در دو جملهٔ اول، از $2\sin^2 x$ فاکتور بگیریم:

$$2\sin^2 x(\sin x-1)-(\sin x-1)=0$$

حالا از $\sin x-1$ فاکتور بگیریم:

$$(\sin x-1)(2\sin^2 x-1)=0\Rightarrow \sin x=1 \text{ یا } \sin^2 x=\frac{1}{2}$$

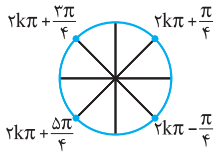
از $\sin x=1$ به جواب $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ می‌رسیم که سؤال این را نمی‌خواهد.

برویم سراغ $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ که از آن نتیجه می‌شود $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. از طرفی:

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \text{ یا } x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{4} \text{ یا } x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$$

جای این جواب‌ها را روی دایره ببینید:



این‌ها مضارب فرد $\frac{\pi}{4}$ هستند. پس این چهار دسته را می‌توان در فرم $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ خلاصه کرد.

۱۴۴۶ ۲

با استفاده از اتحادهای $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ و $1-\sin^2 x=\cos^2 x$، کمی معادله را ساده‌تر می‌کنیم: $\sin 2x\cdot\sin 4x=1-\sin^2 x$

$$\Rightarrow(2\sin x\cos x)(2\sin 2x\cos 2x)=\cos^2 x$$

$$\Rightarrow(2\sin x\cos x)(2(2\sin x\cos x)\cos 2x)=\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 8\sin^2 x\cos^2 x\cos 2x-\cos^2 x=0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x(8\sin^2 x\cos 2x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos^2 x=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\\ 8\sin^2 x\cos 2x-1=0\end{cases}$$

در معادلهٔ دوم به جای $\cos 2x$ می‌گذاریم $1-2\sin^2 x$:

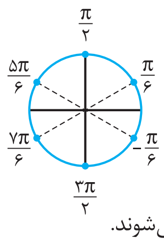
$$8\sin^2 x(1-2\sin^2 x)-1=0\xrightarrow{\sin^2 x=t}8t(1-2t)-1=0$$

$$\Rightarrow 16t^2-8t+1=0\Rightarrow(4t-1)^2=0\Rightarrow t=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{4}=(\frac{1}{2})^2\Rightarrow\sin^2 x=\sin^2\frac{\pi}{6}$$

کلاً اگر $\sin^2 u=\sin^2\alpha$، آن‌گاه $u=k\pi\pm\alpha$. پس: $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

انتهای کمان مربوط به زوایای $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ روی دایرهٔ مثلثاتی به صورت مقابل است:



این جواب‌ها فقط توسط جواب کلی $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ تولید می‌شوند.

۱۴۴۷ ۲ کلاً هر بازهٔ باز شامل a را یک همسایگی نقطهٔ a می‌نامیم. پس اگر بازهٔ $(-1,7)$ بخواهد همسایگی عدد $2m-3$ باشد، باید داشته باشیم:

$$2m-3\in(-1,7)\Rightarrow-1<2m-3<7$$

$$\Rightarrow 2<2m<10\Rightarrow 1<m<5$$

۱۴۴۸ ۱ باید نامعادلهٔ $6x^2+x-35<0$ را حل کنیم. گیر کارمان، ریشه‌های است که می‌توانیم با روش دلتا یا تجزیه آن‌ها را پیدا کنیم. با روشی که در تجزیه بلدیم، این شکلی می‌شود:

$$6x^2+x-35\xrightarrow{\text{تبدیل}}x^2+x-210\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x+15)(x-14)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل}}(x+\frac{15}{6})(6x-14)$$

ریشه‌ها، $x=-\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}$ و $x=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$ هستند. حالا می‌توانیم بگوییم:

$$6x^2+x-35<0\Rightarrow-\frac{5}{2}<x<\frac{7}{3}$$

می‌خواهیم ببینیم در فاصلهٔ بالا چند عدد صحیح وجود دارد. خب ۵ تا:

$$x=0,\pm1,\pm2$$

۱۴۴۹ ۱ روش اول: x از یک قدرمطلق بزرگ‌تر شده، پس باید مثبت باشد، یعنی $x>0$. از طرفی کلاً وقتی $a>0$ است، از $|u|<a$ نتیجه می‌شود $-a<u<a$. در این جا هم می‌توانیم بگوییم:

$$|2x-m|<x\Rightarrow-x<2x-m<x$$

دو نامعادله را جدا حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}-x<2x-m\Rightarrow\frac{m}{3}<x\\ 2x-m<x\Rightarrow x<m\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\frac{m}{3}<x<m$$

پس همسایگی مورد نظر در صورت سؤال، بازهٔ $(\frac{m}{3},m)$ است. واضح است که اگر $m\le 0$ باشد، این بازه تهی خواهد بود! سؤال گفته $2m-1$ درون این بازه باشد:

$$2m-1\in(\frac{m}{3},m)\Rightarrow\frac{m}{3}<2m-1<m$$

باز هم دو نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{m}{3}<2m-1\xrightarrow{\times 3}m<6m-3\Rightarrow\frac{3}{5}<m\\ 2m-1<m\Rightarrow m<1\end{cases}$$

اشتراک حرف‌های بالا، می‌شود $\frac{3}{5}<m<1$.

روش دوم: $2m-1$ باید در نامعادلهٔ داده‌شده صدق کند، پس به جای xهای نامعادله قرار می‌دهیم $2m-1$:

$$|2x-m|<x\xrightarrow{x=2m-1}|2(2m-1)-m|<2m-1$$

$$\Rightarrow|3m-2|<2m-1$$

$2m-1$ از یک قدرمطلق بزرگ‌تر شده، پس باید مثبت باشد:

$$2m-1>0\Rightarrow m>\frac{1}{2}$$

حالا می‌توانیم بگوییم:

$$-(2m-1)<3m-2<2m-1 \xrightarrow{+2} -2m+3<3m<2m+1$$

دو نامعادله را جداگانه حل کنیم:

$$-2m+3<3m \Rightarrow \frac{3}{5}<m \quad , \quad 3m<2m+1 \Rightarrow m<1$$

اشتراک تمام حرف‌های بالا، می‌شود $\frac{3}{5}<m<1$.

۱۴۵۰ ۲ یک راه خوب برای حل نامعادله، این است:

$$|2-\frac{1}{x}|<1 \Rightarrow |\frac{2x-1}{x}|<1 \Rightarrow \frac{|2x-1|}{|x|}<1$$

با شرط $x\neq 0$، دو طرف را در عبارت مثبت $|x|$ ضرب می‌کنیم:

$$|2x-1|<|x|$$

کلاً داریم:

$$0<a<b \Rightarrow a^2<b^2 \Rightarrow a^2-b^2<0 \Rightarrow (a-b)(a+b)<0$$

پس با فرض $a=2x-1$ و $b=x$، می‌توانیم بگوییم:

$$(2x-1-x)(2x-1+x)<0 \Rightarrow (x-1)(3x-1)<0 \Rightarrow \frac{1}{3}<x<1$$

شرط $x\neq 0$ هم چیزی را عوض نمی‌کند! خلاصه این که همسایگی مورد نظر در صورت سؤال، بازهٔ $(\frac{1}{3},1)$ است. می‌خواهیم $\frac{m}{6}-1$ درون این بازه باشد:

$$\frac{m}{6}-1\in(\frac{1}{3},1) \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{m}{6}-1<1 \xrightarrow{\times 6} 2<m-6<6$$
$$\Rightarrow 8<m<12$$

۱۴۵۱ ۳ برای حل نامعادلهٔ $|2x|-x<b$، دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت اول، $x\ge 0$. در این صورت، $|2x|=2x$ و داریم:

$$2x-x<b \Rightarrow x<b$$

که اشتراک آن با $x\ge 0$، می‌شود: $0\le x<b$

حالت دوم، $x<0$. در این صورت، $|2x|=-2x$ و داریم:

$$-2x-x<b \Rightarrow -b<3x \Rightarrow -\frac{b}{3}<x$$

که اشتراک آن با $x<0$، می‌شود: $-\frac{b}{3}<x<0$

اجتماع دو فاصلهٔ به دست آمده، ما را به $-\frac{b}{3}<x<b$ می‌رساند. یعنی بازهٔ $(-\frac{b}{3},b)$. واضح است که اگر $b\le 0$ باشد، این بازه تهی خواهد بود. سؤال هم گفته $b>0$ و می‌خواهد ۳ عدد صحیح در این بازه وجود داشته باشد. اگر $b=1$ باشد، بازهٔ $(-\frac{1}{3},1)$ به دست می‌آید که فقط یک عدد صحیح در خود دارد $(x=0)$ و ما این را نمی‌خواهیم. اگر $b=2$ باشد، بازهٔ $(-\frac{2}{3},2)$ به دست می‌آید که فقط دو عدد صحیح در خود دارد $(x=0,1)$ و این را هم نمی‌خواهیم. اگر $b=3$ باشد، بازهٔ $(-1,3)$ به دست می‌آید که سه عدد صحیح در خود دارد $(x=0,1,2)$ و برای ما مطلوب است. اما سؤال که نگفته b عددی طبیعی است! در واقع اگر $2<b\le 3$ باشد، به هدفمان می‌رسیم. پس حداکثر مقدار b مساوی ۳ است.

۱۴۵۲ ۳ لطفاً مخرج، صفر نباشد.

$$\sqrt{(x-2)^2(9-x^2)}=|x-2|\sqrt{9-x^2}\neq 0 \Rightarrow x\neq 2,\pm 3$$

زیر رادیکال هم منفی نباشد:

$$9-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 9 \Rightarrow |x|\le 3 \Rightarrow -3\le x\le 3$$

اشتراک حرف‌های بالا، می‌شود:

$$-3<x<3, x\neq 2 \Rightarrow D_f=(-3,3)-\{2\}$$

نمایش این مجموعه را روی محور اعداد ببینیم:

باید از دل مجموعهٔ بالا، بازهٔ بازی بیرون بکشیم که $\sqrt{5}$ عضو آن باشد. خب $2<\sqrt{5}<3$ و بزرگ‌ترین بازه‌ای که می‌توانیم انتخاب کنیم، $(2,3)$ است. طول این بازه برابر است با $3-2=1$.

۱۴۵۳ ۲ چون $\frac{1}{n+9}$ مثبت است، $\frac{1}{2n-5}$ هم باید مثبت باشد. پس:

$$2n-5>0 \Rightarrow n>\frac{5}{2}$$

می‌خواهیم $\frac{1}{10}$ عضو همسایگی باشد:

$$\frac{1}{10}\in(\frac{1}{n+9},\frac{1}{2n-5}) \Rightarrow \frac{1}{n+9}<\frac{1}{10}<\frac{1}{2n-5}$$

هر سه طرف مثبت‌اند و با معکوس کردن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$n+9>10>2n-5$$

نامعادله‌ها را جدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} n+9>10 \Rightarrow n>1 \\ 10>2n-5 \Rightarrow n<\frac{15}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<n<\frac{15}{2}$$

گفتیم $n>\frac{5}{2}$، پس $\frac{5}{2}<n<\frac{15}{2}$. حالا چون n طبیعی است، مقادیر ممکن برای n، این پنج تا می‌شود: $n=3,4,5,6,7$

۱۴۵۴ ۳ اگر از یک همسایگی a (بازهٔ باز شامل a)، خود a را حذف کنیم، یک همسایگی محذوف a به دست می‌آید. ببینیم کدام گزینه برای $a=0$ چنین نیست!

۱) هست! $(-2,5)$ همسایگی صفر است و $(-2,5)-\{0\}$ می‌شود همسایگی محذوف آن.

۲) هست! $(-1,7)$ همسایگی صفر است که وقتی خود صفر را از آن حذف می‌کنیم، می‌شود: $(-1,7)-\{0\}=(-1,0)\cup(0,7)$

۳) نیست! از $\frac{|[x]|}{x}=0$ نتیجه می‌شود $[x]=0$ و $x\neq 0$. یعنی $0\le x<1$ و $x\neq 0$. خب بازهٔ $[0,1)$ همسایگی $x=0$ محسوب نمی‌شود و $(0,1)$ همسایگی محذوف $x=0$ نیست.

۴) هست! برای وجود $\frac{1}{|x|}$، باید $x\neq 0$ باشد. حالا از $\frac{1}{|x|}>1$ نتیجه می‌شود $|x|<1$. یعنی $-1<x<1$. پس $\frac{1}{|x|}>1$ معادل $-1<x<1$ و $x\neq 0$ است. در واقع، از بازهٔ $(-1,1)$، صفر را حذف کرده‌ایم که یک همسایگی محذوف $x=0$ محسوب می‌شود.

۱۴۵۵ ۴ در واقع، بازهٔ $(۳a-۷,a+۵)$ یک همسایگی ۳ است که با کمال احترام، خود ۳ را از آن حذف کرده‌ایم. پس باید داشته باشیم:

$$۳a-۷<۳<a+۵$$

دو نامعادله را جداگانه حل کرده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۳a-۷<۳\Rightarrow a<\frac{۱۰}{۳} \\ ۳<a+۵\Rightarrow -۲<a \end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲<a<\frac{۱۰}{۳}$$

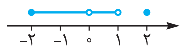
۱۴۵۶ ۲ زیر رادیکال، نامنفی:

$$۴-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۴\Rightarrow -۲\le x\le ۲$$

مخرج هم صفر نباشد. از طرفی:

$x([x]-۱)=۰\Rightarrow x=۰$ یا $[x]=۱\Rightarrow x=۰$ یا $۱\le x<۲$

پس لازم است بگوییم $x\ne ۰$ و $x\notin[۱,۲)$. اشتراک این حرف‌ها، دامنهٔ تابع را می‌دهد:



$$D_f=[-۲,۰)\cup(۰,۱)\cup\{۲\}$$

این‌که در همسایگی محذوف یک نقطه تعریف شده باشیم ولی در هیچ همسایگی از آن نقطه تعریف نشده باشیم، به همان نقاط حذف شده از دل همسایگی اشاره می‌کند. یعنی سوراخ وسط یک بازه! در نمایش بالا، $x=۰$ این ویژگی را دارد.

۱۴۵۷ ۳ یک راه خوب برای حل نامعادلهٔ $۲x^۲<|x|$ این است که بگوییم $x^۲$ همان $|x|^۲$ است:

$$۲|x|^۲<|x|\Rightarrow ۲|x|^۲-|x|<۰\Rightarrow |x|(۲|x|-۱)<۰$$

$|x|$ که همیشه نامنفی است: $|x|\ge ۰$ و در این جا کافی است صفر نشود:

$$|x|\ne ۰\Rightarrow x\ne ۰$$

در واقع، $x=۰$ سمت چپ نامعادله را صفر می‌کند و کار خراب می‌شود. حالا $|x|$ را که در علامت اثر ندارد، کنار بگذاریم و بگوییم:

$$۲|x|-۱<۰\Rightarrow |x|<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x<\frac{۱}{۲}$$

اما قرار شد $x\ne ۰$ باشد. در واقع: $x\in(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})-\{۰\}$

ایشان یک همسایگی محذوف $x=۰$ هستند.

۱۴۵۸ ۴ یک راه خوب برای حل نامعادلهٔ $|\frac{x-۳}{۲x-۱}|>۱$ این است که آن را به شکل $\frac{|x-۳|}{|۲x-۱|}>۱$ بنویسیم و با شرط $x\ne\frac{۱}{۲}$ دو طرفش را در عبارت مثبت $|۲x-۱|$ ضرب کنیم: $|x-۳|>|۲x-۱|$

کلاً داریم: $a>b>۰\Rightarrow a^۲>b^۲\Rightarrow a^۲-b^۲>۰\Rightarrow (a-b)(a+b)>۰$

پس با فرض $a=x-۳$ و $b=۲x-۱$، می‌نویسیم:

$$(x-۳-۲x+۱)(x-۳+۲x-۱)>۰\Rightarrow(-x-۲)(۳x-۴)>۰$$

$$\Rightarrow(x+۲)(۳x-۴)<۰\Rightarrow -۲<x<\frac{۴}{۳}$$

اما گفتیم $x\ne\frac{۱}{۲}$ باشد، پس مجموعه جواب نامعادله، این شکلی است:

$$(-۲,\frac{۴}{۳})-\{\frac{۱}{۲}\}$$

ایشان همسایگی محذوف $x=\frac{۱}{۲}$ هستند و ۳ عدد صحیح ۱، ۰، ۱- را در خود دارند.

۱۴۵۹ ۲ با فرض $t=[x]$، نامعادله این شکلی می‌شود:

$$t^۲-۴t+۳\Rightarrow(t-۱)(t-۳)<۰\Rightarrow ۱<t<۳$$

یعنی $۱<[x]<۳$. اما مگر $[x]$ عدد صحیح نیست؟! پس باید بگوییم $[x]=۲$.
در واقع، $۲\le x<۳$ و با توجه به صورت سؤال، $I=[۲,۳)$. می‌خواهیم دو تا عدد از این بازه حذف کنیم تا همسایگی محذوف شود. خب اولاً بازه بسته نباشد، پس $a=۲$ را حذف کنیم. ثانیاً عددی را از بازهٔ $(۲,۳)$ حذف کنیم تا از همسایگی به همسایگی محذوف برسیم. با حذف هر عدد مانند b که $۲<b<۳$، به آرزویمان می‌رسیم.

$$۲<b<۳\xrightarrow{+a}a+۲<a+b<a+۳\xrightarrow{a=۲}۴<a+b<۵$$

فقط گزینهٔ دوم بین ۴ و ۵ است!

۱۴۶۰ ۲ با توجه به شکل، $\lim_{x\to ۱}f(x)=۲$ و $\lim_{x\to -۱}f(x)=۱$. پس:

$$\lim_{x\to ۱}f(x)-۳\lim_{x\to -۱}f(x)=۲-۳(۱)=-۱$$

۱۴۶۱ ۴ از روی شکل، می‌توانیم بگوییم $f(۱)=۲$، $\lim_{x\to ۱^+}f(x)=۳$ و $\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۱$. پس:

$$۲f(۱)+۳\lim_{x\to ۱^+}f(x)-\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۲\times ۲+۳\times ۳-۱=۱۲$$

۱۴۶۲ ۳ منظور سؤال، این است که حدهای چپ و راست داشته باشیم ولی با هم برابر نباشند. در گزینهٔ (۱)، در $x=a$ حد راست نداریم. در گزینهٔ (۴)، چپ و راست نداریم!

در گزینهٔ (۲)، هر دو را داریم و با هم مساوی‌اند.

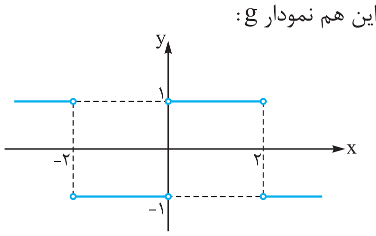
فقط گزینهٔ (۳)، خواستهٔ ما را تأمین می‌کند.

۱۴۶۳ ۱ شاید باورتان نشود، اما قصد داریم نمودار $g(x)$ را بکشیم!

$$g(x)=\frac{|f(x)|}{f(x)}=\begin{cases}\frac{f(x)}{f(x)}=۱ & f(x)>۰\\ \frac{-f(x)}{f(x)}=-۱ & f(x)<۰\end{cases}$$

یعنی هر جا نمودار f بالای محور xهاست $(f(x)>۰)$، تابع g ثابت و مساوی ۱ می‌شود. هر جا نمودار f پایین محور xهاست $(f(x)<۰)$، تابع g ثابت و مساوی ۱- می‌شود. نمودار f، در بازه‌های $(-\infty,-۲)$ و $(۰,۲)$ بالای محور xها و در بازه‌های $(-۲,۰)$ و $(۲,+\infty)$ پایین محور xهاست.

خب بفرمایید، این هم نمودار g:



حالا می‌توانیم بگوییم:

$$\lim_{x\to ۲^+}g(x)-\lim_{x\to(-۲)^-}g(x)=(-۱)-۱=-۲$$

۱۴۶۴ ۲ برای حد راست در $x=۱$، از ضابطهٔ پایینی (مربوط به $x\geq ۱$) و برای حد چپ در $x=۱$، از ضابطهٔ بالایی (مربوط به $x<۱$) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲+۲a)=۱+۲a$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax-۱)=a-۱$$

سؤال گفته $\lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$ پس:

$$(۱+۲a)-(a-۱)=-۱\Rightarrow a=-۳$$

۱۴۶۵ ۴ برای حد چپ در $x=-۲$، از ضابطهٔ بالایی (مربوط به $x<-۲$) و برای حد راست در $x=-۲$، از ضابطهٔ پایینی (مربوط به $x>-۲$) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to (-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^-}(x^۲+a)=۴+a$$
$$\lim_{x\to (-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^+}(۳x+۴)=۳(-۲)+۴=-۲$$

سؤال گفته حد چپ، معکوس حد راست است:

$$۴+a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۴-\frac{۱}{۲}=-۴/۵$$

۱۴۶۶ ۳ شرط وجود حد در $x=-۱$ این است که حدهای چپ و راست در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

از طرفی:

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^+} (x+a)^۲=(-۱+a)^۲$$
$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-}(۲x+۱)=۲(-۱)+۱=-۱$$

حالا دو مقدار به دست آمده را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(a-۱)^۲=-۱$$

عجب شد! تساوی بالا هیچ وقت برقرار نمی‌شود. چون $(a-۱)^۲$ همیشه نامنفی است و نمی‌تواند -۱ شود. خلاصه این‌که سر کار بودیم و مجموعه مقادیر a تهی است.

۱۴۶۷ ۴ وقتی به یک عدد نزدیک می‌شویم، با مقادیر غیرصحیح این کار را می‌کنیم! مثلاً وقتی می‌گوییم $x\to ۲$ یا $x\to \sqrt{۱۲}$، $x\notin\mathbb{Z}$ است.

پس هر وقت تابعی مثل $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\in\mathbb{Z}\\ h(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ داشتیم، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f(x)$، از ضابطهٔ $h(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)$$

در این‌جا هم از $۴x+۱$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)+\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x)=(۴(۲)+۱)+(۴(\frac{۱}{۲})+۱)=۹+۳=۱۲$$

۱۴۶۸ ۳ وقتی به یک عدد نزدیک می‌شویم، این اتفاق هم با مقادیر گنگ و هم با مقادیر گویا رخ می‌دهد. چون در همسایگی محذوف هر عدد، بی‌شمار عدد گنگ و بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. پس هر وقت تابعی مثل $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\in\mathbb{Q}\\ h(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ داشتیم، بدون آن‌که دست و پایمان را گم کنیم، می‌گوییم f در هیچ نقطهٔ مثل a حد ندارد مگر آن‌که $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)$ باشد. در این سؤال هم می‌گوییم $f(x)$ فقط در نقطه‌ای مثل a حد دارد که $\lim_{x\to a}(x^۲+۱)=\lim_{x\to a}(۳x-\frac{۱}{x})$ باشد. یعنی $a^۲+۱=۳a-\frac{۱}{a}$. به ازای $a=\sqrt{۲}$، این خواسته تأمین نمی‌شود و به ازای $a=۱$، تأمین می‌شود:

$$۱^۲+۱=۳(۱)-\frac{۱}{۱}=۲$$

یعنی $\lim_{x\to\sqrt{۲}} f(x)$ موجود نیست و $\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$.

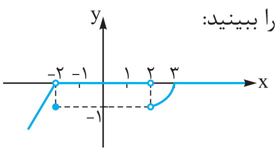
۱۴۶۹ ۴ تابع f فقط در نقاطی حد دارد که حد $\frac{۱}{x}$ و حد $x^۲-۲$ در آن نقاط با یکدیگر مساوی شود. از طرفی معادلهٔ $x^۲-۲=\frac{۱}{x}$ سه جواب دارد. در واقع با ضرب طرفین این معادله در x، به $x^۳-۲x-۱=۰$ می‌رسیم که خیلی راحت می‌فهمیم $x=-۱$ یک جواب آن است. با تقسیم $x^۳-۲x-۱$ بر $x+۱$، خارج قسمت $x^۲-x-۱$ به دست می‌آید و این عبارت هم دو ریشه دارد. بنابراین تابع مورد نظر در صورت سؤال، در ۳ نقطه حد دارد. منظورم نقاط $x=-۱$ و $x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ است.

۱۴۷۰ ۳ در $x=-۲$ و $x=۳$ حد نداریم، چون تابع f در هیچ همسایگی محذوفی از آن‌ها تعریف نشده است. در واقع، سمت چپ ۲- و سمت راست ۳، چیزی نداریم! در $x=۰$ حد نداریم، چون حد چپ و راست در این نقطه با هم مساوی نیستند ($\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۳$ و $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=-۱$). در $x=۲$ هم حاصل حد متناهی (عددی حقیقی) نیست و در نتیجه حد نداریم. تمام! شد ۴ نقطه.

۱۴۷۱ ۱ در حرکتی جسورانه، نمودار g را می‌کشیم. اول دقت کنیم که:

$$g(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{۲}=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x)}{۲}=۰ & f(x)\geq ۰\\ \frac{f(x)+f(x)}{۲}=f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

یعنی هر جا نمودار f بالای محور xها یا روی آن باشد، نمودار g خطی افقی روی محور xهاست و هر جا نمودار f پایین محور xها باشد، نمودار g همان نمودار f است. عجب وضعی شد! نمودار g را ببینید:



خب با توجه به نمودار، g فقط در $x=۲$ حد ندارد. در واقع، $\lim_{x\to ۲^-} g(x)=۰$ و $\lim_{x\to ۲^+} g(x)=-۱$. یعنی حد چپ و راست نامساوی‌اند.

۱۴۷۲ ۲ نمودار می‌گوید وقتی $x\to ۲$، $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شود و این اتفاق با مقادیر کم‌تر از ۳ می‌افتد. یعنی وقتی $x\to ۲$، $f(x)\to ۳^-$. پس:

$$\lim_{x\to ۲}[f(x)]=[۳^-]=۲$$

در مورد $[\lim_{x\to ۲} f(x)]$، دقت کنید که حاصل حد همیشه عددی مطلق است و می‌گوییم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۳\Rightarrow[\lim_{x\to ۲}f(x)]=[۳]=۳$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر در صورت سؤال، می‌شود:

$$۲-۳=-۱$$

۱۴۷۳ ۲ وقتی $x\to ۰^+$، $f(x)$ به -۲ نزدیک می‌شود و این اتفاق با مقادیر بیشتر از -۲ رخ می‌دهد: $f(x)\to(-۲)^+$. در واقع، در همسایگی راست $x=۰$، $f(x)>-۲$ است و می‌توانیم بگوییم $\frac{۱}{f(x)}<-\frac{۱}{۲}$ در نتیجه $\frac{۲}{f(x)}<-۱$. چیزی که فهمیدیم، این است که وقتی $x\to ۰^+$، داریم:

$$\frac{۲}{f(x)}\to(-۱)^-$$

پس:

$$\lim_{x\to ۰^+}[\frac{۲}{f(x)}]=[(-۱)^-]=-۲$$

۱۴۷۴ ۱ وقتی $x\to ۲^+$، $[x]=۲$ و وقتی $x\to ۲^-$، $[x]=۱$ می‌شود.

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x+a)[x]=(۲+a)[۲^+]$$
$$=(۲+a)(۲)=۴+۲a$$
$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x+a)[x]=(۲+a)[۲^-]$$
$$=(۲+a)(۱)=۲+a$$

سؤال گفته $\lim_{x\to ۲^+}f(x)-\lim_{x\to ۲^-}f(x)=۳$ باشد:

$$(۴+۲a)-(۲+a)=۳\Rightarrow a=۱$$

۱۴۷۵ ۲ باید حد چپ و راست در $x=۱$ موجود و با هم برابر باشند. از طرفی:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(a[x]+[x+۱])=a[۱^+]+[۲^+]=a(۱)+۲=a+۲$$
$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(a[x]+[x+۱])=a[۱^-]+[۲^-]=a(۰)+۱=۱$$

گفتیم با هم مساوی باشند:

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

۱۴۷۶ ۳ وقتی $x\to(-\frac{۱}{۲})^+$، $۲x\to(-۱)^+$ و داریم:

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^+}([x]+[۲x])=[(-\frac{۱}{۲})^+]+[(-۱)^+]=-۱-۱=-۲$$

وقتی $x\to(-\frac{۱}{۲})^-$، $۲x\to(-۱)^-$ و داریم:

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}([x]+[۲x])=[(-\frac{۱}{۲})^-]+[(-۱)^-]=-۱-۲=-۳$$

حاصل جمع این دو، می‌شود -۵.

۱۴۷۷ ۱ وقتی $x\to ۴^+$، $[x]\to[۴^+]=۴$ و $\frac{\pi[x]}{۲}\to\frac{۴\pi}{۲}=۲\pi$، پس:

$$\lim_{x\to ۴^+}f(x)=\lim_{x\to ۴^+}(x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{۲})=۴-۴+\underbrace{\sin ۲\pi}_{۰}=۰$$

وقتی $x\to ۴^-$، $[x]\to[۴^-]=۳$ و $\frac{\pi[x]}{۲}\to\frac{۳\pi}{۲}$، پس:

$$\lim_{x\to ۴^-}f(x)=\lim_{x\to ۴^-}(x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{۲})=۴-۳+\underbrace{\sin\frac{۳\pi}{۲}}_{-۱}=۰$$

هر دو حد، صفر شد و تفاضل آن‌ها هم صفر می‌شود.

۱۴۷۸ ۳ یک راه این است که گزینه‌ها را امتحان کنیم، ولی ما این کار را نمی‌کنیم! در عوض، فرض می‌کنیم حد چپ $f(x)$ در نقطهٔ $x=k$، دو برابر حد راست آن در این نقطه باشد. اولین چیزی که باید به آن دقت کنیم، صحیح بودن k است: $k\in\mathbb{Z}$. چون در نقاط غیرصحیح، داخل براکت‌ها صحیح نمی‌شود و مشکلی نداریم. در واقع، در هر $x_۰\notin\mathbb{Z}$، حد چپ و راست با هم مساوی می‌شود. البته در گزینه‌ها هم عدد غیرصحیح نمی‌بینیم و این استدلال زیادی بود! کارمان را با k ادامه دهیم.

وقتی $x\to k^+$، $[x]\to[k^+]=k$. در این حالت، $x>k$ است و در نتیجه $-x<-k$. یعنی $(-x)\to(-k)^-$ و داریم:

$$[-x]\to[(-k)^-]=(-k)-۱$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to k^+}f(x)=۴k+۳(-k-۱)=k-۳$$

وقتی $x\to k^-$، $[x]\to[k^-]=k-۱$. در این حالت، $x<k$ است و در نتیجه $-x>-k$. یعنی $(-x)\to(-k)^+$ و داریم:

$$[-x]\to[(-k)^+]=-k$$

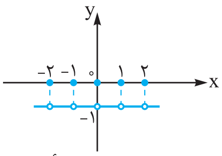
بنابراین:

$$\lim_{x\to k^-}f(x)=۴(k-۱)+۳(-k)=k-۴$$

سؤال می‌خواهد حد چپ ۲ برابر حد راست باشد:

$$k-۴=۲(k-۳)\Rightarrow k-۴=۲k-۶\Rightarrow k=۲$$

۱۴۷۹ ۳ یادمان هست که $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. این هم نمودار $f(x)$:



تابع f در همهٔ نقاط حد دارد و حد آن مساوی -۱ است. پس برای گزینهٔ سوم متأسفیم!

۱۴۸۰ ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) موجود نیست. $|x|(x-۲)$ اطراف $x=۰$ منفی می‌شود و در واقع هیچ همسایگی محذوفی از $x=۰$ نداریم که $\sqrt{|x|(x-۲)}$ در آن تعریف شده باشد.

x		۰		۲	
$\lvert x\rvert(x-۲)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

۲) موجود نیست. وقتی $x\to ۱$، صورت کسر به سمت ۱ و مخرج آن به سمت صفر میل می‌کند. پس حق بدهید که حاصل حد، متناهی نشود!

۳) موجود نیست. در حالت $x \to ۲^-$ به مشکل برمی‌خوریم. چون اگر $x<۲$ باشد، $\sqrt{x-۲}$ تعریف نشده خواهد بود. در واقع هیچ همسایگی محذوفی از $x=۲$ نداریم که $\sqrt{x-۲}$ در آن تعریف شده باشد.

۴) همه چی آرومه! حاصل حد هم می‌شود صفر.

۱۴۸۱ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) حد دارد. وقتی به عددی مثل a نزدیک می‌شویم، این اتفاق همیشه با مقادیر غیر صحیح می‌افتد. پس: $\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$

۲) حد دارد. وقتی $x\to ۱$، $\frac{\pi}{۲}x \to \frac{\pi}{۲}$ پس: $\sin\frac{\pi}{۲}x \to \sin\frac{\pi}{۲}=۱$

همیشه $-۱\le \sin x \le ۱$ پس می‌توانیم بگوییم وقتی $x\to ۱$، $\sin\frac{\pi}{۲}x$ با مقادیر کم‌تر از ۱ به آن نزدیک می‌شود: $\sin\frac{\pi}{۲}x\to ۱^-$. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=[۱^-]=۰$$

۳) حد ندارد. در هر همسایگی محذوف $x=۱$، $(x-۱)^۲(x-۳)$ منفی و در نتیجه $\sqrt[۴]{(x-۱)^۲(x-۳)}$ تعریف نشده است.

x		۱		۳	
$(x-۱)^۲(x-۳)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

۴) حد دارد. حد آن هم می‌شود ۱.

۱۴۸۲ ۴ موافقید اول دامنهٔ تابع را چک کنیم؟!

$$[x]-۲=۰ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow ۲\le x<۳$$

دامنهٔ تابع، $\mathbb{R}-[۲,۳)$ است. یعنی در هیچ همسایگی محذوفی از $x=۲$ تعریف نشده (سمت راست ۲ مشکل دارد). پس $f(x)$ در $x=۲$ حد ندارد.

۱۴۸۳ ۴ چون $x=۶$ داخل براکت‌ها را صحیح می‌کند، باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to ۶^+} f(x)=\lim_{x\to ۶^+}([\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}])=[۳^+]+[۲^+]=۳+۲=۵$$

$$\lim_{x\to ۶^-} f(x)=\lim_{x\to ۶^-}([\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}])=[۳^-]+[۲^-]=۲+۱=۳$$

حاصل جمع این دو، می‌شود $۸=۳+۵$.

۱۴۸۴ ۳ وقتی $x\to(-\frac{۱}{۱۰})^-$، در واقع $x<-\frac{۱}{۱۰}$ است و با معکوس کردن طرفین، به $\frac{۱}{x}>-۱۰$ می‌رسیم. یعنی $\frac{۱}{x}\to(-۱۰)^+$. پس:

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۱۰})^-}[\frac{۱}{x}]=[(-۱۰)^+]=-۱۰$$

۱۴۸۵ ۳ وقتی $x\to(-\frac{۱}{۳})^+$، در واقع $x>-\frac{۱}{۳}$ است و $x^۲<\frac{۱}{۹}$ می‌شود.

پس $\frac{۱}{x^۲}>۹$ و در نتیجه $-\frac{۱}{x^۲}<-۹$. یعنی:

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۳})^+}[\frac{-۱}{x^۲}]=[(-۹)^-]=-۱۰$$

۱۴۸۶ ۱ وقتی $x\to(\frac{۱}{۴})^-$، می‌توانیم بگوییم:

$$۰<x<\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{x}>۴\Rightarrow\frac{۲}{x}>۸\Rightarrow-\frac{۲}{x}<-۸$$

یعنی $-\frac{۲}{x}\to(-۸)^-$ و داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۴})^-}[-\frac{۲}{x}]=[(-۸)^-]=-۹$$

وقتی $x\to(-\frac{۱}{۳})^+$، می‌توانیم بگوییم:

$$-\frac{۱}{۳}<x<۰\xrightarrow{\times(-۶)}۲>-۶x$$

یعنی $-۶x\to ۲^-$ و داریم:

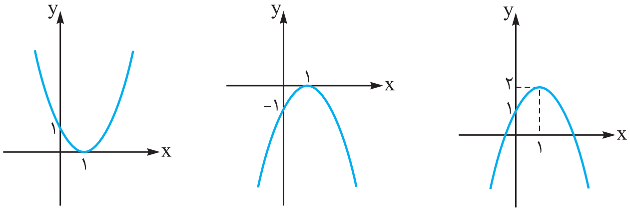
$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۳})^+}[-۶x]=[۲^-]=۱$$

سؤال، تفاضل این‌ها را می‌خواهد: $-۹-۱=-۱۰$

۱۴۸۷ ۲ ضابطهٔ تابع را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=-(x^۲-۲x-۱)=-((x-۱)^۲-۲)=-(x-۱)^۲+۲$$

حتی می‌توانیم نمودار آن را خیلی سریع بکشیم:



$f(x)$ — $y=-(x-۱)^۲$ — $y=(x-۱)^۲$

وقتی $x\to ۱$، $f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود، آن هم با مقادیر کم‌تر از ۲. در واقع، $f(x)\to ۲^-$. پس: $\lim_{x\to ۱}[f(x)]=[۲^-]=۱$

در مورد $[\lim_{x\to ۱} f(x)]$، دقت کنیم که حاصل حد مطلق است:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۲\Rightarrow[\lim_{x\to ۱} f(x)]=[۲]=۲$$

۱۴۸۸ ۲ وقتی $x\to ۰$، چه از سمت چپ و چه از سمت راست، $x^۲\to ۰^+$.

پس:

$$\lim_{x\to ۰}[\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}]=[\frac{۱-۰^+}{۱+۰^+}]=[\frac{۱^-}{۱^+}]$$

۱^- کوچک‌تر از ۱ و ۱^+ بزرگ‌تر از ۱ است، پس $\frac{۱^-}{۱^+}$ کوچک‌تر از ۱ می‌شود:

$$[\frac{۱^-}{۱^+}]=[۱^-]=۰$$

۱۴۸۹ ۳ وقتی $x\to ۲^+$، داخل براکت به سمت ۵ می‌رود. اما باید ببینیم با مقادیر کم‌تر از ۵ این اتفاق می‌افتد یا با مقادیر بیشتر از ۵. یک راه خوب برای فهمیدن این موضوع، ظاهر کردن مخرج در صورت کسر و تفکیک آن است:

$$[\frac{۲x+۳}{x-۱}]=[\frac{۲(x-۱)+۵}{x-۱}]=[۲+\frac{۵}{x-۱}]=۲+[\frac{۵}{x-۱}]$$

وقتی $x\to ۲^+$، $\frac{۵}{x-۱}\to\frac{۵}{۱^+}=۵^-$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۲^+}[\frac{۲x+۳}{x-۱}]=۲+[۵^-]=۲+۴=۶$$

۱۴۹۰ ۱ این که مخرج کسر را در صورت آن ظاهر کنیم تا کسر تفکیک شود، خیلی کار خوبی است:

$$f(x)=[\frac{4x^2+3}{x^2+1}]=[\frac{4(x^2+1)-1}{x^2+1}]=[4-\frac{1}{x^2+1}]=4+[\frac{-1}{x^2+1}]$$

همیشه $x^2\ge 0$ پس $x^2+1\ge 1$ و در نتیجه $0<\frac{1}{x^2+1}\le 1$.

پس $-1\le\frac{-1}{x^2+1}<0$ و داریم: $[\frac{-1}{x^2+1}]=-1\Rightarrow f(x)=4+(-1)=3$

اصن یه وضی! تابع f ثابت از آب در آمد و در همهٔ نقاط حد دارد.

۱۴۹۱ ۱ وقتی $x\to 1^-$، باید از ضابطهٔ بالایی (مربوط به $x<1$) استفاده کنیم: $f(x)=\sqrt{x}$

$$[\frac{f(x)+1}{f^2(x)}]=[\frac{f(x)}{f^2(x)}+\frac{1}{f^2(x)}]=[\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f^2(x)}]$$

$$=[\frac{1}{\sqrt x}+\frac{1}{(\sqrt x)^2}]=[\frac{1}{\sqrt x}+\frac{1}{x}]$$

حالا حد می‌گیریم:

$$\lim_{x\to1^-}[\frac{1}{\sqrt x}+\frac{1}{x}]=[\frac{1}{1^-}+\frac{1}{1^-}]=[1^++1^+]=[2^+]=2$$

۱۴۹۲ ۱ اول ببینیم ۲ رادیان در کدام ناحیه از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. هر رادیان تقریباً ۵۷ درجه است، پس ۲ رادیان تقریباً ۱۱۴ درجه می‌شود که در ناحیهٔ دوم قرار می‌گیرد. یک جور دیگر هم می‌توانستیم بگوییم: $\pi\simeq 3/14$ پس ۲ رادیان بین $\frac{\pi}{2}$ و π رادیان قرار می‌گیرد، یعنی همان ناحیهٔ دوم! با این حساب، وقتی $x\to 2$، $\cos x$ منفی است: $-1<\cos x<0$ و جزء صحیح آن -1 می‌شود: $\lim_{x\to2}[\cos x]=-1$

۱۴۹۳ ۳ وقتی $x\to\pi$، $\cos x$ به $\cos\pi=-1$ میل می‌کند. اما همیشه $-1\le\cos x\le1$ پس در هر دو حالت $x\to\pi^-$ و $x\to\pi^+$، $\cos x$ با مقادیر بیشتر از -1 به آن میل می‌کند: $\cos x\to(-1)^+$. یعنی:

$$-1<\cos x\Rightarrow\frac{1}{\cos x}<-1\Rightarrow\frac{1}{\cos x}\to(-1)^-$$

پس:

$$\lim_{x\to\pi}[\frac{1}{\cos x}]=[(-1)^-]=-2$$

۱۴۹۴ ۲ وقتی $x\to 6^+$، $\frac{\pi}{x}$ به $\frac{\pi}{6^+}=(\frac{\pi}{6})^-$ میل می‌کند. در این صورت، عبارت داخل جزء صحیح به طرف $4\sin^2\frac{\pi}{6}=4(\frac{1}{2})^2=1$ می‌رود. باید ببینیم این عبارت، با مقادیر کم‌تر از ۱ به سمت آن می‌رود یا با مقادیر بیشتر از ۱.

نمودار $y=\sin x$ در ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی، صعودی اکید است. یعنی با افزایش x، مقدار $\sin x$ هم زیاد می‌شود.

پس وقتی با $\frac{\pi}{x}\to(\frac{\pi}{6})^-$ مواجهیم، می‌توانیم بگوییم:

$$\frac{\pi}{x}<\frac{\pi}{6}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{x}<\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{x}<\frac{1}{2}$$

با توجه به مثبت بودن $\sin\frac{\pi}{x}$، می‌توانیم با خیال راحت دو طرف را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin^2\frac{\pi}{x}<\frac{1}{4}\Rightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{x}<1$$

یعنی وقتی $x\to6^+$، $4\sin^2\frac{\pi}{x}\to1^-$: $\lim_{x\to6^+}[4\sin^2\frac{\pi}{x}]=[1^-]=0$

۱۴۹۵ ۳ وقتی $x\to\frac{\pi}{8}$، داخل جزء صحیح به سمت $2\sqrt2\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt2\times\frac{\sqrt2}{2}=2$ می‌رود. باید ببینیم عبارت داخل جزء صحیح، با مقادیر کم‌تر از ۲ به سمت آن می‌رود یا با مقادیر بیشتر از ۲.

نمودار $y=\cos x$ در ناحیهٔ اول نزولی اکید است. یعنی با افزایش x، مقدار $\cos x$ کم می‌شود. پس وقتی $0<x<\frac{\pi}{4}$، $\cos x>\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$ و وقتی $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$، $\cos x<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$. یعنی:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{8})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{8})^+}[2\sqrt2\cos2x]=[2\sqrt2(\frac{\sqrt2}{2})^-]=[2^-]=1$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{8})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{8})^-}[2\sqrt2\cos2x]=[2\sqrt2(\frac{\sqrt2}{2})^+]=[2^+]=2$$

حاصل جمع این دو، می‌شود $1+2=3$.

۱۴۹۶ ۱ ای کاش عبارت داخل جزء صحیح، ساده‌تر می‌شد!

خب کلاً $1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$ و $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$، پس:

$$\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\cot\frac{x}{2}$$

راحت شدیم! فهمیدیم $f(x)=[\cot\frac{x}{2}]$. وقتی $x\to\frac{\pi}{2}$، $\cot\frac{x}{2}$ به $\cot\frac{\pi}{4}=1$ میل می‌کند. حالا باید ببینیم این اتفاق با مقادیر کم‌تر از ۱ رخ می‌دهد یا با مقادیر بیشتر از ۱. خب تابع $y=\cot x$ در هر بازه‌ای تعریف شده باشد، در آن بازه نزولی اکید است. یعنی:

$$x>\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cot x<\underbrace{\cot\frac{\pi}{4}}_{1}$$

پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}[\cot\frac{x}{2}]=[\cot(\frac{\pi}{4})^+]=[1^-]=0$$

۱۴۹۷ ۱ از مثلثات، این کارها را بلدیم:

$$\sqrt2(\sin x-\cos x)=2(\underbrace{\frac{\sqrt2}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin x-\underbrace{\frac{\sqrt2}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos x)$$

$$=2(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4})=2\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

وقتی $x\to(\frac{3\pi}{4})^+$، $(x-\frac{\pi}{4})\to(\frac{\pi}{2})^+$ و در نتیجه $\sin(x-\frac{\pi}{4})$ به $\sin\frac{\pi}{2}=1$ میل می‌کند. همیشه $-1\le\sin x\le1$ پس این که می‌گوییم سینوس به ۱ میل می‌کند، منظورمان با مقادیر کم‌تر از ۱ است:

$$\sin(x-\frac{\pi}{4})\to1^-$$

در واقع:

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}[\sqrt2(\sin x-\cos x)]=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}[2\sin(x-\frac{\pi}{4})]$$

$$=[2(1^-)]=[2^-]=1$$

۱۴۹۸ ۳ از مثلثات یادمان هست که:

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2x}$$

وقتی $x\to\frac{3\pi}{4}$، داریم $2x\to\frac{3\pi}{2}$ و در نتیجه می‌نویسیم $\sin 2x\to -1$.

همیشه $-1\le\sin\alpha\le 1$ پس وقتی می‌گوییم $\sin 2x$ به -1 میل می‌کند، منظورمان با مقادیر بیشتر از -1 است: $\sin 2x\to(-1)^+$

حالا: $-1<\sin 2x\Rightarrow\frac{1}{\sin 2x}<-1\Rightarrow\frac{2}{\sin 2x}<-2$

$$\Rightarrow\frac{2}{\sin 2x}\to(-2)^-$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}[\tan x+\cot x]=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}[\frac{2}{\sin 2x}]=[(-2)^-]=-3$$

۱۴۹۹ ۳ اول تکلیف $[\sin(x-\frac{\pi}{3})]$ را معلوم کنیم. وقتی $x\to(\frac{\pi}{3})^+$، $\sin(x-\frac{\pi}{3})\to\sin 0^+=0^+$ و که جزء صحیح آن می‌شود صفر. اما وقتی $x\to(\frac{\pi}{3})^-$، $\sin(x-\frac{\pi}{3})\to\sin 0^-=0^-$ که جزء صحیح آن می‌شود -1.

دقت کنید که $\sin 0^-$ سینوس کمانی در ربع چهارم است و در آن ناحیه سینوس منفی است. به همین خاطر، گفتیم $\sin 0^-=0^-$. حالا تکلیف $[\tan^2 x]$ را معلوم کنیم. تانژانت، در هر بازه‌ای تعریف شده باشد، در آن بازه صعودی اکید است. مثلاً $\tan x$ در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ روند صعودی دارد. پس:

$$x\to(\frac{\pi}{3})^+ : x>\frac{\pi}{3}\Rightarrow\tan x>\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow\tan x>\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\tan^2 x>3\Rightarrow[\tan^2 x]=[3^+]=3$$

$$x\to(\frac{\pi}{3})^- : x<\frac{\pi}{3}\Rightarrow\tan x<\sqrt{3}\Rightarrow\tan^2 x<3$$

$$\Rightarrow[\tan^2 x]=[3^-]=2$$

حالا در مورد $f(x)=[\sin(x-\frac{\pi}{3})]\cos 3x+[\tan^2 x]$، داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^+}f(x)=(0\times\cos\pi)+3=3$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^-}f(x)=(-1\times\cos\pi)+2=(-1)(-1)+2=3$$

حد چپ و راست، هر دو ۳ شدند. پس: $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}f(x)=3$

۱۵۰۰ ۱ اول تکلیف $[\cos\frac{x}{2}]$ را معلوم کنیم. وقتی $x\to\pi$، $\frac{x}{2}\to\frac{\pi}{2}$ و $\cos\frac{x}{2}$ به $\cos\frac{\pi}{2}=0$ میل می‌کند. اگر $x\to\pi^-$، آن‌گاه $\frac{x}{2}\to(\frac{\pi}{2})^-$.
یعنی کمان در ناحیهٔ اول قرار می‌گیرد. جایی که کسینوس مثبت است:

$$\lim_{x\to\pi^-}[\cos\frac{x}{2}]=[0^+]=0$$

اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $\frac{x}{2}\to(\frac{\pi}{2})^+$. یعنی کمان در ناحیهٔ دوم قرار می‌گیرد. جایی که کسینوس منفی است:

$$\lim_{x\to\pi^+}[\cos\frac{x}{2}]=[0^-]=-1$$

برویم سراغ $[\sin 2x]$. وقتی $x\to\pi$، $2x\to 2\pi$ و $\sin 2x$ به $\sin 2x=0$ میل می‌کند. اگر $x\to\pi^-$، آن‌گاه $2x\to(2\pi)^-$. یعنی کمان در ناحیهٔ چهارم قرار می‌گیرد. جایی که سینوس منفی است:

$$\lim_{x\to\pi^-}[\sin 2x]=[0^-]=-1$$

اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $2x\to(2\pi)^+$. یعنی کمان در ناحیهٔ اول قرار می‌گیرد. جایی که سینوس مثبت است:

$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin 2x]=[0^+]=0$$

حالا در مورد $f(x)=\sin\frac{x}{2}[\cos\frac{x}{2}]-\cos x[\sin 2x]$، می‌توانیم بگوییم:

$$\lim_{x\to\pi^-}f(x)=(\sin\frac{\pi}{2})(0)-(\cos\pi)(-1)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=(\sin\frac{\pi}{2})(-1)-(\cos\pi)(0)=-1-0=-1$$

حد چپ و راست، هر دو -1 شدند. پس:

$$\lim_{x\to\pi}f(x)=-1$$

۱۵۰۱ ۳ فرض کنیم $\lim_{x\to 1}f(x)=L$ باشد. در این صورت با توجه به قضیه‌های محترم حد، داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{f(x)+1}=1\Rightarrow\frac{2\lim_{x\to 1}f(x)-1}{\lim_{x\to 1}f(x)+1}=1\Rightarrow\frac{2L-1}{L+1}=1$$

$$\Rightarrow 2L-1=L+1\Rightarrow L=2$$

یعنی:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=2$$

۱۵۰۲ ۳ به طور کلی جدول زیر را داریم:

f و g هر دو در a فاقد حد هستند.	g در a دارای حد و f در a فاقد حداست.	f در a دارای حد و g در a فاقد حداست.	f و g در a دارای حد هستند.	وضعیت / تابع
معلوم نیست.	حد ندارد.	حد ندارد.	حد دارد.	$f+g$
معلوم نیست.	حد ندارد.	حد ندارد.	حد دارد.	$f-g$
معلوم نیست.	معلوم‌نیست.	معلوم نیست.	حد دارد.	$f\times g$
معلوم نیست.	حد ندارد.	معلوم نیست.	حد دارد.	$\frac{f}{g}, \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$
معلوم نیست.	معلوم‌نیست.	حد ندارد.	حد دارد.	$\frac{g}{f}, \lim_{x\to a}f(x)\neq 0$