

آموزش و آزمون

پاسخ تشریحی سوالات
و مسائل ریاضیات

هشتم

برای دانش آموزان تیزهوش



خواهی بشوی قبول آسان
با رتبه عالی و درخشان
برخیز و کنون ریاضی آموز
از دست مده فرصت امروز
همراه توایم با رشادت
تا باز کنی در سعادت

از مجموعه رشادت

رمز شکوفایی استعدادهای دانش آموزان تیزهوش

محمد بُرجی اصفهانی - هادی عزیززاده
مریم بُرجی اصفهانی



به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱، کتاب «ریاضیات ششم ابتدایی برای دانش‌آموزان تیزهوش» را تألیف کردیم. این کتاب که به کتاب «ریاضی رشادت» مشهور شد، با استقبال گسترده دانش‌آموزان، خانواده‌های آن‌ها و معلمان گرامی روبه‌رو گردید. این اقبال عمومی ما را بر آن داشت که به تألیف کتاب‌های ریاضی سایر پایه‌های تحصیلی با همان سبک و سیاق اقدام کنیم.

اکنون بسیار خرسندیم که کتاب «ریاضیات هشتم برای دانش‌آموزان تیزهوش» را تقدیم دانش‌آموزان می‌کنیم. این کتاب مطالب ریاضی دوم دبیرستان (دوره اول متوسطه) را در سطح پیشرفته ارائه می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با خلاصه مباحث و نکته‌های مهم هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌هایی بر حل آن‌ها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی سؤال چهارگزینه‌ای و تعدادی مسئله تشریحی را حل می‌کند تا بر موضوع تسلط یابد. سؤالات چهارگزینه‌ای و مسائل تشریحی این کتاب به سه گروه آغازین (ساده)، میانی (متوسط) و پایانی (دشوار) تقسیم شده‌اند که ترتیب مطالعه و حل آن‌ها باید رعایت شود. انتظار می‌رود کتاب حاضر، همه نیازهای دانش‌آموزان دوم دبیرستان مدارس خاص و تیزهوش را پاسخ‌گو باشد.

در این‌جا لازم می‌دانیم از جناب آقای یحیی دهقانی مدیرعامل محترم شرکت آموزشی، فرهنگی و انتشاراتی مبتکران که شرایط و امکانات لازم را برای چاپ این کتاب فراهم آوردند، تشکر کنیم. از خانم‌ها اکرم محمدی و پونه سپاهی و آقایان امیررضا و محمدرضا مزیدآبادی هم که با مطالعه و ویرایش بخش‌هایی از کتاب، مؤلفان را در آماده کردن به موقع کتاب یاری کرده‌اند، سپاسگزاریم.

هم‌چنین از خانم‌ها ناهید صبائی (حروفچین و صفحه‌آرا)، ملیحه محمدی، سمیرا ایمان‌فرد، بهاره خدای و مینا هرمزی (گرافیک‌ها)، سپیده شهبازی‌فرد (تصویرگر) و مدیران و همکاران واحدهای حروفچینی، تولید و فروش سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم ریاضی و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود درباره این کتاب یاری فرمایند.

محمد بُرجی اصفهانی

هادی عزیززاده

مریم بُرجی اصفهانی

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

راهنمای استفاده از کتاب ۶

پاسخ‌نامه تشریحی

| | |
|---------------------------|-----------|
| اعداد صحیح و گویا ۸ | فصل اول |
| حساب اعداد طبیعی ۳۰ | فصل دوم |
| چندضلعی‌ها ۴۷ | فصل سوم |
| جبر و معادله ۶۳ | فصل چهارم |
| بردار و مختصات ۷۸ | فصل پنجم |
| مثلث ۹۵ | فصل ششم |
| توان و جذر ۱۱۴ | فصل هفتم |
| آمار و احتمال ۱۳۱ | فصل هشتم |
| دایره ۱۵۳ | فصل نهم |

راهنمای استفاده از کتاب

دانش آموز گرامی / ولی محترم

قبل از آغاز مطالعه این کتاب به توصیه‌ها و موارد زیر توجه فرمایید:

۱- ابتدا خلاصه درس و مثال‌های فصل موردنظر را مطالعه کنید.

۲- سؤالات چهارگزینه‌ای و تشریحی هر فصل را پاسخ دهید. سؤالات از ساده به سخت تنظیم و به سه گروه آغازین (ساده)، میانی (متوسط) و پایانی (مشکل) تقسیم شده‌اند. پس از آن که به همه سؤالات چهارگزینه‌ای و تشریحی یک گروه پاسخ دادید، به کتاب پاسخ‌نامه مراجعه کنید و پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های درست سؤالات مقایسه کنید. حتماً پاسخ‌نامه را دقیق بخوانید حتی اگر پاسخ شما به سؤالی درست باشد. ممکن است ما راه حل ساده‌تری را پیشنهاد کرده باشیم. ۳- تا زمانی که به سؤالات یک گروه پاسخ نداده‌اید، سراغ سؤالات گروه بالاتر نروید. سؤالات گروه پایانی باید در آخرین مرحله پاسخ داده شوند.

۴- برای آن که بدانید سطح علمی شما در درس ریاضی چیست، پس از پاسخ دادن به سؤالات چهارگزینه‌ای پایانی، تعداد انتخاب‌های درست و تعداد انتخاب‌های غلط خود را بشمارید و نمره خودتان را با رابطه زیر محاسبه کنید:

$$\text{تعداد پاسخ‌های غلط} - \frac{\text{تعداد پاسخ‌های درست}}{۳} = \text{نمره}$$

(یعنی هر سه انتخاب غلط، یک انتخاب درست را خنثی می‌کند). سپس نمره خود را از ۲۰ محاسبه کرده و با مراجعه به جدول زیر، سطح علمی خود را مشخص کنید.

| سطح علمی | نمره |
|----------|---------|
| متوسط | ۱ - ۵ |
| خوب | ۶ - ۱۰ |
| خیلی خوب | ۱۱ - ۱۵ |
| عالی | ۱۶ - ۱۹ |
| نابغه | ۲۰ |

ضمناً سطح علمی خود را می‌توانید با پاسخ به آزمون‌های تستی پایان کتاب نیز ارزیابی کنید (دو آزمون اول مربوط به پنج فصل اول کتاب است و مناسب ترم اول می‌باشد و سه آزمون بعدی کل کتاب را شامل می‌شود که مناسب ترم دوم است). ۵- برای آن که با روش درست مطالعه و روش درست تست زدن آشنا شوید و از خدمات مشاوره‌ای آموزشی بهره‌مند گردید، به شما توصیه می‌شود که با آرمان و آیدا در سفر مطالعه این کتاب همراه شوید و نکات مهمی را که همراه با تصویر آن‌ها، در قالب شعر یا نثر بیان شده است به دقت مطالعه و به آن‌ها عمل کنید.

موفق باشید.

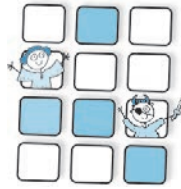
پاسخ نامه

لطفاً بکن تو هر سؤال این کتاب
پاسخت بی شک نباشد بی خط
نمره‌ی منفی بود گاهی میان
روی یک نمره بدان که فورده خط
شیر و خط ننداز و بازی درنیا را

با تمرکز، با تفکر، بی شتاب
گر بود غایب یکی از این سه تا
در سؤالی که بود تستی بدان
با سه پاسخ که دهی جانا غلط
دقتی بسیار کن ای هوشیار



پاسخ‌نامه تشریحی اعداد صحیح و گویا



★ آغازین

۱- گزینه (۳)
حل:

| | | |
|--------|---|----|
| مجموع | ۹ | ۲۷ |
| اختلاف | ۵ | ۱۵ |

$\times 3$
 $\times 3$

$۲ + ۷ = ۹ =$ مجموع صورت و مخرج
 $۷ - ۲ = ۵ =$ اختلاف صورت و مخرج

۲- گزینه (۴)
حل:

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{5} < \frac{4}{9} < \frac{3}{4} < \frac{10}{12} < \frac{6}{7}$$

۳- گزینه (۱)
حل:

$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$1\frac{7}{5} = \frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2\frac{4}{5}$$

۴- گزینه (۲)
حل:

$$\text{تعداد اعداد} = (201 - 10) + 1 = 192$$

$$\text{تعداد پراکنشها} = 192 \div 2 = 96$$

$$\underbrace{(-10 + 11)}_1 + \underbrace{(-12 + 13)}_1 + \dots + \underbrace{(-200 + 201)}_1 = 96 \times 1 = 96$$

۵- گزینه (۳)
حل:

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{25}{15} - \frac{9}{15} = \frac{16}{15}$$



۶- گزینه (۳)

$$\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = \left(\frac{3}{8} + \frac{4}{8}\right) - \frac{1}{3} = \frac{7}{8} - \frac{1}{3} = \frac{21}{24} - \frac{8}{24} = \frac{13}{24} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{24}{13}$$

حل:

۷- گزینه (۲)

حل: صورت یکی از کسرها صفر است و حاصل ضرب صفر در هر عددی، صفر می‌باشد.

$$\frac{-3}{14} \times \frac{-2}{13} \times \frac{-1}{12} \times \frac{0}{11} \times \frac{1}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{0}{9 \times 10 \times \dots \times 14}$$

۸- گزینه (۲)

$$\frac{-8}{-3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -2\frac{5}{5} < \frac{7}{5} < \frac{20}{13} < \frac{-8}{-3}$$

حل:

$$\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}, \quad \frac{20}{13} = 1\frac{7}{13}$$

۹- گزینه (۱)

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} - \left(\frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16}\right) = \frac{8}{16} - \frac{7}{16} = \frac{1}{16}$$

حل:

۱۰- گزینه (۳)

$$\text{تعداد اعداد} = \left(\frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{فاصله اعداد}}\right) + 1 = \left(\frac{50 - 15}{5}\right) + 1 = 7 + 1 = 8$$

حل:

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{(\text{اولی} + \text{آخری}) \times \text{تعداد}}{2} = \frac{(50 + 15) \times 8}{2} = 260$$

۱۱- گزینه (۲)

$$\frac{\frac{3}{4} \div \frac{-1}{2}}{\frac{-2}{3} \div \frac{1}{6}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{-1}}{\frac{-2}{3} \times \frac{6}{1}} = \left(\frac{\frac{3}{-2}}{\frac{-4}{1}}\right) = \frac{3}{8}$$

حل:

۱۲- گزینه (۱)

حل: طرفین و وسطین می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 2 \div \square = 8 \\ 1 - \frac{1}{4} = 15 \end{array}$$



$$(۲ \div \square) \times ۱۵ = ۸ \times \left(1 - \frac{۳}{۴}\right) = ۶ \rightarrow ۲ \div \square = ۶ \div ۱۵$$

عمل تقسیم با خط کسری برابر است، بنابراین:

$$\frac{۲}{\square} = \frac{۶}{۱۵} \rightarrow \square = ۱۵ \div ۳ = ۵$$

۱۳- گزینه (۲)

حل: برای دو کسر مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۸}{۲۰} = \frac{۲}{۵} < \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۲۰}$$

اگر اعداد زوج بین ۸ و ۱۵ را انتخاب کنیم، بعداً می‌توانیم با ساده کردن صورت و مخرج بر ۲، کسرهایی با مخرج ۱۰ داشته باشیم:

$$\frac{۸}{۲۰} = \frac{۲}{۵} < \frac{۱۰}{۲۰} < \frac{۱۲}{۲۰} < \frac{۱۴}{۲۰} < \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۲۰}$$

بنابراین ۳ کسر، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۲}{۵} < \frac{۵}{۱۰} < \frac{۶}{۱۰} < \frac{۷}{۱۰} < \frac{۳}{۴}$$

۱۴- گزینه (۳)

حل: اعداد منفی جذر ندارند، بنابراین $\frac{\sqrt{-۲۵}}{۳}$ عددی گویا نیست، اما سایر گزینه‌ها را می‌توان به صورت یک کسر نوشت.

$$\frac{-\sqrt{۱۶}}{۳} = \frac{-۴}{۳}$$

$$\frac{۳}{۴۵} = \frac{۳۴۵}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱/۱۲}{۳} = \frac{۱۱۲}{۳} = \frac{۱۱۲}{۳۰۰}$$

۱۵- گزینه (۴)

حل: به جز صفر، حاصل ضرب هر عدد گویا در معکوسش برابر با یک است. بنابراین اگر عدد گویای مثبتی انتخاب کنیم، حاصل جمع عدد و معکوسش همواره بزرگتر از حاصل ضربشان خواهد بود:

$$\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۳}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۹}{۶} + \frac{۴}{۶} = \frac{۱۳}{۶} > \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۲} = ۱$$



★ میانی

۱۶- گزینه (۳)

حل:

$$\begin{aligned} (-32) \times \left[\frac{3}{8} - \frac{11}{16} \right]^2 &= (-32) \times \left[\frac{6}{16} - \frac{11}{16} \right]^2 \\ &= (-32) \times \left(\frac{-5}{16} \right)^2 \\ &= \cancel{-32}^{\cancel{-1}} \times \frac{5 \times 5}{\cancel{16}^{\cancel{2}} \times \cancel{16}^{\cancel{2}}} = \frac{-25}{8} \end{aligned}$$

۱۷- گزینه (۲)

حل: اعداد $\sqrt{2}$ و $\frac{\sqrt{26}}{3}$ گویا نیستند. اما $\sqrt{\frac{64}{49}}$ عددی گویا و بین $\frac{12}{5}$ و $\frac{3}{4}$ است.

$$\sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$$

$$\rightarrow \frac{3}{4} < 1\frac{1}{7} < 2\frac{2}{5} \rightarrow \frac{3}{4} < \sqrt{\frac{64}{49}} < \frac{12}{5}$$

$$\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

۱۸- گزینه (۴)

$$-\left(\frac{1}{696} - \frac{1}{1392} \right) = -\left(\frac{2}{1392} - \frac{1}{1392} \right) = -\left(\frac{1}{1392} \right) \xrightarrow{\text{معکوس}} -1392 \xrightarrow{\text{قرینه}} 1392 \quad \text{حل:}$$

۱۹- گزینه (۴)

حل: با داشتن مجموع و اختلاف دو عدد، عدد کوچکتر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{عدد کوچکتر} = (\text{مجموع} - \text{اختلاف}) \div 2$$

$$\text{کسر کوچکتر} = \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{7} \right) \div 2 = \left(\frac{56}{35} - \frac{20}{35} \right) \div 2 = \frac{\cancel{36}^{\cancel{18}}}{35} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{18}{35}$$

۲۰- گزینه (۳)

حل:

$$\frac{125}{10^{-2}} \times 10^{-5} = 125 \times 10^{-3} = 0/125$$



۲۱- گزینه (۱)

حل: با توجه به این‌که هر عدد منفی، به توان فرد، منفی و به توان زوج، مثبت می‌شود، داریم:

$$(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{50} = \underbrace{(-1+1) + (-1+1) + \dots + (-1+1)}_{25 \text{ تا صفر}} = 0$$

۲۲- گزینه (۲)

$$1/21 = \frac{121}{100} \rightarrow \frac{121}{100} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{11}{10} \rightarrow \left. \begin{matrix} a=11 \\ b=10 \end{matrix} \right\} \rightarrow a+b=21$$

حل:

۲۳- گزینه (۱)

مجموع دو عدد = $2 + 5 = 7$

اختلاف دو عدد = $5 - 2 = 3$

| | | |
|--------|---|---------------|
| مجموع | ۷ | $\frac{8}{3}$ |
| اختلاف | ۳ | x |

$$x = \frac{3 \times \frac{8}{3}}{7} = \frac{8}{7} \times \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{8}{7}$$

حل:

۲۴- گزینه (۴)

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

حل:

۲۵- گزینه (۲)

$$8 \frac{6}{3} \times 4 \frac{0}{7} - 5 \frac{21}{21} \div \frac{1}{2} = 10 \times 4 - 6 \div \frac{1}{2}$$

$$= (10 \times 4) - (6 \div \frac{1}{2}) = 40 - (6 \times \frac{2}{1}) = 40 - 12 = 28$$

باید دقت کرد که اولویت عملیات، رعایت شود:

حل:

۲۶- گزینه (۱)

$$-b = 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \rightarrow b = -6 - 7 - 8 - 9 - 10$$

$$a + b = (-1 - 2 - 3 - 4 - 5) + (-6 - 7 - 8 - 9 - 10) = -55$$

حل:

۲۷- گزینه (۴)

$$\left[\left(\left(\frac{-2}{3} \right)^3 \times \frac{-3^2}{2} \right) \div \frac{8}{5} \right]^{-1} = \left[\left(\left(\frac{-8}{27} \right) \times \frac{-9}{2} \right) \div \frac{8}{5} \right]^{-1} = \left[\left(\frac{4}{3} \right) \times \frac{5}{2} \right]^{-1} = \left[\frac{5}{6} \right]^{-1} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{5}{6}$$

حل:



۲۸- گزینه (۴)

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{آخری} + \text{اولی})}{۲} = \frac{۲۱ \times ۱۰}{۲} = ۲۱۰$$

حل:

$$M = ۲۱۰ + \frac{۲۱۰}{۳۵} = ۲۱۰ + ۶ = ۲۱۶ \rightarrow \frac{M}{۳} = \frac{۲۱۶}{۳} = ۷۲$$

۲۹- گزینه (۳)

حل: باید دقت کرد ترتیب عملیات، رعایت شود:

$$\left(\frac{۲ - \frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۲} \div \frac{۳}{۸}} \div \frac{۱}{۵} \right) - \frac{۷}{۲} = \left(\frac{۲ + \frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۸}} \times \frac{۵}{۱} \right) - \frac{۷}{۲} = \left(\frac{۲}{\frac{۳}{۸}} \times \frac{۵}{۱} \right) - \frac{۷}{۲} = (۲ \times ۵) - \frac{۷}{۲}$$

$$= ۱۰ - \frac{۷}{۲} = \frac{۲۰}{۲} - \frac{۷}{۲} = \frac{۱۳}{۲} = ۶ \frac{۱}{۲} = ۶ \frac{۱}{۵}$$

۳۰- گزینه (۲)

$$m < n < ۰ \rightarrow \text{هر دو منفی هستند} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{-}{-} = +$$

حل:

$$n = -$$

$$\frac{m}{n} < n \rightarrow + < - \text{ نادرست است!}$$

★ پایانی

۳۱- گزینه (۲)

$$-\left(1 - \frac{1}{۱۳۹۳}\right)\left(1 - \frac{1}{۱۳۹۲}\right)\left(1 - \frac{1}{۱۳۹۱}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{۲}\right) = -\frac{۱۳۹۲}{۱۳۹۳} \times \frac{۱۳۹۱}{۱۳۹۲} \times \frac{۱۳۹۰}{۱۳۹۱} \times \dots \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۱۳۹۳}$$

حل:

۳۲- گزینه (۱)

حل: اگر با دقت به دو کسر نگاه کنیم، می‌بینیم که قرینه معکوس یکدیگرند:

$$\frac{۲ \frac{۱}{۵} - \frac{۳}{۷}}{\frac{۴}{۶} \div ۵} \xrightarrow{\text{قرینه}} \frac{-۲ \frac{۱}{۵} + \frac{۳}{۷}}{\frac{۴}{۶} \div ۵} = \frac{۳ - \frac{۱۱}{۵}}{\frac{۲}{۳} \div ۵} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{\frac{۲}{۳} \div ۵}{\frac{۳ - \frac{۱۱}{۵}}{\frac{۲}{۳} \div ۵}}$$

حاصل ضرب هر عددی در قرینه معکوسش برابر با -۱ است:

$$a \times \frac{1}{-a} = \frac{a}{-a} = -1$$

بنابراین حاصل عبارت -۱ است.



۳۳- گزینه (۳)

حل: گزینه (۳) همواره درست است:

$$\left. \begin{array}{l} a \times a^{-1} = \frac{a}{a} = 1 \\ b \times b^{-1} = \frac{b}{b} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a \times a^{-1} = b \times b^{-1}$$

و نادرستی سایر گزینه‌ها را می‌توان با یک مثال نمایش داد:

$$۱) \left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{۳} \\ b = -\frac{1}{۳} \end{array} \right\} a > b \rightarrow \left. \begin{array}{l} a^{-1} = \frac{۳}{1} = ۳ \\ b^{-1} = -\frac{۳}{1} = -۳ \end{array} \right\} \rightarrow a^{-1} > b^{-1}$$

$$۲) \left. \begin{array}{l} a = ۵ \\ b = -۲ \end{array} \right\} a > b \rightarrow \left. \begin{array}{l} -a = -۵ \\ -b = ۲ \end{array} \right\} \rightarrow -a < -b$$

$$۴) \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -۳ \end{array} \right\} a > b \rightarrow \left. \begin{array}{l} -a^۲ = -1^۲ = -1 \\ -b^۲ = -(-۳)^۲ = -۹ \end{array} \right\} \rightarrow -b^۲ < -a^۲$$

۳۴- گزینه (۲)

حل:

$$\frac{۳}{۵ \times ۸} + \frac{۳}{۸ \times 11} + \frac{۳}{11 \times 14} + \dots + \frac{۳}{۳۲ \times ۳۵}$$

$$= \left(\frac{1}{۵} - \frac{1}{۸} \right) + \left(\frac{1}{۸} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14} \right) + \dots + \left(\frac{1}{۳۲} - \frac{1}{۳۵} \right) = \frac{1}{۵} - \frac{1}{۳۵} = \frac{۷}{۳۵} - \frac{1}{۳۵} = \frac{۶}{۳۵}$$

۳۵- گزینه (۲)

حل:

$$A = \frac{۲}{10} + \frac{۳}{11} + \frac{۴}{12} + \dots + \frac{1۲}{۲0}$$

$$B = \frac{۸}{10} + \frac{۸}{11} + \frac{۸}{12} + \dots + \frac{۸}{۲0}$$

$$A + B = \underbrace{\left(\frac{۲}{10} + \frac{۸}{10} \right)}_{\frac{10}{10} = 1} + \underbrace{\left(\frac{۳}{11} + \frac{۸}{11} \right)}_{\frac{11}{11} = 1} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1۲}{۲0} + \frac{۸}{۲0} \right)}_{\frac{۲0}{۲0} = 1} = 11 \times 1 = 11 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{11}$$

۳۶- گزینه (۴)

حل:

$$\frac{1}{۵ \times 6} + \frac{۲}{6 \times ۸} + \frac{۳}{۸ \times 11} + \dots + \frac{۹}{۴1 \times ۵0}$$

$$= \left(\frac{1}{۵} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{۸} \right) + \left(\frac{1}{۸} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \left(\frac{1}{۴1} - \frac{1}{۵0} \right) = \frac{1}{۵} - \frac{1}{۵0} = \frac{10}{۵0} - \frac{1}{۵0} = \frac{۹}{۵0}$$



۳۷- گزینه (۴)

حل: x و y نسبت به هم اول هستند، بنابراین کسر را تا جای ممکن ساده می‌کنیم تا نسبت آن‌ها به دست آید.

$$\frac{15}{\cancel{165}} \times \frac{3}{\cancel{303}} = \frac{15 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{2}} = \frac{15}{8} \rightarrow x = 15, y = 8$$

$$\rightarrow y - x = 8 - 15 = -7$$

۳۸- گزینه (۴)

حل:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-10} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$$

اگر به طرف دوم تساوی (2^{-10}) اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^9} + \left(\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$\frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9}$$

$$\frac{2}{2^9} = \frac{1}{2^8}$$

$$\dots$$

$$\frac{2}{2^3} = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{2}{2^2} = \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{2}{2^1} = 1$$

اما از آن‌جا که قبلاً 2^{-10} را افزوده‌ایم، آن را از جواب کم می‌کنیم، تا برابر با طرف اول تساوی شود:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-10} = 1 - 2^{-10}$$

۳۹- گزینه (۴)

حل:

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{6} - 1\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \dots \left(\frac{1}{50} - 1\right) = \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{-5}{6}\right) \times \left(\frac{6}{7}\right) \times \dots \times \left(\frac{-49}{50}\right)$$

۴۶ عدد ($50 - 5 + 1 = 46$) داریم که نیمی از آن‌ها (۲۳ عدد) مثبت و نیمی دیگر، منفی هستند. از آن‌جا که تعداد اعداد منفی، فرد است، حاصل ضرب، عددی منفی می‌باشد:

$$\left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\right) \times \left(\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\right) \times \dots \times \left(\frac{-\cancel{49}}{50}\right) = \frac{-4}{50} = \frac{-8}{100} = -0.08$$

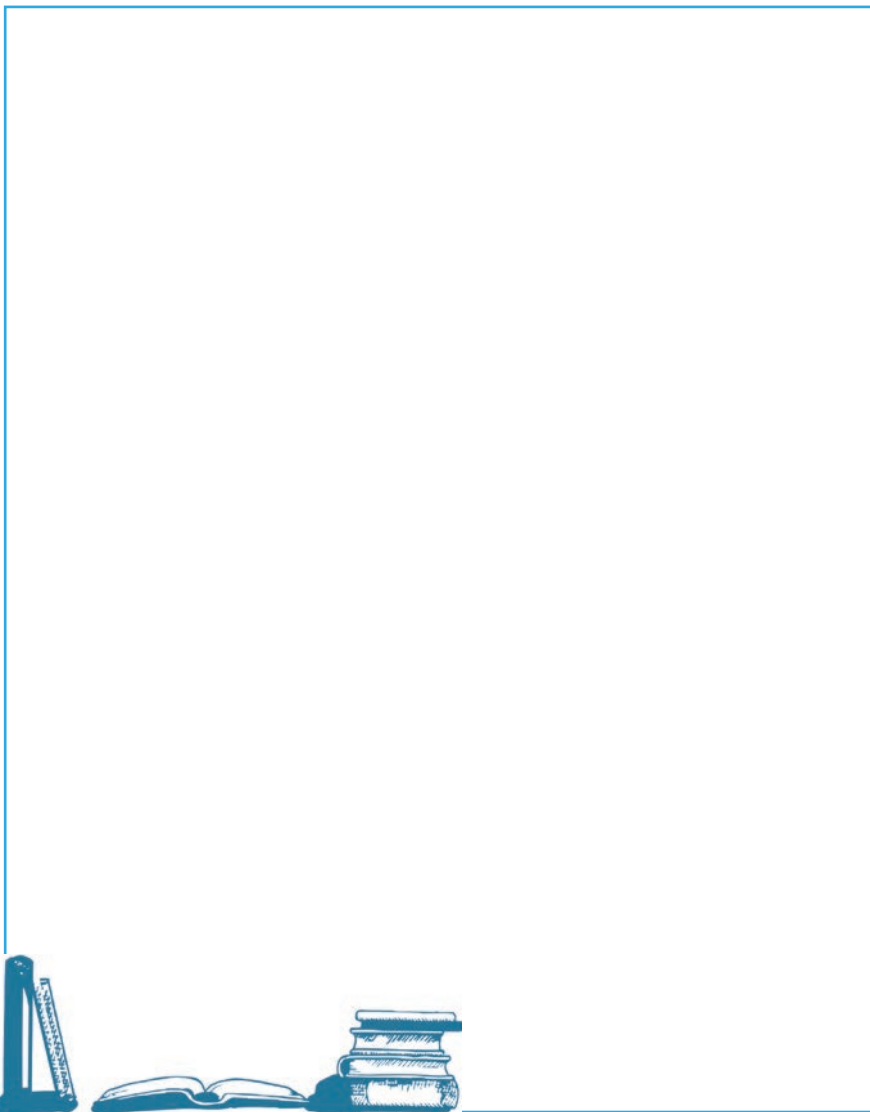


۴۰- گزینه (۴)

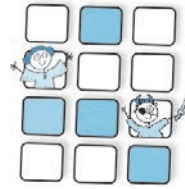
$$\begin{aligned} \left[\left(1 + \frac{1}{20}\right) \left(1 + \frac{1}{21}\right) \left(1 + \frac{1}{22}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^{-1} &= \left[\frac{\cancel{21}}{20} \times \frac{\cancel{22}}{\cancel{21}} \times \frac{\cancel{23}}{\cancel{22}} \times \dots \times \frac{n+1}{\cancel{n}} \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{n+1}{20} \right]^{-1} = \frac{20}{n+1} \end{aligned}$$

حل:

یادداشت‌های من

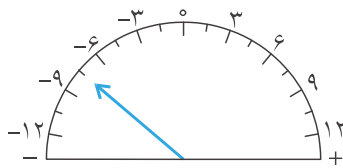


پاسخنامهٔ سؤالات تشریحی اعداد صحیح و گویا



★ آغازین

۱- حل:



۱) اگر شکل را به فواصل برابر تقسیم کنیم، بزرگی هر واحد، $\frac{3}{2}$ است $(3 \div 2 = \frac{3}{2})$ است و از آنجا که عقربه به اندازهٔ ۵ واحد در جهت منفی حرکت کرده است، کسر $\frac{-15}{2}$ را نمایش می‌دهد:

$$-5 \times \frac{3}{2} = \frac{-15}{2}$$

$$10 \div 4 = \frac{10}{4}$$

$$11 \times \frac{10}{4} = \frac{110}{4} = \frac{55}{2}$$

۲) بزرگی هر واحد، $\frac{10}{4}$ است:

عقربه، کسر $\frac{110}{4} = \frac{55}{2}$ را نمایش می‌دهد:

$$2 \div 3 = \frac{2}{3}$$

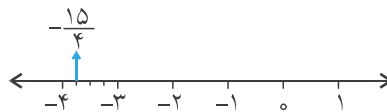
$$-7 \times \frac{2}{3} = \frac{-14}{3}$$

۳) بزرگی هر واحد، $\frac{2}{3}$ است:

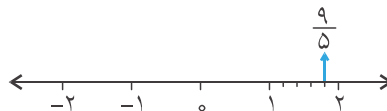
عقربه، کسر $\frac{-14}{3}$ را نمایش می‌دهد:

۲- حل:

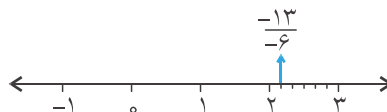
الف) $-\frac{15}{4} = -3\frac{3}{4}$



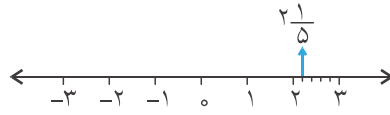
ب) $\frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$



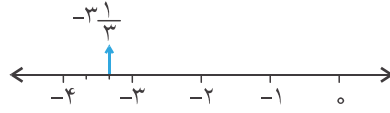
ج) $-\frac{13}{6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$



د) $2\frac{1}{5}$



ه) $-2\frac{1}{3}$



حل: ۳-

الف) $\frac{-3}{9} = \frac{x}{-24} \rightarrow (-3) \times (-24) = 9x$

$$72 = 9x \rightarrow x = \frac{72}{9} = 8$$

ب) $5x - 7 = \frac{13}{2} \rightarrow 13 = 2(5x - 7) = 10x - 14$

$$10x = 13 + 14 = 27 \rightarrow x = \frac{27}{10} = 2\frac{7}{10}$$

ج) $\frac{4x}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{3}{7} \div \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4x}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{1} \rightarrow \frac{4x}{3} = \frac{6}{7}$

$$28x = 18 \rightarrow x = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

حل: ۴-

الف) $\frac{2 - 3\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{1-3}} \div \frac{-3}{2\frac{1}{5}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{1 + \frac{1}{-2}} \div \frac{-3}{\frac{11}{5}} = \frac{\frac{4}{2} - \frac{7}{2}}{\frac{2}{2} + (-\frac{1}{2})} \times \left(\frac{11}{5} \div \frac{-3}{1} \right) = \left(\frac{-3}{2} \times \frac{11}{-15} \right) = \frac{33}{30} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$

ب) باید دقت کرد که اولویت عملیات رعایت شود:

$$\frac{2}{5} + \left(1 - \frac{1}{3} \div \frac{2}{4} \right) - \left(\frac{9}{2} \times \frac{3}{5} \right) = \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{27}{5} \right) = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} - \frac{27}{5} = \frac{6}{15} + \frac{20}{15} - \frac{81}{15} = -\frac{55}{15} = -\frac{11}{3}$$



$$\text{ج) } \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{6}{15} - \frac{5}{15}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{9}$$

۵- حل:

$$\text{الف) } \left. \begin{array}{l} \frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2} \\ -\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3} \\ 2^0 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-5}{2} < -\sqrt{\frac{16}{9}} < 2^0 < \frac{3}{2}$$

$$\text{ب) } \left. \begin{array}{l} \frac{-5}{6} = -\frac{5}{6} \\ \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \\ \frac{-12}{-7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-5}{6} < \frac{-12}{-7} < 3/25 < \frac{14}{3}$$

۶- حل:

۱) تعداد اعداد = $(50 - 20) + 1 = 31$

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{\frac{35}{\cancel{70}} \times (20 + 50)}{1} = 1085$$

۲) تعداد اعداد = $\frac{\frac{18}{\cancel{126}} \times (133 - 7)}{1} + 1 = 18 + 1 = 19$

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{\frac{70}{\cancel{140}} \times (7 + 133)}{1} = 1330$$

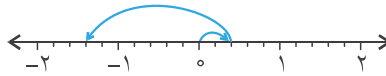


$$\text{ب) تعداد اعداد} = \frac{\begin{matrix} 43 \\ 129 \\ \hline 231-102 \end{matrix}}{3} + 1 = 44$$

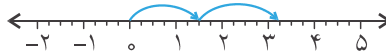
$$\text{مجموع اعداد} = \frac{\begin{matrix} 333 \\ 102+231 \\ \hline \end{matrix} \times \begin{matrix} 22 \\ 44 \\ \hline \end{matrix}}{3} = 7326$$

۷- حل:

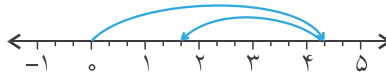
$$1) \frac{2}{5} + (-1\frac{4}{5}) = \frac{2}{5} + (-\frac{9}{5}) = \frac{-7}{5} = -1\frac{2}{5}$$



$$2) \frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{6}{4} + \frac{7}{4} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$



$$3) \frac{13}{3} + (-\frac{8}{3}) = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$



۸- حل:

$$\text{الف) } -1 = \frac{-4}{4} < \frac{-3}{4} < 0 = \frac{0}{4} \rightarrow \frac{-3}{4} \approx -1$$

$$\text{ب) } \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5} \rightarrow 0 = \frac{0}{5} < \frac{2}{5} < \frac{5}{5} = 1 \rightarrow \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{ج) } \frac{-17}{-3} = \frac{17}{3} \rightarrow 5 = \frac{15}{3} < \frac{17}{3} < \frac{18}{3} = 6 \rightarrow \frac{-17}{-3} \approx 6$$

$$\text{د) } -3/00 < -2/28 < -2/00 \rightarrow -2/28 \approx -2$$

$$\text{ه) } (\frac{6}{-5})^2 = \frac{36}{25} \rightarrow 1 = \frac{25}{25} < \frac{36}{25} < \frac{50}{25} = 2 \rightarrow (\frac{6}{-5})^2 \approx 1$$

$$\text{و) } \frac{0/5}{-\sqrt{9}} = \left(\frac{\frac{0}{5}}{-3} = \frac{0}{-15} = \frac{1}{-6} = \frac{-1}{6} \rightarrow -1 = \frac{-6}{6} < \frac{-1}{6} < \frac{0}{6} = 0 \rightarrow \frac{0/5}{-\sqrt{9}} \approx 0 \right)$$

$$\text{ز) } 3\frac{15}{4} = \frac{27}{4} \rightarrow 6 = \frac{24}{4} < \frac{27}{4} < \frac{28}{4} = 7 \rightarrow 3\frac{15}{4} \approx 7$$

$$\text{ح) } -2\frac{1}{5} = \frac{-11}{5} \rightarrow -3 = \frac{-15}{5} < \frac{-11}{5} < \frac{-10}{5} = -2 \rightarrow -2\frac{1}{5} \approx -2$$

