس اگر طول ارتفاع سوم را h فرض کنیم آن‌گاه $|\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}|<\frac{۱}{h}<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۴}<\frac{۱}{h}<\frac{۳}{۴}$

پس $\frac{۴}{۳}<h<۴$. در بین گزینه‌ها فقط عدد ۳ در این بازه قرار دارد.

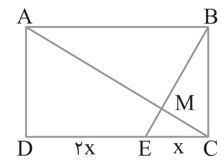
۸۴۷ ۳ بنابر فرض‌های تست شکل زیر را رسم می‌کنیم. توجه کنید که

$$EC||AB\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle CEM\sim\triangle ABM$$

$$\frac{MB}{ME}=\frac{AB}{EC}\Rightarrow\frac{MB}{ME}=\frac{۳x}{x}=\frac{۳}{۱}$$

با ترکیب در مخرج تناسب به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{MB}{BE}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{MB}{۱۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow MB=۹$$



۸۴۸ ۳ هر مثلث با رسم میانه به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود. از طرف دیگر، اگر دو مثلث ارتفاع‌های مساوی داشته باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها برابر است. بنابراین

(۱) OB میانهٔ مثلث ABM است $\Rightarrow S_{AOB}=\frac{۱}{۲}S_{ABM}$

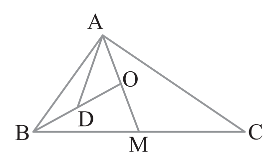
(۲) AM میانهٔ مثلث ABC است $\Rightarrow S_{ABM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$

از طرف دیگر، $\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}}=\frac{OD}{OB}=\frac{OD}{۲OD}=\frac{۱}{۲}$ (۳)

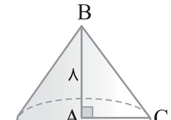
از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$S_{AOD}=\frac{۱}{۲}S_{AOB}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}S_{ABM})=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}S_{ABC})=\frac{۱}{۸}S_{ABC}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC هشت برابر مساحت مثلث AOD است.

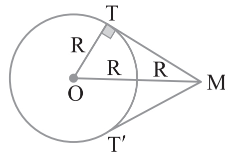


۸۴۹ ۳ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با اضلاع قائم $AC=۶$ و $AB=۸$ را رسم می‌کنیم. ضلع AB در این مثلث ضلع متوسط است. از دوران مثلث ABC حول ضلع AB یک مخروط به ارتفاع ۸ و شعاع قاعدهٔ ۶ به‌وجود می‌آید.



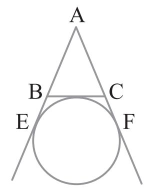
۸۵۰ ۴ مطابق شکل از نقطهٔ M مماس‌های MT و MT' را بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم کرده‌ایم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT ،

$$\begin{cases}OT=R\\OM=۲R\end{cases}\Rightarrow OT=\frac{۱}{۲}OM\Rightarrow O\hat{M}T=۳۰^\circ\Rightarrow T\hat{M}T'=۶۰^\circ$$



۸۵۱ ۲ می‌دانیم محیط مثلث ABC برابر $۲AE$ است، بنابراین

$$۳m-۲=۲\times۱۴\Rightarrow۳m-۲=۲۸\Rightarrow۳m=۳۰\Rightarrow m=۱۰$$



۸۵۲ ۳ تبدیل‌های دوران و انتقال هر دو طولپا هستند، پس مساحت مثلث به‌دست آمده تحت این تبدیل‌ها با مساحت مثلث اولیه برابر است. بنابراین

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲\sqrt{۳})^۲=۳\sqrt{۳}$$

۸۵۳ ۴ قطر BD را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABD ،

$$BD=\sqrt{AB^۲+AD^۲}=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$$

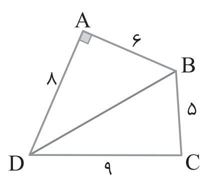
اکنون مساحت مثلث BCD را بنابر دستور هرون به دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۱۰+۹+۵}{۲}=۱۲,\quad S_{BCD}=\sqrt{۱۲\times۲\times۳\times۷}=۶\sqrt{۱۴}$$

از طرف دیگر، چون مثلث ABD قائم‌الزاویه است، پس

$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}AB\times AD=\frac{۱}{۲}\times۶\times۸=۲۴$$

در نتیجه $S_{ABCD}=S_{BCD}+S_{ABD}=۶\sqrt{۱۴}+۲۴$.



۸۵۴ ۳ ابتدا مجموع دو ماتریس A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A+B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&m&۰\\n&۱&۳\\۵&۴&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-۳&۰\\۲&p&k\\s&-۴&e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&m-۳&۰\\n+۲&۱+p&۳+k\\۵+s&۰&e-۱\end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال،

$$A+B=I\Rightarrow\begin{bmatrix}۱&m-۳&۰\\n+۲&۱+p&۳+k\\۵+s&۰&e-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

پس

$$m-۳=۰\Rightarrow m=۳\,,\qquad n+۲=۰\Rightarrow n=-۲$$

$$۱+p=۱\Rightarrow p=۰\,,\qquad ۳+k=۰\Rightarrow k=-۳$$

$$۵+s=۰\Rightarrow s=-۵\,,\qquad e-۱=۱\Rightarrow e=۲$$

در نتیجه $mn+ps-ke=(۳)(-۲)+(۰)(-۵)-(-۳)(۲)=۰$.

۸۵۵ **۲** با استفاده از تساوی $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ماتریس $B^{-1}(C^{-1}A)^{-1}$ را برحسب ماتریس‌های AB و C می‌نویسیم:

$$B^{-1}(C^{-1}A)^{-1}=B^{-1}(A^{-1}C)=(B^{-1}A^{-1})C=(AB)^{-1}C$$

پس لازم است ماتریس $(AB)^{-1}$ را پیدا کنیم:

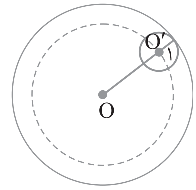
$$(AB)^{-1}=\frac{1}{4-3}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$B^{-1}(C^{-1}A)^{-1}=(AB)^{-1}C=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&11\\1&7\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر $2+11+1+7=21$ است.

۸۵۶ **۴** شعاع سکه برابر ۱ است. در صورتی سکه درون دایرهٔ C قرار می‌گیرد که فاصلهٔ مرکز سکه تا نقطهٔ O حداکثر برابر $OO'=8-1=7$ باشد. پس مکان هندسی مرکز سکه دایره‌ای توپر به شعاع ۷ است و مساحت این دایره $\pi(7)^2=49\pi$ است.

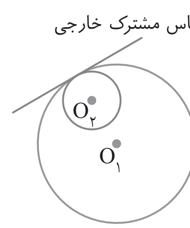


۸۵۷ **۲** ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$C_1: x^2+y^2-2x+4y-13=0\Rightarrow O_1(1,-2),\ R_1=3\sqrt{2}$$

$$C_2: x^2+y^2+2x-1=0\Rightarrow O_2(-1,0),\ R_2=\sqrt{2}$$

بنابراین $O_1O_2=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. چون $O_1O_2=R_1-R_2$، پس دو دایره مماس درون هستند و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر صفر است.

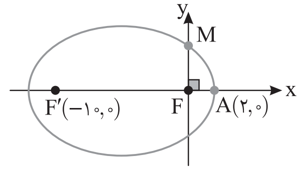


۸۵۸ **۱** می‌دانیم MF نصف وتر کانونی و برابر $\frac{b^2}{a}$ است. از طرف دیگر، $F(0,0)$، پس $2c=FF'=10$، بنابراین $c=5$. در ضمن $A(2,0)$، پس $AF=2$، بنابراین

$$2=a-c\Rightarrow 2=a-5\Rightarrow a=7$$

$$b^2=a^2-c^2=7^2-5^2=49-25=24$$

در نتیجه $MF=\frac{b^2}{a}=\frac{24}{7}$. بنابراین مختصات نقطهٔ M برابر $(0,\frac{24}{7})$ است.



۸۵۹ **۳** نقاط روی محور z به‌صورت $B(0,0,m)$، $m\in\mathbb{R}$، هستند. توجه کنید که تعداد جواب‌های معادلهٔ $|AB|=7$ مورد نظر است، بنابراین

$$\sqrt{4+36+(m+1)^2}=7\Rightarrow 40+(m+1)^2=49\Rightarrow (m+1)^2=9$$

این معادله دو جواب دارد، پس دو نقطه با ویژگی مورد نظر وجود دارد.

۸۶۰ **۱** اگر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آن‌گاه نامتناهی بردار عمود بر آن‌ها رسم می‌شود و در صورتی‌که این بردارها در یک صفحه نباشند، بردار عمود بر آن‌ها وجود ندارد. برای تشخیص هم‌صفحه بودن بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ضرب مختلط آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&-1&3\\1&9&-1\end{vmatrix}$$

$$=2(-1)^2\begin{vmatrix}-1&3\\9&-1\end{vmatrix}+3(-1)^3\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}-1(-1)^4\begin{vmatrix}1&-1\\1&9\end{vmatrix}$$

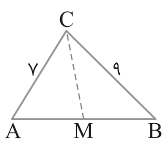
$$=2(-26)-3(-4)-1(10)=-52+12-10=-50\neq 0$$

پس بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه نیستند. بنابراین بردار عمود بر این سه بردار وجود ندارد.

۸۶۱ **۲** بنابر نابرابری‌ها در مثلث اگر CM میانهٔ وارد بر ضلع AB باشد، آن‌گاه

$$\frac{|AC-BC|}{2}<CM<\frac{AC+BC}{2}\Rightarrow\frac{|7-9|}{2}<CM<\frac{7+9}{2}$$

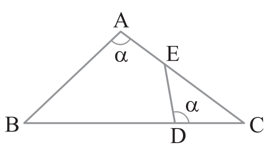
یعنی $1<CM<8$. در بین گزینه‌ها فقط عدد ۳ در این بازه قرار دارد.



۸۶۲ **۱** دو مثلث DEC و ABC را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\hat{A}=\alpha\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle DEC\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC}$$

بنابراین $BC\times CD=AC\times CE$.

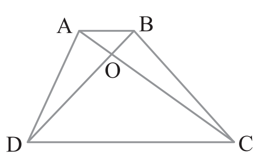


۸۶۳ **۴** در ذوزنقهٔ ABCD اگر O محل تلاقی دو قطر باشد، آن‌گاه

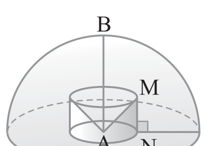
$$S_{OBC}=S_{OAD}=\sqrt{S_{OAB}\times S_{ODC}}$$

بنابراین $S_{OBC}=S_{OAD}=\sqrt{3\times 12}=6$. پس

$$S_{ABCD}=S_{OAB}+S_{OBC}+S_{ODC}+S_{OAD}=3+6+12+6=27$$



۸۶۴ **۳** از دوران ربع دایره حول AB یک نیم‌کره ایجاد می‌شود، از دوران MN حول AB یک استوانه و از دوران AM حول AB یک مخروط به‌وجود می‌آید. بنابراین شکل حاصل یک نیم‌کره است که یک استوانه از آن جدا شده و یک مخروط به آن اضافه شده است.



۸۶۵ (۴) طول مماس مشترک خارجی دو دایره در صورت وجود از طول مماس مشترک داخلی آن‌ها در صورت وجود بزرگ‌تر است. پس اگر TT' طول مماس مشترک خارجی این دو دایره باشد، $TT'=15$، پس

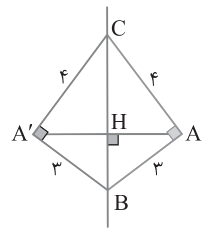
$$TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow 15=\sqrt{d^2-(14-6)^2}$$

$$15^2=d^2-8^2 \Rightarrow d^2=225+64=289 \Rightarrow d=17$$

۸۶۶ (۳) در مثلث با ارتفاع‌های h_a، h_b و h_c و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی r تساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{6+4+3}{12}=\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{13}{12}=\frac{1}{r} \Rightarrow r=\frac{12}{13}$$

۸۶۷ (۴) چون نقاط B و C نقاط ثابت این تبدیل هستند، پس خط BC محور بازتاب است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،



$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

اکنون با توجه به شکل و بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AB\times AC=BC\times AH \Rightarrow 3\times 4=5\times AH$$

یعنی $AH=\frac{12}{5}$، در نتیجه $AA'=\frac{24}{5}=4/8$.

۸۶۸ (۳) با توجه به شکل، مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است، پس $\hat{A}=60^\circ$. با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC،

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos 60^\circ$$

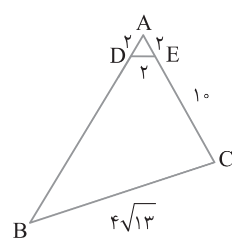
$$208=AB^2+144-2AB\times 12\times\frac{1}{2}$$

$$208=AB^2-12AB+144 \Rightarrow AB^2-12AB-64=0$$

$$(AB-16)(AB+4)=0 \Rightarrow AB=16$$

بنابراین

$$S_{BDEC}=S_{ABC}-S_{ADE}$$
$$=\frac{1}{2}AB\times AC\sin 60^\circ-\frac{1}{2}AD\times AE\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}(16)(12)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}(2)(2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=48\sqrt{3}-\sqrt{3}=47\sqrt{3}$$



۸۶۹ (۱) اگر $A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ a' & 0 & 0\\ b' & c' & 0\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^3=\bar{O}$ و $B^3=\bar{O}$. پس به‌ازای هر عدد طبیعی $n\geq 3$، $A^n=B^n=\bar{O}$. بنابراین در اینجا $A^6=\bar{O}$ و $B^7=\bar{O}$، پس $A^6+B^7=\bar{O}$.

۸۷۰ (۴) از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$2A=\begin{bmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{bmatrix} \Rightarrow |2A|=\begin{vmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{vmatrix}$$

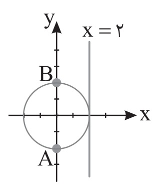
$$2^2|A|=|A|^2+4 \Rightarrow |A|^2-4|A|+4=0 \Rightarrow (|A|-2)^2=0 \Rightarrow |A|=2$$

بنابراین $|-2A^2|=(-2)^2|A|^2=(-2)^2(2)^2=2^4=16$.

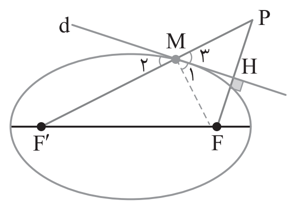
۸۷۱ (۱) از شکل زیر استفاده می‌کنیم. مرکز این دایره روی محور x است. پس می‌توان آن را $O(\alpha,0)$ در نظر گرفت. فاصلهٔ مرکز این دایره تا خط $x=2$ با فاصلهٔ آن تا نقطهٔ A برابر است. توجه کنید که این فاصله برابر شعاع دایره است، پس

$$|\alpha-2|=\sqrt{4+\alpha^2} \Rightarrow (\alpha-2)^2=4+\alpha^2$$

به دست می‌آید $\alpha=0$. پس $O(0,0)$ مرکز دایره است و $R=OA=2$.



۸۷۲ (۱) با توجه به شکل زیر و ویژگی بازتاب در بیضی، $\hat{M}_1=\hat{M}_2$. از طرف دیگر، چون در مثلث MPF، MH هم میانه است و هم ارتفاع، پس این مثلث متساوی‌الساقین است و در نتیجه MH نیمساز نیز هست، پس زاویه‌های M_1 و M_3 برابرند، بنابراین $\hat{M}_2=\hat{M}_3$، پس M، P و F' روی یک خط هستند. اکنون توجه کنید که $PF'=PM+MF'=MF+MF'=2a$، یعنی طول پاره‌خط PF' برابر طول قطر بزرگ بیضی است.



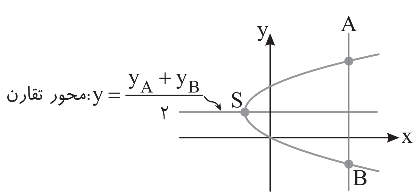
۸۷۳ (۱) چون محور تقارن این سهمی موازی محور x است، پس دهانهٔ این سهمی رو به راست یا چپ است، همچنین

$$\text{معادلهٔ محور تقارن}: y=\frac{y_A+y_B}{2} \Rightarrow y=1$$

بنابراین اگر $S(h,k)$ رأس این سهمی باشد، آن‌گاه $k=1$. از طرف دیگر، رأس سهمی روی نیمساز نواحی دوم و چهارم $(y=-x)$ است، پس $S(h,-h)$، همچنین چون $k=1$، پس $S(-1,1)$. با توجه به موقعیت نقاط A و B نسبت به نقطهٔ S معلوم می‌شود دهانهٔ این سهمی رو به راست است. اکنون معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$$(y-1)^2=4a(x+1) \xrightarrow[\text{صدق می کنند}]{\text{مختصات } A(3,3) \text{ در معادله}} 4=4a(4) \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

می‌دانیم فاصلهٔ کانون تا خط هادی یک سهمی برابر $2a$ است. چون $a=\frac{1}{4}$، پس $2a=\frac{1}{2}$.



۸۷۴ (۴) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y,z)$ از صفحهٔ yz برابر $|x|$ است. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): فاصلهٔ نقطهٔ $(-۳,۲,۱)$ از صفحهٔ yz برابر $|-۳|=۳$ است.

گزینهٔ (۲): فاصلهٔ نقطهٔ $(-۲,-۳,-۴)$ از صفحهٔ yz برابر $|-۲|=۲$ است.

گزینهٔ (۳): فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۵,۷)$ از صفحهٔ yz برابر ۲ است.

گزینهٔ (۴): فاصلهٔ نقطهٔ $(-۵,۱,۵)$ از صفحهٔ yz برابر $|-۵|=۵$ است.

پس نقطهٔ $(-۵,۱,۵)$ از صفحهٔ yz دورتر است.

۸۷۵ (۲) مساحت مثلث تولید شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با $\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$ است، پس

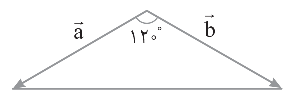
$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \xrightarrow[S=۴\sqrt{۳}]{|\vec{a}|=|\vec{b}|,\theta=۱۲۰^\circ}$$

$$۴\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}|^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow|\vec{a}|=|\vec{b}|=۴$$

بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها طول ضلع سوم این مثلث برابر است با

$$|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos۱۲۰^\circ=۱۶+۱۶-۲\times۴\times۴\times(-\frac{۱}{۲})=۴۸$$

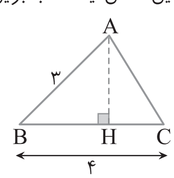
$$\text{طول ضلع سوم}=۴\sqrt{۳}$$



۸۷۶ (۴) مثلث فرضی زیر را در نظر بگیرید. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در این صورت

$$S=۷\Rightarrow\frac{۱}{۲}AH\times BC=۷\Rightarrow\frac{۱}{۲}AH\times۴=۷\Rightarrow AH=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، طول وتر AB از ضلع زاویهٔ قائمهٔ AH کوچک‌تر است و این ممکن نیست. بنابراین چنین مثلثی وجود ندارد.



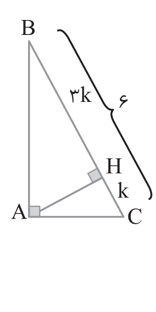
۸۷۷ (۱) فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $BC=۶$ و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد (شکل زیر را ببینید). بنابر فرض $\frac{CH}{BH}=\frac{۱}{۳}$، پس عددی مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $CH=k$ و $BH=۳k$. چون $BC=۶$، پس $CH+BH=k+۳k=۶$، بنابراین $k=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه $CH=\frac{۳}{۲}$ و $BH=\frac{۹}{۲}$.

اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AB=\sqrt{BH\times BC}=\sqrt{\frac{۹}{۲}\times۶}=۳\sqrt{۳}$$

$$AC=\sqrt{CH\times BC}=\sqrt{\frac{۳}{۲}\times۶}=۳$$

در نهایت می‌توان نوشت $AB+AC=۳\sqrt{۳}+۳=۳(\sqrt{۳}+۱)$.



۸۷۸ (۱) فرض کنید ذوزنقهٔ ABCD با رسم خط d به متوازی‌الاضلاع AMND و ذوزنقهٔ BMNC با مساحت‌های مساوی تقسیم شده باشد. ارتفاع $AH=h$ ارتفاع هر دو چهارضلعی است، پس

$$S_{AMND}=S_{BMNC}\Rightarrow h\times AM=\frac{۱}{۲}h(MB+NC)$$

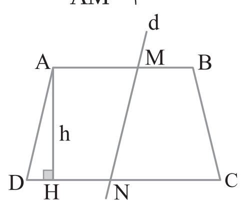
$$۲AM=MB+NC$$

چون $NC=DC-DN=۲۱-DN$ و $MB=AB-AM=۱۵-AM$، بنابراین

$$۲AM=۱۵-AM+۲۱-DN\xrightarrow{AM=DN}$$

$$۲AM=۳۶-AM-AM\Rightarrow۴AM=۳۶\Rightarrow AM=۹$$

پس $MB=۱۵-۹=۶$، در نتیجه $\frac{MB}{AM}=\frac{۲}{۳}$.



۸۷۹ (۲) نمای روبه‌روی شکل داده شده به صورت  است. نمای بالای آن به صورت  است. نمای چپ آن به صورت  است. بنابراین نماهای روبه‌رو و چپ مثل هم هستند.

۸۸۰ (۲) با توجه به شکل زاویهٔ BMD زاویهٔ بین دو وتر متقاطع AB و CD است. بنابراین

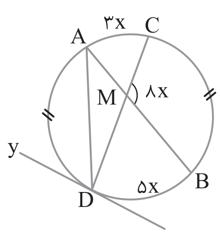
$$B\hat{M}D=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow۱۸۰^\circ-۸x=\frac{۵x+۳x}{۲}\Rightarrow۱۸۰^\circ=۱۲x\Rightarrow x=۱۵^\circ$$

در ضمن مجموع اندازهٔ کمان‌های AD، AC، BC و BD برابر ۳۶۰° است، پس

$$۲\overset{\frown}{AD}+۸x=۳۶۰^\circ\Rightarrow۲\overset{\frown}{AD}+۸(۱۵^\circ)=۳۶۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AD}=۱۲۰^\circ$$

از طرف دیگر، زاویهٔ ADy زاویهٔ ظلی مقابل به کمان AD است، پس نصف اندازهٔ کمان AD است، در نتیجه

$$A\hat{D}y=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$



۸۸۱ (۲) با توجه به رابطه‌های طولی در دایره،

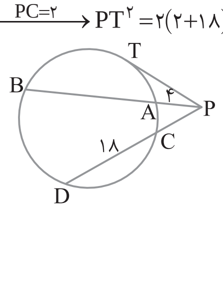
$$PA\times PB=PC\times PD\Rightarrow۴(۴+AB)=PC(PC+۱۸)$$

$$\xrightarrow{AB=۳PC}۴(۴+۳PC)=PC^۲+۱۸PC$$

$$PC^۲+۶PC-۱۶=۰\Rightarrow(PC+۸)(PC-۲)=۰\Rightarrow PC=۲$$

بنابراین

$$PT^۲=PC\times PD\xrightarrow{PC=۲}PT^۲=۲(۲+۱۸)=۴۰\Rightarrow PT=۲\sqrt{۱۰}$$



۸۸۲ (۱) ترکیب دو دوران هم‌مرکز با زاویه‌های α و β، یک دوران با زاویهٔ $\alpha+\beta$ است. بنابراین ترکیب دو دوران با یک مرکز و با زاویه‌های 40° و 130° یک دوران با زاویهٔ $40^\circ+130^\circ=170^\circ$ است.

۸۸۳ (۴) ابتدا به کمک قضیهٔ هرون مساحت این مثلث را به دست می‌آوریم:

$$P=\frac{9+16+23}{2}=\frac{48}{2}=24$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{24(24-23)(24-16)(24-9)}$$

$$=\sqrt{24\times1\times8\times15}=\sqrt{3\times8\times1\times8\times3\times5}=24\sqrt{5}$$

طول ارتفاع وارد بر ضلع به اندازهٔ ۱۶ مورد سؤال است، در نتیجه

$$S=\frac{1}{2}(\text{قاعده})(\text{ارتفاع})\Rightarrow 24\sqrt{5}=\frac{1}{2}(16)(\text{ارتفاع})\Rightarrow \text{ارتفاع}=3\sqrt{5}$$

۸۸۴ (۴) ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^{1399}=(A^2)^{699}\times A=I^{699}\times A=A$$

$$A^{1400}=(A^2)^{700}=I^{700}=I$$

بنابراین

$$A^{1400}-A^{1399}=I-A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

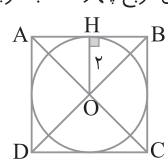
۸۸۵ (۱) ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{2\sqrt{2}}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{2\sqrt{2}}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

پس $A^5=(A^2)^2\times A=I^2\times A=A$. بنابراین

$$(A^5+3A^2-A)^{-1}=(A+3I-A)^{-1}=(3I)^{-1}=\frac{1}{3}I$$

۸۸۶ (۳) مکان هندسی نقاطی که از مرکز O، نقطهٔ تلاقی قطرهای مربع ABCD، به فاصلهٔ ۲ هستند دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ است. چون فاصلهٔ مرکز O از ضلع مربع، یعنی عمود OH برابر ۲ است، پس این دایره بر اضلاع مربع مماس است، بنابراین روی این مربع چهار نقطه با شرایط خواسته شده وجود دارد.

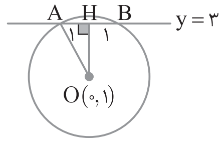


۸۸۷ (۲) فرض می‌کنیم دایرهٔ به شعاع R و مرکز O روی خط $y=3$ وتر $AB=2$ را جدا کند. عمود OH را بر خط $y=3$ وارد می‌کنیم. طول عمود OH برابر ۲ است و

$$\triangle AOH:\ AO^2=OH^2+AH^2=2^2+1^2=5\Rightarrow AO=\sqrt{5}=R$$

بنابراین معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x-0)^2+(y-1)^2=5\Rightarrow x^2+y^2+1-2y=5\Rightarrow x^2+y^2-2y=4$$



۸۸۸ (۲) دهانهٔ سهمی $y^2=8x$ رو به راست است و خط $y=2$ موازی محور تقارن این سهمی است. رأس این سهمی $S(0,0)$ است و $4a=8$، پس $a=2$. بنابراین کانون آن نقطهٔ $F(2,0)$ است. بنابر خاصیت بازتابندگی سهمی اگر شعاع نوری موازی محور سهمی به آن بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد. پس معادلهٔ شعاع بازتابش، معادلهٔ خط گذرنده از نقاط M و F است، به‌طوری‌که نقطهٔ M نقطهٔ تلاقی سهمی با خط $y=2$ است:

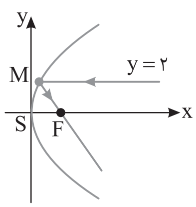
$$y^2=8x\xrightarrow{y=2}M(\frac{1}{2},2)$$

بنابراین

$$m_{MF}=\frac{y_M-y_F}{x_M-x_F}=\frac{2-0}{\frac{1}{2}-2}=\frac{2}{-\frac{3}{2}}=-\frac{4}{3}$$

معادلهٔ خط بازتابش: $y-y_0=m(x-x_0)$

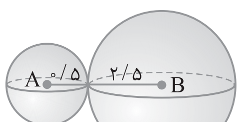
$$y-0=-\frac{4}{3}(x-2)\Rightarrow 3y+4x=8$$



۸۸۹ (۲) طول پاره‌خط AB برابر است با

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

از طرف دیگر، مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۰/۵ هستند، کره‌ای به مرکز A و شعاع ۰/۵ است و مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۲/۵ هستند، کره‌ای به مرکز B و شعاع ۲/۵ است. چون طول خط‌المرکزین دو کره با مجموع شعاع‌های آن‌ها برابر است، پس این دو کره بر هم مماس هستند. بنابراین فقط یک نقطه با ویژگی موردنظر وجود دارد.



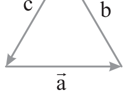
۸۹۰ (۱) با توجه به شکل $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$، پس $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$. بنابراین

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=36$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=36$$

$$3|\vec{a}\times\vec{b}|^2=36\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^2=12\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=2\sqrt{3}$$

بنابراین مساحت این مثلث برابر است با $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{2}=\sqrt{3}$.

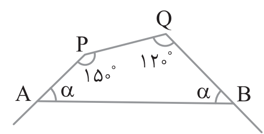


از طرف دیگر، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است. در نتیجه

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\sqrt{3}\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$$

۸۹۱ (۲) چون این n ضلعی منتظم است، اندازهٔ زاویه‌های خارجی آن $\alpha=\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است. از طرف دیگر در چهارضلعی APQB مجموع زاویه‌های داخلی برابر ۳۶۰° است، پس $۲\alpha+۱۵۰^\circ+۱۲۰^\circ=۳۶۰^\circ$. به دست می‌آید $\alpha=۴۵^\circ$، یعنی $\frac{۳۶۰^\circ}{n}=۴۵^\circ$ یا $n=۸$. در نهایت به دست می‌آید

$$\text{تعداد قطرهای هشت‌ضلعی منتظم}=\frac{۸\times۵}{۲}=۲۰$$

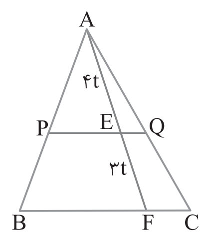


۸۹۲ (۳) چون PQ||BC، بنابر قضیه اساسی تشابه دو مثلث APE و ABF متشابه هستند، در نتیجه $\frac{AP}{AB}=\frac{AE}{AF}=\frac{۴}{۷}$. همچنین بنابر قضیهٔ اساسی تشابه دو مثلث APQ و ABC نیز با نسبت تشابه $\frac{AP}{AB}$ متشابه هستند. پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر مربع نسبت تشابه آن‌ها است:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}=(\frac{۴}{۷})^۲=\frac{۱۶}{۴۹}$$

با تفضیل نسبت در مخرج به دست می‌آید:

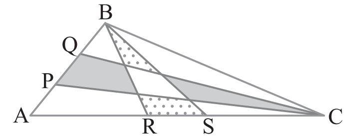
$$\frac{S_{APQ}}{S_{BPQC}}=\frac{۱۶}{۴۹-۱۶}=\frac{۱۶}{۳۳}$$



۸۹۳ (۱) مثلث‌های BRS و BAC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، پس

$$\frac{S_{BRS}}{S_{BAC}}=\frac{RS}{AC}=\frac{۱}{۵}$$

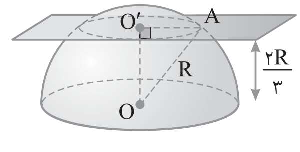
در نتیجه چون $S_{BAC}=۱۵$، پس $S_{BRS}=۳$. همچنین مثلث‌های CPQ و CAB در ارتفاع نظیر رأس C مشترک‌اند، پس $\frac{S_{CPQ}}{S_{CAB}}=\frac{PQ}{AB}=\frac{۱}{۳}$. در نتیجه چون $S_{CAB}=۱۵$، پس $S_{CPQ}=۵$. اگر مساحت ناحیهٔ مشترک مثلث‌های BRS و CPQ را با z نشان دهیم، آن‌گاه $x+z=۵$ و $y+z=۳$. اکنون به دست می‌آید $x-y=(x+z)-(y+z)=۵-۳=۲$



۸۹۴ (۳) اگر صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ نیم کره آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است. اگر O مرکز نیم کره و O′ مرکز دایرهٔ ایجاد شده باشد، آن‌گاه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OO′A بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

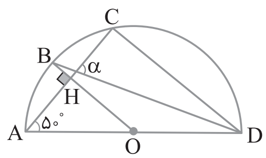
$$OA^۲=OO'^۲+O'A^۲\Rightarrow R^۲=(\frac{۲R}{۳})^۲+O'A^۲\Rightarrow O'A^۲=\frac{۵}{۹}R^۲$$

بنابراین $\text{مساحت سطح مقطع}=\pi(O'A)^۲=\frac{۵\pi}{۹}R^۲$.



۸۹۵ (۲) اندازهٔ زاویهٔ AOB در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH برابر ۴۰° است. چون $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است، پس $\overset{\frown}{AB}=۴۰^\circ$. زاویهٔ محاطی DAC برابر ۵۰° است، بنابراین $\overset{\frown}{DC}=۱۰۰^\circ$. در نتیجه

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۱۰۰^\circ+۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$$



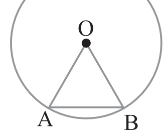
۸۹۶ (۴) می‌دانیم بین طول کمان AB و اندازهٔ کمان AB رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}\Rightarrow\frac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{۳۶۰^\circ}=\frac{۳\pi}{۲\pi(۱۸)}$$

$$\text{اندازهٔ کمان } AB=۳۰^\circ$$

بنابراین اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۳۰° است، پس

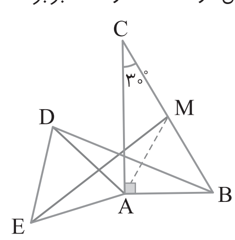
$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}OA\times OB\sin\hat{O}=\frac{۱}{۲}(۱۸)(۱۸)\sin ۳۰^\circ=۸۱$$



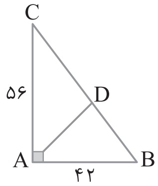
۸۹۷ (۱) در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس $AM=\frac{۱}{۲}BC$. به این ترتیب $AM=MB$، از طرف دیگر $\hat{C}=۳۰^\circ$، پس $AB=\frac{۱}{۲}BC=MB$. پس مثلث BAM متساوی‌الاضلاع است. اکنون اگر تبدیل T را دوران ۶۰° حول A در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$T(B)=M\,,\ T(D)=E\Rightarrow T(BD)=ME$$

می‌دانیم اگر دو پاره‌خط دوران‌یافته یکدیگر باشند، زاویهٔ بین آن‌ها با زاویهٔ دوران برابر است، پس زاویهٔ بین دو خط BD و EM برابر ۶۰° است.



۸۹۸ (۳) فرض می‌کنیم AD نیمساز زاویهٔ A باشد. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$\triangle ABC: BC^۲=AB^۲+AC^۲=۴۲^۲+۵۶^۲$$

$$=۱۴^۲(۳^۲+۴^۲)=۱۴^۲\times۵^۲\Rightarrow BC=۱۴\times۵=۷۰$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ نیمسازها،

AD نیمساز زاویهٔ داخلی A است $\Rightarrow\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{۵۶}{۴۲}=\frac{۴}{۳}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}$

$$\frac{CD}{BC}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow\frac{CD}{۷۰}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow CD=\frac{۷۰\times۴}{۷}=۴۰$$

۸۹۹ (۳) ابتدا ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۲&۲\\۴&۴&۴\\۶&۶&۶\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۱&\frac{۳}{۲}\\\frac{۱}{۲}&۱&\frac{۳}{۲}\\\frac{۱}{۲}&۱&\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$$

بنابراین

(ستون سوم B)(سطر دوم A)=درایهٔ سطر دوم و ستون سوم AB

$$=\begin{bmatrix}۴&۴&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۳}{۲}\\\frac{۳}{۲}\\\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}=[۶+۶+۶]=۱۸$$

(ستون سوم A)(سطر دوم B)=درایهٔ سطر دوم و ستون سوم BA

$$=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۱&\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\۴\\۶\end{bmatrix}=[۱+۴+۹]=۱۴$$

پس مجموع درایه‌های سطر دوم و ستون سوم ماتریس‌های AB و BA برابر ۳۲=۱۴+۱۸ است.

۹۰۰ (۳) ماتریس $\begin{bmatrix}۲&m\\-۱&۳\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست، پس دترمینان آن صفر است:

$$\begin{vmatrix}۲&m\\-۱&۳\end{vmatrix}=۰\Rightarrow ۶+m=۰\Rightarrow m=-۶$$

ماتریس $A=\begin{bmatrix}m+۱&۳-m\\۲&-۱\end{bmatrix}$ به‌ازای $m=-۶$ برابر $A=\begin{bmatrix}-۵&۹\\۲&-۱\end{bmatrix}$ است. بنابراین

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۵-۱۸}\begin{bmatrix}-۱&-۹\\-۲&-۵\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱۳}\begin{bmatrix}-۱&-۹\\-۲&-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳}&\frac{۹}{۱۳}\\\frac{۲}{۱۳}&\frac{۵}{۱۳}\end{bmatrix}$$

۹۰۱ (۱) **راه‌حل اول** معادلهٔ دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر می‌گیریم و مختصات نقاط داده شده را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم:

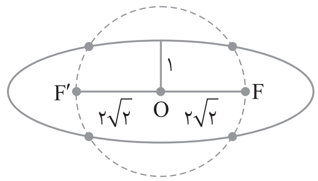
$$\begin{cases}(۰,۰)\in \text{دایره}\Rightarrow c=۰\\(۲,۱)\in \text{دایره}\Rightarrow ۴+۱+۲a+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۵\\(-۲,۴)\in \text{دایره}\Rightarrow ۴+۱۶-۲a+۴b=۰\Rightarrow -۲a+۴b=-۲۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲a+b=-۵\\-۲a+۴b=-۲۰\end{cases}\xrightarrow{+}۵b=-۲۵\Rightarrow b=-۵\Rightarrow a=۰$$

معادلهٔ دایره : $x^۲+y^۲-۵y=۰\Rightarrow R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$

راه‌حل دوم دایره از نقاط $A(۲,۱)$، $B(-۲,۴)$ و $C(۰,۰)$ می‌گذرد. توجه کنید که $m_{CA}=\frac{۰-۱}{۰-۲}=\frac{۱}{۲}$ و $m_{CB}=\frac{۰-۴}{۰+۲}=-۲$. پس $CA\perp CB$، بنابراین مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه است و دایرهٔ مورد نظر، دایرهٔ محیطی این مثلث است. بنابراین $R=\frac{|AB|}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۹}}{۲}=\frac{۵}{۲}$.

۹۰۲ (۳) با توجه به شکل طول قطر بزرگ بیضی برابر طول DC و مساوی ۶=۳-۹ است و طول قطر کوچک بیضی برابر طول BC و مساوی ۲=۲-۴ است، پس ۶=2a و ۲=2b. بنابراین $c^۲=a^۲-b^۲=۳^۲-۱^۲=۸$، پس $c=۲\sqrt{۲}$. پس دایرهٔ به قطر FF'، یعنی دایرهٔ به مرکز بیضی و شعاع $c=۲\sqrt{۲}$. چون $c>b$، پس در اینجا دایرهٔ به قطر FF' بیضی را در چهار نقطه قطع می‌کند.



۹۰۳ (۳) محور تقارن این سهمی موازی محور y است، پس با توجه به موقعیت نقطهٔ $S(h,k)=(۲,۱)$ و $A(۰,۵)$ معادلهٔ این سهمی به صورت $(x-۲)^۲=۴a(y-۱)$ است. چون A روی سهمی است، پس

$$۴=۴a\times۴\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

خط هادی این سهمی به صورت $y=k-a$ است. بنابراین معادلهٔ خط هادی این سهمی $y=۱-\frac{۱}{۴}$ یعنی، $y=\frac{۳}{۴}$ است.

۹۰۴ (۳) می‌دانیم بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{a}'$ اندازه‌های برابر دارند، زیرا قرینه کردن تبدیلی ایزومتری است، پس به وجود بردار $\vec{b}$ (برداری که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای برابر می‌سازد) احتیاجی نیست:

$$|\vec{a}'|=|\vec{a}|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$$

۹۰۵ (۴) ابتدا بردار $\vec{a}\times\vec{k}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}\times\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۱&۲&-۴\\۰&۰&۱\end{vmatrix}=۲\vec{i}-\vec{j}$$

اکنون ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{k}$ را تعیین می‌کنیم:

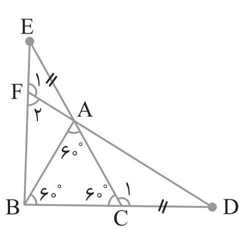
$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۱&۲&-۴\\۲&-۱&۰\end{vmatrix}=-۴\vec{i}-۸\vec{j}-۵\vec{k}$$

بنابراین

$$\text{مساحت (متوازی‌الاضلاع مورد نظر)}=|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{k})|=\sqrt{۱۶+۶۴+۲۵}=\sqrt{۱۰۵}$$

۹۰۶ (۲) دو مثلث ACD و BAE همنهشت‌اند، زیرا

$$\begin{cases}CD=AE\\AC=AB\\\hat{C}_۱=E\hat{A}B=۱۲۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{(ض زض)}}\triangle ACD\cong\triangle BAE\Rightarrow\hat{D}=\hat{E}$$



بنابراین دو مثلث ACD و AFE دو زاویهٔ مساوی دارند: $\hat{D}=\hat{E}$ و $E\hat{A}F=D\hat{A}C$، پس زاویه‌های سوم آن‌ها نیز برابرند، یعنی $\hat{F}_۱=\hat{C}_۱=۱۲۰^\circ$، در نتیجه $\hat{F}_۲=۶۰^\circ$. تجربی خارج از کشور – ۹۷

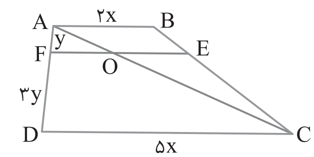
۹۰۷ (۱) بنابر فرض‌های سؤال اعدادی مانند x و y وجود دارند به‌طوری‌که $AB=۲x$ و $CD=۵x$. همچنین $AF=y$ و $AD=۴y$، پس $FD=۳y$. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\triangle ADC:\ OF||DC \Rightarrow \frac{OF}{CD}=\frac{AF}{AD}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{CD=۵x} OF=\frac{۵}{۴}x$$

$$\triangle ABC:\ OE||AB \Rightarrow \frac{CE}{BC}=\frac{OE}{AB}\xrightarrow{\frac{CE}{BC}=\frac{DF}{AD}=\frac{۳}{۴}}$$

$$\frac{۳}{۴}=\frac{OE}{AB}\xrightarrow{AB=۲x} OE=\frac{۳}{۲}x$$

بنابراین $EF=OF+OE=\frac{۵}{۴}x+\frac{۳}{۲}x=\frac{۱۱}{۴}x$. پس $\frac{EF}{CD}=\frac{\frac{۱۱}{۴}x}{۵x}=\frac{۱۱}{۲۰}$.



تجربی خارج از کشور - ۹۷

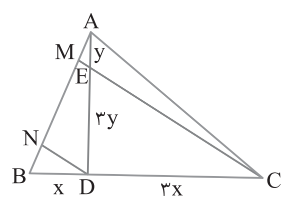
۹۰۸ (۳) از فرض‌های سؤال اطلاعات روی شکل به‌دست می‌آیند. بنابر قضیهٔ تالس،

$$\triangle BMC:\ DN||CM \Rightarrow \frac{BN}{MN}=\frac{BD}{DC}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BN=\frac{۱}{۳}MN$$

$$\triangle AND:\ ME||DN \Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{AE}{DE}=\frac{y}{۳y}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow AM=\frac{۱}{۳}MN$$

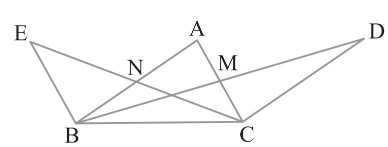
بنابراین $AM=BN$. پس

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AM}{AM+MN+BN}=\frac{AM}{AM+۳AM+AM}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow AB=۵AM$$



ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۰۹ (۳) در مثلث ABC پاره‌خط BM میانه است، پس $S_{BMC}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$. در ضمن در مثلث BCD پاره‌خط CM میانه است، پس $S_{BMC}=\frac{۱}{۲}S_{BCD}$. بنابراین $S_{ABC}=S_{BCD}$. به همین ترتیب معلوم می‌شود $S_{BEC}=S_{BCD}$، پس $S_{ABC}=S_{BEC}$. تجربی خارج از کشور - ۹۷



۹۱۰ (۳) در متوازی‌الاضلاع ABCD نیمسازهای زاویه‌های A و B یکدیگر را در نقطهٔ M روی ضلع DC قطع کرده‌اند. پس مثلث BMC متساوی‌الساقین و مثلث ADM متساوی‌الاضلاع است (شکل زیر را ببینید).

بنابراین

$$\begin{cases} BC=CM \\ AD=DM \end{cases}\xrightarrow{+} AD+BC=CM+DM$$

$$۲BC=AB \quad \text{یا} \quad ۲BC=DC$$

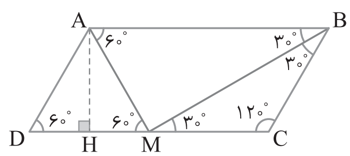
از طرف دیگر محیط متوازی‌الاضلاع برابر $۱۲\sqrt{۳}$ است. پس

$$\text{محیط}=۱۲\sqrt{۳}\Rightarrow ۲(AB+BC)=۱۲\sqrt{۳}$$

$$۲(AB+\frac{AB}{۲})=۱۲\sqrt{۳}\Rightarrow ۳AB=۱۲\sqrt{۳}\Rightarrow AB=۴\sqrt{۳}$$

در ضمن در مثلث متساوی‌الاضلاع ADM ارتفاع AH برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD$ و مساوی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\frac{AB}{۲})=۳$ است. در نتیجه

$$S_{ABCD}=AH\times AB=۳\times ۴\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۳}$$



تجربی - ۹۷

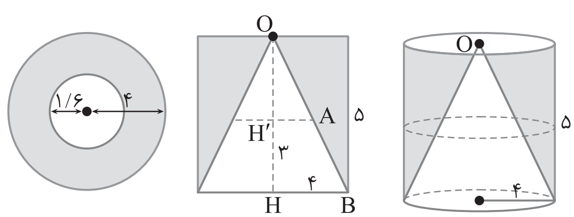
۹۱۱ (۴) رأس بزرگ‌ترین مخروط، مطابق شکل (۱) روی مرکز یک قاعدهٔ استوانه و قاعدهٔ این مخروط بر قاعدهٔ دیگر استوانه منطبق است. اگر این جسم هندسی را با صفحه‌ای موازی قاعده قطع دهیم، نمای شکل از روبه‌رو به صورت شکل (۲) است:

$$\triangle OHB: H'A||HB\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{AH'}{BH}=\frac{OH'}{OH}$$

$$\frac{AH'}{۴}=\frac{۵-۳}{۵}\Rightarrow AH'=۴\times\frac{۲}{۵}=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

از طرف دیگر، سطح مقطع حاصل از نمای بالا به صورت شکل (۳) است. پس مساحت خواسته شده برابر است با

$$S=\pi\times ۴^{۲}-\pi(۱/۶)^{۲}=\pi(۱۶-۲/۵۶)=۱۳/۴۴\pi$$

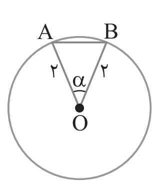


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

تجربی خارج از کشور - ۹۶

۹۱۲ (۱) هشت‌ضلعی منتظم از ۸ مثلث همنهشت مانند OAB در شکل زیر تشکیل شده است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمان AB برابر است با $\alpha=\frac{۳۶۰°}{۸}=۴۵°$. اکنون توجه کنید که

$$\text{مساحت (هشت‌ضلعی منتظم)}=۸S_{OAB}=۸(\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\sin ۴۵°)=۸\sqrt{۲}$$

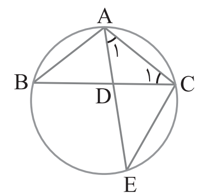


ریاضی - ۹۶

۹۱۳ (۳) شکل سؤال به صورت زیر است. از E به C وصل می‌کنیم. توجه کنید که $\hat{B}$ و $\hat{E}$ زاویه‌های محاطی روبه‌رو به کمان AC هستند، پس برابرند. از طرف دیگر $\hat{B}=\hat{C}_۱$، در نتیجه $\hat{C}_۱=\hat{E}$. پس در مثلث‌های ADC و ACE،

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{A}_۱\\ \hat{C}_۱=\hat{E}\end{cases}\xrightarrow{(\text{زز})}\triangle ADC\sim\triangle ACE$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow AD\times AE=AC^۲$$



ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۱۴ (۱) فرض می‌کنیم $\hat{A}=۶۰^\circ$، $a=۳\sqrt{۷}$ و $b=۹$. با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}\Rightarrow ۹\times ۷=۹^۲+c^۲-۲\times ۹\times c\times\cos ۶۰^\circ$$

$$۶۳=۸۱+c^۲-۹c\Rightarrow c^۲-۹c+۱۸=۰\Rightarrow (c-۶)(c-۳)=۰\Rightarrow c=۳,۶$$

تجربی - ۹۶

۹۱۵ (۲) با توجه به تعریف ماتریس A، $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}$. در نتیجه $A^۲=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}$. اکنون توجه کنید که

$$A^۲-۴A=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۸&۸\\۸&۴&۸\\۸&۸&۴\end{bmatrix}=۵I$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۴A$ برابر $۱۵=۳\times ۵$ است.

ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۱۶ (۴) بدون اینکه کلیت راه‌حل تغییر کند، فرض می‌کنیم $a=۵$ و $b=c=۰$. بنابراین

$$\begin{vmatrix}۴+a&b&c\\a&۴+b&c\\a&b&۴+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۹&۰&۰\\۵&۴&۰\\۵&۰&۴\end{vmatrix}=۹\times ۴\times ۴=۱۴۴$$

ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۱۷ (۴) توجه کنید که

$$A=\begin{bmatrix}۳&۲\\۵&۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۳\times ۴-۲\times ۵}\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۵&۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۵&۳\end{bmatrix}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با

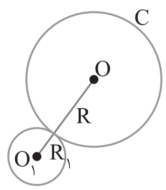
$$A^{-۱}\times(۲B)=(۲A^{-۱})\times B=\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۵&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&-۶\\۳&-۵\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱۰&-۱۴\\-۱۱&۱۵\end{bmatrix}$$

تجربی - ۹۶

۹۱۸ (۲) چون تمام خط‌های قائم بر دایرهٔ C از نقطهٔ $(۸,۷)$ می‌گذرند، پس مرکز دایرهٔ C نقطهٔ $O(۸,۷)$ است. همچنین اگر $O_۱$ و $R_۱$ به ترتیب مرکز و شعاع دایرهٔ داده شده باشند، آن‌گاه $O_۱(۲,-۱)$ و $R_۱=۳$. بنابراین $OO_۱=\sqrt{۳۶+۶۴}=۱۰$. اکنون به‌دست می‌آید

$$R=OO_۱-R_۱=۱۰-۳=۷$$



ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۱۹ (۴) برای آنکه a را با فاصلهٔ کانونی سهمی اشتباه نگیریم، به جای a از حرف m استفاده می‌کنیم. پس معادلهٔ سهمی به شکل $۲y^۲-۱۲y+mx+۸=۰$ در می‌آید. اکنون معادلهٔ این سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۲y^۲-۱۲y+mx+۸=۰\Rightarrow ۲(y^۲-۶y)=-mx-۸$$

$$۲((y-۳)^۲-۹)=-mx-۸\Rightarrow ۲(y-۳)^۲=-mx+۱۰$$

$$(y-۳)^۲=-\frac{m}{۲}(x-\frac{۱۰}{m})$$

با توجه به گزینه‌ها، m عددی مثبت است، پس دهانهٔ این سهمی رو به چپ است. همچنین نقطهٔ $S(h,k)=(\frac{۱۰}{m},۳)$ رأس این سهمی است و $۴a=\frac{m}{۲}$، پس $a=\frac{m}{۸}$. بنابراین معادلهٔ خط هادی این سهمی به صورت زیر است:

$$x=h+a\xrightarrow{x=\frac{۲۱}{۸}}\frac{۲۱}{۸}=\frac{۱۰}{m}+\frac{m}{۸}\Rightarrow ۲۱m=m^۲+۸۰$$

$$m^۲-۲۱m+۸۰=۰\Rightarrow (m-۱۶)(m-۵)=۰\Rightarrow m=۱۶, m=۵$$

ریاضی - ۹۷

۹۲۰ (۴) مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}+۲\vec{b}$ ساخته می‌شود مساوی نصف اندازهٔ ضرب خارجی این دو بردار است: $S=\frac{۱}{۲}|(\vec{a}+۲\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})|$. پس لازم است ابتدا بردارهای $\vec{a}+۲\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ را به‌دست آوریم:

$$\vec{a}+۲\vec{b}=(۲,-۱,۱)+۲(۰,۱,-۱)=(۲,۱,-۱)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۲&-۱&۱\\۰&۱&-۱\end{vmatrix}=(۰,۲,۲)$$

$$(\vec{a}+۲\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۲&۱&-۱\\۰&۲&۲\end{vmatrix}=(۴,-۴,۴)$$

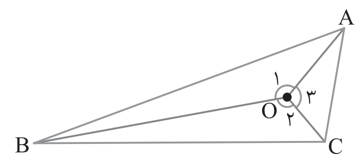
بنابراین $S=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+۴^۲+۴^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳\times ۴^۲}=۲\sqrt{۳}$.

ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۲۱ **۳** بنابر فرض سؤال $\frac{\hat{O}_۱}{۷}=\frac{\hat{O}_۲}{۶}=\frac{\hat{O}_۳}{۵}$. در ضمن می‌دانیم زاویهٔ بین دو نیمساز داخلی هر مثلث برابر ۹۰° به اضافهٔ نصف زاویهٔ سوم آن است. پس $\hat{O}_۱=۹۰^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}$، $\hat{O}_۲=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$ و $\hat{O}_۳=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}$. در نتیجه

$$\frac{۹۰^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}}{۷}=\frac{۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}}{۶}=\frac{۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}}{۵}=\frac{۲۷۰^\circ+\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۲}}{۷+۶+۵}=\frac{۳۶۰^\circ}{۱۸}=۲۰^\circ$$

بنابراین $\frac{۹۰^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}}{۷}=۲۰^\circ$. پس $\hat{C}=۱۰۰^\circ$.

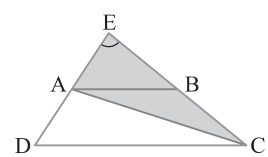


ریاضی – ۹۷

۹۲۲ **۴** مطابق شکل دو ضلع AB و DC موازی هستند، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{CD}=\frac{۳}{۵}$. اکنون نسبت مساحت‌ها را حساب می‌کنیم

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{AEC}}=\frac{S_{EDC}-S_{AEB}}{S_{AEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}ED\times EC\times\sin\hat{E}-\frac{۱}{۲}EA\times EB\times\sin\hat{E}}{\frac{۱}{۲}EA\times EC\times\sin\hat{E}}$$

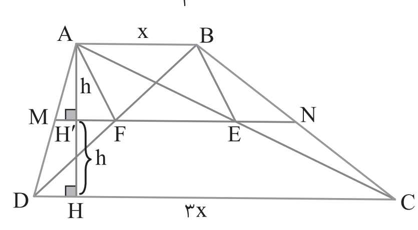
$$=\frac{ED}{EA}-\frac{EB}{EC}=\frac{۵}{۳}-\frac{۳}{۵}=\frac{۲۵-۹}{۱۵}=\frac{۱۶}{۱۵}\Rightarrow\frac{S_{AEC}}{S_{ABCD}}=\frac{۱۵}{۱۶}$$



تجربی خارج از کشور – ۹۶

۹۲۳ **۴** با توجه به شکل زیر، چون N وسط BC است و $NE\|AB$، بنابر قضیهٔ تالس E هم وسط AC است. به‌طور مشابه F هم وسط BD است. می‌دانیم طول پاره‌خطی که وسط‌های دو قطر ذوزنقه را به هم وصل می‌کند مساوی نصف تفاضل دو قاعده است. پس $EF=\frac{۳x-x}{۲}=x$. بنابراین چهارضلعی ABEF متوازی‌الاضلاع است. در ضمن اگر ارتفاع AH را بر DC رسم کنیم، آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ تالس معلوم می‌شود MN ارتفاع AH را نصف می‌کند، یعنی $AH'=HH'=h$، در نتیجه

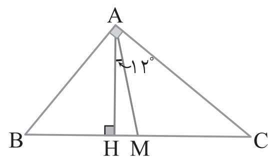
$$\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}}=\frac{hx}{\frac{۱}{۲}(۲h)(x+۳x)}=\frac{۱}{۴}$$



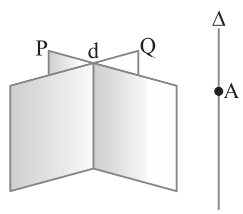
ریاضی – ۹۷

۹۲۴ **۴** در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر مساوی تفاضل دو زاویهٔ حاده است. پس $H\hat{A}M=\hat{B}-\hat{C}$، بنابراین $\hat{B}-\hat{C}=۱۲^\circ$. در ضمن $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$، در نتیجه $\hat{B}=۵۱^\circ$ و $\hat{C}=۳۹^\circ$.

تجربی – ۹۷

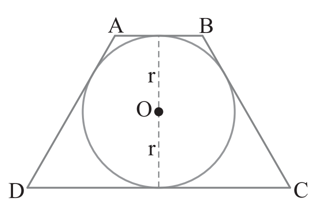


۹۲۵ **۴** بنابر شکل زیر، دو صفحهٔ متقاطع P و Q با فصل مشترک d را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ A خط Δ را موازی خط d رسم می‌کنیم. تمام صفحه‌هایی که از Δ می‌گذرند و با P و Q موازی نیستند و همچنین از خط d نمی‌گذرند جواب این تست هستند. واضح است که نامتناهی صفحه با این ویژگی‌ها وجود دارد.



ریاضی خارج از کشور – ۹۶

۹۲۶ **۴** چون $\frac{AB}{DC}=\frac{۱}{۳}$، پس عددی مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $AB=k$ و $DC=۳k$. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیط بر دایره، قطر دایرهٔ محاطی، واسطهٔ هندسی طول دو قاعده است: $k\times ۳k=۱۲$، یعنی $k=۲$. در نتیجه $AB=۲$ و $DC=۶$. اکنون مساحت ذوزنقه به صورت زیر به‌دست می‌آید $S=\frac{۱}{۲}(AB+DC)\times(۲r)=\frac{۱}{۲}(۲+۶)\times ۲\sqrt{۳}=۸\sqrt{۳}$.

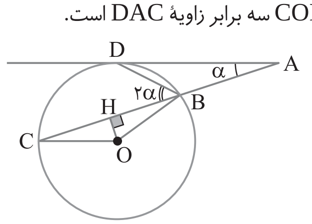


ریاضی خارج از کشور – ۹۶

۹۲۷ **۲** بنابر فرض سؤال اگر $D\hat{A}C=\alpha$، آن‌گاه $D\hat{B}C=۲\alpha$ و چون زاویهٔ DBC محاطی است، پس کمان مقابل به آن یعنی $\overset{\frown}{DC}$ برابر ۴α است. در نتیجه

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{DC}-\overset{\frown}{DB}}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{۴\alpha-\overset{\frown}{DB}}{۲}\Rightarrow\overset{\frown}{DB}=۲\alpha$$

پس زاویهٔ مرکزی COB برابر $۴\alpha+۲\alpha$، یعنی ۶α است و چون OH بر وتر BC عمود است، این زاویهٔ مرکزی را نصف می‌کند. بنابراین $C\hat{O}H=۳\alpha$. در نتیجه زاویهٔ COH سه برابر زاویهٔ DAC است.



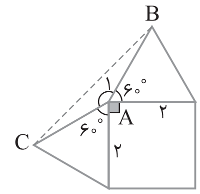
ریاضی – ۹۷

۹۲۸ (۳) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}_1$ را حساب می‌کنیم:

$$\hat{A}_1+60^\circ+90^\circ+60^\circ=360^\circ\Rightarrow \hat{A}_1=150^\circ$$

مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times \sin\hat{A}_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 150^\circ=1$$



تجربی خارج از کشور – ۹۶

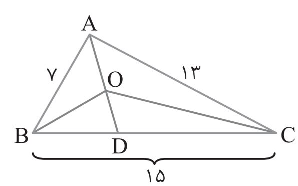
۹۲۹ (۳) اگر O نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ نیمساز،

$$\triangle ABC:\ \text{است}\ \hat{A}\ \text{نیمساز}\ AD\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{7}{13}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}$$

$$\frac{BD}{15}=\frac{7}{20}\Rightarrow BD=\frac{21}{4}$$

$$\triangle ABD:\ \text{است}\ \hat{B}\ \text{نیمساز}\ BO\Rightarrow \frac{AO}{OD}=\frac{AB}{BD}\Rightarrow \frac{AO}{OD}=\frac{7}{\frac{21}{4}}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$$

پس نقطهٔ O نیمساز زاویهٔ A را با نسبت $\frac{4}{3}$ یا $\frac{3}{4}$ تقسیم می‌کند.



ریاضی خارج از کشور – ۹۷

۹۳۰ (۴) اگر از هر درایهٔ واقع در سطر دوم دترمینان داده شده دو برابر شمارهٔ ستون آن کم شود، به دترمینان زیر می‌رسیم:

$$\begin{vmatrix}5&4&-3\\2a-2&a-3&a-7\\2&5&-4\end{vmatrix}$$

اکنون هر دو دترمینان را برحسب سطر دوم بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}5&4&-3\\2a&a+1&a-1\\2&5&-4\end{vmatrix}=2a(-1)^3\begin{vmatrix}4&-3\\5&-4\end{vmatrix}+(a+1)(-1)^4\begin{vmatrix}5&-3\\2&-4\end{vmatrix}+(a-1)(-1)^5\begin{vmatrix}5&4\\2&5\end{vmatrix}$$

$$=-2a\begin{vmatrix}4&-3\\5&-4\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}5&-3\\2&-4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&-3\\2&-4\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}5&4\\2&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&4\\2&5\end{vmatrix}\qquad(1)$$

$$\begin{vmatrix}5&4&-3\\2a-2&a-3&a-7\\2&5&-4\end{vmatrix}=(2a-2)(-1)^3\begin{vmatrix}4&-3\\5&-4\end{vmatrix}+(a-3)(-1)^4\begin{vmatrix}5&-3\\2&-4\end{vmatrix}+(a-7)(-1)^5\begin{vmatrix}5&4\\2&5\end{vmatrix}$$

$$=-2a\begin{vmatrix}4&-3\\5&-4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4&-3\\5&-4\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}5&-3\\2&-4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}5&-3\\2&-4\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}5&4\\2&5\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}5&4\\2&5\end{vmatrix}\qquad(2)$$

تفاضل تساوی‌های (۱) و (۲) جواب این سؤال است:

$$\begin{vmatrix}5&4&-3\\2a&a+1&a-1\\2&5&-4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&4&-3\\2a-2&a-3&a-7\\2&5&-4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5&-3\\2&-4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&4\\2&5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&-3\\5&-4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}5&-3\\2&-4\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}5&4\\2&5\end{vmatrix}$$

$$=(-20+6)+(25-8)-2(-16+15)+3(-20+6)-7(25-8)$$

$$=-14+17+2-42-119=-156$$

پس به دترمینان اولیه مقدار ۱۵۶ واحد اضافه می‌شود.

ریاضی خارج از کشور – ۹۷

۹۳۱ (۱) ابتدا وارون ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$A^{-1}=\frac{1}{7(-2)-3(-4)}\begin{bmatrix}-2&-3\\4&7\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&3\\-4&-7\end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب خواسته شده برابر است با

$$B\times(2A^{-1})=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3\\-4&-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&-15\\-14&-25\end{bmatrix}$$

تجربی خارج از کشور – ۹۶

۹۳۲ (۳) حاصل دترمینان را با بسط دادن نسبت به سطر اول حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}0&x-3&x-2\\x+3&0&-4\\x+2&6&0\end{vmatrix}=-(x-3)(4x+8)+(x-2)(6x+18)=0$$

$$-4x^2-8x+12x+24+6x^2+18x-12x-36=0$$

$$2x^2+10x-12=0\Rightarrow x^2+5x-6=0\Rightarrow x=1,\quad x=-6$$

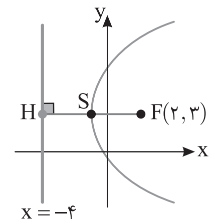
ریاضی – ۹۷

۹۳۳ (۱) با توجه به اطلاعات مسئله، خط $3x+2y=a$ از مرکز دایره داده شده می‌گذرد. مرکز این دایره $O(1,-\frac{1}{2})$ است. پس $3\times1+2\times(-\frac{1}{2})=a\Rightarrow a=2$.

۹۳۴ (۲) با توجه به موقعیت کانون و خط هادی نسبت به هم، دهانهٔ این سهمی رو به راست است. عمود FH را بر خط هادی رسم می‌کنیم، در این صورت H نقطهٔ $(-4,3)$ است. بنابراین اگر $S(h,k)$ رأس این سهمی باشد، آن‌گاه $S=\frac{F+H}{2}=(-1,3)$ و $a=FS=3$. در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت زیر است

$$(y-k)^2=4a(x-h)\Rightarrow(y-3)^2=12(x+1)$$

$$\xrightarrow[y=0]{\text{x برخورد با محور}}9=12x+12\Rightarrow12x=-3\Rightarrow x=-\frac{1}{4}$$



تجربی خارج از کشور - ۹۶

۹۳۵ (۲) حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ مساوی قدرمطلق ضرب مختلط آن‌ها است:

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|=|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}$$

پس لازم است بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را به‌دست آوریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۲ & -۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۴\end{vmatrix}=۱۰\vec{i}+۹\vec{j}+۷\vec{k}$$

بنابراین $۲۳۰=۱۰^{۲}+۹^{۲}+۷^{۲}=|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=$ حجم متوازی‌السطوح .

ریاضی - ۹۷

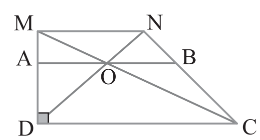
۹۳۶ (۲) شکل سؤال به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\triangle MDC:\ OA\|DC\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیهٔ}}\frac{MA}{MD}=\frac{OA}{DC}$$

$$\triangle NDC:\ OB\|DC\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیهٔ}}\frac{NB}{NC}=\frac{OB}{DC}$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ تالس در ذوزنقه، $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}$. در نتیجه

$$\frac{OA}{DC}=\frac{OB}{DC}\Rightarrow OA=OB\Rightarrow\frac{OA}{OB}=۱$$



تجربی - ۹۷

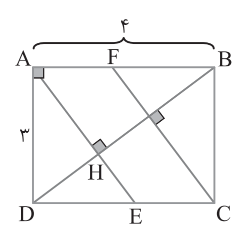
۹۳۷ (۱) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD ، بنابر قضیهٔ فیثاغورس، $BD=\sqrt{AD^{۲}+AB^{۲}}=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵$. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $AH=\frac{AD\times AB}{BD}=\frac{۳\times۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$.همچنین بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE ،

$$AD^{۲}=AH\times AE\Rightarrow ۹=\frac{۱۲}{۵}\times AE\Rightarrow AE=\frac{۱۵}{۴}$$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ADE ، $DE=\sqrt{AE^{۲}-AD^{۲}}=\frac{۹}{۴}$.

اکنون می‌توان مساحت متوازی‌الاضلاع AECF را به صورت زیر به‌دست آورد

$$S=EC\times AD=(۴-\frac{۹}{۴})\times۳=۵/۲۵$$



ریاضی - ۹۶

۹۳۸ (۱) می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی برابر ۳۶۰° است، پس

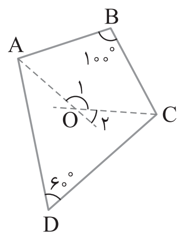
$$\frac{\hat{A}}{۳}=\frac{\hat{B}}{۴}=\frac{\hat{C}}{۵}=\frac{۵\hat{D}}{۱۲}=\alpha\Rightarrow\hat{A}=۳\alpha\,,\hat{B}=۴\alpha\,,\hat{C}=۵\alpha\,,\hat{D}=\frac{۱۲\alpha}{۵}$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ\Rightarrow۳\alpha+۴\alpha+۵\alpha+\frac{۱۲\alpha}{۵}=۳۶۰^\circ$$

$$۱۴/۴\alpha=۳۶۰^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{۳۶۰^\circ}{۱۴/۴}=۲۵^\circ$$

بنابراین زاویه‌های این چهارضلعی برابرند با $\hat{A}=۳\alpha=۷۵^\circ$ ، $\hat{B}=۴\alpha=۱۰۰^\circ$ ، $\hat{C}=۵\alpha=۱۲۵^\circ$ و $\hat{D}=\frac{۱۲\alpha}{۵}=۶۰^\circ$ (شکل زیر را ببینید). اکنون نیمسازهای زاویه‌های داخلی A و C را رسم می‌کنیم. اگر O محل تلاقی این دو نیمساز باشد، آن‌گاه در چهارضلعی OABC مجموع زاویه‌های داخلی ۳۶۰° است، پس

$$\frac{۷۵^\circ}{۲}+۱۰۰^\circ+\frac{۱۲۵^\circ}{۲}+\hat{O}_۱=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۱=۱۶۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ-۱۶۰^\circ=۲۰^\circ$$



تجربی - ۹۶

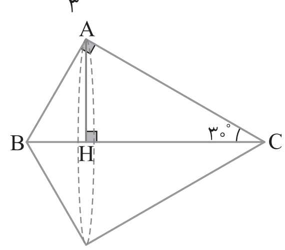
۹۳۹ (۲) توجه کنید که شکل حاصل از دوران بیان شده در صورت تست، دو مخروط است که شعاع قاعدهٔ هریک از آن‌ها، برابر ارتفاع وارد بر وتر این مثلث است (شکل زیر را ببینید). چون طول وتر مثلث ABC برابر ۸ و زاویهٔ C برابر ۳۰° است، پس $AB=۴$ و $AC=۴\sqrt{۳}$. اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}=۲\sqrt{۳}$$

در نهایت حجم شکل ایجاد شده به صورت زیر به‌دست می‌آید

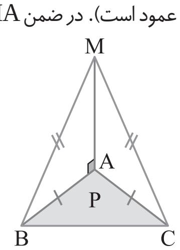
$$V=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^{۲}\times BH+\frac{۱}{۳}\pi(AH)^{۲}\times CH=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^{۲}(BH+CH)$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi(AH)^{۲}(BC)=\frac{۱}{۳}\pi\times۱۲\times۸=۳۲\pi$$



ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۴۰ (۱) شکل سؤال به صورت زیر است. دو مثلث MAB و MAC به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند، پس $M\hat{A}C=M\hat{A}B=۹۰^\circ$. بنابراین $MA\perp AC$. چون MA هم بر AB و هم بر AC عمود است، پس MA بر صفحهٔ مثلث ABC، یعنی صفحهٔ P عمود است (چون MA بر دو خط متقاطع صفحهٔ P در نقطهٔ تقاطع آن‌ها عمود است). در ضمن MA و BC نامتقاطع هستند.

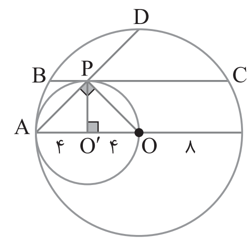


ریاضی - ۹۷ با تغییر

۹۴۱ **۲** شکل سؤال به صورت زیر است. اگر از P به A و O وصل کنیم، زاویهٔ P محاطی روبه‌رو به قطر OA است، پس قائمه است. بنابراین OP، AD را نصف می‌کند. بنابر رابطهٔ طولی در دایره،

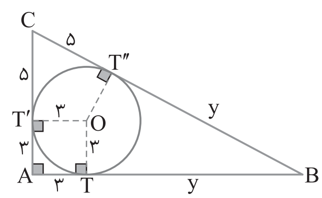
$$PB\times PC=PA\times PD \xrightarrow{PA=PD} PB\times PC=PA^{۲} \quad (۱)$$

از طرف دیگر شعاع $O'P$ بر وتر BC عمود است و چون BC موازی خط‌المرکزین دو دایره است، پس PO' بر OA عمود است. در نتیجه $PA=۴\sqrt{۲}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $PB\times PC=(۴\sqrt{۲})^{۲}=۳۲$.



ریاضی - ۹۷

۹۴۲ **۳** به شکل زیر توجه کنید. چون چهارضلعی $OTAT'$ مربع است و طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره با هم برابرند، با فرض $AC=۸$ اندازه‌های مشخص شده روی شکل به‌دست می‌آیند. مساحت مثلث ABC برابر است با $S=\frac{۱}{۲}AC\times AB=۴(y+۳)$. همچنین محیط این مثلث برابر است با $۲P=۲(y+۸)$. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $r=\frac{S}{P}$، یعنی $\frac{۴(y+۳)}{y+۸}=۳$، پس $y=۱۲$. بنابراین $BC=y+۵=۱۲+۵=۱۷$.

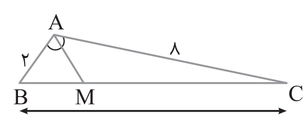


ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۴۳ **۳** از قضیهٔ نیمسازها نتیجه می‌شود

$$\text{AM نیمساز زاویهٔ A است} \Rightarrow \frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{BM}{۹}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow BM=\frac{۹}{۵}=۱/۸$$



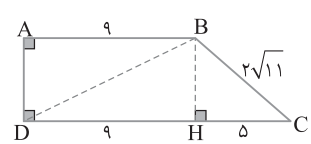
ریاضی - ۹۷ با تغییر

۹۴۴ **۳** در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD مطابق شکل زیر ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در مثلث BCH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$BH=\sqrt{BC^{۲}-CH^{۲}}=\sqrt{۴۴-۲۵}=\sqrt{۱۹}$$

اکنون در مثلث BDH بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$BD=\sqrt{BH^{۲}+DH^{۲}}=\sqrt{۱۹+۸۱}=۱۰$$



ریاضی خارج از کشور - ۹۶

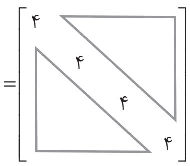
۹۴۵ **۱** ماتریس C برابر است با

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$$

پس فقط لازم است درایه‌های قطر اصلی $C^{۲}$ را حساب کنیم

$$C^{۲}=C\times C=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$$

$=$



بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^{۲}$ برابر $۴\times۴=۱۶$ است.

ریاضی - ۹۷

۹۴۶ **۱** بنابر فرض سؤال باید حاصل عبارت زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۴ & ۴ \\ ۵ & a+۱ & ۷ \\ ۳ & b+۱ & ۶ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & a & ۷ \\ ۳ & b & ۶ \end{vmatrix} \quad (۱)$$

اکنون حاصل هر دو دترمینان را با بسط دادن برحسب ستون دوم حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۴ & ۴ \\ ۵ & a+۱ & ۷ \\ ۳ & b+۱ & ۶ \end{vmatrix}=۴(-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}+(a+۱)(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}$$

$$+(b+۱)(-۱)^{۵}\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۷ \end{vmatrix}=-۴(۳۰-۲۱)+(a+۱)(۱۲-۱۲)$$

$$-(b+۱)(۱۴-۲۰)=-۳۶+۰+۶b+۶=۶b-۳۰$$

از طرف دیگر،

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & a & ۷ \\ ۳ & b & ۶ \end{vmatrix}=۳(-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}+(a)(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}$$

$$+b(-۱)^{۵}\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۷ \end{vmatrix}=-۳(۳۰-۲۱)+a(۱۲-۱۲)-b(۱۴-۲۰)$$

$$=-۲۷+۰+۶b=۶b-۲۷$$

بنابراین حاصل عبارت (۱) برابر است با

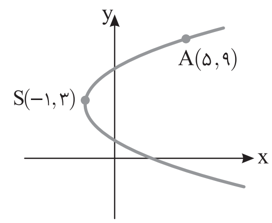
$$(۶b-۳۰)-(۶b-۲۷)=-۳۰+۲۷=-۳$$

ریاضی - ۹۶

۹۴۷ (۲) با توجه به موقعیت رأسِ $S(h,k)=(-۱,۳)$ و نقطهٔ $(۵,۹)$ که سهمی از آن می‌گذرد، دهانهٔ سهمی رو به راست است. پس معادلهٔ کلی آن به صورت مقابل است: $(y-k)^۲=۴a(x-h)\Rightarrow(y-۳)^۲=۴a(x+۱)$
نقطهٔ $(۵,۹)$ روی این سهمی است، بنابراین

$$(۹-۳)^۲=۴a(۵+۱)\Rightarrow ۶=۴a\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

در سهمی فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $۲a$ است، پس این فاصله برابر ۳ است.



تجربی - ۹۶

۹۴۸ (۱) در معادلهٔ سهمی داده شده به جای a از حرف m استفاده می‌کنیم تا a را با فاصلهٔ کانونی اشتباه نگیریم. پس معادلهٔ سهمی به صورت $۲y^۲-۴y=mx$ در می‌آید. اکنون معادلهٔ این سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۲(y^۲-۲y)=mx\Rightarrow ۲((y-۱)^۲-۱)=mx$$

$$۲(y-۱)^۲=mx+۲\Rightarrow ۲(y-۱)^۲=m(x+\frac{۲}{m})\Rightarrow(y-۱)^۲=\frac{m}{۲}(x+\frac{۲}{m})$$

فرض کنید $m>۰$، در این صورت دهانهٔ سهمی رو به راست است. همچنین $S(h,k)=(-\frac{۲}{m},۱)$ رأس این سهمی است و $۴a=\frac{m}{۲}$، پس $a=\frac{m}{۸}$.
بنابراین

معادلهٔ خط هادی: $x=h-a\xrightarrow{x=-۱}-۱=-\frac{۲}{m}-\frac{m}{۸}\Rightarrow ۱=\frac{۲}{m}+\frac{m}{۸}$

$$۸m=m^۲+۱۶\Rightarrow m^۲-۸m+۱۶=۰\Rightarrow(m-۴)^۲=۰\Rightarrow m=۴$$

پس کانون این سهمی به صورت زیر است:

$$F(a+h,k)=(\frac{m}{۸}-\frac{۲}{m},۱)=(\frac{۴}{۸}-\frac{۲}{۴},۱)=(۰,۱)$$

در نتیجه $FA=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$.

ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۴۹ (۳) طرفین تساوی داده شده را در بردار $\vec{a}$ ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=۰ \quad (۱)$$

چون $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{c}\times\vec{a}$ بر $\vec{a}$ عمودند، پس $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ و $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=۰$. در نتیجه از تساوی (۱) به برابری $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=۰$ می‌رسیم. بنابراین بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند.

ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۵۰ (۱) چون بردار $\vec{a}$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار هم‌راستا با بردارهای $(۳,۱,۲)$ و $(۱,۴,-۲)$ نوشت، پس بردار $\vec{a}$ و این دو بردار هم‌صفحه‌اند. بنابراین ضرب مختلط این بردارها برابر صفر است:

$$(-۳,۱۰,m)\cdot\big((۳,۱,۲)\times(۱,۴,-۲)\big)=۰$$

$$(-۳,۱۰,m)\cdot(-۱۰,۸,۱۱)=۰\Rightarrow ۱۱m+۱۱۰=۰\Rightarrow m=-۱۰$$

ریاضی خارج از کشور - ۹۶

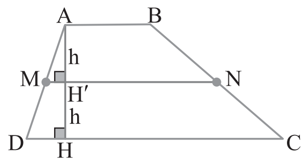
۹۵۱ (۲) در ذوزنقهٔ $ABCD$ نقاط M و N وسط‌های دو ساق هستند، پس بنابر قضیهٔ میان خط در ذوزنقه $MN=\frac{AB+DC}{۲}$ و اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه $AH'=HH'=h$.

بنابر فرض سؤال،

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}h(AB+MN)}{\frac{۱}{۲}h(MN+DC)}=\frac{۳}{۵}$$

$$۵AB+۵MN=۳MN+۳DC\Rightarrow ۵AB-۳DC=-۲(\frac{AB+DC}{۲})$$

$$۶AB=۲DC\Rightarrow\frac{AB}{DC}=\frac{۱}{۳}$$



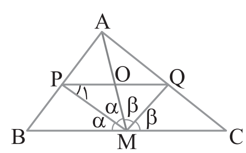
۹۵۲ (۴) بنابر فرض سؤال شکل زیر را خواهیم داشت. بنابر قضیهٔ نیمساز،

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AMB: \text{نیمساز } MP\Rightarrow\frac{AP}{BP}=\frac{AM}{BM}\\ \triangle AMC: \text{نیمساز } MQ\Rightarrow\frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{MC}\end{array}\right\}\xrightarrow{BM=MC}$$

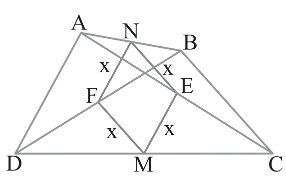
$$\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}}PQ||BC$$

در نتیجه

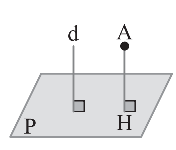
$$\left.\begin{array}{l}PQ||BC\\ PM \text{ مورب}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{قضیهٔ خطوط}}\hat{P}_۱=\alpha\Rightarrow OM=OP$$



۹۵۳ (۱) فرض کنید نقاط M و N وسط‌های دو ضلع غیر مجاور چهارضلعی $ABCD$ و نقاط E و F وسط‌های دو قطر آن باشند و چهارضلعی $MENF$ لوزی به ضلع x باشد. بنابر قضیهٔ میان خط در مثلث‌های CAD و ABC نتیجه می‌گیریم $AD=۲ME=۲x$ و $BC=۲EN=۲x$. پس $BC=AD$، یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر چهارضلعی $ABCD$ برابرند.



۹۵۴ (۴) در صورتی که خط d بر صفحهٔ P عمود باشد، آن‌گاه از A فقط یک خط عمود بر P مثل AH می‌توان رسم کرد به‌طوری‌که AH موازی خط d است (زیرا AH و d هر دو بر صفحهٔ P عمودند). اکنون هر صفحهٔ گذرا از AH (به جز صفحهٔ شامل d) هم بر P عمود است و هم موازی d است. پس در این حالت تعداد صفحات رسم شده نامتناهی است. توجه کنید که A نباید روی خط d باشد.

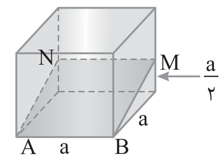


۹۵۵ (۲) در مکعب زیر صفحهٔ گذرا بر یال AB و نقطهٔ M وسط یال دیگر مکعب، رسم شده است. اگر طول ضلع مکعب a باشد، آن‌گاه

$$\text{حجم منشور (قسمت کوچک‌تر)}=Sh=\frac{1}{2}(a)(\frac{a}{2})(a)=\frac{a^3}{4}$$

$$\text{حجم قسمت بزرگ‌تر}=\text{حجم مکعب}-\text{حجم منشور}=a^3-\frac{a^3}{4}=\frac{3a^3}{4}$$

بنابراین $\frac{\text{حجم قسمت کوچک‌تر}}{\text{حجم قسمت بزرگ‌تر}}=\frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{3a^3}{4}}=\frac{1}{3}$.

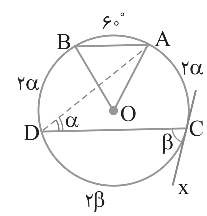


۹۵۶ (۴) اگر از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کنیم، آن‌گاه مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. پس اندازهٔ کمان AB برابر $60°$ است. از طرف دیگر می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}=2\alpha$. در ضمن زاویهٔ DCx ظلی است، پس $\overset{\frown}{DC}=2\beta$. در نتیجه

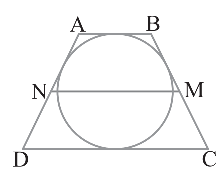
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AB}=360° \Rightarrow 2\alpha+2\alpha+2\beta+60°=360°$$

$$\xrightarrow{\beta=2\alpha} 8\alpha=300° \Rightarrow \alpha=\frac{300°}{8}$$

پس $\overset{\frown}{BD}=2\alpha=2(\frac{300°}{8})=\frac{300°}{4}=75°$.



۹۵۷ (۴) فرض کنید ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD محیطی باشد، پس $AB+DC=AD+BC$. چون $AD=BC$، در نتیجه $AB+DC=2BC$. در ضمن اگر نقاط M و N وسط‌های دو ساق ذوزنقه باشند، آن‌گاه بنابر قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه $MN=\frac{AB+DC}{2}$. پس نتیجه می‌گیریم $MN=BC$.

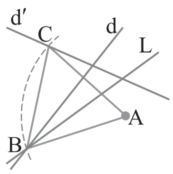


۹۵۸ (۳) دو n ضلعی منتظم محاط و محیط بر دایرهٔ به شعاع R متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها مساوی $\cos\frac{180°}{n}$ است. پس

$$\frac{\text{مساحت شش‌ضلعی منتظم محاطی}}{\text{مساحت شش‌ضلعی منتظم محیطی}}=\cos^2\frac{180°}{6}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{S}=\frac{3}{4}\Rightarrow S=8\sqrt{3}$$

۹۵۹ (۴) خط d' را به مرکز A با زاویهٔ $60°$ دوران می‌دهیم تا خط L به‌دست آید. فرض کنید d، L را در B قطع کند، نقطهٔ B را به مرکز A با زاویهٔ $-60°$ دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ C روی خط d' برسیم. در این صورت مثلث ABC مثلث مورد نظر است.



۹۶۰ (۱) با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث AMN زاویهٔ A را به‌دست می‌آوریم

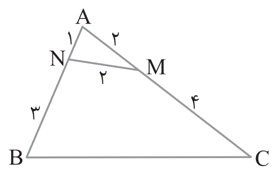
$$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\times AN\cos\hat{A}$$

$$4=4+1-2(2)(1)\cos\hat{A}\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{1}{4}$$

اکنون از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC استفاده می‌کنیم

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$$

$$BC^2=16+36-2(4)(6)(\frac{1}{4})=40\Rightarrow BC=2\sqrt{10}$$



۹۶۱ (۳) بازتاب B را نسبت به محور x، B_1 می‌نامیم بنابراین $B_1(9,-11)$. همچنین بازتاب A را نسبت به محور y، A_1 می‌نامیم پس $A_1(-3,5)$. طول پاره‌خط A_1B_1 کمترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMNB است:

$$|A_1B_1|=\sqrt{(9+3)^2+(5+11)^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20$$

۹۶۲ (۱) حاصل‌ضرب داده شده را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$=\begin{bmatrix} 11x-1 & -x-2 & -3x \end{bmatrix}_{1\times3}$$

جواب معادلهٔ زیر را می‌خواهیم

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} 11x-1 & -x-2 & -3x \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times1}=0$$

$$11x^2-x-2x^2-4x+3x=0\Rightarrow 9x^2-2x=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{2}{9}$$

۹۶۳ (۲) طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم

$$AX=A-2I\xrightarrow{A^{-1}\times}X=I-2A^{-1}\quad(1)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6-4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\quad(2)$$

اکنون از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۹۶۴ **۴** توجه کنید که

$$\big||A|A\big|=|A|^{۳}|A|=|A|^{۴}=۴^{۴}=۲۵۶$$

۹۶۵ **۴** **راه‌حل اول** نقطهٔ $(-۱,۴)$ فقط در گزینهٔ (۴) صدق می‌کند پس گزینهٔ (۴) درست است.

راه‌حل دوم ابتدا مختصات نقاط تلاقی خط $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول) با دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۴x=۶$ را به‌دست می‌آوریم

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x=۶\xrightarrow{y=x}۲x^{۲}-۴x=۶$$

$$x^{۲}-۲x-۳=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۱)=۰$$

پس نقاط $A(۳,۳)$ و $B(-۱,-۱)$ نقاط تلاقی دایره با خط $y=x$ هستند و این نقاط روی دایرهٔ C هم قرار دارند. بنابراین دایرهٔ C از نقاط $A(۳,۳)$ و $B(-۱,-۱)$ و $D(-۱,۴)$ عبور می‌کند. فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ C به صورت $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ باشد. در این صورت

مختصات A در معادلهٔ دایره صدق می‌کند $\Rightarrow ۹+۹+۳a+۳b+c=۰$

مختصات B در معادلهٔ دایره صدق می‌کند $\Rightarrow ۱+۱-a-b+c=۰$

مختصات D در معادلهٔ دایره صدق می‌کند $\Rightarrow ۱+۱۶-a+۴b+c=۰$

$$c=-۶, a=-۱, b=-۳\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-x-۳y-۶=۰$$

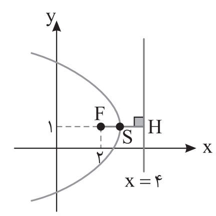
۹۶۶ **۱** با توجه به جایگاه کانون و خط هادی دهانهٔ سهمی رو به چپ است. اگر عمود FH را بر خط هادی وارد کنیم، آن‌گاه $H(۴,۱)$. پس رأس S به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$S=\frac{F+H}{۲}=\frac{(۲,۱)+(۴,۱)}{۲}=(۳,۱), a=SF=۱$$

معادلهٔ این سهمی در حالت کلی به صورت زیر است

$$(y-\beta)^{۲}=-۴a(x-\alpha)\xrightarrow{\alpha=۳,\beta=۱}(y-۱)^{۲}=-۴(x-۳)$$

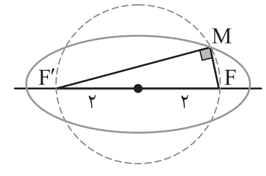
$$y^{۲}+۱-۲y=-۴x+۱۲\Rightarrow y^{۲}-۲y+۴x=۱۱$$



۹۶۷ **۲** بنابر فرض سؤال $۲a=۲\sqrt{۵}$، پس $a=\sqrt{۵}$ و $۲b=۲$، پس $b=۱$. بنابراین $c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۵-۱=۴\Rightarrow c=۲$

پس دایرهٔ هم‌مرکز با بیضی و به شعاع ۲، از کانون‌های بیضی عبور می‌کند. پس

$$MF^{۲}+MF'^{۲}=FF'^{۲}=۴^{۲}=۱۶$$



۹۶۸ **۴** ضرب مختلط این سه بردار صفر است، پس

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=۰\Rightarrow\begin{vmatrix}-۱&۲&۳\\۲&۰&۱\\-۴&m&۵\end{vmatrix}=۰\xrightarrow[\text{برحسب ستون دوم}]{\text{بسط}}$$

$$-۲(۱۰+۴)-m(-۱-۶)=۰\Rightarrow-۲۸=-۷m\Rightarrow m=۴$$

۹۶۹ **۳** بنابر فرض سؤال، شکل (۱) را خواهیم داشت. باید طول عمود CH وارد بر BD را به‌دست آوریم. از D به C وصل می‌کنیم. دو مثلث ABC و DBC هم‌مساحت‌اند، زیرا قاعدهٔ مشترک (BC) داشته و دو رأس A و D روی خطی موازی با این قاعدهٔ مشترک قرار دارند. اکنون مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC را به‌دست می‌آوریم. برای این کار ارتفاع AK را در مثلث ABC (شکل (۲)) رسم می‌کنیم.

$$\triangle AKC: AK^{۲}=AC^{۲}-KC^{۲}=۱۷^{۲}-۸^{۲}$$

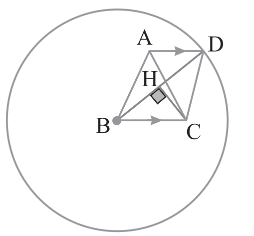
$$=(۱۷-۸)(۱۷+۸)=۹\times۲۵\Rightarrow AK=۱۵$$

$$S_{BDC}=S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AK\times BC=\frac{۱}{۲}(۱۵)(۱۶)=۱۵\times۸$$

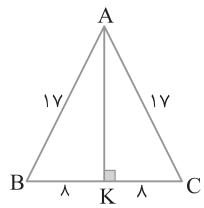
در نتیجه

$$S_{BDC}=۱۵\times۸\Rightarrow\frac{۱}{۲}CH\times BD=۱۵\times۸\xrightarrow{BD=۲۵}$$

$$\frac{۱}{۲}CH\times۲۵=۱۵\times۸\Rightarrow CH=\frac{۱۵\times۸\times۲}{۲۵}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$



شکل (۱)



شکل (۲)

۹۷۰ **۳** با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow BC=۵$$

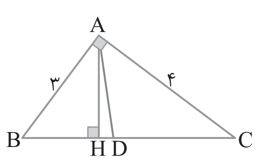
$$AB^{۲}=BH\times BC\Rightarrow۹=BH\times۵\Rightarrow BH=\frac{۹}{۵}$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ نیمساز داخلی می‌توان نوشت

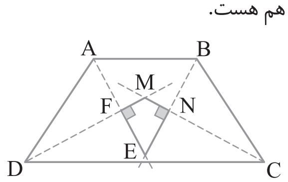
$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BC}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow\frac{BD}{۵}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow BD=\frac{۱۵}{۷}$$

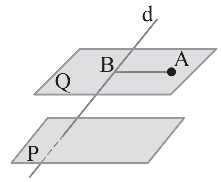
بنابراین $DH=BD-BH=\frac{۱۵}{۷}-\frac{۹}{۵}=\frac{۷۵-۶۳}{۳۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$.



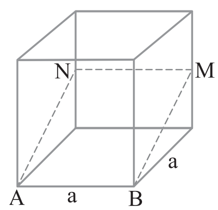
۹۷۱ **۱** از برخورد نیمسازهای داخلی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین یک کایت که دو زاویهٔ مقابل آن قائمه هستند ایجاد می‌شود. چون دو زاویهٔ مقابل چهارضلعی حاصل مکمل‌اند پس چهارضلعی ایجاد شده محاطی است. از طرف دیگر مجموع اضلاع مقابل این چهارضلعی (کایت) برابر است، پس این چهارضلعی محیطی هم هست.



۹۷۲ ④ فرض کنید خط d با صفحهٔ P متقاطع باشد. می‌دانیم از نقطهٔ A تنها یک صفحه مثل Q موازی با P قابل رسم است و این صفحه خط d را در نقطه‌ای مثل B قطع می‌کند. در این صورت خط AB موازی P است و خط d را قطع کرده و یکتا است. در صورتی که d منطبق بر P باشد خطی که از A گذشته و با P موازی باشد و خط d را قطع کند وجود ندارد و اگر d موازی P باشد این مسئله نامتناهی جواب خواهد داشت. در ضمن اگر d بر P عمود باشد نیز مسئله یک جواب خواهد داشت ولی لزومی بر عمود بودن d بر P نیست. فقط d صفحهٔ P را قطع کند کافی است تا مسئله یک جواب داشته باشد.



۹۷۳ ① در مکعب شکل مقابل صفحهٔ گذرا بر یال AB و نقطهٔ M وسط یال متنافر با AB رسم شده است. اگر طول یال مکعب a باشد آن‌گاه مقطع حاصل یعنی ABMN مستطیلی به ضلع a و $\sqrt{a^۲+\frac{a^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}a$ است، پس



$$\frac{S_{ABMN}}{\text{مساحت یک وجه}}=\frac{a\times\frac{\sqrt{۵}}{۲}a}{a^۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۹۷۴ ③ چون وتر CD برابر شعاع دایره است، پس اگر O مرکز دایره باشد، آن‌گاه مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است. بنابراین اندازهٔ کمان CD برابر ۶۰° است، پس

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{EF}-\overset{\frown}{CE}}{۲}\Rightarrow ۸۰^\circ=\frac{۶۰^\circ+\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{EF}-\overset{\frown}{CE}}{۲}$$

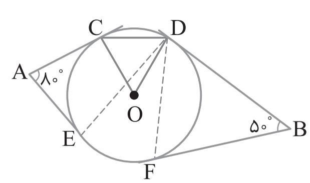
$$\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{EF}-\overset{\frown}{CE}=۱۰۰^\circ \quad (۱)$$

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EF}-\overset{\frown}{DF}}{۲}\Rightarrow ۵۰^\circ=\frac{۶۰^\circ+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EF}-\overset{\frown}{DF}}{۲}$$

$$\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EF}-\overset{\frown}{DF}=۴۰^\circ \quad (۲)$$

از جمع تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$۲\overset{\frown}{EF}=۱۴۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{EF}=۷۰^\circ\Rightarrow E\hat{D}F=\frac{\overset{\frown}{EF}}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$$



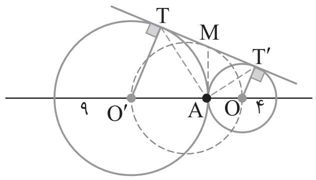
۹۷۵ ① دایرهٔ به قطر OO' در نقطهٔ M بر مماس مشترک دو دایره مماس است. از M به A وصل می‌کنیم. در این صورت

$$\left.\begin{array}{l}MA=MT\\MA=MT'\end{array}\right\}\Rightarrow MA=MT=MT'=\frac{TT'}{۲}$$

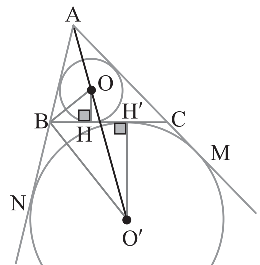
در واقع در مثلث TAT' پاره‌خط AM میانه است و اندازهٔ آن نصف TT' است یعنی مثلث TAT' در رأس A قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$TT'=\sqrt{OO'^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{(۹+۴)^۲-(۹-۴)^۲}$$
$$=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

در نتیجه $MA=\frac{TT'}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$.



۹۷۶ ③ بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری که O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و O' مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC است. باید طول HH' که تصویر قائم OO' روی ضلع BC است را به‌دست آوریم. می‌دانیم P (نصف محیط مثلث ABC) برابر ۱۰ است، پس

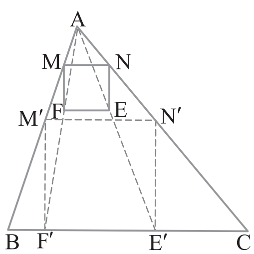


$$BH=P-AC=۱۰-۷=۳,\quad AM=P=۱۰,\quad CM=P-AC=۳$$

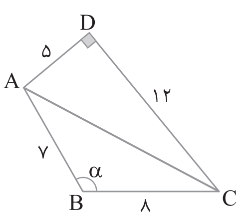
در ضمن $CM=CH'$ پس $CH'=۳$ بنابراین:

$$HH'=BC-BH-CH'\Rightarrow HH'=۸-۳-۳=۲$$

۹۷۷ ② مربع دلخواه MNEF به‌طوری که MN موازی با BC باشد را مطابق شکل ترسیم می‌کنیم. از A به E و F وصل کرده امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را به ترتیب در E' و F' قطع کنند. در نقاط E' و F' عمودهایی بر BC رسم کرده تا اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط N' و M' قطع کنند. در این صورت $M'N'E'F'$ مجانس مربع MNEF به مرکز A است. پس $M'N'E'F'$ مربع مطلوب است.



۹۷۸ ③ در شکل مقابل قطر AC را رسم کرده‌ایم.
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC،



$$AC^۲=AD^۲+DC^۲$$
$$=۵^۲+۱۲^۲=۱۶۹\Rightarrow AC=۱۳$$

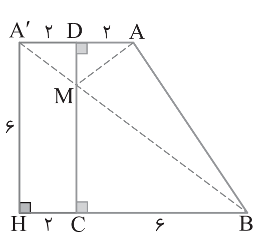
اکنون با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲-۲AB\times BC\cos\alpha$$

$$۱۳^۲=۷^۲+۸^۲-۲(۷)(۸)\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\alpha=۱۲۰^\circ$، نتیجه $\sin ۱۲۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

۹۷۹ ① بازتاب نقطهٔ A را نسبت به DC نقطهٔ A' می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تا DC را در نقطهٔ M قطع کند. در این صورت AMB کوتاه‌ترین مسیر است یعنی مقدار $MA+MB$ کمترین است. همچنین چون بازتاب ایزومتری است $MA+MB$ برابر $A'B$ است، مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'HB$ می‌توان طول $A'B$ را به‌دست آورد



$$\triangle A'HB: A'B^۲=A'H^۲+BH^۲=۸^۲+۶^۲=۱۰۰\Rightarrow A'B=۱۰$$

۹۸۰ (۲) در ماتریس قطری، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. پس حاصل‌ضرب دو ماتریس داده شده را به‌دست آورده، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی را صفر قرار می‌دهیم

$$\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix} ۲x-۱+۴y & -۲x+۴ \\ ۷+y & -۳ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

بنابراین $-۲x+۴=۰ \Rightarrow x=۲\ ,\ \ ۷+y=۰ \Rightarrow y=-۷$

۹۸۱ (۱) طرفین تساوی $AX=B$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به‌دست آید

$$AX=B \xrightarrow{A^{-۱}\times} X=A^{-۱}B$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۴+۳}\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱۳ \\ -۱ & -۸ \end{bmatrix}$$

۹۸۲ (۴) حاصل دترمینان را برحسب ستون دوم به‌دست می‌آوریم

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{vmatrix}=-۱(-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix}+۶(-۱)^{۵}\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix}$$

$$=(۳+۱۰)-۶(۱۰-۱۲)=۱۳+۱۲=۲۵$$

۹۸۳ (۴) **راه حل اول** ابتدا نقطهٔ تلاقی دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۱۷$ و خط $۲x-y=۳$ را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۱۷ \\ ۲x-y=۳ \Rightarrow y=۲x-۳ \end{cases}$$

$$x^{۲}+(۲x-۳)^{۲}=۱۷ \Rightarrow ۵x^{۲}-۱۲x-۸=۰ \Rightarrow ۵x^{۲}-۱۲x=۸ \qquad (۱)$$

نقطهٔ A را روی هر دو دایره و همچنین روی خط $۲x-y=۳$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $A(x,۲x-۳)$ ، $B(۶,-۱)$ و مرکز دایرهٔ C نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ باشد، پس باید داشته باشیم

$$O'A=O'B \Rightarrow \sqrt{(\alpha-x)^{۲}+(\beta-۲x+۳)^{۲}}=\sqrt{(\alpha-۶)^{۲}+(\beta+۱)^{۲}}$$

$$\alpha^{۲}+x^{۲}-۲\alpha x+\beta^{۲}+۴x^{۲}+۹-۴\beta x+۶\beta-۱۲x$$

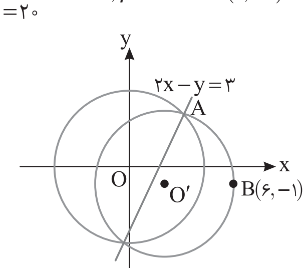
$$=\alpha^{۲}+۳۶-۱۲\alpha+\beta^{۲}+۱+۲\beta$$

$$\xrightarrow{(۱)} \underbrace{۵x^{۲}-۱۲x}_{۸}-۲\alpha x-۴\beta x+۹+۶\beta=۳۷-۱۲\alpha+۲\beta$$

$$x(-۲\alpha-۴\beta)+۱۲\alpha+۴\beta=۲۰$$

تساوی به‌دست آمده در صورتی برقرار است که $-۲\alpha-۴\beta=۰$ و $۱۲\alpha+۴\beta=۲۰$ پس:

$$\begin{cases} -۲\alpha-۴\beta=۰ \\ ۱۲\alpha+۴\beta=۲۰ \end{cases} \Rightarrow \alpha=۲,\beta=-۱ \Rightarrow O'(۲,-۱) \Rightarrow R=O'B=۴$$



راه‌حل دوم فرض کنید معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ باشد. برای یافتن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم

$$x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=x^{۲}+y^{۲}-۱۷ \Rightarrow ax+by=-c-۱۷$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $۲x-y=۳$ منطبق است، پس

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{-۱}=\frac{-c-۱۷}{۳} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲b \\ c=۳b-۱۷ \end{cases}$$

نقطهٔ $(۶,-۱)$ روی دایرهٔ C است، پس مختصات آن در معادلهٔ دایرهٔ C صدق می‌کنند

$$x^{۲}+y^{۲}+(-۲b)x+by+۳b-۱۷=۰$$

$$\xrightarrow{(۶,-۱)} ۳۶+۱-۱۲b-b+۳b-۱۷=۰$$

$$۱۰b=۲۰ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow \begin{cases} a=-۴ \\ c=-۱۱ \end{cases}$$

شعاع دایره: $R=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۴+۴۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۶۴}}{۲}=۴$

۹۸۴ (۲) ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم

$$۲x^{۲}-۴x+۳y=۴ \Rightarrow ۲(x^{۲}-۲x)=-۳y+۴$$

$$۲((x-۱)^{۲}-۱)=-۳y+۴ \Rightarrow ۲(x-۱)^{۲}=-۳y+۶$$

$$۲(x-۱)^{۲}=-۳(y-۲) \Rightarrow (x-۱)^{۲}=-\frac{۳}{۲}(y-۲)$$

پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است، $S(۱,۲)$ مختصات رأس سهمی است و $a=\frac{۳}{۸}$. بنابراین مختصات کانون این سهمی به‌صورت زیر است

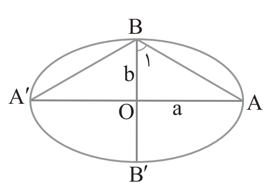
$$F(\alpha\ ,-a+\beta)=(۱,-\frac{۳}{۸}+۲)=(۱,\frac{۱۳}{۸})$$

۹۸۵ (۳) اگر AA' قطر بزرگ و BB' قطر کوچک بیضی باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ ABA' مورد سؤال است. می‌دانیم $e=\sqrt{۱-\frac{b^{۲}}{a^{۲}}}$ و بنابر فرض $e=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$. پس

$$\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\sqrt{۱-\frac{b^{۲}}{a^{۲}}} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=۱-\frac{b^{۲}}{a^{۲}} \Rightarrow \frac{b^{۲}}{a^{۲}}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB می‌نویسیم

$$\tan \hat{B}_{۱}=\frac{a}{b}=\sqrt{۳} \Rightarrow \hat{B}_{۱}=۶۰^{\circ} \Rightarrow A\hat{B}A'=۱۲۰^{\circ}$$



۹۸۶ (۴) حجم متوازی‌السطوح بنا شده روی بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ مساوی است با $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|=|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}$. پس لازم است $\vec{a}\times\vec{b}$ را به‌دست آوریم

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۳\vec{i}-۶\vec{j}-۱۲\vec{k}$$

حجم متوازی‌السطوح $=|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=۹+۳۶+۱۴۴=۱۸۹$

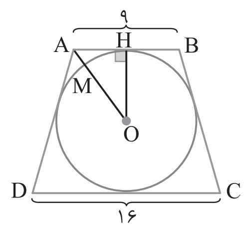
۹۸۷ **۱** از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، بـه رأس A وصـل می‌کنیـم تا دایـره را در M قطـع کند. طـول پاره‌خط AM کمتریـن فاصلـهٔ نقاط دایره تا رأس قاعدهٔ کوچک ذوزنقه اسـت. اگر R شـعاع دایـرهٔ محاطـی باشـد، آن‌گاه $۴R^۲=AB\times DC$، پـس $۴R^۲=۹\times۱۶$، در نتیجه $R^۲=۳۶$، پس $R=۶$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH،

$$\left.\begin{array}{l} AH=\frac{AB}{۲}=\frac{۹}{۲} \\ OH=R=۶ \end{array}\right\} \Rightarrow OA^۲=OH^۲+AH^۲$$

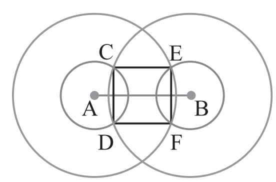
$$OA^۲=۳۶+\frac{۸۱}{۴}=\frac{۲۲۵}{۴}\Rightarrow OA=\frac{۱۵}{۲}$$

بنابراین

$$AM=OA-OM=\frac{۱۵}{۲}-۶=\frac{۳}{۲}$$



۹۸۸ **۳** نقطـهٔ A از دو نقطـهٔ C و D بـه یک فاصله اسـت، پس A روی عمودمنصف CD اسـت. با استدلالی مشـابه B روی عمودمنصف EF است. پس AB عمودمنصف CD و EF اسـت. یعنی CD و EF موازی هم و عمود بر AB هستند. همین‌طور فاصلهٔ CE از AB برابر با فاصلهٔ DF از AB است، بنابرایـن $AB||CE||DF$. در نتیجـه دو خط مـوازی CD و EF عمود بر دو خط موازی DF و CE هستند. بنابراین چهارضلعی مورد نظر مستطیل است.



۹۸۹ **۱** با دو بار استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

$$\triangle ABC: ON||BC\Rightarrow \frac{AN}{NB}=\frac{OA}{OC} \qquad (۱)$$

$$\triangle ABD: OM||AD\Rightarrow \frac{BM}{AM}=\frac{OB}{OD} \qquad (۲)$$

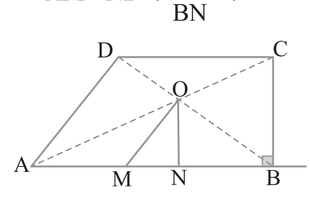
از طرف دیگر،

$$DC||AB \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیهٔ اساسی}} \triangle ODC\sim\triangle OBA\Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD} \quad (۳)$$

بنابراین

$$\text{از (۱)، (۲) و (۳)}\Rightarrow \frac{AN}{NB}=\frac{BM}{AM}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب}}\frac{AB}{NB}=\frac{AB}{AM}$$

$$AM=NB\Rightarrow \frac{AM}{BN}=۱$$



۹۹۰ **۲** ارتفـاع ذوزنقه‌هـا را رسـم می‌کنیـم و از رأس B پاره‌خط BM را موازی AD رسـم می‌کنیم تا ذوزنقـهٔ ABCD به متوازی‌الاضلاع ABMD و مثلث BMC تقسـیم شـود (شـکل زیر را ببینید). در این صورت $DM=۵$ و $MC=۴$. با فرض $MN=x$ نتیجه می‌گیریم $ON=x-۵$. بنابراین

$$S_{ABNM}=S_{MNCD}\Rightarrow \frac{۱}{۲}(h)(۵+x)=\frac{۱}{۲}(h')(۹+x)$$

$$\frac{h}{h'}=\frac{۹+x}{۵+x}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{h}{h+h'}=\frac{x+۹}{۲x+۱۴} \qquad (۱)$$

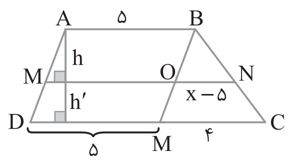
از طرف دیگر،

$$ON||MC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle OBN\sim\triangle MBC$$

$$\frac{ON}{MC}=\frac{h}{h+h'}\Rightarrow \frac{x-۵}{۴}=\frac{h}{h+h'} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)}\frac{x+۹}{۲x+۱۴}=\frac{x-۵}{۴}\Rightarrow ۲x^۲+۴x-۷۰=۴x+۳۶$$

$$۲x^۲=۱۰۶\Rightarrow x^۲=۵۳\Rightarrow x=\sqrt{۵۳}$$



۹۹۱ **۳** **راه‌حـل اول** فـرض کنیـد $DA=x$ ، پـس بنابـر فـرض $DG=۳DA$ نتیجه می‌گیریم $AG=۲x$ ، بنابراین

$$AF||ED\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle AFG\sim\triangle DEG$$

$$\frac{S_{AFG}}{S_{DEG}}=(\frac{AG}{GD})^۲=(\frac{۲x}{۳x})^۲=\frac{۴}{۹} \qquad (۱)$$

در ضمن دو مثلث GEC و GED دارای ارتفاع مشترک نظیر رأس G هستند، پس نسـبت مسـاحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی اسـت که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، پس

$$\frac{S_{GED}}{S_{GEC}}=\frac{ED}{EC}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow S_{GED}=\frac{۲}{۷}S_{GEC} \qquad (۲)$$

اکنون از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $S_{AFG}=\frac{۸}{۶۳}S_{GEC}$. از طرف دیگر،

$$AB||DC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle AGB\sim\triangle DGC$$

$$\frac{S_{AGB}}{S_{DGC}}=(\frac{AG}{DG})^۲=(\frac{۲x}{۳x})^۲=\frac{۴}{۹}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل}}\frac{S_{ABCD}}{S_{DGC}}=\frac{۵}{۹} \qquad (۳)$$

درضمـن دو مثلـث GDC و GEC دارای ارتفـاع مشـترک نظیـر از رأس A هستند، پس

$$\frac{S_{GDC}}{S_{GEC}}=\frac{DC}{EC}=\frac{۵}{۷} \qquad (۴)$$

اکنون از تساوی‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم $S_{ABCD}=\frac{۲۵}{۶۳}S_{GEC}$. بنابراین

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۸}{۶۳}S_{GEC}}{\frac{۲۵}{۶۳}S_{GEC}}=\frac{۸}{۲۵}\Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}}=\frac{۸}{۲۵}\times۱۰۰=۳۲\%$$

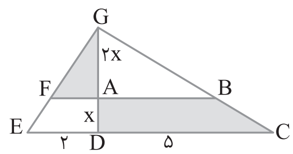
راه‌حل دوم با فرض $AD=x$ نتیجه می‌گیریم $AG=۲x$. بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{GB}{BC}=\frac{GA}{AD}=۲$ و $\frac{GF}{FE}=\frac{GA}{AD}=۲$. در نتیجه اندازه‌های روی شکل به‌دست می‌آیند. ارتفاع GH را رسم می‌کنیم تا FB را در H' قطع کند. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $\frac{GH'}{HH'}=۲$. پس

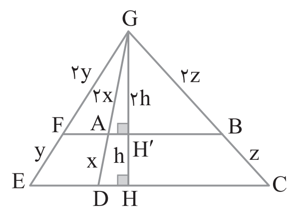
$$\triangle GED: AF||ED \Rightarrow \frac{AF}{ED}=\frac{GF}{GE} \Rightarrow \frac{AF}{۲}=\frac{۲y}{۳y} \Rightarrow AF=\frac{۴}{۳}$$

$$\triangle GDC: AB||DC \Rightarrow \frac{AB}{DC}=\frac{GB}{GC} \Rightarrow \frac{AB}{۵}=\frac{۲z}{۳z} \Rightarrow AB=\frac{۱۰}{۳}$$

بنابراین

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}(۲h)(AF)}{\frac{۱}{۲}h(AB+DC)}=\frac{۲\times\frac{۴}{۳}}{\frac{۱۰}{۳}+۵}=\frac{۸}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}}=\frac{۸}{۲۵}\times ۱۰۰=۳۲٪$$



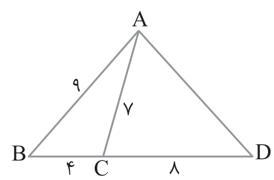


۹۹۲ (۱) بنابر قضیهٔ استوارت،

$$AB^۲\times CD+AD^۲\times BC=AC^۲\times BD+BC\times CD\times BD$$

$$۸۱\times ۸+۴AD^۲=۴۹\times ۱۲+۴\times ۸\times ۱۲ \xrightarrow{\div ۴} ۱۶۲+AD^۲=۱۴۷+۹۶$$

$$AD^۲=۸۱ \Rightarrow AD=۹$$



۹۹۳ (۴) توجه کنید که شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر قطر دایرهٔ کوچک‌تر است (شکل زیر را ببینید)، پس اگر OM را رسم کنیم، آن‌گاه زاویهٔ M قائمه است. پس عمود OM وتر CD را نصف می‌کند یعنی $CM=MD$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MA\times MB=MC\times MD \xrightarrow{MC=MD} MA\times MB=MD^۲ \quad (۱)$$

درضمن طول کمان AC از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

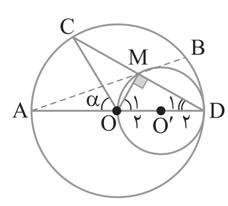
$$\text{طول کمان } AC=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R) \Rightarrow \frac{۴\pi}{۳}=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}۲\pi\times ۴$$

$$\alpha=۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{AC}=۶۰^\circ$$

بنابراین $\hat{D}_۱=۳۰^\circ$، پس $\hat{O}_۱=۶۰^\circ$. در نتیجه

$$\triangle OMD: \hat{O}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow MD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴=۲\sqrt{۳}$$

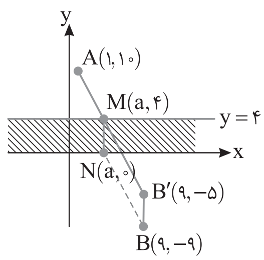
بنابر برابری (۱)، $MA\times MB=MD^۲=(۲\sqrt{۳})^۲=۱۲$

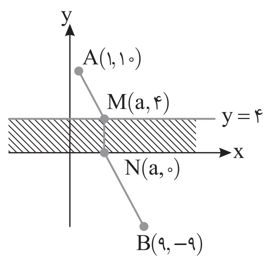


۹۹۴ (۱) با توجه به شکل سمت چپ پاره‌خط MN موازی محور y است. پس طول مینیمم خط شکستهٔ AMNB همان مسئلهٔ احداث پُل است. در نتیجه باید نقطهٔ B را در راستای محور y به اندازهٔ ۴ واحد (طول MN) به بالا انتقال دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم، سپس از B' به A وصل می‌کنیم تا M به‌دست آید. سپس عمود MN مسیر مینیمم AMNB را ایجاد می‌کند. طول این مسیر برابر $AB'+MN$ یعنی $AB'+۴$ است.

$$AB'=\sqrt{(۹-۱)^۲+(۱۰+۵)^۲}=\sqrt{۶۴+۲۲۵}=\sqrt{۲۸۹}=۱۷$$

پس طول مسیر مینیمم مساوی $۱۷+۴=۲۱$ است.





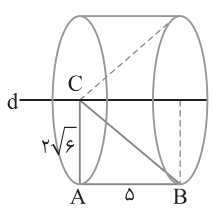
۹۹۵ (۴) از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول خط d یک استوانه که از آن مخروطی جدا شده است به‌دست می‌آید به‌طوری‌که ارتفاع استوانه و مخروط برابر ۵ و شعاع قاعدهٔ هر دو آن‌ها $۲\sqrt{۶}$ است.

$$\text{حجم استوانه}=\pi R^۲h=\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)=۲۴\times ۵\pi$$

$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h=\frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)=\frac{۲۴\times ۵}{۳}\pi$$

بنابراین

$$\text{حجم خواسته شده}=۲۴\times ۵\pi-\frac{۲۴\times ۵}{۳}\pi=\frac{۲\times ۲۴\times ۵}{۳}\pi=۸۰\pi$$



۹۹۶ (۴) **راه‌حل اول** بنابر رابطه‌های طولی در دایره تساوی زیر برقرار است:

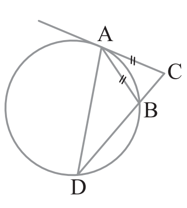
$$CA^۲=CB\times CD$$

بنابر قضیهٔ استوارت در مثلث ADC،

$$AC^۲\times BD+AD^۲\times BC=AB^۲\times DC+BD\times BC\times DC$$

$$\xrightarrow[AB=AC]{AC^۲=CB\times CD} CB\times CD\times BD+AD^۲\times BC$$
$$=CB\times CD\times DC+BD\times BC\times DC$$

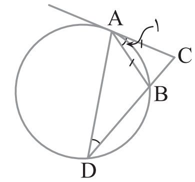
$$AD^۲\times BC=CB\times CD\times CD \Rightarrow AD^۲=CD^۲ \Rightarrow AD=CD$$



راه‌حل دوم زاویهٔ ظلی A_1 و زاویهٔ محاطی D برابرند، زیرا مطابق شکل زیر

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\\ \hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{D}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{(زز)}\triangle ABC\sim\triangle DAC$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{DC}\xrightarrow{AB=AC}AD=DC$$



۹۹۷ **۲** چهارضلعی ABCD محاطی است، پس زاویه‌های مقابل آن مکمل‌اند (شکل زیر را ببینید)، پس $\hat{A}=۱۲۰^\circ$. با رسم قطر BD و استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle BDC: BD^۲=BC^۲+DC^۲-۲BC\times DC\cos ۶۰^\circ$$

$$BD^۲=۴۹+۸۱-۲(۷)(۹)(\frac{۱}{۲})=۶۷\Rightarrow BD=\sqrt{۶۷}$$

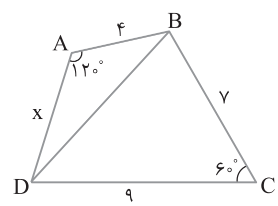
$$\triangle ABD: BD^۲=AB^۲+AD^۲-۲AB\times AD\cos ۱۲۰^\circ$$

$$۶۷=۱۶+x^۲-۲(۴)(x)(-\frac{۱}{۲})$$

$$۶۷=۱۶+x^۲+۴x\Rightarrow x^۲+۴x-۵۱=۰$$

$$x=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶+۴\times۵۱}}{۲}=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۵۱}}{۱}\Rightarrow x=-۲+\sqrt{۵۵}$$

بنابراین $x+۲$ مساوی $\sqrt{۵۵}$ است. دقت کنید که $x=-۲-\sqrt{۵۵}$ غیرقابل قبول است.



۹۹۸ **۱** کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا از دو نقطهٔ A و B دایره‌ای به قطر AB است. پس مرکز دایره وسط AB و شعاع آن نصف طول پاره خط AB است:

$$O=\frac{A+B}{۲}=(-۱,\ ۳)\ ,\quad R=\frac{AB}{۲}=\frac{\sqrt{۳۶+۱۶}}{۲}=\frac{\sqrt{۵۲}}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=\frac{۵۲}{۴}\xrightarrow{y=۰}(x+۱)^۲+۹=\frac{۵۲}{۴}\Rightarrow(x+۱)^۲=۴$$

$x+۱=۲$ یا $x+۱=-۲\Rightarrow x=۱$ یا $x=-۳$

۹۹۹ **۲** در شکل زیر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و گذرنده از نقطهٔ $A(۱,-۴)$ بر خط $۴x+۳y=۰$ و محور y مماس است. چون دایره بر محور y مماس است، پس طول مرکز آن برابر R است، بنابراین $O(R,\beta)$ مرکز دایره است و

$$\text{فاصلهٔ O تا محور y}=\text{فاصلهٔ O تا خط}(۴x+۳y=۰)\Rightarrow R=\frac{|۴R+۳\beta|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}$$

$$۵R=۴R+۳\beta,\quad -۵R=۴R+۳\beta$$

مرکز O در ناحیهٔ چهارم مختصات قرار دارد، پس β باید منفی باشد:

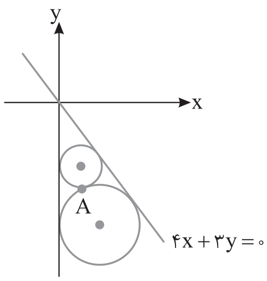
$$-۵R=۴R+۳\beta\Rightarrow\beta=-۳R\Rightarrow O(R,-۳R)$$

بنابراین

$$OA=R\Rightarrow\sqrt{(R-۱)^۲+(-۳R+۴)^۲}=R$$

$$R^۲+۱-۲R+۹R^۲+۱۶-۲۴R=R^۲\Rightarrow ۹R^۲-۲۶R+۱۷=۰$$

$$R=\frac{۲۶\pm\sqrt{۲۶\times۲۶-۴\times۹\times۱۷}}{۱۸}=\frac{۱۳\pm۴}{۹}\Rightarrow R=\frac{۱۷}{۹},\ R=۱$$



۱۰۰۰ **۳** دایرهٔ به قطر FF' بیضی را در نقطهٔ M قطع کرده است، پس زاویهٔ M محاطی و روبه‌رو به قطر FF' است، پس $\hat{M}=۹۰^\circ$، یعنی مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر بنابر فرض،

$$۲b=۲\sqrt{۷}\Rightarrow b=\sqrt{۷}\ ,\quad ۲a=۸\Rightarrow a=۴$$

پس

$$c^۲=a^۲-b^۲=۱۶-۷=۹\Rightarrow c=۳$$

بنابراین

$$\triangle MFF': MF^۲+MF'^۲=FF'^۲=(۲c)^۲=۳۶\qquad(۱)$$

درضمن $MF+MF'=۲a=۸$، پس

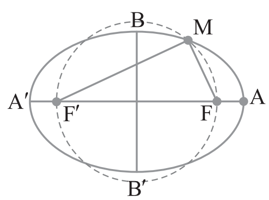
$$(MF+MF')^۲=۶۴\Rightarrow MF^۲+MF'^۲+۲MF\times MF'=۶۴$$

$$\xrightarrow{\text{از }(۱)}۳۶+۲MF\times MF'=۶۴\Rightarrow MF\times MF'=۱۴$$

در نتیجه $MF\times MF'=۱۴$ و $MF+MF'=۸$. با فرض $S=۸$ و $P=۱۴$ می‌توان نوشت

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۸x+۱۴=۰\Rightarrow x=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴-۴\times۱۴}}{۲}=۴\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین فاصلهٔ M از یک کانون $۴+\sqrt{۲}$ و از کانون دیگر $۴-\sqrt{۲}$ است، پس فاصلهٔ M تا کانون نزدیک‌تر $۴-\sqrt{۲}$ است.



۱۰۰۱ **۲** سهمی $y^۲+ay+bx+۱=۰$ افقی است، پس عرض رأس سهمی با عرض کانون آن برابر و مساوی -۲ است. معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$(y+\frac{a}{۲})^۲-\frac{a^۲}{۴}=-bx-۱\Rightarrow(y+\frac{a}{۲})^۲=-bx-۱+\frac{a^۲}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{عرض رأس سهمی }-۲\text{ است}}-\frac{a}{۲}=-۲\Rightarrow a=۴$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(y+۲)^۲=-bx+۳\Rightarrow(y+۲)^۲=-b(x-\frac{۳}{b})$$

بـا فـرض $b<۰$ نتیجه می‌گیریم دهانهٔ سـهمی رو به راسـت اسـت و رأس آن $S(\alpha,\beta)=(\frac{۳}{b},-۲)$ است و $۴a=-b$، پس $a=\frac{-b}{۴}$. مختصات کانون این سهمی به‌صورت مقابل است: $F(a+\alpha,\beta)=(-\frac{b}{۴}+\frac{۳}{b},-۲)=(-\frac{۱}{۴},-۲)$

بنابراین

$$-\frac{b}{۴}+\frac{۳}{b}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{-b^۲+۱۲}{۴b}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴b^۲-۴b-۴۸=۰$$

$$b^۲-b-۱۲=۰\Rightarrow(b-۴)(b+۳)=۰\Rightarrow b=۴ \text{ یا } b=-۳$$

پس کمترین مقدار b برابر ۳- است.

۱۰۰۲ (۴) ابتدا ماتریس $A^۲$ و سپس درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۳$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲&۱&۵\\-۳&۰&۴\\۱&۰&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۵\\-۳&۰&۴\\۱&۰&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۲&۲۴\\-۲&-۳&-۷\\۴&۱&۹\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۶&۲&۲۴\\-۲&-۳&-۷\\۴&۱&۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۵\\-۳&۰&۴\\۱&۰&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۰&۶&۸۶\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

۱۰۰۳ (۳) با فرض $B=\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۵\end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم

$$B^{-۱}=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۴&۲\end{bmatrix}$$

و با فرض $C=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۴&۳\end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $C^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}$

اکنون طرفین رابطهٔ ماتریسی داده شده را از چپ در $B^{-۱}$ و از راست در $C^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۵\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۴&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۸\end{bmatrix}\Rightarrow X=B^{-۱}\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۸\end{bmatrix}C^{-۱}$$

$$X=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۴&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۸\end{bmatrix}\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۲۰&-۲۴\\-۱۶&۱۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵&۶\\۴&-۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۷\\-۴&-۴\end{bmatrix}$$

۱۰۰۴ (۳) حاصل دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}-۴&۱&۱\\۱&۲-x&۱\\۳&۲&۳-x\end{vmatrix}=۰\Rightarrow -۴(-۱)^۲\begin{vmatrix}۲-x&۱\\۲&۳-x\end{vmatrix}$$

$$+۱(-۱)^۳\begin{vmatrix}۱&۱\\۳&۳-x\end{vmatrix}+۱(-۱)^۴\begin{vmatrix}۱&۲-x\\۳&۲\end{vmatrix}=۰$$

$$-۴(۶+x^۲-۵x-۲)-۱(۳-x-۳)+۱(۲-۶+۳x)=۰$$

$$-۱۶-۴x^۲+۲۰x+x-۴+۳x=۰$$

$$-۴x^۲+۲۴x-۲۰=۰\xrightarrow[-۴]{\text{تقسیم بر}}x^۲-۶x+۵=۰$$

$$(x-۱)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۵$$

۱۰۰۵ (۱) طول وتر این مثلث $۲x+۳$ است. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$(۲x+۳)^۲=(۲x+۱)^۲+(x+۱)^۲$$

$$۴x^۲+۹+۱۲x=۴x^۲+۱+۴x+x^۲+۱+۲x\Rightarrow x^۲-۶x-۷=۰$$

$$(x-۷)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۷\ ,\ x=-۱$$

مقـدار $x=-۱$ قابـل قبول نیسـت چـون طول ضلـع $x+۱$ بـه‌ازای آن صفر می‌شود. به‌ازای $x=۷$ اندازهٔ اضلاع مثلث برابر ۱۷، ۱۵ و ۸ هستند، بنابراین

$$S=\frac{۱}{۲}(۸)(۱۵)=۶۰$$

۱۰۰۶ (۳) در ذوزنقـهٔ متساوی‌السـاقین محیطـی حاصل‌ضـرب دو قاعـده مساوی مربع قطر دایرهٔ محاطی است. اگر R شعاع دایرهٔ محاطی باشد، آن‌گاه

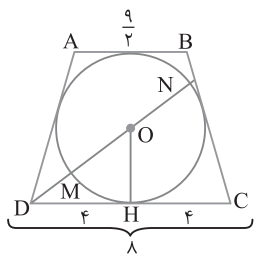
$$AB\times DC=۴R^۲\Rightarrow\frac{۹}{۲}\times۸=۴R^۲\Rightarrow R^۲=۹\Rightarrow R=۳$$

اکنون از مرکز O به رأس D خطی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطـع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصلهٔ نقاط دایره تا رأس D هسـتند. مسلماً $DN=DO+R$. برای به‌دست آوردن اندازهٔ DO در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODH، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

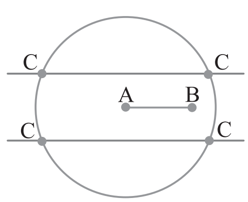
$$OD^۲=OH^۲+DH^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵\Rightarrow OD=۵$$

بنابراین

$$\text{فاصلهٔ دورترین نقاط دایره تا نقطهٔ D}=OD+R=۵+۳=۸$$



۱۰۰۷ (۴) مجموعـهٔ نقاطی کـه از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۷ هسـتند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ است و مجموعهٔ نقاطی که از AB به فاصلهٔ ۵ هستند دو خط مـوازی AB در طرفین آن اسـت. نقاط تلاقی ایـن دو خط موازی با دایره، چهار نقطه است که جواب این سؤال هستند.

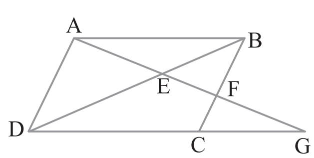


۱۰۰۸ (۱) بنابر قضیهٔ اساسی تشابه،

$$AD||BF\Rightarrow\triangle ADE\sim\triangle FBE\Rightarrow\frac{AE}{EF}=\frac{DE}{BE}\quad(۱)$$

$$AB||DG\Rightarrow\triangle AEB\sim\triangle GED\Rightarrow\frac{DE}{EB}=\frac{EG}{AE}\quad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)}\frac{AE}{EF}=\frac{EG}{AE}\Rightarrow AE^۲=EF\times EG$$



۱۰۰۹ (۱) با توجه به شکل زیر، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند زیرا $AB||DC$. پس

$$\triangle OAB\sim\triangle OCD\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{DC}$$

$$=\frac{5}{9}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{OA}{AC}=\frac{OB}{BD}=\frac{5}{14}$$

بنابراین

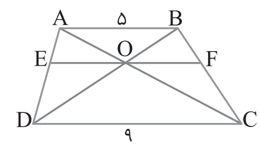
$$\triangle ADC: OE||DC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{OE}{DC}=\frac{OA}{AC}$$

$$\frac{OE}{9}=\frac{5}{14}\Rightarrow OE=\frac{45}{14}$$

$$\triangle BDC: OF||DC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{OF}{DC}=\frac{OB}{BD}$$

$$\frac{OF}{9}=\frac{5}{14}\Rightarrow OF=\frac{45}{14}$$

پس $EF=OE+OF=\frac{90}{14}=\frac{45}{7}$.



۱۰۱۰ (۲) به کمک قضیهٔ تالس x را به دست می‌آوریم:

$$AB||DC\Rightarrow\frac{EA}{AD}=\frac{EB}{BC}\Rightarrow\frac{5}{x}=\frac{3x-4}{4}\Rightarrow 3x^2-4x-20=0$$

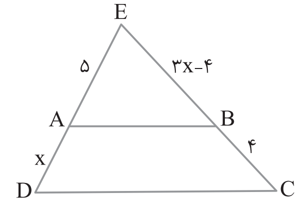
$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+240}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{3}\Rightarrow x=\frac{10}{3}\ \text{یا}\ x=-2$$

مسلماً $x=-2$ قابل قبول نیست. پس با فرض $x=\frac{10}{3}$ مسئله را حل می‌کنیم:

$$AB||DC\Rightarrow\triangle ABE\sim\triangle DCE$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{DCE}}=(\frac{EA}{ED})^2=(\frac{5}{5+x})^2\Rightarrow\frac{S_{ABE}}{S_{DCE}}=(\frac{5}{5+\frac{10}{3}})^2=\frac{25}{\frac{25\times25}{9}}=\frac{9}{25}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{ABE}}{S_{ABCD}}=\frac{9}{16}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{16}{9}S_{ABE}$$



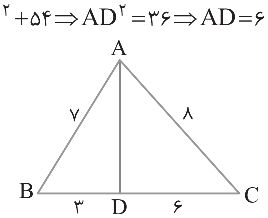
۱۰۱۱ (۲) با استفاده از قضیهٔ استوارت،

$$AB^2\times DC+AC^2\times BD=AD^2\times BC+BD\times DC\times BC$$

$$49\times6+64\times3=AD^2\times9+3\times6\times9\xrightarrow{\div3}49\times2+64$$

$$=AD^2\times3+6\times9$$

$$162=3AD^2+54\Rightarrow AD^2=36\Rightarrow AD=6$$



۱۰۱۲ (۳) از مرکز O به نقطهٔ M وصل می‌کنیم در این صورت $O\hat{M}D$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر OD است، پس $O\hat{M}D=90^\circ$، بنابراین OM بر وتر CD عمود است. پس OM وتر CD را نصف می‌کند، یعنی

$$CM=MD\quad(1)$$

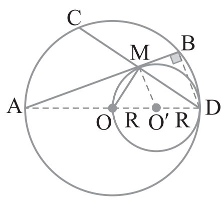
$$A\hat{M}O'=\hat{B}=90^\circ\Rightarrow MO'||BD$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{AM}{MB}=\frac{AO'}{O'D}=\frac{3R}{R}=3\Rightarrow AM=3MB\qquad(2)$$

روابط طولی در دایره: $MA\times MB=MC\times MD$

$$\xrightarrow{\text{از (1) و (2)}}3MB\times MB=MC\times MC$$

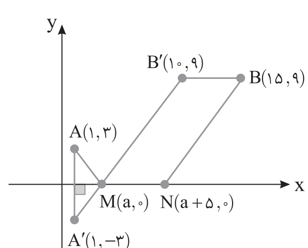
$$\frac{MC^2}{MB^2}=3\Rightarrow\frac{MC}{MB}=\sqrt{3}$$



۱۰۱۳ (۳) با توجه به شکل و موقعیت نقاط A، B، M و N این سؤال همان مسئلهٔ شبه‌هرون است که می‌خواهیم از A به B برویم به‌طوری که $MN=5$ قسمتی از مسیر در ساحل رودخانه باشد. برای تعیین مسیر مینیمم ابتدا B را به اندازهٔ ۵ واحد در راستای محور x به طرف A منتقل می‌کنیم تا به B′ برسیم و بازتاب A را نسبت به محور x نقطهٔ A′ می‌نامیم. از A′ به B′ وصل می‌کنیم تا محور x در نقطهٔ M قطع شود. مسیر AMNB مسیر مینیمم است و طول آن برابر $A'B'+BB'$ است:

$$\begin{cases}A'(1,-3)\\B'(10,9)\end{cases}\Rightarrow A'B'=\sqrt{(10-1)^2+(9+3)^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$$

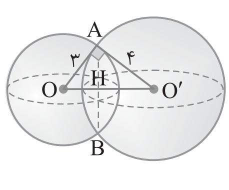
طول مسیر مینیمم $=A'B'+BB'=15+5=20$



۱۰۱۴ (۴) تلاقی دو کره یک دایره است. در شکل AH شعاع دایرهٔ مورد نظر است. چون $OA=3$، $O'A=4$ و $OO'=5$، پس مثلث OAO' قائم‌الزاویه است. بنابراین با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AH\times OO'=OA\times O'A\Rightarrow AH\times5=3\times4\Rightarrow AH=\frac{12}{5}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi AH^2=\pi(\frac{12}{5})^2=\frac{144}{25}\pi=5/76\pi$$



۱۰۱۵ (۴) دو زاویهٔ محاطی N و D روبه‌رو به یک کمان هستند، پس مساوی‌اند. مثلث ABN متساوی‌الساقین است

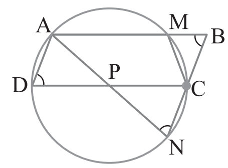
$$\hat{D}=\hat{N} \xrightarrow{\hat{D}=\hat{B}} \hat{B}=\hat{N}$$

در ضمن بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب،

$$\begin{cases} AB||DC \\ BN \text{ مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{B}=P\hat{C}N$$

$\xrightarrow{\hat{B}=\hat{N}} \hat{N}=P\hat{C}N \Rightarrow$ مثلث PCN متساوی‌الساقین است

دو زاویهٔ $P\hat{C}N$ و $P\hat{A}D$ محاطی روبه‌رو به کمان DN هستند، پس برابرند. در نتیجه مثلث PAD با مثلث PCN متشابه و در نتیجه متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر دو وتر AM و DC موازی‌اند، پس دو کمان AD و MC که بین آن‌ها هستند، مساوی‌اند، پس $AD=MC$. در ضمن $AD=BC$، پس $BC=MC$، یعنی مثلث BMC متساوی‌الساقین است. بنابراین در این شکل چهار مثلث متساوی‌الساقین ABN، PCN، PAD و BMC وجود دارد.



۱۰۱۶ (۱) از B به C وصل کرده و با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle ABC: BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}-۲AB\times AC\cos ۶۰^\circ$$

$$BC^{۲}=۲۵+۴۹-۲(۵)(۷)(\frac{۱}{۲})=۳۹$$

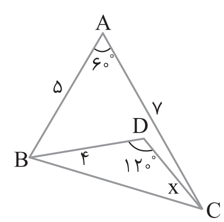
$$\triangle BDC: BC^{۲}=BD^{۲}+DC^{۲}-۲BD\times DC\cos ۱۲۰^\circ$$

$$۳۹=۱۶+x^{۲}-۲(۴)(x)(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۳۹=۱۶+x^{۲}+۴x$$

$$x^{۲}+۴x-۲۳=۰ \Rightarrow x=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶+۴\times۲۳}}{۲}=-۲\pm\sqrt{۴+۲۳}=-۲\pm\sqrt{۲۷}$$

مسلماً $x=-۲-\sqrt{۲۷}$ قابل قبول نیست، پس $x=-۲+\sqrt{۲۷}$. بنابراین

$$x+۲=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳}$$



۱۰۱۷ (۴) بنابر فرض سؤال وتر AB به طول $۲\sqrt{۲۱}$ است، پس $AH=\sqrt{۲۱}$. با به‌دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم:

$$OH=\frac{|۵+۳۶-۱۵|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲$$

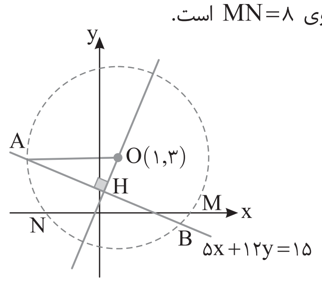
$$\triangle OAH: OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲}=۴+۲۱=۲۵ \Rightarrow OA=۵ \Rightarrow R=۵$$

معادلهٔ دایره: $(x-۱)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۲۵$

اکنون نقاط برخورد این دایره با محور x را تعیین می‌کنیم:

$$y=۰ \Rightarrow (x-۱)^{۲}+۹=۲۵ \Rightarrow (x-۱)^{۲}=۱۶ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۴ \Rightarrow x=۵ \\ x-۱=-۴ \Rightarrow x=-۳ \end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور x نقطه‌های $M(۵,۰)$ و $N(-۳,۰)$ است و فاصلهٔ این دو نقطه مساوی $MN=۸$ است.



۱۰۱۸ (۱) مطابق شکل مرکز دایره $O(\alpha, R)$ است. در واقع عرض مرکز برابر شعاع دایره است. در ضمن فاصلهٔ مرکز O از دو خط $۳x-۴y=۰$ و $y=۰$ برابر است.

فاصلهٔ O تا $(۳x-۴y=۰)$ = فاصلهٔ O تا $(y=۰)$

$$|R|=\frac{|۳\alpha-۴R|}{\sqrt{۹+۱۶}} \Rightarrow R=\frac{|۳\alpha-۴R|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۵R=۳\alpha-۴R \\ ۵R=-۳\alpha+۴R \end{cases}$$

چون O در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس باید α مثبت باشد:

$$۵R=۳\alpha-۴R \Rightarrow ۳\alpha=۹R \Rightarrow \alpha=۳R \Rightarrow O(۳R, R)$$

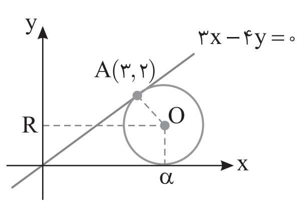
از طرف دیگر،

$$OA=R \Rightarrow \sqrt{(۳R-۳)^{۲}+(R-۲)^{۲}}=R \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$۹R^{۲}+۹-۱۸R+R^{۲}+۴-۴R=R^{۲} \Rightarrow ۹R^{۲}-۲۲R+۱۳=۰$$

$$R=\frac{۲۲\pm\sqrt{۲۲\times۲۲-۴\times۹\times۱۳}}{۲\times۹}=\frac{۱۱\pm\sqrt{۱۱\times۱۱-۹\times۱۳}}{۹}$$

$$=\frac{۱۱\pm\sqrt{۱۲۱-۱۱۷}}{۹}=\frac{۱۱\pm۲}{۹} \Rightarrow R=\frac{۱۳}{۹}, R=۱$$



۱۰۱۹ (۲) بنابر فرض سؤال،

$$۲b=۴\sqrt{۶} \Rightarrow b=۲\sqrt{۶}, \quad ۲a=۱۴ \Rightarrow a=۷$$

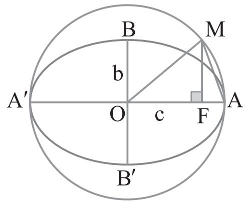
پس $c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۴۹-۲۴=۲۵ \Rightarrow c=۵$

نقطهٔ O مرکز بیضی و در نتیجه مرکز دایرهٔ به قطر AA' است، پس $OM=OA=۷$.

$$\triangle OMF: MF^{۲}=OM^{۲}-OF^{۲} \Rightarrow MF^{۲}=a^{۲}-c^{۲}=b^{۲} \Rightarrow MF=b$$

$$\triangle AMF: AM^{۲}=MF^{۲}+AF^{۲} \xrightarrow[MF=b]{AF=a-c} AM^{۲}=b^{۲}+(a-c)^{۲}$$

$$AM^{۲}=(۲\sqrt{۶})^{۲}+(۷-۵)^{۲}=۲۴+۴=۲۸ \Rightarrow AM=۲\sqrt{۷}$$



۱۰۲۰ (۱) معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$(y+\frac{a}{2})^2=-bx+9+\frac{a^2}{4}$$

چون $y=1$ محور تقارن سهمی است، پس

$$-\frac{a}{2}=1\Rightarrow a=-2$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر در می‌آید:

$$(y-1)^2=-bx+10\Rightarrow (y-1)^2=-b(x-\frac{10}{b})$$

پس این سهمی افقی است و رأس آن $S(h,k)=(\frac{10}{b},1)$ است و چون علامت b مشخص نیست دهانهٔ سهمی یا به چپ یا به راست باز می‌شود. اگر $b>0$، آن‌گاه دهانه سهمی به چپ باز می‌شود $4a=b$، پس $a=\frac{b}{4}$ و

$$\text{معادلهٔ خط هادی}: x=a+h\xrightarrow{x=\frac{13}{4}}\frac{13}{4}=\frac{b}{4}+\frac{10}{b}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{در } 4b}13b=b^2+40\Rightarrow b^2-13b+40=0$$

$$(b-8)(b-5)=0\Rightarrow b=8\,,\,b=5$$

چون این مقادیر در گزینهٔ (۱) وجود دارند، پس لزومی به بررسی حالت $b<0$ نیست.

۱۰۲۱ (۲) ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^4 را پیدا می‌کنیم:

$$A^4=A^2\times A^2=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

۱۰۲۲ (۲) طرفین تساوی $AX=A^{-1}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به‌دست آید:

از طرف دیگر،

$$AX=A^{-1}\Rightarrow X=(A^{-1})^2\qquad(1)$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\frac{3}{4}-1}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&\frac{3}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=-4\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-4&2\\8&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)}X=(A^{-1})^2=\begin{bmatrix}-4&2\\8&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&2\\8&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}32&-14\\-56&25\end{bmatrix}$$

۱۰۲۳ (۳) دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&4&x+5\\x-1&6&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 1(-1)^2\begin{vmatrix}4&x+5\\6&-1\end{vmatrix}+2(-1)^3\begin{vmatrix}-2&x+5\\x-1&-1\end{vmatrix}$$

$$+3(-1)^4\begin{vmatrix}-2&4\\x-1&6\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-4-6x-30)+(-2)(2-x^2-4x+5)$$

$$+3(-12-4x+4)=0\Rightarrow -6x-34+2x^2+8x-14-24-12x=0$$

$$2x^2-10x-72=0\xrightarrow{\div 2}x^2-5x-36=0\Rightarrow(x-9)(x+4)=0$$

$$x=9\,,\,x=-4$$

۱۰۲۴ (۲) طول مستطیل ABCD را x و عرض آن را y در نظر می‌گیریم. بنابر فرض سؤال $x=1/5y-2$ ، بنابراین

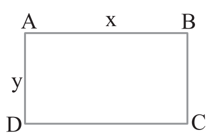
$$S_{ABCD}=192\Rightarrow xy=192\Rightarrow(\frac{3}{2}y-2)y=192$$

$$\frac{3}{2}y^2-2y-192=0\xrightarrow{\text{ضرب در } 2}3y^2-4y-384=0$$

$$y=\frac{4\pm\sqrt{16+4\times3\times384}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{4+1152}}{3}=\frac{2\pm34}{3}\Rightarrow y=12$$

پس $x=16$ ، در نتیجه

$$\text{محیط مستطیل}=2(x+y)=2(16+12)=56$$



۱۰۲۵ (۱) زاویهٔ بین بردار $\vec{a}=(-1,\alpha,1)$ و محور z در فضا برابر 45° است. بنابراین

$$\cos45^\circ=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}\xrightarrow{\vec{k}=(0,0,1)}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2+\alpha^2}\times\sqrt{1}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2+\alpha^2}\Rightarrow\alpha=0$$

بنابراین $\vec{a}=(-1,0,1)$. اکنون به‌جای بردار $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ از بردار $\frac{3}{2}\vec{b}=(-2,1,3)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&1\\-2&1&3\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

توجه کنید که چون $\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}=\frac{3}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$، پس θ زاویهٔ بین بردار $\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}$ و محور z است، بنابراین

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b})\cdot\vec{k}}{|\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}||\vec{k}|}=\frac{(-1,1,-1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{3}\times\sqrt{1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۰۲۶ (۱) در شکل زیر، مثلث $TB'C'$ انتقال‌یافتهٔ مثلث ABC تحت بردار $\overrightarrow{AT}$ و مثلث TPQ ناحیهٔ محدود بین مثلث اولیه و مثلث انتقال‌یافته است. بنابر فرض تست،

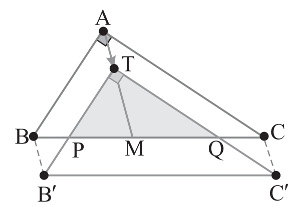
$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۱۶} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، چون اضلاع مثلث TPQ با اضلاع مثلث ABC دوبه‌دو موازی‌اند، پس زاویه‌های این دو مثلث مساوی‌اند. در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث مساوی توان دوم نسبت میانه‌های نظیر آن‌ها است، پس

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}}=\left(\frac{TM}{AM}\right)^۲ \xrightarrow{\text{از (۱)}} \left(\frac{TM}{AM}\right)^۲=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow \frac{TM}{AM}=\frac{۱}{۴} \qquad (۲)$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس $AM=\frac{BC}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$. در نتیجه از (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{TM}{۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow TM=۱\Rightarrow AT=AM-TM=۴-۱=۳$$



۱۰۲۷ (۱) سطر سوم ماتریس A را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\text{سطر سوم حاصل‌ضرب دو ماتریس اول}=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\۳&۷&-۲\end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$A\ \text{سطر سوم}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\۳&۷&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\۷&۱&-۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A مساوی $۷+۱-۵=۳$ است.

۱۰۲۸ (۴) توجه کنید که

$$BA^TA=۵۲I\Rightarrow B\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\-۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۱\\۳&۱\end{bmatrix}=۵۲I$$

$$B\begin{bmatrix}۱۴&۴\\۴&۳\end{bmatrix}=۵۲I \qquad (۱)$$

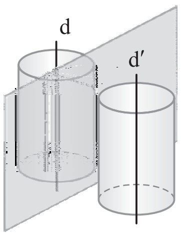
اکنون برای پیدا کردن ماتریس B، طرفین تساوی (۱) را از سمت راست در وارون ماتریس $\begin{bmatrix}۱۴&۴\\۴&۳\end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم. توجه کنید که $\begin{bmatrix}۱۴&۴\\۴&۳\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۳&-۴\\-۴&۱۴\end{bmatrix}$. بنابراین

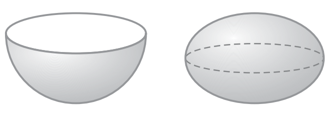
$$B=۵۲I\begin{bmatrix}۱۴&۴\\۴&۳\end{bmatrix}^{-۱}=۵۲I\times\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۳&-۴\\-۴&۱۴\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۵۲}{۲۶}\begin{bmatrix}۳&-۴\\-۴&۱۴\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۳&-۴\\-۴&۱۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&-۸\\-۸&۲۸\end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B برابر ۲۸ است.

۱۰۲۹ (۱) فرض کنید $k>۰$. مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط‌های موازی d و d' به فاصلهٔ k هستند، دو سطح استوانه‌ای با محورهای d و d' هستند (شکل مقابل را ببینید). صفحه‌هایی که بر این دو سطح استوانه‌ای مماس هستند، از دو خط d و d' به یک فاصله هستند که در اینجا تعداد آن‌ها حداکثر ۴ تا است. در واقع دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که هر دو سطح در یک طرف این صفحه‌ها باشند و دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که دو سطح در طرفین این صفحه‌ها باشند. با تغییر مقدار k، تعداد نامتناهی صفحه با این ویژگی خواهیم داشت. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است. در ضمن، چون گزینهٔ (۱) درست است، پس گزینهٔ (۲) نادرست خواهد بود. گزینه‌های (۳) و (۴) در صفحه به‌ترتیب تعریف سهمی و بیضی هستند. در فضا این مکان‌ها سهمی‌گون و بیضی‌گون هستند.





بیضی‌گون   سهمی‌گون

۱۰۳۰ (۲) معادلهٔ استاندارد سهمی به‌صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲-۱۲y=۶\Rightarrow(x-۱)^۲=۱۲y+۶\Rightarrow(x-۱)^۲=۱۲\left(y+\frac{۱}{۲}\right)$$

پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $F(۱,-\frac{۱}{۲})$ است و $۴a=۱۲$، یعنی $a=۳$. بنابراین کانون این سهمی به مختصات زیر است:

$$F'=(\alpha,a+\beta)=\left(۱,۳-\frac{۱}{۲}\right)=\left(۱,\frac{۵}{۲}\right)$$

اکنون مرکز بیضی را پیدا می‌کنیم: $O=\frac{F+F'}{۲}=(۱,۱)$ مرکز بیضی

بنابراین $\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$ = فاصلهٔ مرکز بیضی از مبدأ مختصات

۱۰۳۱ (۳) به کمک قضیهٔ هرون، مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$P=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=۲۱$$

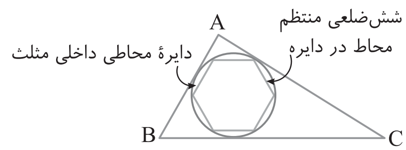
در نتیجه

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}$$

$$=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۶}=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۳\times۲}=\sqrt{۲۱\times۲۱\times۱۶}=۲۱\times۴=۸۴$$

اکنون شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث برابر است با $r=\frac{S}{P}=\frac{۸۴}{۲۱}=۴$. بنابراین

$$۴=۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۶}=۲(۴)\sin ۳۰^\circ=۴$$ = اندازهٔ ضلع شش‌ضلعی منتظم محاطی



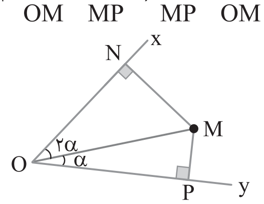
۱۰۳۲ (۴) شکل مسئله به‌صورت زیر است. توجه کنید که

$$\left.\begin{array}{l}\triangle OMN:\sin ۲\alpha=\frac{MN}{OM}\\ \triangle OMP:\sin\alpha=\frac{MP}{OM}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}}\frac{\sin ۲\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{MP}{OM}}$$

$$\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{MN}{MP}\Rightarrow ۲\cos\alpha=\frac{MN}{MP}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMP، $\cos\alpha=\frac{OP}{OM}$. بنابراین

$$۲\times\frac{OP}{OM}=\frac{MN}{MP}\Rightarrow\frac{MN}{MP}=\frac{۲OP}{OM}$$



۱۰۳۳ (۱) از نقطهٔ F عمود HH' و از نقطهٔ E عمود KK' را بر اضلاع AD و BC از مستطیل ABCD وارد می‌کنیم. در نتیجه

$$AM||BN\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle AFM\sim\triangle NFB$$

$$\frac{FH}{FH'}=\frac{AM}{NB}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{FH}{HH'}=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{HH'=DC=۸}\frac{FH}{۸}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow FH=\frac{۱۶}{۳}$$

به‌طور مشابه،

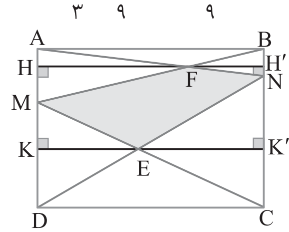
$$DM||NC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle MED\sim\triangle CEN$$

$$\frac{EK}{EK'}=\frac{MD}{CN}=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{EK}{KK'}=\frac{۴}{۹}$$

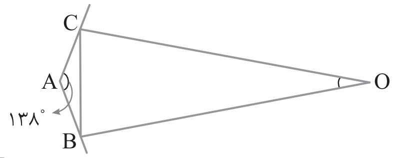
$$\xrightarrow{KK'=DC=۸}\frac{EK}{۸}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow EK=\frac{۳۲}{۹}$$

اکنون می‌توانیم مساحت چهارضلعی MENF را پیدا کنیم:

$$S_{MENF}=S_{AND}-S_{AMF}-S_{MED}$$
$$=\frac{۱}{۲}DC\times AD-\frac{۱}{۲}FH\times AM-\frac{۱}{۲}EK\times MD$$
$$=\frac{۱}{۲}(۸)(۶)-\frac{۱}{۲}(\frac{۱۶}{۳})(۲)-\frac{۱}{۲}(\frac{۳۲}{۹})(۴)$$
$$=۲۴-\frac{۱۶}{۳}-\frac{۶۴}{۹}=\frac{۲۱۶-۴۸-۶۴}{۹}=\frac{۱۰۴}{۹}$$



۱۰۳۴ (۱) در شکل زیر، O نقطهٔ تلاقی نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ کوچک‌تر B و C است. بنابراین $\hat{O}=۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ-\frac{۱۳۸^\circ}{۲}=۲۱^\circ$



۱۰۳۵ (۳) طول وتر ED برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{ED}=۶۰^\circ$. از طرف دیگر، چون $\hat{C}$ زاویه‌ای محاطی است، پس

$$\hat{C}=\frac{\widehat{DEB}}{۲}\Rightarrow ۷۰^\circ=\frac{\widehat{ED}+\widehat{EB}}{۲}=\frac{۶۰^\circ+\widehat{EB}}{۲}\Rightarrow\widehat{EB}=۱۴۰^\circ-۶۰^\circ=۸۰^\circ$$

چون BC قطر دایره است، پس

$$\widehat{BE}+\widehat{ED}+\widehat{DC}=۱۸۰^\circ$$

در نتیجه

$$\widehat{EDC}=۱۸۰^\circ-\widehat{BE}=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

۱۰۳۶ (۳) از فرض $\frac{AC}{BC}=\sqrt{۳}$ نتیجه می‌گیریم $AC=\sqrt{۳}BC$. اکنون با استفاده از رابطهٔ طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^۲=CB\times DC\Rightarrow(\sqrt{۳}BC)^۲=CB\times DC\Rightarrow ۳BC=DC$$

$$\frac{DC}{BC}=\frac{۳}{۱}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{DC-BC}{BC}=\frac{۳-۱}{۱}\Rightarrow\frac{DB}{BC}=۲$$

۱۰۳۷ (۱) شعاع‌های OM و ON به‌ترتیب بر خط‌های مماس AB و BC عمود هستند. پس $\hat{M}=\hat{N}=۹۰$. چون $\hat{B}=۶۰^\circ$، پس در چهارضلعی OMBN می‌توان نوشت

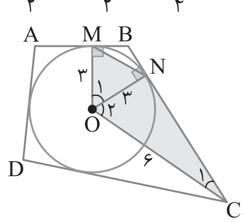
$$\hat{O}_۱+\hat{M}+\hat{B}+\hat{N}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۱+۹۰^\circ+۱۲۰^\circ+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۱=۶۰^\circ$$

از طرف دیگر، دو زاویهٔ مجاور $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در ذوزنقهٔ ABCD مکمل‌اند، پس $\hat{C}=۶۰^\circ$. چون OC نیمساز زاویهٔ C است، پس $\hat{C}_۱=۳۰^\circ$. در نتیجه $\hat{O}_۲=۶۰^\circ$. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ONC:\hat{C}_۱=۳۰^\circ\Rightarrow ON=\frac{۱}{۲}OC\xrightarrow{ON=۳}OC=۶$$

بنابراین

$$S_{OMNC}=S_{OMN}+S_{ONC}$$
$$=\frac{۱}{۲}OM\times ON\sin\hat{O}_۱+\frac{۱}{۲}ON\times OC\sin\hat{O}_۲$$
$$=\frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin ۶۰^\circ+\frac{۱}{۲}(۳)(۶)\sin ۶۰^\circ$$
$$=\frac{۹}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+۹(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$



۱۰۳۸ (۴) نقطهٔ تلاقی قطرهای $x+y=۱$ و $x-y=۳$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow O(۲,-۱)$$ مرکز

همچنین فاصلهٔ مرکز $O(۲,-۱)$ تا خط مماس $۴x+۳y+۵=۰$ برابر شعاع دایره است، یعنی

$$R=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

از طرف دیگر، طول پاره‌خط OM برابر است با

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^۲+(y_M-y_O)^۲}=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

چون $OM>R$، پس نقطهٔ M بیرون دایره است. بنابراین

نزدیک‌ترین فاصلهٔ M از دایره $=OM-R=\sqrt{۵}-۲$

۱۰۳۹ (۳) بنابر فرض سؤال $OO'=۶$، $R=۶a-۱$ و $R'=a^۲-۲$.
چون دو دایره مماس داخلی هستند، پس

$$OO'=|R'-R| \Rightarrow ۶=|a^۲-۲-۶a+۱| \Rightarrow |a^۲-۶a-۱|=۶$$

بنابراین دو حالت داریم:

حالت اول: $a^۲-۶a-۱=۶ \Rightarrow a^۲-۶a-۷=۰ \Rightarrow a=-۱, a=۷$

$a=-۱$ غیرقابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع‌های R و R' منفی می‌شوند.

حالت دوم: $a^۲-۶a-۱=-۶ \Rightarrow a^۲-۶a+۵=۰ \Rightarrow a=۱, a=۵$

$a=۱$ غیرقابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع R' منفی می‌شود.

پس میانگین مقادیر ممکن برای a مساوی $\frac{۷+۵}{۲}=۶$ است.

۱۰۴۰ (۲) چون بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ با بردار $\vec{c}$ موازی است، پس $\vec{a}\times\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی است. در ضمن برای ساده‌تر شدن محاسبات به جای بردار $\vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ از بردار $\frac{۳}{۲}\vec{b}=(-۲,۱,۳)$ استفاده می‌کنیم. در واقع بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با بردار $\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}$ موازی است. توجه کنید که

$$\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۱&\alpha&۲\\-۲&۱&۳\end{vmatrix}=(۳\alpha-۲)\vec{i}-\vec{j}+(-۱+۲\alpha)\vec{k}$$

بنابر فرض سؤال قرار است بردار $\vec{a}\times\frac{۳}{۲}\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی باشد. بنابراین

$$\frac{۳\alpha-۲}{-۱}=\frac{-۱}{۱}=\frac{-۱+۲\alpha}{-۱}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}۳\alpha-۲=۱\Rightarrow\alpha=۱\\-۱+۲\alpha=۱\Rightarrow\alpha=۱\end{cases}$$

پس به‌ازای $\alpha=۱$ دو بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ و $\vec{c}$ موازی‌اند.

۱۰۴۱ (۱) توجه کنید که

$$\begin{bmatrix}۵&-۲\\۴&a\end{bmatrix}_{۲\times۲}\begin{bmatrix}b_۱\\b_۲\end{bmatrix}_{۲\times۱}=\begin{bmatrix}۴b_۱\\۴b_۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۵b_۱-۲b_۲\\۴b_۱+ab_۲\end{bmatrix}_{۲\times۱}=\begin{bmatrix}۴b_۱\\۴b_۲\end{bmatrix}$$

بنابراین $۵b_۱-۲b_۲=۴b_۱\Rightarrow b_۱=۲b_۲ \quad (۱)$

چون b ماتریسی ناصفر است، پس $b_۱, b_۲\neq۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$۴b_۱+ab_۲=۴b_۲ \xrightarrow{\text{از } (۱)} ۸b_۲+ab_۲=۴b_۲ \xrightarrow[b_۲\neq۰]{\text{تقسیم بر } b_۲} ۸+a=۴\Rightarrow a=-۴$$

۱۰۴۲ (۴) توجه کنید که

$$A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۱&۰&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۶&۹&۳\\۷&۸&۴\\۳&۲&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۱&۰&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&&\\&۷&\\&&۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر $۹+۷+۵=۲۱$ است.

۱۰۴۳ (۴) چون $A=\begin{bmatrix}۱&a&۳\\-۱&۱&۱\end{bmatrix}$، پس $A^T=\begin{bmatrix}۱&-۱\\a&۱\\۳&۱\end{bmatrix}$. بنابراین

$$AA^T=\begin{bmatrix}۱&a&۳\\-۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\a&۱\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+۱۰&a+۲\\a+۲&۳\end{bmatrix}$$

چون AA^T ماتریسی ۲×۲ است، $AA^TB=۵۲I$ و $|B|$ تعریف می‌شود، پس B و I ماتریس‌هایی ۲×۲ هستند. اکنون اگر از دو طرف تساوی $AA^TB=۵۲I$ دترمینان بگیریم، به‌دست می‌آید

$$|AA^TB|=|۵۲I|\Rightarrow|AA^T||B|=۵۲^۲|I|$$

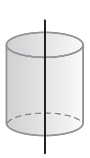
$$\begin{vmatrix}a^۲+۱۰&a+۲\\a+۲&۳\end{vmatrix}\times۱۰۴=۵۲^۲\Rightarrow(۳a^۲+۳۰-(a+۲)^۲)=\frac{۵۲^۲}{۱۰۴}=۲۶$$

$$۳a^۲+۳۰-a^۲-۴-۴a=۲۶\Rightarrow۲a^۲-۴a=۰\Rightarrow۲a(a-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\a=۲\end{cases}$$

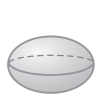
پس مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی $۰+۲=۲$ است.

۱۰۴۴ (۱) خطوطی که بر d عمودند، اگر موازی باشند، در یک صفحه هستند؛ اگر متقاطع باشند، در صفحه‌هایی عمود بر خط d هستند؛ اگر متنافر باشند، هر کدام از آن‌ها در صفحه‌هایی مختلف واقع هستند. در نتیجه چون در فضا بی‌نهایت خط بر یک خط مفروض عمودند، پس خطوط عمود بر یک خط در فضا بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

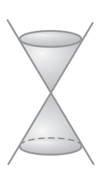
اکنون به نادرستی سایر گزینه‌ها توجه کنید:



مجموعهٔ نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط در فضا روی سطحی استوانه‌ای قرار می‌گیرند. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.



مجموعهٔ نقاطی از فضا که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت به یک اندازه است، شکلی به نام بیضی‌گون است. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.



خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه زاویهٔ یکسان می‌سازند، سطح مخروطی است. پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱۰۴۵ (۳) طرفین معادلهٔ بیضی را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم:

$$۲۵(x-۱)^{۲}+۱۶(y+۱)^{۲}=۱۰۰\Rightarrow\frac{(x-۱)^{۲}}{۴}+\frac{(y+۱)^{۲}}{\frac{۲۵}{۴}}=۱$$

پس این بیضی یک بیضی قائم با مرکز $O'(۱,-۱)$ است و

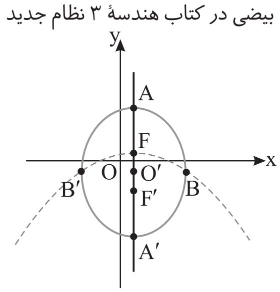
$$\begin{cases} a^{۲}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow a=\frac{۵}{۲} \\ b^{۲}=۴\Rightarrow b=۲ \end{cases}$$

بنابراین $c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=\frac{۲۵}{۴}-۴=\frac{۹}{۴}\Rightarrow c=\frac{۳}{۲}$

با توجه به شکل $O'F'=O'F=c=\frac{۳}{۲}$. چون $OF<OF'$، پس کانون‌ها به مختصات $F(۱,\frac{۱}{۲})$ و $F'(۱,-\frac{۵}{۲})$ هستند. اکنون F رأس و F' کانون سهمی مورد نظر است. با توجه به جایگاه رأس و کانون، این سهمی قائم رو به پایین است و مقدار a در سهمی مساوی $FF'=۳$ است. با توجه به معادلهٔ سهمی قائم رو به پایین،

$$(x-\alpha)^{۲}=-۴a(y-\beta)\Rightarrow(x-۱)^{۲}=-۱۲(y-\frac{۱}{۲})\Rightarrow(x-۱)^{۲}=-۱۲y+۶$$

• توجه کنید معادلهٔ بیضی در کتاب هندسهٔ ۳ نظام جدید حذف شده است.



۱۰۴۶ (۱) شکل مسئله به‌صورت زیر است. سه مثلث CMN، AME و BEN به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند. فرض می‌کنیم طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع MEN برابر a باشد. توجه کنید که

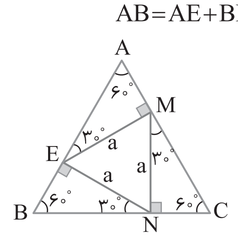
$$\triangle AME:\hat{A}=۶۰^{\circ}\Rightarrow EM=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AE\xrightarrow{EM=a}AE=\frac{۲a}{\sqrt{۳}}\quad(۱)$$

$$\hat{E}=۳۰^{\circ}\Rightarrow AM=\frac{AE}{۲}\xrightarrow{\text{از }(۱)}AM=\frac{a}{\sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow{AM=BE}BE=\frac{a}{\sqrt{۳}}\quad(۲)$$

از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$AB=AE+BE=\frac{۲a}{\sqrt{۳}}+\frac{a}{\sqrt{۳}}=\frac{۳a}{\sqrt{۳}}=a\sqrt{۳}$$



چون مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و MEN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MEN}}=(\frac{AB}{ME})^{۲}=(\frac{a\sqrt{۳}}{a})^{۲}=۳$$

۱۰۴۷ (۳) با توجه به اندازه‌های روی شکل معلوم می‌شود که

$$\hat{C}_{۱}=۱۸۰^{\circ}-۱۱۵^{\circ}=۶۵^{\circ}$$

اکنون زاویه‌ها را برحسب کمان‌ها می‌نویسیم

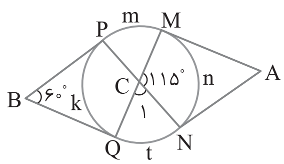
$$\hat{C}_{۱}=\frac{m+t}{۲}\xrightarrow{\hat{C}_{۱}=۶۵^{\circ}}m+t=۱۳۰^{\circ}$$

$$\hat{B}=\frac{m+n+t-k}{۲}\xrightarrow{\hat{B}=۶۰^{\circ}}m+n+t-k=۱۲۰^{\circ}\xrightarrow{m+t=۱۳۰^{\circ}}$$

$$n-k=-۱۰^{\circ}\Rightarrow k-n=۱۰^{\circ}$$

بنابراین

$$M\hat{A}N=\frac{m+k+t-n}{۲}\xrightarrow[k-n=۱۰^{\circ}]{m+t=۱۳۰^{\circ}}M\hat{A}N=\frac{۱۳۰^{\circ}+۱۰^{\circ}}{۲}=۷۰^{\circ}$$



۱۰۴۸ (۴) ابتدا مساحت مثلث را به کمک قضیهٔ هرون به‌دست می‌آوریم.

توجه کنید که $P=\frac{۲۱+۱۷+۱۰}{۲}=۲۴$. در نتیجه

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۴(۲۴-۲۱)(۲۴-۱۷)(۲۴-۱۰)}$$

$$=\sqrt{۲۴\times۳\times۷\times۱۴}=\sqrt{۳\times۸\times۳\times۷\times۲\times۷}=\sqrt{۲۱^{۲}\times۱۶}=۲۱\times۴=۸۴$$

چون $۸۴=۲۱\times۸\times\frac{۱}{۲}$، پس ارتفاع $AH=۸$ وارد بر ضلع به طول ۲۱ است.

با فرض $BC=۲۱$، $AB=۱۰$ و $AC=۱۷$ شکل مسئله به‌صورت زیر است. اکنون چون M و N وسط‌های ضلع‌ها هستند، پس

$$MN=\frac{BC}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$$

از طرف دیگر، چون $MN||BC$، پس چهارضلعی MNPH ذوزنقه است. بنابراین ارتفاع AH بر MN نیز عمود است. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ABH:MH'||BH\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{AM}{BM}=\frac{AH'}{HH'}\xrightarrow{AM=BM}$$

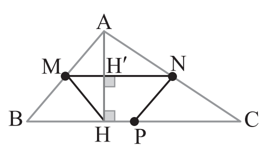
$$AH'=HH'=\frac{۱}{۲}AH\Rightarrow HH'=۴$$

$$\triangle ABH:BH^{۲}=AB^{۲}-AH^{۲}=۱۰^{۲}-۸^{۲}=۳۶\Rightarrow BH=۶$$

پس $PH=BP-BH=\frac{BC}{۲}-BH=\frac{۲۱}{۲}-۶=\frac{۹}{۲}$

در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ MNPH برابر است با

$$S_{MNPH}=\frac{۱}{۲}HH'(MN+PH)=\frac{۱}{۲}(۴)(\frac{۲۱}{۲}+\frac{۹}{۲})=۲\times۱۵=۳۰$$

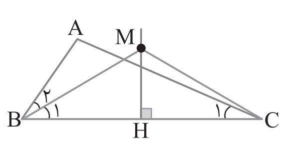


۱۰۴۹ (۳) در شکل زیر، نیمساز زاویهٔ B عمودمنصف ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. از M به C وصل می‌کنیم. چون M روی عمودمنصف BC است، پس

$$MB=MC\Rightarrow\hat{B}_{۱}=M\hat{C}B$$

چون زاویهٔ $C_{۱}$ قسمتی از زاویهٔ MCB است، پس

$$M\hat{C}B>\hat{C}_{۱}\xrightarrow{M\hat{C}B=\hat{B}_{۱}}\hat{B}_{۱}>\hat{C}_{۱}\xrightarrow{\hat{B}_{۱}=\frac{\hat{B}}{۲}}\frac{\hat{B}}{۲}>\hat{C}_{۱}\Rightarrow\hat{B}>۲\hat{C}_{۱}$$

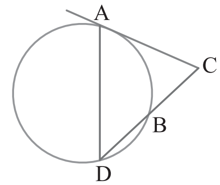


۱۰۵۰ (۴) با استفاده از رابطهٔ طولی در دایره می‌نویسیم

$$CA^۲=CB\times CD\Rightarrow CA^۲=CB(CB+BD)\xrightarrow{DB=BC}$$

$$CA^۲=CB(CB+CB)\Rightarrow CA^۲=۲CB^۲\Rightarrow CA=\sqrt{۲}CB$$

$$\frac{CA}{CB}=\sqrt{۲}$$



۱۰۵۱ (۲) از نقطهٔ O به نقطهٔ A وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OAC قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$\triangle OAC: \hat{C}=۳۰^\circ\Rightarrow OA=\frac{۱}{۲}OC\xrightarrow{OA=۶}OC=۱۲$$

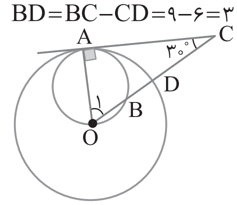
$$\hat{O}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OC\xrightarrow{OC=۱۲}AC=۶\sqrt{۳}$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در دایرهٔ کوچک‌تر می‌نویسیم

$$CA^۲=CB\times CO\Rightarrow(۶\sqrt{۳})^۲=CB\times ۱۲\Rightarrow ۱۰۸=۱۲CB\Rightarrow BC=۹$$

از طرف دیگر، $CD=OC-OD=۱۲-۶=۶$. بنابراین

$$BD=BC-CD=۹-۶=۳$$



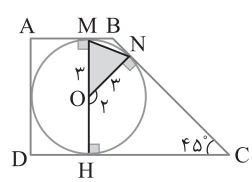
۱۰۵۲ (۳) شعاع OM بر خط مماس AB عمود است. چون $AB||DC$، پس امتداد شعاع OM بر DC عمود است. همین‌طور، شعاع ON بر خط مماس BC عمود است. بنابراین در چهارضلعی ONCH می‌توان نوشت

$$\hat{O}_۲+\hat{N}+\hat{C}+\hat{H}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۲+۹۰^\circ+۴۵^\circ+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\hat{O}_۲=۱۳۵^\circ\xrightarrow{\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ}\hat{O}_۱=۴۵^\circ$$

در نتیجه

$$S_{OMN}=\frac{۱}{۲}OM\times ON\sin\hat{O}_۱=\frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin ۴۵^\circ=\frac{۹}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$



۱۰۵۳ (۲) راه‌حل اول مختصات پیکان‌های $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(-۲,۲,۱)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-۱,-۱,۲)$$

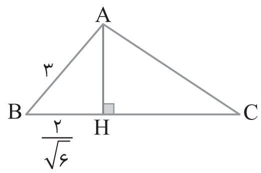
چون پیکان $\overrightarrow{BH}$ تصویر پیکان $\overrightarrow{BA}$ روی پیکان $\overrightarrow{BC}$ است، پس

$$|\overrightarrow{BH}|=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|۲-۲+۲|}{\sqrt{۱+۱+۴}}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$. بنابراین

$$\triangle ABH: AH^۲=AB^۲-BH^۲\Rightarrow AH^۲=۹-\frac{۴}{۶}=۹-\frac{۲}{۳}=\frac{۲۵}{۳}$$

$$AH=\frac{۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$



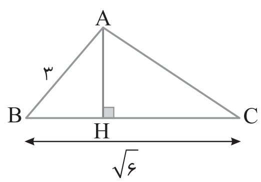
راه‌حل دوم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی پیدا می‌کنیم

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۲&۲&۱\\-۱&-۱&۲\end{vmatrix}=۵\vec{i}+۳\vec{j}+۴\vec{k}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$. بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}AH\times\sqrt{۶}\Rightarrow AH=\frac{۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$



۱۰۵۴ (۳) فرض می‌کنیم شعاع دایرهٔ بزرگ R باشد. قطر AB عمودمنصف قطر DC است. پس

$$\left.\begin{array}{l}OD=OC\\ON=ON'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}ND=CN'\xrightarrow{DN=۱۰}CN'=۱۰$$

در نتیجه $ON=ON'=R-۱۰$. بنابراین از رابطهٔ طولی در دایرهٔ کوچک‌تر به‌دست می‌آید

$$ON\times ON'=OM\times OB\xrightarrow{OM=R-۱۶}$$

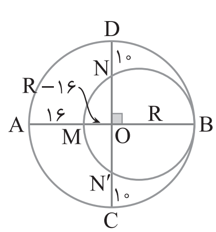
$$(R-۱۰)(R-۱۰)=(R-۱۶)(R)$$

$$R^۲+۱۰۰-۲۰R=R^۲-۱۶R\Rightarrow ۴R=۱۰۰\Rightarrow R=۲۵$$

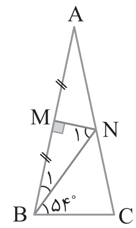
اکنون می‌توان نوشت

$$MB=OB+OM=R+R-۱۶=۲R-۱۶=۵۰-۱۶=۳۴$$

چون MB قطر دایرهٔ کوچک‌تر است، پس $\frac{MB}{۲}=۱۷$ = شعاع دایرهٔ کوچک‌تر



۱۰۵۵ ۳ بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت، نقطهٔ N روی عمودمنصف AB است، پس N از دو سر ضلع AB به یک فاصله است. یعنی $NA=NB$. بنابراین $\hat{B}_۱=\hat{A}=\alpha$. در ضمن $AB=AC$ پس $\hat{C}=\hat{B}_۱+۵۴^\circ$. بنابراین



$$\triangle ABC:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\hat{B}_۱+۵۴^\circ+\hat{B}_۱+۵۴^\circ=۱۸۰^\circ$$

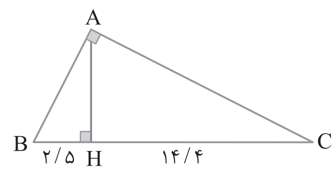
$$\xrightarrow{\hat{B}_۱=\alpha} ۳\alpha=۱۸۰^\circ-۱۰۸^\circ \Rightarrow ۳\alpha=۷۲^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{۷۲^\circ}{۳}=۲۴^\circ$$

در نتیجه

$$\triangle BMN:\hat{M}+\hat{N}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{B}_۱=۲۴^\circ} ۹۰^\circ+\hat{N}_۱+۲۴^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{N}_۱=۶۶^\circ$$

۱۰۵۶ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ارتفاع AH روی وتر BC پاره‌خط‌هایی به طول ۲/۵ و ۱۴/۴ جدا کرده است.

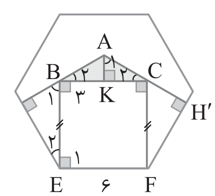


با استفاده از رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AH^۲=BH\times CH \Rightarrow AH^۲=۲/۵\times۱۴/۴=\frac{۲۵}{۱۰}\times\frac{۱۴۴}{۱۰}$$

$$AH=\frac{۵\times۱۲}{۱۰}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

۱۰۵۷ ۱ بنابر فرض سؤال چهارضلعی BCFE مربع است. پس $\hat{E}_۱=۹۰^\circ$. از طرف دیگر هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است. بنابراین



$$\hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۱۲۰^\circ \xrightarrow{\hat{E}_۱=۹۰^\circ} \hat{E}_۲=۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱=۶۰^\circ$$

چون $\hat{B}_۳=۹۰^\circ$ و $\hat{B}_۱=۶۰^\circ$، پس $\hat{B}_۲=۳۰^\circ$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\hat{C}_۲=۳۰^\circ$. پس مثلث ABC متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر قاعدهٔ BC را رسم کنیم، AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه

$$BK=KC=\frac{BC}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳,\quad \hat{A}_۱=\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AKC ضلع KC روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° است، پس

$$KC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC \Rightarrow ۳=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC \Rightarrow AC=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

و AK روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس

$$AK=\frac{۱}{۲}AC=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳}) \Rightarrow AK=\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AK\times BC=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(۶)=۳\sqrt{۳}$$

۱۰۵۸ ۴ می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

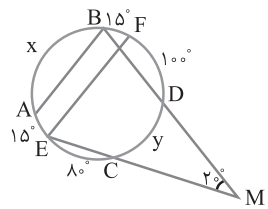
$$AB||EF \Rightarrow \overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{AE}$$

$$\xrightarrow{\overset{\frown}{AE}=۱۵^\circ} \overset{\frown}{BF}=۱۵^\circ$$

با فرض $\overset{\frown}{AB}=x$ و $\overset{\frown}{CD}=y$ می‌نویسیم:

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BF}+\overset{\frown}{FD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EC}+\overset{\frown}{AE}=۳۶۰^\circ$$

$$x+۱۵^\circ+۱۰۰^\circ+y+۸۰^\circ+۱۵^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow x+y=۱۵۰^\circ \quad (۱)$$



از طرف دیگر،

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{EAB}-\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow ۲۰^\circ=\frac{۱۵^\circ+x-y}{۲} \Rightarrow x-y=۲۵^\circ \quad (۲)$$

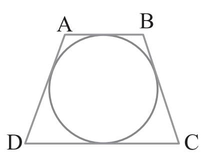
$$\text{از (۲) و (۱)} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۵۰^\circ \\ x-y=۲۵^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۲y=۱۲۵^\circ \Rightarrow y=۶۲/۵^\circ$$

بنابراین

$$\text{زاویهٔ محاطی } A\hat{B}D=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow A\hat{B}D=\frac{۶۲/۵^\circ+۸۰^\circ+۱۵^\circ}{۲}$$

$$=\frac{۱۵۷/۵^\circ}{۲}=۷۸/۷۵$$

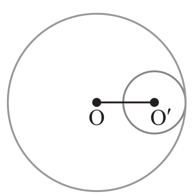
۱۰۵۹ ۴ اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط باشد، آن‌گاه قطر دایرهٔ محاطی واسطهٔ هندسی بین دو قاعده است؛ پس $۴R^۲=AB\times DC \quad (۱)$



از طرف دیگر، $\text{مساحت دایره}=۱۵\pi \Rightarrow \pi R^۲=۱۵\pi \Rightarrow R^۲=۱۵ \quad (۲)$

$$\text{از (۱) و (۲)} \Rightarrow ۴\times۱۵=۶\times a \Rightarrow a=۱۰$$

۱۰۶۰ ۱ فرض کنیم R شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر و R' شعاع دایرهٔ کوچک‌تر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند، پس $OO'=R-R'$. یعنی $R-R'=۳/۵$. از طرف دیگر،



$$\text{مساحت بین دو دایره}=۲۱\pi \Rightarrow \pi R^۲-\pi R'^۲=۲۱\pi \Rightarrow R^۲-R'^۲=۲۱$$

$$(R-R')(R+R')=۲۱ \xrightarrow{R-R'=۳/۵} ۳/۵(R+R')=۲۱$$

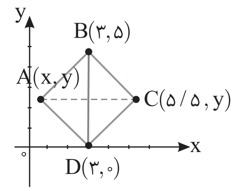
$$R+R'=\frac{۲۱}{۳/۵}=\frac{۲۱}{\frac{۷}{۲}}=۶$$

بنابراین

$$\begin{cases} R-R'=۳/۵ \\ R+R'=۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۲R'=۶-۳/۵$$

$$۲R'=۲/۵ \Rightarrow R'=\frac{۲/۵}{۲}=۱/۲۵$$

۱۰۶۱ ② بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور x بر خودش منطبق است، پس نقطهٔ D روی محور x قرار دارد، پس $D=(۳,۰)$. مسلماً بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD نقطهٔ A است زیرا قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند. فرض کنیم $A=(x,y)$ و $C=(۵/۵,y)$. در این صورت چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند، بنابراین



$$A+C=B+D\Rightarrow (x,y)+(۵/۵,y)=(۳,۵)+(۳,۰)$$

$$(x+۵/۵,۲y)=(۶,۵)$$

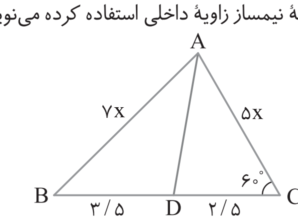
پس

$$\begin{cases} x+۵/۵=۶\Rightarrow x=۰/۵ \\ ۲y=۵\Rightarrow y=۲/۵ \end{cases}\Rightarrow A(۰/۵,۲/۵)$$

بنابراین

$$OA=\sqrt{۰/۵^۲+۲/۵^۲}=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۵}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۴}}=\sqrt{۶/۵}$$

۱۰۶۲ ① از قضیهٔ نیمساز زاویهٔ داخلی استفاده کرده می‌نویسیم:



$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{۳/۵}{۲/۵}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{۳۵}{۲۵}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{۷}{۵}=\frac{AB}{AC}$$

با توجه به تناسب به‌دست آمده فرض می‌کنیم

$$AC=۵x\,,\quad AB=۷x$$

اکنون بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$AB^۲=AC^۲+BC^۲-۲AC\times BC\cos ۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{BC=۶} ۴۹x^۲=۲۵x^۲+۳۶-۲(۵x)(۶)(\frac{۱}{۲})$$

$$۴۹x^۲=۲۵x^۲+۳۶-۳۰x\Rightarrow ۲۴x^۲+۳۰x-۳۶=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۶} ۴x^۲+۵x-۶=۰\Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۹۶}}{۸}$$

$$=\frac{-۵\pm\sqrt{۱۲۱}}{۸}=\frac{-۵\pm۱۱}{۸}\Rightarrow x=\frac{-۵+۱۱}{۸}\Rightarrow x=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین ضلع کوچک‌تر این مثلث یعنی AC برابر $۵x=۵\times\frac{۳}{۴}=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$ است.
(توجه کنید اگر $BD=۲/۵$ و $DC=۳/۵$ ، آن‌گاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB>AC$)

۱۰۶۳ ② ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} x & -۱ & -x \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ y & z & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲z & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۲z & ۰ & -۴y \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲xz-۲z & ۰ & ۲x+۴y \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۲yz+۲z^۲ & \frac{y}{۲}+\frac{z}{۲} & ۲y-۴yz \end{bmatrix}$$

ماتریس AB ماتریس اسکالر است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین

$$\begin{cases} ۲xz-۲z=۲\Rightarrow xz-z=۱\xrightarrow{\text{از } (۱)} -xy+y=۱ \\ ۲y-۴yz=۲\Rightarrow y-۲yz=۱\xrightarrow{\text{از } (۱)} y+۲y^۲=۱ \\ ۲x+۴y=۰\Rightarrow x=-۲y \\ ۲yz+۲z^۲=۰\xrightarrow{z\neq ۰} y=-z \quad (۱) \\ \frac{y}{۲}+\frac{z}{۲}=۰\Rightarrow y=-z \end{cases}$$

در نتیجه

$$۲y^۲+y-۱=۰\Rightarrow y=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۸}}{۴}=\frac{-۱\pm۳}{۴}\Rightarrow\begin{cases} y=-۱ \\ y=\frac{۱}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$

بنابراین $-xy+y=۱\xrightarrow{y=-۱} -xy-۱=۱\Rightarrow xy=-۲$

دقت کنید $z\neq ۰$ زیرا در غیر این صورت مقدار $۲xz-۲z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۱۰۶۴ ③ ابتدا دترمینان A را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۱(-۱)^۲\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+(-۱)(-۱)^۳\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$+(-۳)(-۱)^۴\begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۱(۳-۲)+۱(۱۲-۴)-۳(۴-۲)=۱+۸-۶=۳$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۱ & \frac{۲}{|A|} \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$ یعنی ماتریس $\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}$ از سمت چپ ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$X=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ -۱۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایهٔ قطر اصلی ماتریس X برابر ۶ است.

۱۰۶۵ ① با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را به‌دست آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{aligned} m=۲\Rightarrow ۳y=۶\Rightarrow y=۲ \\ m=-۱\Rightarrow -۳x=۶\Rightarrow x=-۲ \end{aligned}\right\}\Rightarrow O(-۲,۲)\ \text{مرکز دایره}$$

چون A روی دایره است، پس

$$R=OA=\sqrt{(-۱+۲)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

بنابراین $\text{محیط دایره}=۲\pi R=۲\sqrt{۲}\pi$

۱۰۶۶ (۲) اگر در سهمی افقی از معادلهٔ سهمی نسبت به y مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم، آن‌گاه عرض رأس سهمی به‌دست می‌آید، پس

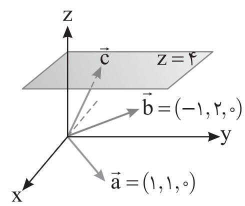
$$f'_y=0 \Rightarrow 4y-2a=0 \xrightarrow{y=1} 4-2a=0 \Rightarrow a=2$$

در ضمن رأس سهمی در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، پس

$$2-2a-8+b=0 \xrightarrow{a=2} 2-4-8+b=0 \Rightarrow b=10$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

۱۰۶۷ (۴) ارتفاع بردار $\vec h$ برابر ۴ است، پس انتهای بردار $\vec h$ روی صفحهٔ $z=4$ قرار دارد. در ضمن بردار $\vec h$ بر بردارهای $\vec a$ و $\vec b$ عمود نیست زیرا $\vec a\cdot\vec h\neq 0$ و $\vec b\cdot\vec h\neq 0$، بنابراین بردار $\vec h$ روی صفحهٔ $z=4$ قرار دارد. در نتیجه انتهای بردار $\vec c$ روی صفحهٔ $z=4$ واقع است، بنابراین مختصات بردار $\vec c$ به صورت $(x,y,4)$ است. بنابر فرض سؤال،



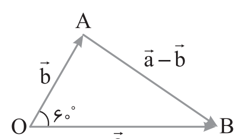
$$\vec a\cdot\vec c=1 \Rightarrow (1,1,0)\cdot(x,y,4)=1 \Rightarrow x+y=1$$

$$\vec b\cdot\vec c=5 \Rightarrow (-1,2,0)\cdot(x,y,4)=5 \Rightarrow -x+2y=5$$

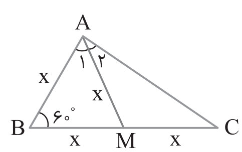
بنابراین
$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x+2y=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 3y=6 \rightarrow y=2,\ x=-1$$

پس $\vec c=(-1,2,4)$ و $|\vec c|=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$.

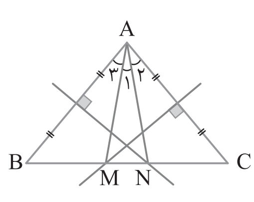
۱۰۶۸ (۱) در نظر بگیرید $|\vec a|=2|\vec b|$. در این صورت بردار $\vec a-\vec b$ مطابق شکل مقابل خواهد بود. در مثلث OAB یک زاویهٔ 60° و اندازهٔ دو ضلع این زاویهٔ 60° به نسبت ۱ به ۲ هستند. پس مثلث OAB قائم‌الزاویه است و $\hat A=90^\circ$، پس $\hat B=30^\circ$. در نتیجه زاویهٔ بین بردارهای $\vec a$ و $\vec a-\vec b$ برابر 30° است.



نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC، $\hat B=60^\circ$، $AB=x$ و $BC=2x$، آن‌گاه $\hat A=90^\circ$. زیرا اگر میانهٔ AM وارد بر BC را رسم کنید، آن‌گاه مثلث ABM متساوی‌الاضلاع و مثلث AMC متساوی‌الساقین است؛ پس $\hat A_1=60^\circ$ و $\hat A_2=30^\circ$، در نتیجه $\hat A=90^\circ$.



۱۰۶۹ (۲) بنابر داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.



$$\begin{cases} M \text{ روی عمود منصف } AC \Rightarrow MA=MC \Rightarrow \hat A_1+\hat A_2=\hat C \\ N \text{ روی عمود منصف } AB \Rightarrow NA=NB \Rightarrow \hat A_1+\hat A_3=\hat B \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \hat A_1+\hat A_2+\hat A_3+\hat A_1=\hat B+\hat C \xrightarrow{\hat A_1+\hat A_2+\hat A_3=80^\circ}$$

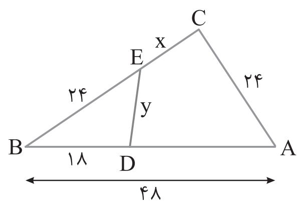
$$80^\circ+\hat A_1=180^\circ-80^\circ \Rightarrow \hat A_1=20^\circ$$

۱۰۷۰ (۱) دو مثلث ABC و BDE متشابه‌اند زیرا:

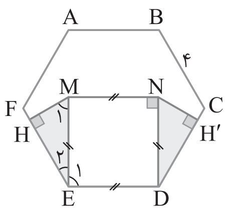
$$\begin{rcases} E\hat CA=B\hat DE \\ \hat B=\hat B \end{rcases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB}$$

$$\frac{y}{24}=\frac{18}{x+24}=\frac{24}{48} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{24}=\frac{24}{48} \Rightarrow \frac{y}{24}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=12 \\ \frac{18}{x+24}=\frac{24}{48} \Rightarrow \frac{18}{x+24}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=12 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ برابر یک است.



۱۰۷۱ (۴) چهارضلعی MNDE مربع به ضلع ۴ است، پس $\hat E_1=90^\circ$. در ضمن هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم 120° است، پس $\hat E_2=30^\circ$، در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHE زاویهٔ M_1 برابر 60° می‌شود، بنابراین



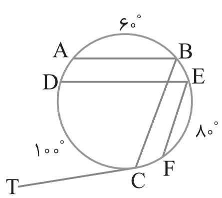
$$\triangle MEH: \hat M_1=60^\circ \Rightarrow HE=\frac{\sqrt3}{2}ME \xrightarrow{ME=4} HE=2\sqrt3$$

$$\triangle MEH: \hat E_2=30^\circ \Rightarrow MH=\frac{1}{2}ME \xrightarrow{ME=4} MH=2$$

پس
$$S_{MEH}=\frac{1}{2}MH\times EH=\frac{1}{2}(2)(2\sqrt3)=2\sqrt3$$

به همین ترتیب مشخص می‌شود $S_{NDH'}=2\sqrt3$. بنابراین مجموع مساحت‌های دو مثلث MHE و NDH' برابر $4\sqrt3$ است.

۱۰۷۲ (۳) می‌دانیم اندازهٔ کمان‌های بین دو وتر موازی مساوی‌اند. بنابراین



$$\begin{rcases} AB \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF} \end{rcases}$$
$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{BE}=x$$

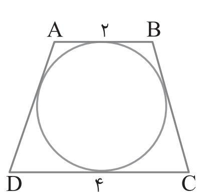
همچنین
$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}=360^\circ$$

$$60^\circ+x+80^\circ+x+100^\circ+x=360^\circ \Rightarrow 3x=120^\circ \Rightarrow x=40^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ BCT زاویهٔ ظلی است؛ بنابراین

$$B\hat CT=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{40^\circ+100^\circ+60^\circ}{2}=100^\circ$$

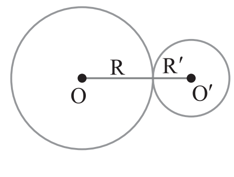
۱۰۷۳ (۱) در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی قطر دایرهٔ محاطی واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ ذوزنقه است. به عبارتی اگر R شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد، آن‌گاه $4R^2=AB\times DC$. پس



$$4R^2=AB\times DC \Rightarrow 4R^2=2\times 4 \Rightarrow R^2=2$$

بنابراین
$$\text{مساحت دایره}=\pi R^2=2\pi$$

۱۰۷۴ (۴) طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس خارج مساوی $R+R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $۲\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال،

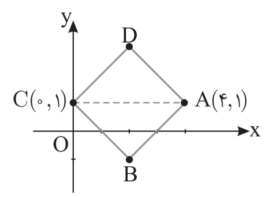


$$\text{طول مماس مشترک خارجی}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R\Rightarrow ۲\sqrt{RR'}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

$$۴RR'=\frac{۳}{۴}R^{۲}\Rightarrow ۴R'=\frac{۳}{۴}R\Rightarrow R=\frac{۱۶}{۳}R'$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر $\frac{۱۶}{۳}$ برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است.

۱۰۷۵ (۱) چون بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور y بر خودش منطبق است، پس نقطهٔ C روی محور y قرار دارد، پس مختصات C به‌صورت $(۰,۱)$ است. در ضمن عرض نقطهٔ D برابر ۳ است. فرض می‌کنیم $D(x,۳)$. چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند، پس رأس $B(x,y)$ بازتاب D نسبت به قطر AC است. چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند، پس



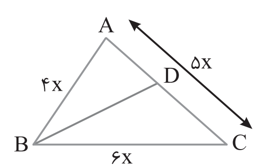
$$A+C=B+D\Rightarrow(۴,۱)+(۰,۱)=(x,۳)+(x,y)$$

$$\begin{cases}۴=۲x\Rightarrow x=۲\\ ۲=۳+y\Rightarrow y=-۱\end{cases}\Rightarrow B(۲,-۱)$$

بنابراین

$$OB=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

۱۰۷۶ (۳) در مثلث ABC فرض کنیم $AB=۴x$ ، $AC=۵x$ و $BC=۶x$. در این صورت زاویهٔ B زاویهٔ متوسط مثلث است. فرض کنیم BD نیمساز زاویهٔ B باشد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{AD}{AC}\qquad(۱)$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز }BD\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\xrightarrow[\text{درمخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{AD}{AD+DC}=\frac{AB}{AB+BC}$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AB+BC}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{۴x}{۴x+۶x}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{۴x}{۱۰x}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{۲}{۵}\qquad(۲)$$

بنابراین

$$\text{از }(۱),(۲)\Rightarrow\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}}=\frac{۵}{۲}$$

۱۰۷۷ (۲) وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۴ & -۳\end{bmatrix}$ برابر $A^{-۱}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix}-۳ & -۲\\ -۴ & -۱\end{bmatrix}$ است. پس

$$\alpha A+\beta I=A^{-۱}\Rightarrow\alpha\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۴ & -۳\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix}-۳ & -۲\\ -۴ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\alpha+\beta & ۲\alpha\\ ۴\alpha & -۳\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵} & \frac{۲}{۵}\\ \frac{۴}{۵} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases}-\alpha+\beta=\frac{۳}{۵}\Rightarrow-\frac{۱}{۵}+\beta=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\beta=\frac{۴}{۵}\\ ۲\alpha=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۵}\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۱}{۵}}=۴$.

۱۰۷۸ (۱) ابتدا درایه‌های ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست آوریم:

$$A^{۲}=A\times A$$

$$=\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۲ & -۳\end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۳}=A^{۲}\times A$$

$$=\begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ? & ? & ?\\ ? & ? & ?\end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ به‌صورت $\begin{bmatrix}۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ است.

۱۰۷۹ (۲) برای مشخص شدن راه‌حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم؛ سپس مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^{۲}-۸x+y^{۲}+۱۵=۰\Rightarrow O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۴,۰)$$

$$R=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۶۴-۶۰}}{۲}=۱$$

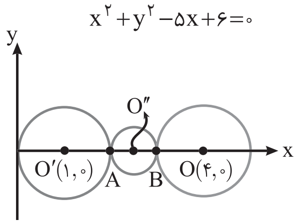
$$x^{۲}-۲x+y^{۲}=۰\Rightarrow O'(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۰)$$

$$R'=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴}}{۲}=۱$$

مطابق شکل دایرهٔ خط‌چین به مرکز O'' و شعاع R'' مرکزش روی محور x قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است. در شکل AB قطر دایرهٔ خط‌چین است چون $A(۲,۰)$ و $B(۳,۰)$ است. پس $O''=\frac{A+B}{۲}=(\frac{۵}{۲},۰)$ و $R''=\frac{AB}{۲}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین معادلهٔ این دایره به صورت زیر است:

$$(x-\frac{۵}{۲})^{۲}+(y-۰)^{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x^{۲}+\frac{۲۵}{۴}-۵x+y^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۵x+۶=۰$$



۱۰۸۰ (۳) ابتدا معادلهٔ بیضی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2+4y^2-16y-2x+16=0\Rightarrow(x^2-2x)+4(y^2-4y)+16=0$$

$$(x-1)^2-1+4[(y-2)^2-4]+16=0\Rightarrow(x-1)^2+4(y-2)^2=1$$

$$(x-1)^2+\frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}}=1$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^2=1$ و $b^2=\frac{1}{4}$ است، پس

$$c^2=a^2-b^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین فاصلهٔ دو کانون برابر $2c=\sqrt{3}$ است. «توجه کنید معادلهٔ بیضی در کتاب درسی هندسه ۳ مطرح نشده است، پس این سؤال خارج از سرفصل کتاب درسی است».

۱۰۸۱ (۲) بنابر فرض $\frac{AC}{CG}=\frac{DE}{EF}=4$. فرض کنید $CG=x$ و $EF=y$. بنابراین $AG=3x$ و $DF=3y$. اکنون از C به F وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا خطی را که از D موازی BC رسم می‌شود، در نقطهٔ M قطع کند. در این صورت دو مثلث FEC و FDM دارای دو زاویهٔ مساوی‌اند، پس متشابه‌اند. بنابراین

$$\triangle FEC\sim\triangle FDM\Rightarrow\frac{EC}{DM}=\frac{FE}{FD}=\frac{FC}{FM}\xrightarrow[EF=y]{DF=3y}$$

$$\frac{EC}{DM}=\frac{FC}{FM}=\frac{1}{3}\xrightarrow{EC=1}\begin{cases}DM=3\\ \frac{FM}{FC}=3\end{cases}$$

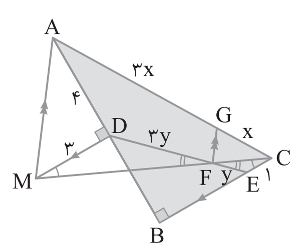
از طرف دیگر مثلث AMD قائم‌الزاویه است، پس

$$AM^2=AD^2+MD^2=4^2+3^2=25\Rightarrow AM=5$$

در نتیجه

$$\triangle AMC:\frac{AG}{GC}=\frac{MF}{FC}=3\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}}AM||FG$$

$$\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{FG}{AM}=\frac{CG}{AC}\Rightarrow\frac{FG}{5}=\frac{1}{4}\Rightarrow FG=\frac{5}{4}=1/25$$



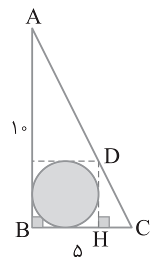
۱۰۸۲ (۱) در صورتی که قطر دایره برابر $2R$ باشد، آن‌گاه مطابق شکل $DH=2R$ و $CH=BC-BH=5-2R$. پس با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\triangle ABC:DH||AB\Rightarrow\frac{DH}{AB}=\frac{CH}{BC}\Rightarrow\frac{2R}{10}=\frac{5-2R}{5}$$

$$10R=50-20R\Rightarrow 30R=50\Rightarrow R=\frac{5}{3}$$

بنابراین

$$\text{مساحت دایره}=\pi R^2=\pi(\frac{5}{3})^2=\frac{25}{9}\pi$$



۱۰۸۳ (۲) تعداد قطرهای n ضلعی محدب را با $d(n)$ نشان می‌دهیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم

$$d(n)-d(n-1)=16\Rightarrow\frac{1}{2}n(n-3)-\frac{1}{2}(n-1)(n-1-3)=16$$

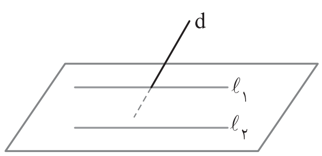
$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۲}}(n^2-3n)-(n^2-5n+4)=32\Rightarrow 2n-4=32\Rightarrow n=18$$

اکنون باید اختلاف تعداد قطرهای ۱۸ضلعی محدب و ۱۶ضلعی محدب را پیدا کنیم.

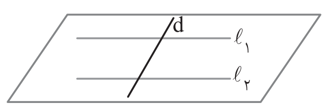
$$d(18)-d(16)=\frac{1}{2}(18)(18-3)-\frac{1}{2}(16)(16-3)$$

$$=9\times15-8\times13=135-104=31$$

۱۰۸۴ (۴) در شکل (۱) خط‌های ℓ_1 و ℓ_2 موازی‌اند و خط d خط ℓ_1 را قطع کرده است ولی با خط ℓ_2 متنافر است. پس d و ℓ_2 می‌توانند متنافر باشند. از طرف دیگر، در شکل (۲)، خط d در صفحهٔ دو خط موازی ℓ_1 و ℓ_2 است و خط ℓ_1 را قطع می‌کند. بنابراین خط d خط ℓ_2 را نیز قطع می‌کند. پس d و ℓ_2 می‌توانند متقاطع هم باشند ولی d نمی‌تواند با ℓ_2 موازی باشد، زیرا اگر d موازی ℓ_2 باشد، چون ℓ_1 و ℓ_2 با هم موازی‌اند، پس d موازی ℓ_1 است (زیرا دو خط موازی با یک خط با هم موازی‌اند) و این خلاف فرض است. پس d موازی ℓ_2 نیست.



شکل (۱)



شکل (۲)

۱۰۸۵ (۴) ارتفاع AH در ذوزنقهٔ محیطی ABCD را رسم می‌کنیم. پس $AH=4$. بنابراین

$$\triangle ADH:\hat{D}=60^\circ\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AD\xrightarrow{AH=4}4=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$$

$$AD=\frac{8}{\sqrt{3}}\qquad(1)$$

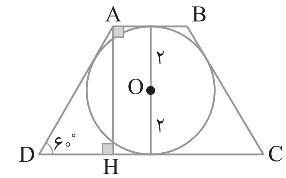
از طرف دیگر

$$\text{محیطی } ABCD\Rightarrow AD+BC=AB+DC\xrightarrow{AD=BC}$$

$$2AD=AB+DC\xrightarrow{\text{از (1)}}AB+DC=\frac{16}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AH(AB+DC)=\frac{۱}{۲}(۴)(\frac{۱۶}{\sqrt{۳}})=\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$$



۱۰۸۶ **۳** در شکل چهارضلعی AMDN محاطی است، پس

$$\hat{A}+\hat{D}_{۲}=۱۸۰^\circ$$

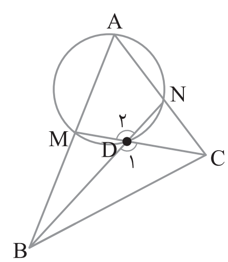
از طرف دیگر $\hat{D}_{۱}$ زاویهٔ بین دو نیمساز داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مثلث ABC است، پس

$$\hat{D}_{۱}=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲} \qquad (۱)$$

در ضمن $\hat{D}_{۱}=\hat{D}_{۲}$، بنابراین

$$\hat{A}+\hat{D}_{۲}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\text{از (۱)}} \hat{A}+۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\hat{A}=۹۰^\circ$$

$$\hat{A}=۶۰^\circ$$



۱۰۸۷ **۲** در شکل $A(۱,۴)$ و $B(۳,۲)$ نقاط تلاقی دو دایره به مراکز O و O' و شعاع R است. بنابر فرض سؤال $OO'=۲AB$، پس

$$AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۴)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow OO'=۴\sqrt{۲}$$

اکنون معادلهٔ خط OO' را به‌دست می‌آوریم، چون OO' عمودمنصف AB است، پس شیب OO' عکس قرینهٔ شیب AB است و خط OO' از نقطهٔ M وسط AB می‌گذرد.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۴-۲}{۱-۳}=\frac{۲}{-۲}=-۱\Rightarrow m_{OO'}=۱$$

$$\text{وسط } AB \; M\Rightarrow M=\frac{A+B}{۲}=(\frac{۱+۳}{۲},\frac{۲+۴}{۲})=(۲,۳)$$

بنابراین معادلهٔ خط‌المرکزین دو دایره عبارت است از

$$OO': y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-۳=۱(x-۲)\Rightarrow y=x+۱$$

مراکز دو دایره روی خط $y=x+۱$ قرار دارند، پس اگر $O, O'(\alpha,\beta)$ باشد، آن‌گاه $\beta=\alpha+۱$. پس مختصات مراکز دایره‌ها به صورت $O, O'(\alpha, \alpha+۱)$ است. در ضمن $OM=O'M=\frac{OO'}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$. در نتیجه

$$\left.\begin{array}{l}O,O'(\alpha,\alpha+۱)\\ M(۲,۳)\end{array}\right\}\Rightarrow OM=O'M=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(\alpha+۱-۳)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۲(\alpha-۲)^۲}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow ۲(\alpha-۲)^۲=۸\Rightarrow(\alpha-۲)^۲=۴$$

$$\begin{cases}\alpha-۲=۲\Rightarrow\alpha=۴\Rightarrow\beta=\alpha+۱=۵\Rightarrow O'(۴,۵)\\ \alpha-۲=-۲\Rightarrow\alpha=۰\Rightarrow\beta=\alpha+۱=۱\Rightarrow O(۰,۱)\end{cases}$$

شعاع دایره‌ها برابر است با

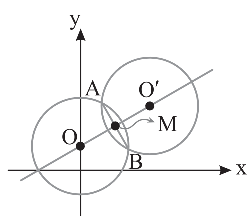
$$R=OA=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۱-۴)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

دایرهٔ به مرکز O' محور xها را قطع نمی‌کند.

$$\text{معادلهٔ دایرهٔ به مرکز } O: (x-۰)^۲+(y-۱)^۲=۱۰ \xrightarrow{y=۰}$$

$$x^۲+۱=۱۰\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=۳ \text{ یا } -۳$$

یعنی این دایره محور xها را در نقاط $(۳,۰)$ و $(-۳,۰)$ قطع می‌کند و فاصلهٔ این دو نقطه برابر ۶ است.



۱۰۸۸ **۴** می‌توان نوشت

$$\frac{۵}{\sqrt{۲}}=\frac{|۲+۰+۳a|}{\sqrt{۱+a^۲}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{۲۵}{۲}=\frac{۴+۹a^۲+۱۲a}{۱+a^۲}$$

$$۲۵+۲۵a^۲=۸+۱۸a^۲+۲۴a\Rightarrow ۷a^۲-۲۴a+۱۷=۰$$

دیده می‌شود که مجموع ضرایب این معادلهٔ درجهٔ دوم صفر است $(۷-۲۴+۱۷=۰)$. بنابراین $a=۱$ یا $a=\frac{۱۷}{۷}$.

$$\text{اختلاف مقادیر } a=\frac{۱۷}{۷}-۱=\frac{۱۰}{۷}$$

۱۰۸۹ **۳**

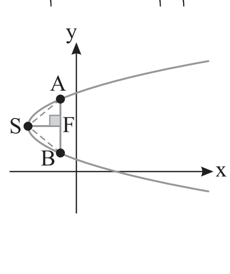
$$y^۲-x-۴y+۲=۰\Rightarrow y^۲-۴y=x-۲$$

$$(y-۲)^۲-۴=x-۲\Rightarrow(y-۲)^۲=x+۲$$

پس این سهمی افقی رو به راست با رأس $S(-۲,۲)$ است و $۴a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$

پس شکل این سهمی به صورت زیر است و اگر F کانون سهمی باشد، آن‌گاه AB وتر کانونی این سهمی به طول $۴a$، یعنی ۱ است و $SF=a=\frac{۱}{۴}$. بنابراین

$$S_{ASB}=\frac{۱}{۲}SF\times AB=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴})(۱)=\frac{۱}{۸}$$



۱۰۹۰ (۱)

$$D=ABC=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x & -1\\ 1 & 1 & x\\ x & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & x+1 & x-1\\ x & -x+2 & x\\ -x-2 & -3 & -2x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+5 & \bigcirc & x+1\\ \bigcirc & 0 & \bigcirc\\ -2x-7 & \bigcirc & -3\end{bmatrix}$$

بنابراین

مجموع درایه‌های قطر فرعی=مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$x+5-3=x+1-2x-7\Rightarrow 2x=-8\Rightarrow x=-4$$

۱۰۹۱ (۲)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بر حسب ستون اول}}$$

$$|A|=1(-1)^2\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 4\end{vmatrix}+3(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}$$

$$=1(8-6)+3(3-4)=2-3=-1$$

بنابراین

$$\big||A|A\big|=|A|^3|A|=|A|^4=(-1)^4=1$$