۱ | **۲** در گزینهٔ (۱) اگر $x=5$ و $y=4$ باشند، داریم:

$$\sqrt{5+4}=\sqrt{5}+\sqrt{4}\Rightarrow 3=\sqrt{5}+2\Rightarrow 1=\sqrt{5}\quad ✗$$

در گزینه‌های (۳) و (۴) اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$، $B=\{1,2,3\}$ و $C=\{2,3\}$ باشند، آن‌گاه $A\cup B$ و $A\cup C$ هر دو برابر $\{1,2,3,4,5\}$ هستند، در حالی‌که $B\neq C$ است. همچنین $B-A$ و $C-A$ هر دو تهی هستند اما $B\neq C$ است.

۲ | **۱** می‌دانیم $216=6^3$ است (حداقل این عدد را در فصل احتمال کتاب آمار و احتمال زیاد دیدید، تعداد برآمدهای پرتاب سه تاس)، بنابراین داریم:

$$\sqrt{6}\times\sqrt{216}=\sqrt{6}\times\sqrt{6^3}=\sqrt{6^4}=6^2=36$$

۳ | **۴** با توجه به ویژگی‌های لگاریتم، داریم:

$$\log_3 25\times\log_5 3=\frac{\log 25}{\cancel{\log 3}}\times\frac{\cancel{\log 3}}{\log 5}=\frac{\log 25}{\log 5}=\frac{2\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 5}}=2$$

توجه کنید در محاسبات فوق از ویژگی‌های $\log_b a=\dfrac{\log a}{\log b}$ و $\log a^n=n\log a$ استفاده کرده‌ایم.

۴ | **۱** از ریاضی دهم می‌دانیم اگر $0<a<1$ باشد، آن‌گاه $a^2<a$ خواهد بود. تنها گزینه‌ای که بین صفر و یک است، گزینهٔ (۱) می‌باشد، پس $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\simeq 0/3$ مثال نقضی برای حکم مطرح شده است.

۵ | **۳** در گزینهٔ (۳) اگر $a=4$ و $b=3$ باشد، آن‌گاه $ab=12$ است که عددی زوج می‌باشد، در حالی‌که $a+b=7$ می‌شود که عددی فرد است.

۶ | **۴** تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ 34=3^2+3^2+4^2\qquad 2)\ 35=1^2+3^2+5^2\qquad 3)\ 36=4^2+4^2+2^2$$

اما ۳۷ را نمی‌توان به صورت مجموع سه عدد طبیعی مربع کامل نوشت.

۷ | **۴** عدد ۶۴ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت. بقیهٔ گزینه‌ها را ببینید:

$$1)\ 40=6+7+8+9+10$$
$$2)\ 46=10+11+12+13$$
$$3)\ 56=5+6+7+8+9+10+11$$

نیم‌نگاه
به طور کلی، اعداد طبیعی به فرم 2^n را نمی‌توان به صورت حاصل‌جمع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

با توجه به نیم‌نگاه، در گزینه‌ها عدد ۶۴ به فرم 2^n است، پس نمی‌توان آن را به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

۸ | **۴** واضح است که 1^3 از 1^2 بزرگ‌تر نیست. پس عدد ۱ مثال نقضی برای حکم گزینهٔ (۴) است.

۹ | **۴** برای تک‌تک گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مثال نقض ارائه می‌کنیم.
در گزینهٔ (۱) کایت حکم را نقض می‌کند. در گزینه‌های (۲) و (۳) مثال نقض مناسب، مستطیل است.

۱۰ | **۲** تک‌تک گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:
گزارهٔ (الف): همیشه درست است و به روش اثبات مستقیم به راحتی می‌توان آن را ثابت کرد. نگاه کنید:

فرض می‌کنیم n، $n+1$ و $n+2$ سه عدد صحیح متوالی باشند، پس:

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=\underbrace{3(n+1)}_{\text{مضرب } 3}$$

گزارهٔ (ب): نادرست است و مثال نقض آن $n=4$ می‌باشد، زیرا $2^4-1=15$ می‌شود که ۱۵ عددی اول نیست.
گزارهٔ (پ): نادرست است، مثلاً ۲، ۳، ۴ و ۵، چهار عدد صحیح متوالی هستند، در حالی‌که مجموع آن‌ها یعنی ۱۴ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.
گزارهٔ (ت): درست است، زیرا اگر پنج عدد صحیح متولی را n، $n+1$، $n+2$، $n+3$ و $n+4$ فرض کنیم، داریم:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(n+2)$$

بنابراین دو گزاره از گزاره‌های داده‌شده مثال نقض ندارند.

نیم‌نگاه
اگر n فرد باشد، مجموع هر n عدد صحیح متوالی بر n بخش‌پذیر است. اما اگر n زوج باشد، مجموع n عدد صحیح متوالی بر n بخش‌پذیر نیست.
نتیجه اگر n فرد باشد، میانگین هر n عدد صحیح متوالی، برابر عدد وسطی است.

۱۱ | **۴** گزارهٔ موجود در گزینهٔ (۴) نادرست است، زیرا اگر $a=1$ و $b=3$ باشند، $ab=3$ می‌شود که عددی فرد است، اما $a^2+b^2=10$ می‌باشد که عددی زوج است. بنابراین نمی‌توان این گزاره را با اثبات مستقیم ثابت کرد، زیرا اثبات مستقیم برای نشان‌دادن درستی یک گزاره استفاده می‌شود.

نتیجه ۱ به طور کلی اگر a و b اعداد گویا باشند، $a+b$، $a-b$، ab و $\dfrac{a}{b}$ $(b\neq 0)$ گویا هستند که تمامی این موارد را می‌توان به کمک اثبات مستقیم نشان داد.

۲ به کمک اثبات مستقیم می‌توان ثابت کرد که مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است، مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است، مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج، عددی فرد است، مربع هر عدد فرد، عددی فرد است، مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است و ... . به طور کلی یادتان باشد به توان رساندن یک عدد، ماهیت آن عدد را عوض نمی‌کند. مثلاً یک عدد فرد را به هر توان طبیعی که برسانیم، فرد باقی می‌ماند.

۱۲ | **۴** اگر فرض کنیم $a=1$ و $b=2$، آن‌گاه $a+b=3$ عددی فرد است در حالی‌که $a^3+b^3=1+8=9$ می‌شود که عددی زوج نیست.
توجه کنید که اثبات «حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.» در کتاب درسی در کار در کلاس صفحهٔ ۳ آمده است که تا این‌جای فصل فقط اثبات مستقیم بیان شده که اثبات آن هم به روش مستقیم به صورت زیر است:
فرض می‌کنیم سه عدد صحیح متوالی n، $n+1$ و $n+2$ باشند، داریم:

$$(n+2)\times(n+1)\times n\times\frac{(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}{(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}$$

$$=\frac{(n+2)!}{(n-1)!}\times\frac{3!}{3!}=\frac{(n+2)!}{(n-1)!\times 3!}\times 3!=\underbrace{\binom{n+2}{3}}_{\text{می‌دانیم عددی طبیعی است.}}\times 3!=6q$$

نیم‌نگاه
در ادامهٔ فصل و در قسمت افراز اعداد صحیح خواهید دید که از هر n عدد صحیح متوالی، حداقل یک عدد مضرب n است، پس می‌توان گفت حاصل‌ضرب هر n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

۱۳ **۴** اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، عدد $4k+1$ مربع کامل است. نگاه کنید:

$$k=n(n+1)\Rightarrow 4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=\underbrace{(2n+1)^2}_{\text{مربع کامل}}$$

نیم‌نگاه

دقت کنید در تساوی $4n(n+1)+1=(2n+1)^2$، اگر به جای $n(n+1)$ عدد زوج 2q را قرار دهیم (حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی بر ۲! بخش‌پذیر است)، داریم:

$$4\underbrace{n(n+1)}_{2q}+1=(2n+1)^2\Rightarrow 8q+1=(2n+1)^2$$

تساوی اخیر یعنی مربع هر عدد فرد به فرم $8q+1$ است.

۱۴ **۳** برای اثبات حکم به روش مستقیم، داریم:

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$$

می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی، عددی زوج است، پس $k(k+1)=2q$ می‌باشد. لذا داریم:

$$(2k+1)^2=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}+1=8q+1$$

۱۵ **۱** عدد ۸۹ به فرم $8k+1$ است، در حالی‌که مربع کامل نیست. پس ۸۹ مثال نقضی برای حکم داده‌شده می‌باشد. دقت کنید مربع هر عدد فرد به فرم $8k+1$ است ولی هر عددی که به فرم $8k+1$ باشد، حتماً مربع کامل نیست مثل ۱۷، ۳۳ و ... .

۱۶ **۱** روش اول: وقتی $n=2k$ باشد داریم:

$$A=n^2-3n+5=(2k)^2-3(2k)+5=4k^2-6k+5$$

$$=4k^2-6k+4+1=2\underbrace{(2k^2-3k+2)}_{q}+1$$

بنابراین $q=2k^2-3k+2$ است.

روش دوم: به k عدد می‌دهیم. مثلاً $k=1$. در این صورت داریم:

$$n=2\Rightarrow A=2^2-3(2)+5=3\xrightarrow{A=2q+1}2q+1=3\Rightarrow q=1$$

در گزینه‌ها فقط $2k^2-3k+2$ به ازای $k=1$ برابر ۱ می‌شود.

۱۷ **۱** برای اثبات حکم، دو حالت برای n در نظر می‌گیریم، یک‌بار n زوج و بار دیگر n فرد باشد. اگر زوج‌بودن n را با p_1 و فردبودن n را با p_2 و فردبودن n^2-5n+7 را با r نمایش دهیم، حکم به صورت $p_1\vee p_2\Rightarrow r$ می‌باشد که با $(p_1\Rightarrow r)\wedge(p_2\Rightarrow r)$ هم‌ارز است.

۱۸ **۲** باید همهٔ حالت‌های ممکن برای n را در نظر بگیریم، اما چون در گزینه‌ها $n=1$ و $n=6$ وجود ندارند، داریم:

$$n=2\Rightarrow\frac{2^2(2+1)^2}{4}=9\Rightarrow$$

حاصل عددی فرد شده است، پس گزینهٔ (۱) که شامل ۲ می‌باشد، نادرست است.

$$n=5\Rightarrow\frac{5^2(5+1)^2}{4}=225\Rightarrow$$

حاصل عددی فرد شده است، پس گزینه‌های (۳) و (۴) که شامل ۵ هستند، نادرست می‌باشد.

۱۹ **۴** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر ab زوج باشد، با دو حالت مواجه می‌شویم: یا هر دو عدد a و b زوج هستند یا یکی از آن‌ها فرد و دیگری زوج است که در حالت دوم، توان دوم یکی زوج و توان دوم دیگری فرد است، پس مجموع آن‌ها عددی فرد می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۲) اگر ab زوج باشد، در حالتی که هر دو عددی زوج هستند، حاصل a^2-b^3 عددی زوج می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

۳) و ۴) اگر ab فرد باشد حتماً هر دو عدد فرد هستند و به هر توانی که برسند فرد باقی می‌مانند که مجموع دو عدد فرد، همواره عددی زوج است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست، اما گزینهٔ (۴) همواره درست است.

۲۰ **۳** چون a عددی زوج است، پس $a-1\neq0$ می‌باشد. در این حالت اگر طرفین تساوی را در معکوس $a-1$ ضرب کنیم، ثابت می‌شود که $b=-2$ است. نگاه کنید:

$$(a-1)(b+2)=0\xrightarrow{a-1\neq0}\frac{1}{a-1}\times(a-1)(b+2)=\frac{1}{a-1}\times0$$

$$\Rightarrow b+2=0\Rightarrow b=-2$$

۲۱ **۳** از تساوی $(a+b)^2=a^2+b^2$ داریم:

$$(a+b)^2=a^2+b^2\Rightarrow a^2+b^2+2ab=a^2+b^2\Rightarrow 2ab=0$$

$$\xrightarrow{2\neq0}ab=0\Rightarrow a=0 \text{ یا } b=0$$

بنابراین لزومی ندارد $a=0$ و $b=1$ باشند. ممکن است $b=0$ و $a=1$ یا $a=0$ و b هر عدد دلخواه دیگر و یا $b=0$ و a هر عدد دلخواه دیگر باشند. اما واضح است که تحت شرایط سؤال، همواره تساوی‌های $(a+b)^3=a^3+b^3$، $(a-b)^2=a^2+b^2$ و $ab^3=ba^3$ برقرار هستند.

۲۲ **۲** اگر r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، فرض می‌کنیم $r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. حال با توجه به این‌که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است باید تفاضل $r+x$ و r نیز گویا باشد یعنی $r+x-r\in\mathbb{Q}$ و از آن‌جا $x\in\mathbb{Q}$ که در تضاد با فرض گنگ‌بودن x است.

نتیجه (۱) اگر a عدد گویا و b عدد گنگ باشد، اعداد $a+b$ و $a-b$ و همچنین با شرط $a\neq0$، اعداد ab، $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ گنگ هستند.

نتیجه (۲) معکوس یک عدد گنگ، همواره عددی گنگ است. پس اگر b عددی گنگ باشد، $\frac{1}{b}$ نیز عددی گنگ خواهد بود.

نتیجه (۳) اگر a و b دو عدد گنگ باشند، اعداد $a+b$، $a-b$، ab و $\frac{a}{b}$ ممکن است گنگ یا گویا باشند.

۲۳ **۳** اگر $x=\sqrt{3}$ و $y=2$ باشد، $x+y$ گنگ است، ولی $y=2$ گنگ نیست. بنابراین گزینهٔ (۱) مثال نقض دارد. در گزینهٔ (۲) اگر $x=1-\sqrt{3}$ و $y=2+\sqrt{3}$ باشد، $x+y$ گویا است ولی نه x و نه y گویا است. در گزینهٔ (۴) اگر $x=1+\sqrt{2}$ و $y=2-\sqrt{2}$ باشد، $x+y=3$ می‌شود که عددی گویا است همچنین اگر $x=1+\sqrt{2}$ و $y=\sqrt{2}$ باشند، $x-y=1$ می‌شود که گویا است.

۲۴ | **۴** اگر $x=\sqrt{۳}$ و $y=\sqrt{۵}$ باشند، $xy=\sqrt{۱۵}$ می‌شود که عددی گنگ است در حالی‌که x و y گویا نیستند، پس گزینهٔ (۱) مثال نقض دارد. اگر $y=\log_{\sqrt{۳}}۴$ و $x=\sqrt{۳}$ باشند، $x^y=(\log_{\sqrt{۳}}۴)^{\sqrt{۳}}=۴$ می‌شود که عددی گویا است، پس گزینهٔ (۲) هم مثال نقض دارد. در مورد گزینهٔ (۳) هم می‌توان گفت که اگر $n^۲=۱۰۰$ باشد، آن‌گاه $n=۱۰$ است. همان‌طور که می‌بینید $n^۲$ مضرب ۲۰ است، در حالی‌که n مضرب ۲۰ نیست. در مورد گزینهٔ (۴)، قبلاً دیده بودیم که مربع هر عدد فرد به فرم $۸q+۱$ است، پس:

$$a^۲-b^۲=(۸q+۱)-(۸q'+۱)=۸q-۸q'=۸(q-q')$$

۲۵ | **۲** می‌دانیم تفاضل اعداد گنگ و گویا عددی گنگ است، پس:

$$(a+۲b)-(a+b)\in\mathbb{Q}'\Rightarrow b\in\mathbb{Q}'$$

از طرفی چون b عددی گنگ و $a+b$ عددی گویا است، پس حتماً a عددی گنگ است.

۲۶ | **۱** چون $a+b$ عددی گویا و $a-b$ عددی گنگ هستند، پس حاصل‌جمع و تفاضل آن‌ها عددی گنگ است:

$$(a+b)+(a-b)\in\mathbb{Q}'\Rightarrow ۲a\in\mathbb{Q}'\Rightarrow a\in\mathbb{Q}'$$

$$(a+b)-(a-b)\in\mathbb{Q}'\Rightarrow ۲b\in\mathbb{Q}'\Rightarrow b\in\mathbb{Q}'$$

۲۷ | **۱** به کمک برهان خلف می‌توان ثابت کرد که $a-b$ و $a+۲b$ هر دو گنگ هستند.

۲۸ | **۳** روش اثبات، روش برهان خلف است، به این صورت که فرض می‌کنیم $(a-b)(b-c)(c-a)$ زوج نباشد، پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $a-b$، $b-c$ و $c-a$ هم باید فرد باشند، چون حاصل‌ضرب چند عدد فرد، عددی فرد است. از طرفی می‌دانیم جمع سه عدد فرد، عددی فرد است. پس باید $(a-b)+(b-c)+(c-a)$ عددی فرد باشد، اما مجموع این سه عدد، برابر صفر می‌باشد و صفر عددی زوج است.

۲۹ | **۳** برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) مثال نقض ارائه می‌کنیم:

درگزینهٔ(۱)، $a^۳+۶a^۲+۱۲a=(a+۲)^۳-۸$ می‌باشد.اگر $a=-۲+\sqrt[۳]{۳}$ باشد، آن‌گاه $(a+۲)^۳-۸=(-۲+\sqrt[۳]{۳}+۲)^۳-۸=۳-۸=-۵$ خواهد شد که عددی گویا است. درگزینهٔ (۲) با فرض $a=b=\sqrt{۳}$ داریم $\log_b a=\log_{\sqrt{۳}}\sqrt{۳}=۱$ که عددی گویا است. در گزینهٔ (۴) با فرض $a=\sqrt{۳}$ و $b=\sqrt[۴]{۳}$ حاصل $ab^۲$ برابر $\sqrt{۳}\times(\sqrt[۴]{۳})^۲=\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=۳$ می‌شود که عددی گویا است. اما گزینهٔ (۳) را به صورت زیر می‌توان اثبات کرد:

$$\frac{a^۲-a-۲}{a^۲-۲a}=\frac{(\cancel{a-۲})(a+۱)}{a(\cancel{a-۲})}=\frac{a+۱}{a}=۱+\frac{۱}{a}$$

اگر a گنگ باشد، $\frac{۱}{a}$ حتماً گنگ است، پس $۱+\frac{۱}{a}$ هم گنگ می‌شود.

۳۰ | **۲** ترکیب دو شرطی (ب) نادرست است، زیرا اگر $a=۲$ و $b=-۲$ باشد، تساوی $a^۲=b^۲$ برقرار است، در حالی‌که $a=b$ نمی‌باشد. ترکیب دو شرطی (پ) نیز نادرست است، زیرا اگر $a=-۴$ و $b=۱$ باشد، $a<b$ است ولی $a^۲<b^۲$ نمی‌باشد. فقط ترکیب‌های دو شرطی (الف) و (ت) درست هستند.

۳۱ | **۲** به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$x^۲+y^۲+۱\ge x+xy+y\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲\ge ۲x+۲xy+۲y$$

$$\Leftrightarrow x^۲+x^۲+y^۲+y^۲+۱+۱-۲x-۲xy-۲y\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^۲-۲x+۱)+(y^۲-۲y+۱)+(x^۲-۲xy+y^۲)\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲+(x-y)^۲\ge ۰$$

۳۲ | **۴** به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$x^۲+y^۲+z^۲\ge xy+xz+yz\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\ge ۲xy+۲xz+۲yz$$

$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xy-۲xz-۲yz\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^۲-۲xy+y^۲)+(x^۲-۲xz+z^۲)+(y^۲-۲yz+z^۲)\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\ge ۰ \quad \text{بدیهی}$$

۳۳ | **۱** به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$a^۲+b^۲+c^۲+m\ge ۲(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^۲-۲a+b^۲-۲b+c^۲-۲c+m\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (a-۱)^۲-۱+(b-۱)^۲-۱+(c-۱)^۲-۱+m\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲+m-۳\ge ۰$$

واضح است که اگر $m-۳\ge ۰$ باشد، رابطهٔ اخیر همواره برقرار است. بنابراین حداقل مقدار m برابر ۳ است.

۳۴ | **۳** اگر $n=۶$ باشد، $n^۲=۳۶$ می‌شود که مضرب ۱۲ است ولی n مضرب ۱۲ نیست. اما در بقیهٔ موارد به کمک برهان خلف می‌توان نشان داد که دو گزاره هم‌ارز هستند.

نیم‌نگاه

به طور کلی اگر در تجزیهٔ m توان هیچ عاملی بزرگ‌تر از ۱ نباشد، آن‌گاه، مضرب m بودن n و مضرب m بودن $n^۲$ هم‌ارز می‌باشند.

دقت کنید با توجه به نیم‌نگاه فوق، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند.

۳۵ | **۱** گزاره‌های $a+\frac{۱}{a}\ge ۲$ و $(a-۱)^۲\ge ۰$ زمانی‌که $a>۰$ باشد، هم‌ارز هستند. مثلاً به ازای $a=-۱$ گزارهٔ $(a-۱)^۲\ge ۰$ است ولی $a+\frac{۱}{a}=-۲$ می‌شود که بزرگ‌تر و یا مساوی ۲ نیست. حال به عنوان تمرین نشان می‌دهیم که گزاره‌های موجود در گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) هم‌ارز هستند:

۲) $\frac{a+b}{۲}\ge\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\ge ۲\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\ge ۰$

$\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\ge ۰$

۳) $a^۲+ab+b^۲\ge ۰\Leftrightarrow ۲a^۲+۲ab+۲b^۲\ge ۰$

$\Leftrightarrow a^۲+b^۲+۲ab+a^۲+b^۲\ge ۰\Leftrightarrow (a+b)^۲+a^۲+b^۲\ge ۰$

۴) $a^۲+ab+b^۲\ge ۰\Leftrightarrow a^۲+ab+\frac{b^۲}{۴}+\frac{۳b^۲}{۴}\ge ۰$

$\Leftrightarrow (a+\frac{b}{۲})^۲+\frac{۳b^۲}{۴}\ge ۰$

اکنون ببینید که چه‌طور به ازای $a>۰$ گزاره‌های $a+\frac{۱}{a}\ge ۲$ و $(a-۱)^۲\ge ۰$ هم‌ارز هستند:

$$a+\frac{۱}{a}\ge ۲\Leftrightarrow \frac{a^۲+۱}{a}\ge ۲\overset{a>۰}{\Longleftrightarrow} a^۲+۱\ge ۲a\Leftrightarrow a^۲-۲a+۱\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (a-۱)^۲\ge ۰$$

نتایج زیر می‌توانند در حل بسیاری از تست‌ها مورد استفاده قرار بگیرند:

۱ اگر $a>۰$ باشد، آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\ge ۲$ است.

توجه می‌توان نشان داد که اگر $a<۰$ باشد، $a+\frac{۱}{a}\le -۲$ است. (این مطلب در کتاب درسی بررسی نشده است.)

۲ میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

$$a,b\ge ۰\Rightarrow \frac{a+b}{۲}\ge\sqrt{ab}$$

۳۶ | ۳ چون $۰<\theta<۱۸۰^\circ$ است، پس $\sin\theta>۰$ است. حال داریم:

$$\frac{۲}{\sin\theta}-\cos\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ge k\Rightarrow\frac{۲-\cos^۲\theta}{\sin\theta}\ge k$$

$$\Rightarrow\frac{۱+۱-\cos^۲\theta}{\sin\theta}\ge k\Rightarrow\frac{۱+\sin^۲\theta}{\sin\theta}\ge k\Rightarrow\frac{۱}{\sin\theta}+\sin\theta\ge k$$

می‌دانیم که اگر $x>۰$ آن‌گاه $x+\frac{۱}{x}\ge ۲$ است، پس چون $\sin\theta>۰$ است، داریم:

$$\frac{۱}{\sin\theta}+\sin\theta\ge ۲\Rightarrow Max(k)=۲$$

۳۷ | ۳ ابتدا عبارت داده‌شده را به صورت مجموع دو کسر می‌نویسیم و داریم:

$$A=\frac{cd(a^۲+b^۲)+bd(a^۲+c^۲)}{abcd}=\frac{cd(a^۲+b^۲)}{abcd}+\frac{bd(a^۲+c^۲)}{abcd}$$

$$=\frac{a^۲}{ab}+\frac{b^۲}{ab}+\frac{a^۲}{ac}+\frac{c^۲}{ac}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

با فرض $\frac{a}{b}=x$، $\frac{b}{a}=\frac{۱}{x}$ می‌شود. چون a و b مثبت هستند، پس $x>۰$ است. طبق گزارهٔ «اگر $x>۰$، آن‌گاه $x+\frac{۱}{x}\ge ۲$ می‌باشد.» می‌توان گفت $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge ۲$ است. با همین استدلال $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge ۲$ می‌باشد، پس داریم:

$$\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge ۲\\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge ۲\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge ۲+۲\Rightarrow A\ge ۴\Rightarrow \min(A)=۴$$

۳۸ | ۴ می‌دانیم میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست، پس:

$$\frac{a+b}{۲}\ge\sqrt{ab}\ ,\ \frac{b+c}{۲}\ge\sqrt{bc}\ ,\ \frac{c+a}{۲}\ge\sqrt{ca}$$

با ضرب طرفین نامساوی‌ها در هم، داریم:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{۲\times۲\times۲}\ge abc\Rightarrow(a+b)(b+c)(c+a)\ge ۸abc$$

۳۹ | ۱ ابتدا به کمک اتحاد دوجمله‌ای داریم:

$$(a+\frac{۱}{a})^۲+(b+\frac{۱}{b})^۲=a^۲+۲+\frac{۱}{a^۲}+b^۲+۲+\frac{۱}{b^۲}$$

$$=a^۲+b^۲+\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+۴$$

$$=(a+b)^۲-۲ab+(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})^۲-\frac{۲}{ab}+۴$$

$$=(a+b)^۲-۲ab+(\frac{a+b}{ab})^۲-\frac{۲}{ab}+۴$$

با توجه به فرض مسئله $a+b=۱$ است، پس:

$$a+b=۱\Rightarrow(a+b)^۲-۲ab+(\frac{a+b}{ab})^۲-\frac{۲}{ab}+۴$$

$$=۱-۲ab+\frac{۱}{a^۲b^۲}-\frac{۲}{ab}+۴=۱-۲ab+\frac{۱-۲ab}{a^۲b^۲}+۴$$

از طرفی می‌دانیم میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست، پس:

$$\frac{a+b}{۲}\ge\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\ge\sqrt{ab}\Rightarrow ab\le\frac{۱}{۴}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}ab\le\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲ab\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۲ab\ge-\frac{۱}{۲}\\ ab\le\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{ab}\ge ۴\Rightarrow\frac{۱}{a^۲b^۲}\ge ۱۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱-۲ab+\frac{۱-۲ab}{a^۲b^۲}+۴\ge(۱-\frac{۱}{۲})+۱۶(۱-\frac{۱}{۲})+۴=\frac{۲۵}{۲}$$

۴۰ | ۲ به ازای $x=۲$ و $y=۴$ حکم $(\frac{x+y}{۲})^۲\le xy$ برقرار نیست، زیرا:

$$x=۲,y=۴\Rightarrow(\frac{۲+۴}{۲})^۲\le ۲\times۴\Rightarrow ۹\le ۸\ ✗$$

۴۱ | ۴ گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به روش برهان خلف اما گزینهٔ (۴) به کمک اثبات بازگشتی ثابت می‌شود.

۴۲ | ۴ عدد ۱ مثال نقض گزینهٔ (۱) است، زیرا $۱^۲$ از ۱ بزرگ‌تر نیست. برای گزینهٔ (۲) مثال‌های نقض زیادی وجود دارد، مثلاً عکس عدد $\frac{۱}{۲}$ عدد ۲ است که ۲ کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ نیست. در گزینهٔ (۳) هم عدد ۱- مثال نقض است، زیرا $-۱+\frac{۱}{-۱}=-۲$ که بزرگ‌تر از ۲ نیست. اما گزینهٔ (۴) را به روش اثبات بازگشتی می‌توان ثابت کرد. نگاه کنید:

$$a^۲+b^۲\ge ۲ab\Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲ab\ge ۰\Leftrightarrow(a-b)^۲\ge ۰$$

۴۳ | ۳ مثال نقض برای نشان دادن نادرستی یک نتیجه‌گیری کلی به کار می‌رود.

۴۴ | ۳ اگر a فرد باشد، داریم:

$$a=۲k+۱\Rightarrow a^۲=(۲k+۱)^۲\Rightarrow a^۲=۴k^۲+۴k+۱$$

$$\Rightarrow a^۲=۴\underbrace{k(k+۱)}_{۲q}+۱\Rightarrow a^۲=۸q+۱\Rightarrow a^۲-۱=۸q$$

همان‌طور که می‌بینید روش استدلال، اثبات مستقیم است.

۴۵ | ۲ چون a یک عدد زوج است، داریم:

$$a=۲k\Rightarrow a(a^۲-۴)=۲k(۴k^۲-۴)=۲\times۴k(k^۲-۱)$$

$$=۸k\underbrace{k(k-۱)(k+۱)}_{\text{ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است.}}=۸\times۶q=۴۸q$$

۴۶ | ۳ عدد ۱۵ می‌تواند مثال نقض این حکم باشد.

۴۷ | ۱ برای اثبات درستی حکم «مجموع هر دو عدد گویا، یک عدد گویا است.» از اثبات مستقیم استفاده می‌کنیم. نگاه کنید:

$$a,b,c,d\in\mathbb{Z}\ \text{و}\ b,d\ne ۰\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

می‌دانیم ضرب دو عدد صحیح، عددی صحیح و جمع دو عدد صحیح نیز عددی صحیح است، پس:

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{m}{n}$$

۴۸ | ۲ این حکم همواره درست نیست، مثلاً اگر $x=\sqrt{۳}$ و $y=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ باشد، $xy=۲$ می‌شود که عددی گویا است. بنابراین برای نشان دادن نادرستی حکم از مثال نقض استفاده می‌شود.

۴۹ | ۳ همان‌طور که قبلاً دیدیم، برای اثبات درستی این حکم از روش برهان خلف استفاده می‌شود.

۵۰ | ۳ اگر $n=۶$ باشد، آن‌گاه $n^۳=۲۱۶$ مضرب ۲۴ است، در حالی‌که ۶ مضرب ۲۴ نیست.

۵۱ | ۲ اگر $n=۴۱$ باشد، عدد $n^۲+n+۴۱$ مضرب ۴۱ می‌شود، پس اول نیست. یعنی برای نشان دادن نادرستی این حکم از مثال نقض استفاده کردیم.

۵۲ | ۳ به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$x^۴+y^۴\ge xy(x^۲+y^۲)\Leftrightarrow x^۴+y^۴\ge x^۳y+xy^۳$$

$$\Leftrightarrow x^۴-xy^۳+y^۴-x^۳y\ge ۰\Leftrightarrow x(x^۳-y^۳)+y(y^۳-x^۳)\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^۳-y^۳)(x-y)\ge ۰\Leftrightarrow (x-y)(x^۲+xy+y^۲)(x-y)\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲(x^۲+xy+y^۲)\ge ۰\Leftrightarrow x^۲+xy+y^۲\ge ۰$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}y^۲\ge ۰$$ همواره درست است.

۵۳ | ۳ به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$\frac{a+b}{۴a-b}\ge\frac{b}{۲a}$$

$$\Leftrightarrow ۲a(a+b)\ge b(۴a-b)\Leftrightarrow ۲a^۲+۲ab\ge ۴ab-b^۲$$

$$۲a^۲-۲ab+b^۲\ge ۰\Rightarrow a^۲-۲ab+b^۲+a^۲\ge ۰\Rightarrow (a-b)^۲+a^۲\ge ۰$$

۵۴ | ۳ با توجه به تعریف عادکردن که به‌صورت $a\,|\,b\Leftrightarrow b=aq$ می‌باشد، گزارهٔ $b\,|\,cd$ صحیح است، زیرا: $ab=cd\Rightarrow cd=bq\Rightarrow b\,|\,cd$

برای رد گزینه‌های دیگر می‌توان از مثال نقض استفاده کرد. مثلاً داریم:

۱) $b=c=۳\,,\,a=d=۱$

۲) $a=c=۱\,,\,b=d=۳$ ۴) $a=c=۳\,,\,b=d=۱$

۵۵ | ۳ طبق قرارداد، صفر بر صفر بخش‌پذیر است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است. در مورد گزینهٔ (۱)، گزارهٔ صحیح به صورت «همهٔ اعداد صحیح صفر را عاد می‌کنند.» می‌باشد. در مورد گزینهٔ (۲)، «±۱، همهٔ اعداد صحیح را می‌شمارند.» صحیح است و در مورد گزینهٔ (۴) هم مثال‌های نقض زیادی مانند ۲، ۳ و ... وجود دارد.

۵۶ | ۲ با توجه به تعریف بخش‌پذیری، اگر $a\,|\,b$ آن‌گاه حاصل $\frac{b}{a}$ عدد صحیحی مانند q می‌شود، بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا ببینیم در کدام گزینه حاصل تقسیم فوق برابر عدد صحیح نمی‌شود:

۱) $۴۵^۳\,|\,۱۵^۶\Rightarrow \frac{۱۵^۶}{۴۵^۳}=\frac{۳^۶\times ۵^۶}{(۳^۲\times ۵)^۳}=\frac{۳^۶\times ۵^۶}{۳^۶\times ۵^۳}=۵^۳$ ✓

۲) $۱۲^۷\,|\,۱۸^{۱۲}\Rightarrow \frac{۱۸^{۱۲}}{۱۲^۷}=\frac{(۲\times ۳^۲)^{۱۲}}{(۲^۲\times ۳)^۷}=\frac{۲^{۱۲}\times ۳^{۲۴}}{۲^{۱۴}\times ۳^۷}=\frac{۳^{۱۷}}{۲^۲}$ ✗

بنابراین نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست.

۵۷ | ۱ چون عدد $b^۲-۲b-۳$ بر هر عدد صحیح مانند a بخش‌پذیر است، پس $b^۲-۲b-۳=۰$ می‌باشد. لذا داریم:

$$b^۲-۲b-۳=۰\xrightarrow[\text{است.}\ b=a+c]{\text{در این معادلهٔ درجه دوم،}} b=-۱\,,\,b=۳$$

$\Rightarrow$ فقط عدد ۳ عددی طبیعی است.

۵۸ | ۲ تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است، خود صفر است، پس:

$$۲n^۲-۳n-۲=۰\Rightarrow (۲n+۱)(n-۲)=۰\Rightarrow n=-\frac{۱}{۲}\,,\,n=۲$$

$\Rightarrow$ فقط یک عدد صحیح وجود دارد.

۵۹ | ۳

> **نیم‌نگاه**
>
> **چاق و لاغر کردن بخش‌پذیری:**
>
> در بخش‌پذیری $a\,|\,b$، اگر a را لاغر و b را چاق فرض کنیم، داریم:
>
> **۱** چاق را می‌توان چاق‌تر کرد:
>
> $a\,|\,b\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}a\,|\,b^n$ $a\,|\,b\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}a\,|\,mb$
>
> **نکته** چاق کردن یعنی ضرب کردن در یک عدد صحیح و افزایش توان.
>
> **۲** لاغر را می‌توان لاغرتر کرد:
>
> $a^n\,|\,b\Rightarrow a\,|\,b$ $ab\,|\,c\Rightarrow a\,|\,c$ و $b\,|\,c$
>
> لاغر کردن یعنی تقسیم کردن بر یک عدد صحیح که حاصل هم عدد صحیح شود و کاهش توان.

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a\,|\,b\xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}}a\,|\,۲b$ ۲) $۳a^۲\,|\,b\xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}}a\,|\,b$

۴) $a^۲\,|\,b^۲\xrightarrow{\text{با هم لاغر}}a\,|\,b\xrightarrow{\text{با هم چاق}}۲a\,|\,۲b$

اما در مورد گزینهٔ (۳)، لاغر، چاق شده است که نادرست می‌باشد:

$a\,|\,b\Rightarrow ۲a\,|\,b$

لاغر، چاق شده است.

۶۰ | ۴ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در گزینهٔ (۱) طرفین رابطهٔ $۲۴ab\,|\,۱۸ac$ بر $۶a$ تقسیم شده است، اما چون نمی‌دانیم که a حتماً مخالف صفر است یا خیر، پس چنین کاری مجاز نیست.

در گزینهٔ (۲) برای آن‌که $a+b$ به b تبدیل شود باید در سمت لاغر از تفریق استفاده کنیم در حالی‌که نمی‌توان این کار را کرد. البته می‌توان مثال نقض هم ارائه کرد. مثلاً اگر $a=-۳$ و $b=۴$ باشد، رابطهٔ $a+b\,|\,a$ درست است، ولی رابطهٔ $a\,|\,b$ نادرست می‌باشد.

در گزینهٔ (۳) هم از تساوی $a=bc$ می‌توان نتیجه گرفت که $c\,|\,a$. به مثال نقض هم دقت کنید، مثلاً اگر $a=۶$، $b=۲$ و $c=۳$ باشند، رابطهٔ $a=bc$ برقرار است در حالی‌که $۶\nmid ۳$.

اما گزینهٔ (۴) درست است، زیرا چاق را می‌توان چاق‌تر کرد. نگاه کنید:

$$a\,|\,b+۱\Rightarrow a\,|\,(b+۱)(b^۲-b+۱)\Rightarrow a\,|\,b^۳+۱$$

۶۱ | ۴

> **نیم‌نگاه**
>
> علامت در بخش‌پذیری تأثیری ندارد:
>
> $a\,|\,b\Rightarrow -a\,|\,b\,,\,a\,|\,-b\,,\,-a\,|\,-b$

گزینهٔ (۱) نادرست است، مثلاً $۱۲\,|\,۹\times۴$ اما $۱۲\nmid۴$ و $۱۲\nmid۹$. گزینهٔ (۲) نیز نادرست است، مثلاً $۵\,|\,۹+۱$ در حالی که $۵\nmid۹$ و $۵\nmid۱$. در گزینهٔ (۳) طرفین بر a تقسیم شده است، اما از کجا می‌دانیم a صفر نیست؟ ولی گزینهٔ (۴) درست است، زیرا چاق در یک منفی ضرب شده است و علامت در بخش‌پذیری تأثیری ندارد.

۶۲ **۴** **روش اول:** می‌دانیم هر عددی بر خودش بخش‌پذیر است، پس $a-b \mid a-b$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a-b \mid a \\ a-b \mid a-b \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a-b \mid a-(a-b) \Rightarrow a-b \mid b$$

روش دوم: $a=۳$ و $b=۲$ مثال نقضی برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌باشند.

۶۳ **۳** در گزینه‌ها در سمت چاق b یا c وجود دارد، پس باید از دو رابطه، b یا c را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a \mid b+c \xrightarrow{\times ۲} a \mid ۲b+۲c \\ a \mid ۲c \end{cases} \Rightarrow a \mid (۲b+۲c)-۲c \Rightarrow a \mid ۲b$$

دقت کنید که در گزینهٔ (۲) سمت چاق رابطهٔ $a \mid ۲c$ لاغر شده است، پس نادرست می‌باشد. با توجه به رابطهٔ $a \mid ۲b$، گزینهٔ (۱) نادرست است چون چاق لاغر شده است. هم‌چنین گزینهٔ (۴) نیز نادرست است، زیرا هم چاق، لاغر شده و هم طرف لاغر، چاق شده است.

۶۴ **۳** با توجه به گزینه‌ها باید در سمت راست، ab ایجاد کنیم، پس به کمک ویژگی‌های بخش‌پذیری داریم:

$$\begin{cases} n \mid a-۳ \xrightarrow{\times b} n \mid ab-۳b \\ n \mid b+۷ \xrightarrow{\times ۳} n \mid ۳b+۲۱ \end{cases} \Rightarrow n \mid ab+۲۱$$

۶۵ **۴** تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱)\ b^۳+c^۳ \mid a \Rightarrow (b+c)(b^۲-bc+c^۲) \mid a \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} b+c \mid a$$

$$۲)\ a \mid a-b \xrightarrow{\text{(−۱) برابر لاغر را به چاق اضافه می‌کنیم.}} a \mid -b$$

$$\xrightarrow{\text{علامت تأثیری ندارد.}} a \mid b \xrightarrow{\text{لاغر را به چاق اضافه می‌کنیم.}} a \mid a+b$$

$$۳)\ a^۲-b^۲ \mid a \Rightarrow (a-b)(a+b) \mid a \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a+b \mid a$$

$$\xrightarrow{a+b \mid a+b} a+b \mid (a+b)-a \Rightarrow a+b \mid b$$

بنابراین حتماً گزینهٔ (۴) نادرست است. مثال نقض برای رد گزارهٔ «$a^۲ \mid a+b \Rightarrow a^۲ \mid a-b$»، $a=۳$ و $b=۱۵$ است، زیرا $۳^۲ \mid ۳+۱۵$ درحالی‌که $۳^۲ \nmid ۱۵-۳$.

۶۶ **۳** برای آن‌که این کسر تبدیل به عدد صحیح شود باید مخرج کسر، صورت آن را عاد کند، یعنی:

$$۲x+۳ \mid ۱۴ \Rightarrow ۲x+۳ = \pm۱, \pm۲, \pm۷, \pm۱۴$$

از آن‌جایی که $۲x+۳$ همواره فرد است، پس:

$$\begin{cases} ۲x+۳=\pm۷ \Rightarrow x=۲,-۵ \\ ۲x+۳=\pm۱ \Rightarrow x=-۱,-۲ \end{cases} \Rightarrow$$ منحنی از ۴ نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد.

۶۷ **۲** باید سعی کنیم در سمت راست، m را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a \mid ۷m+۶ \xrightarrow[\times ۶]{\text{چاق، چاق‌تر}} a \mid ۴۲m+۳۶ \\ a \mid ۶m+۵ \xrightarrow[\times ۷]{\text{چاق، چاق‌تر}} a \mid ۴۲m+۳۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \mid (۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵) \Rightarrow a \mid ۱ \Rightarrow a=\pm۱$$

۶۸ **۳** سعی می‌کنیم n را در سمت راست بخش‌پذیری حذف کنیم:

$$\begin{cases} a \mid ۹n+۷ \\ a \mid ۷n+۶ \end{cases} \Rightarrow a \mid ۷(۹n+۷)-۹(۷n+۶) \Rightarrow a \mid -۵ \Rightarrow a \mid ۵$$

$\Rightarrow a=۱$ یا $a=۵$

۶۹ **۲** **روش اول:** باید سعی کنیم در سمت راست، n را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a \mid ۵n^۲-۲n+۱ \\ a \mid n-۳ \xrightarrow{\times ۵n} a \mid ۵n^۲-۱۵n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \mid (۵n^۲-۲n+۱)-(۵n^۲-۱۵n) \Rightarrow a \mid ۱۳n+۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \mid ۱۳n+۱ \\ a \mid n-۳ \xrightarrow{\times ۱۳} a \mid ۱۳n-۳۹ \end{cases} \Rightarrow a \mid (۱۳n+۱)-(۱۳n-۳۹) \Rightarrow a \mid ۴۰$$

بنابراین a می‌تواند اعداد ۱ یا ۲ یا ۴ یا ۵ یا ۸ یا ۱۰ یا ۲۰ یا ۴۰ باشد. پس برای a، ۸ جواب طبیعی وجود دارد.

روش دوم:

> **نیم‌نگاه**
> اگر $n \mid x-a$ و $n \mid f(x)$ که $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح برحسب x باشد، آن‌گاه $n \mid f(a)$.

با توجه به نیم‌نگاه فوق داریم: ریشهٔ $n-۳=۰$ است.

$$a \mid n-۳ \,,\, a \mid ۵n^۲-۲n+۱ \xrightarrow{n=۳} a \mid ۵(۳)^۲-۲(۳)+۱$$

$\Rightarrow a \mid ۴۰ \Rightarrow a=$ ۱ یا ۲ یا ۴ یا ۵ یا ۸ یا ۱۰ یا ۲۰ یا ۴۰

۷۰ **۱** باید سعی کنیم در سمت راست، k را حذف کنیم:

$$\begin{cases} a \mid ۲k^۲-k+۳ \\ a \mid k^۲+k-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \mid (۲k^۲-k+۳)-۲(k^۲+k-۱) \Rightarrow a \mid -۳k+۵ \qquad (*)$$

حال اگر بتوانیم در سمت راست، یک عبارت درجه اول دیگر برحسب k ایجاد کنیم خیلی خوب می‌شود:

$$\begin{cases} a \mid -۳k+۵ \\ a \mid k^۲+k-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \mid k(-۳k+۵)+۳(k^۲+k-۱) \Rightarrow a \mid ۸k-۳ \qquad (**)$$

با توجه به روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\begin{cases} a \mid -۳k+۵ \\ a \mid ۸k-۳ \end{cases} \Rightarrow a \mid ۸(-۳k+۵)+۳(۸k-۳)$$

$\Rightarrow a \mid ۳۱ \Rightarrow a=۱$ یا $a=۳۱$

۷۱ **۳** **روش اول:** باید سعی کنیم در رابطهٔ $n-۳ \mid n^۳-۳$، پارامتر n را در سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} n-۳ \mid n^۳-۳ \\ n-۳ \mid n-۳ \xrightarrow{\times n^۲} n-۳ \mid n^۳-۳n^۲ \end{cases} \Rightarrow n-۳ \mid (n^۳-۳)-(n^۳-۳n^۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-۳ \mid ۳n^۲-۳ \\ n-۳ \mid n-۳ \xrightarrow{\times ۳n} n-۳ \mid ۳n^۲-۹n \end{cases} \Rightarrow n-۳ \mid (۳n^۲-۳)-(۳n^۲-۹n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-۳ \mid ۹n-۳ \\ n-۳ \mid n-۳ \xrightarrow{\times ۹} n-۳ \mid ۹n-۲۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n-۳ \mid (۹n-۳)-(۹n-۲۷) \Rightarrow n-۳ \mid ۲۴$$

$\Rightarrow n-۳ = \pm۱, \pm۲, \pm۳, \pm۴, \pm۶, \pm۸, \pm۱۲, \pm۲۴ \Rightarrow$ ۱۶ مقدار

روش دوم:

نیم‌نگاه

همواره داریم: $x-a \mid f(x) \Rightarrow x-a \mid f(a)$

با توجه به نیم‌نگاه فوق داریم:

$$n-۳ \mid n^{۲}-۳ \Rightarrow n-۳ \mid (۳)^{۳}-۳ \Rightarrow n-۳ \mid ۲۴$$

$$\Rightarrow n-۳=\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴,\pm۶,\pm۸,\pm۱۲,\pm۲۴ \Rightarrow \text{۱۶مقدار}$$

۷۲ | ۲ **روش اول:** باید n را در سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} ۳n+۲ \mid n^{۲}+۱ \Rightarrow ۳n+۲ \mid ۳n^{۲}+۳ \\ ۳n+۲ \mid ۳n+۲ \xrightarrow{\times n} ۳n+۲ \mid ۳n^{۲}+۲n \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳n+۲ \mid (۳n^{۲}+۲n)-(۳n^{۲}+۳)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳n+۲ \mid ۲n-۳ \xrightarrow{\times ۳} ۳n+۲ \mid ۶n-۹ \\ ۳n+۲ \mid ۳n+۲ \xrightarrow{\times ۲} ۳n+۲ \mid ۶n+۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳n+۲ \mid (۶n+۴)-(۶n-۹) \Rightarrow ۳n+۲ \mid ۱۳$$

$$\Rightarrow ۳n+۲=\pm۱\ ,\ \pm۱۳ \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} n=-۱,-۵$$

روش دوم:

نیم‌نگاه

اگر $ax+b \mid f(x)$ (یعنی ریشهٔ سمت چپ، کسری باشد)، باز هم ریشهٔ ساده‌نشدنی $ax+b=۰$ را در $f(x)$ قرار می‌دهیم. فقط عدد حاصل را تا جایی که امکان دارد ساده کرده (در صورتی که ساده شوند)، سپس از مخرج آن صرف‌نظر می‌کنیم.

$$۳n+۲ \mid n^{۲}+۱ \xrightarrow{n=-\frac{۲}{۳}} ۳n+۲ \mid \frac{۴}{۹}+۱ \Rightarrow ۳n+۲ \mid \frac{۱۳}{۹}$$

$$\Rightarrow ۳n+۲ \mid ۱۳ \Rightarrow ۳n+۲=\pm۱,\pm۱۳ \Rightarrow n=-۱,-۵$$

۷۳ | ۱ **روش اول:** ابتدا طرفین رابطهٔ $۵ \mid ۴k+۱$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۵ \mid ۴k+۱ \Rightarrow ۲۵ \mid (۴k+۱)^{۲} \Rightarrow ۲۵ \mid ۱۶k^{۲}+۸k+۱$$

با توجه به رابطهٔ به دست آمده و $۲۵ \mid ۱۶k^{۲}+۲۸k+m$، داریم:

$$\begin{cases} ۲۵ \mid ۱۶k^{۲}+۸k+۱ \\ ۲۵ \mid ۱۶k^{۲}+۲۸k+m \end{cases}$$

$$\xRightarrow{-} ۲۵ \mid ۲۰k+m-۱ \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} ۵ \mid ۲۰k+m-۱$$

حال کافی است از دو رابطهٔ $۵ \mid ۴k+۱$ و $۵ \mid ۲۰k+m-۱$، عدد k را در سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} ۵ \mid ۴k+۱ \\ ۵ \mid ۲۰k+m-۱ \end{cases} \Rightarrow ۵ \mid (۲۰k+m-۱)-۵(۴k+۱) \Rightarrow ۵ \mid m-۶$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m=۶$$

روش دوم: اگر $k=۱$ باشد، رابطهٔ $۵ \mid ۴k+۱$ برقرار است، پس به ازای $k=۱$ نیز باید رابطهٔ $۲۵ \mid ۱۶k^{۲}+۲۸k+m$ برقرار باشد، پس:

$$۲۵ \mid ۱۶+۲۸+m \Rightarrow ۲۵ \mid ۴۴+m \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m=۶$$

۷۴ | ۳ با توجه به رابطهٔ $۷ \mid ۴a^{۲}+mab+b^{۲}$ سعی می‌کنیم در سمت راست، $۴a^{۲}$ و $b^{۲}$ ایجاد کنیم:

$$\begin{cases} ۷ \mid ۵a+۳b \\ ۷ \mid ۲۱a^{۲} \end{cases} \Rightarrow ۷ \mid ۵a(۵a+۳b)-۲۱a^{۲} \Rightarrow ۷ \mid ۴a^{۲}+۱۵ab$$

$$\begin{cases} ۷ \mid ۵a+۳b \\ ۷ \mid ۲۸b^{۲} \end{cases} \Rightarrow ۷ \mid ۲۸b^{۲}-۹b(۵a+۳b) \Rightarrow ۷ \mid b^{۲}-۴۵ab$$

حال داریم:

$$\begin{cases} ۷ \mid ۴a^{۲}+۱۵ab \\ ۷ \mid b^{۲}-۴۵ab \end{cases} \Rightarrow ۷ \mid (۴a^{۲}+۱۵ab)+(b^{۲}-۴۵ab)$$

$$\Rightarrow ۷ \mid ۴a^{۲}-۳۰ab+b^{۲} \Rightarrow m=-۳۰$$

روش دوم: اگر $a=۱$ و $b=۱۰$ باشند، رابطهٔ $۷ \mid ۵a+۳b$ برقرار است، پس باید رابطهٔ $۷ \mid ۴a^{۲}+mab+b^{۲}$ نیز به ازای $a=۱$ و $b=۱۰$ برقرار باشد:

$$۷ \mid ۴+m(۱)(۱۰)+۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۷ \mid ۱۰۴+۱۰m \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} m=-۳۰$$

۷۵ | ۳ باید n را در سمت راست حذف کنیم:

$$n^{۲}-۵n+۳ \mid ۳n-۲ \Rightarrow n^{۲}-۵n+۳ \mid (۳n-۲)^{۲}$$

$$\Rightarrow n^{۲}-۵n+۳ \mid ۹n^{۲}-۱۲n+۴$$

از طرفی می‌دانیم $n^{۲}-۵n+۳ \mid n^{۲}-۵n+۳$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} n^{۲}-۵n+۳ \mid ۹n^{۲}-۱۲n+۴ \\ n^{۲}-۵n+۳ \mid n^{۲}-۵n+۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^{۲}-۵n+۳ \mid (۹n^{۲}-۱۲n+۴)-۹(n^{۲}-۵n+۳)$$

$$\Rightarrow n^{۲}-۵n+۳ \mid ۳۳n-۲۳$$

در نتیجه می‌توان گفت:

$$\begin{cases} n^{۲}-۵n+۳ \mid ۳۳n-۲۳ \\ n^{۲}-۵n+۳ \mid ۳n-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^{۲}-۵n+۳ \mid (۳۳n-۲۳)-۱۱(۳n-۲)$$

$$\Rightarrow n^{۲}-۵n+۳ \mid -۱ \Rightarrow n^{۲}-۵n+۳=\pm۱$$

حال باید جواب‌های صحیح $n^{۲}-۵n+۳=۱$ و $n^{۲}-۵n+۳=-۱$ را به دست آوریم:

$$\begin{cases} n^{۲}-۵n+۳=۱ \Rightarrow n^{۲}-۵n+۲=۰ \\ \Rightarrow \text{چون } \Delta=۱۷ \text{ است، پس مطمئناً جواب صحیح ندارد.} \\ n^{۲}-۵n+۳=-۱ \Rightarrow n^{۲}-۵n+۴=۰ \\ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰} n=۱, n=۴ \end{cases}$$

۷۶ | ۴ با توجه به گزینه‌ها سعی می‌کنیم در سمت راست، a را حذف کنیم.

می‌دانیم $۳a+۵b \mid ۳a+۵b$، پس:

$$\begin{cases} ۳a+۲b \mid ۴a+۷b \xrightarrow{\times ۳} ۳a+۲b \mid ۱۲a+۲۱b \\ ۳a+۲b \mid ۳a+۲b \xrightarrow{\times ۴} ۳a+۲b \mid ۱۲a+۸b \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳a+۲b \mid (۱۲a+۲۱b)-(۱۲a+۸b)$$

$$\Rightarrow ۳a+۲b \mid ۱۳b \xrightarrow{\times ۳} ۳a+۲b \mid ۳۹b$$

۷۷ | **۱** باید $x-3 \mid 5x+3$ و در نتیجه داریم:

$$x-3 \mid 5x+3 \Rightarrow x-3 \mid 5(3)+3 \Rightarrow x-3 \mid 18$$

$$\Rightarrow x-3 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$$

از آن‌جایی که منحنی باید از ربع اول بگذرد، فقط xهایی قابل‌قبول هستند که هم $x-3>0$ و هم $\frac{5x+3}{x-3}>0$ باشند. پس ۶ جواب قابل‌قبول وجود دارد.

۷۸ | **۲** **روش اول:** در منحنی با ضابطهٔ ضمنی، ابتدا منحنی را به فرم $y=\frac{\bigcirc}{\bigcirc}$ در می‌آوریم و سپس از بخش‌پذیری استفاده می‌کنیم:

$$4x^2+1 = 3xy+2y \Rightarrow y = \frac{4x^2+1}{3x+2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2 \mid 4x^2+1 \\ 3x+2 \mid 3x+2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2 \mid 3(4x^2+1)-4x(3x+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2 \mid -8x+3 \\ 3x+2 \mid 3x+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x+2 \mid 3(-8x+3)+8(3x+2) \Rightarrow 3x+2 \mid 25$$

$$\Rightarrow 3x+2 = \pm 1, \pm 5, \pm 25$$

$$\Rightarrow x = -1, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, 1, \frac{23}{3}, 9 \xRightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -1, 1, 9$$

روش دوم:

$$3x+2 \mid 4x^2+1 \xRightarrow{x=-\frac{2}{3}} 3x+2 \mid 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2+1$$

$$\Rightarrow 3x+2 \mid \frac{25}{9} \Rightarrow \cdots$$

۷۹ | **۳** چون a عدد طبیعی است، پس حتماً $a \neq 0$ می‌باشد. یعنی می‌توان طرفین $abc \mid ab+ac$ را بر a تقسیم کرد (لاغر کرد). حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $abc \mid ab+ac \xRightarrow{\div a} bc \mid b+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \mid b+c \Rightarrow b \mid c \\ c \mid b+c \Rightarrow c \mid b \end{cases} \xRightarrow{\text{b و c اعداد طبیعی‌اند}} b=c$$

۲) $b \mid c \xRightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} b \mid c^2$

۴) $c \mid b \xRightarrow{\text{با هم چاق}} c^2 \mid b^2 \xRightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} c^2 \mid b^5$

نیم‌نگاه

اگر a و b اعداد صحیح و m، n، m′ و n′ اعداد طبیعی باشند به طوری‌که $nm' \ge mn'$، آن‌گاه:

دور در دور

نزدیک در نزدیک

$$a^n \mid b^m \xRightarrow{nm' \ge mn'} a^{n'} \mid b^{m'}$$

برای اثبات درستی گزینهٔ (۴) می‌توان از نیم‌نگاه فوق هم استفاده کرد:

$$c \mid b \xRightarrow{1\times 5 \ge 1 \times 2} c^2 \mid b^5$$

اما گزینهٔ (۳) نادرست است، چون واضح است که از رابطهٔ $bc \mid b+c$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \mid b+c$.

۸۰ | **۴** تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a^2 \mid b^3 \xRightarrow{2\times 4 \not\ge 3 \times 3} a^3 \mid b^4$ غ‌ق‌ق

۲) $a^3 \mid b^5 \xRightarrow{3\times 3 \not\ge 5 \times 2} a^2 \mid b^3$ غ‌ق‌ق

۳) $a^4 \mid b^3 \xRightarrow{4\times 2 \not\ge 3 \times 3} a^3 \mid b^2$ غ‌ق‌ق

۴) $a^3 \mid b^4 \xRightarrow{3\times 3 \ge 4 \times 2} a^2 \mid b^3$ ق‌ق

۸۱ | **۳** **روش اول:** ابتدا سمت راست رابطهٔ $a \mid b+c$ را چاق‌تر می‌کنیم:

$$a \mid b+c \xRightarrow{\times c} \begin{cases} a \mid bc+c^2 \\ a \mid bc \end{cases} \Rightarrow a \mid c^2$$

$$a \mid b+c \xRightarrow{\times b} \begin{cases} a \mid b^2+bc \\ a \mid bc \end{cases} \Rightarrow a \mid b^2$$

حالا تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a \mid c^2 \xRightarrow{1\times 8 \ge 2 \times 3} a^3 \mid c^8$

۲) $a \mid b^2 \xRightarrow{\text{توان ۲}} a^2 \mid b^4$ (البته می‌توانستیم مانند گزینهٔ (۱) بررسی کنیم.)

۴) $a \mid b^2, a \mid c^2 \Rightarrow a \mid b^2+c^2$

روش دوم: می‌توانستیم فرض کنیم $a=2$، $b=4$ و $c=6$ است. با این مقادیر گزینهٔ (۳) نادرست است.

۸۲ | **۳** گزینهٔ (۱) درست است. زیرا:

$$a \mid b \xRightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a \mid 2b^3$$

اگر طرفین رابطه‌های $b \mid 3$ و $b^2 \mid ac$ را در هم ضرب کنیم، داریم:

$$a \mid b \, , \, b^2 \mid ac \Rightarrow ab^2 \mid bac \xRightarrow[\div ab]{a,b \neq 0} b \mid c \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴)

حال با توجه به خاصیت تعدی در رابطهٔ بخش‌پذیری، می‌توان گفت:

$$a \mid b \, , \, b \mid c \Rightarrow a \mid c \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲)

بنابراین حتماً گزینهٔ (۳) نادرست است.

۸۳ | **۲** تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a^2 \mid b^3 \xRightarrow{2\times 9 \ge 3 \times 4} a^4 \mid b^9$

اما برای بررسی سایر گزینه‌ها، بخش‌پذیری توانی از c بر توانی از a را می‌خواهیم. پس:

$$\begin{cases} a^2 \mid b^3 \xRightarrow{\text{توان ۲}} a^4 \mid b^6 \\ b^2 \mid c^3 \xRightarrow{\text{توان ۳}} b^6 \mid c^9 \end{cases} \xRightarrow{\text{تعدی}} a^4 \mid c^9$$

۲) $a^4 \mid c^9 \xRightarrow{4\times 3 \not\ge 9 \times 2} a^2 \mid c^3 \Rightarrow$ غ‌ق‌ق

برای تمرین بیشتر درستی گزینه‌های (۳) و (۴) را بررسی می‌کنیم:

۳) $a^4 \mid c^9 \xRightarrow{4\times 3 \ge 9 \times 1} a \mid c^3$

۴) $a^4 \mid c^9 \xRightarrow{4\times 8 \ge 9 \times 3} a^3 \mid c^8$

۸۴ | **۳** به کمک ویژگی‌های بخش‌پذیری داریم:

$$a^2-c^2 \mid b+c \Rightarrow (a-c)(a+c) \mid b+c \xRightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}}$$

$$\begin{cases} a+c \mid b+c \\ b \mid a+c \end{cases} \xRightarrow{\text{تعدی}} b \mid b+c \Rightarrow b \mid c$$

۸۵ | ۴

نیم‌نگاه

اگر $a|b$ و $b\neq 0$، آن‌گاه $|a|\le|b|$.

نتیجه (۱) اگر $a|b$ و $|a|>|b|$، آن‌گاه $b=0$ است.

نتیجه (۲) اگر $a|b$ و $b|a$، آن‌گاه $a=\pm b$.

صورت سؤال به زبان ریاضی می‌شود: $ab|a+b$ ، بنابراین داریم:

$$ab|a+b\Rightarrow\begin{cases}a|a+b\Rightarrow a|b\\ b|a+b\Rightarrow b|a\end{cases}\Rightarrow a=\pm b\Rightarrow |a|=|b|$$

۸۶ | ۲ می‌دانیم $(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+b^3$ می‌باشد، پس گزینهٔ (۲) به صورت $a+b|a^3+b^3$ می‌شود که چون توان عددی فرد است، پس همواره برقرار می‌باشد.

۸۷ | ۱ می‌دانیم $65=2^6+1$ است، پس:

$$65|2^n+1\Rightarrow 2^6+1|2^n+1\Rightarrow 2^6+1|(2^6)^{\frac{n}{6}}+1^{\frac{n}{6}}$$

می‌دانیم رابطهٔ فوق زمانی برقرار است که $\frac{n}{6}$ عددی طبیعی و فرد باشد. پس:

$$\frac{n}{6}=2k+1\Rightarrow n=6(2k+1)$$

در گزینه‌ها فقط ۳۰ مضرب فرد ۶ می‌باشد.

۸۸ | ۱ ابتدا $3^{36}-2^{12}$ را به فرم a^n-b^n می‌نویسیم:

$$3^{36}-2^{12}=(3^3)^{12}-2^{12}=27^{12}-2^{12}$$

چون ۱۲ عددی زوج است، داریم:

$$27-2|27^{12}-2^{12}\Rightarrow 25|27^{12}-2^{12}$$
$$27+2|27^{12}-2^{12}\Rightarrow 29|27^{12}-2^{12}$$

واضح است که $3^{36}-2^{12}=27^{12}-2^{12}$ بر ۱۵ بخش‌پذیر نیست، زیرا بر ۳ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

۸۹ | ۳ ابتدا ۹۱ را به فرم $3^{\bigcirc}+4^{\bigcirc}$ می‌نویسیم و داریم:

$$91=3^3+4^3\Rightarrow 3^3+4^3|3^n-4^n\Rightarrow 3^3+4^3|(3^3)^{\frac{n}{3}}-(4^3)^{\frac{n}{3}}$$

برای برقراری رابطهٔ فوق باید $\frac{n}{3}$ عدد طبیعی و زوج باشد، پس:

$$\frac{n}{3}=2k\Rightarrow n=6k$$

حال تعداد اعداد دورقمی n را می‌خواهیم، پس:

$$10\le n\le 99\Rightarrow 10\le 6k\le 99$$

$$\Rightarrow 1/...\le k\le 16/...\xRightarrow{k\in\mathbb{Z}}2\le k\le 16\Rightarrow \text{تعداد } n\text{ها}=15$$

۹۰ | ۲ باید سمت لاغر را به صورت $3^{\bigcirc}\pm 2^{\bigcirc}$ بنویسیم. واضح است که ۷ را نمی‌توان به این فرم نوشت اما 3^3+2^3 برابر ۳۵ می‌شود که اگر 3^n-2^n بر ۳۵ بخش‌پذیر باشد بر ۷ نیز بخش‌پذیر است. پس:

$$3^3+2^3|3^n-2^n\Rightarrow 3^3+2^3|(3^3)^{\frac{n}{3}}-(2^3)^{\frac{n}{3}}$$

برای آن‌که رابطهٔ فوق برقرار باشد باید $\frac{n}{3}$ عددی طبیعی و زوج باشد. پس $n=6k$ خواهد بود و داریم:

$$10\le n\le 99\Rightarrow 10\le 6k\le 99$$

$$\Rightarrow 1/...\le k\le 16/...\xRightarrow{k\in\mathbb{Z}}2\le k\le 16\Rightarrow \text{تعداد } n\text{ها}=15$$

۹۱ | ۲ با توجه به رابطهٔ زیر، $\frac{20}{n}$ باید عدد طبیعی و زوج باشد:

$$3^n+1|(3^n)^{\frac{20}{n}}-1$$

بنابراین n می‌تواند ۱، ۲، ۵، ۱۰ باشد.

۹۲ | ۲ ابتدا روابط $3x|1080$ و $2x|960$ را ساده می‌کنیم:

$$3x|1080\xRightarrow{\div 3}x|360 \quad \text{و} \quad 2x|960\xRightarrow{\div 2}x|480$$

بنابراین مجموعهٔ A به صورت $A=\{x>0: x|360, x|480\}$ می‌شود. بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ A، همان بزرگ‌ترین عدد x است که هم ۳۶۰ و هم ۴۸۰ را می‌شمارد. با توجه به تعریف ب.م.م دو عدد می‌توان گفت بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ A، ب.م.م ۳۶۰ و ۴۸۰ است. پس:

$$Max(A)=(360,480)$$
$$=(2^3\times 3^2\times 5^1, 2^5\times 3^1\times 5^1)=2^3\times 3^1\times 5^1=120$$

۹۳ | ۴ چون $(a,p^2)=p$ شده است، پس a دقیقاً یک عامل p دارد (چون مثلاً اگر دوتا یا بیشتر داشت باید $(a,p^2)=p^2$ می‌شد!!!) و همچنین با استدلال مشابه، b نیز دارای عامل p^2 است و بنابراین ab دارای عامل p^3 می‌باشد، پس $(ab,p^5)=p^3$.

۹۴ | ۱ چون $(a,b^4)=p$ است، واضح است که هم a و هم b حداقل یک عامل p دارند و واضح است که b^4 دارای حداقل چهار عامل p است و با توجه دوباره به $(a,b^4)=p$ نتیجه می‌گیریم که a فقط یک عامل p دارد. چون اگر بیش از یک عامل p داشته باشد، ب.م.م a و b^4 برابر p نمی‌شد. بنابراین داریم:

$$(a,b)=(p^1\times\bigcirc, p^{\bigcirc}\times\bigcirc)=p$$

۹۵ | ۱ از $(a,9)=3$ می‌توان نتیجه گرفت که a دقیقاً یک عامل ۳ دارد. همچنین از $(a,40)=(a,2^3\times 5)=2^2$ می‌توان نتیجه گرفت که a دارای 2^2 است. در ضمن عامل ۵ نیز ندارد، چون نتوانسته با ۴۰ فاکتور ۵ تولید کند. از آن‌جایی که $360=2^3\times 3^2\times 5$، پس $(a,360)=12$.

۹۶ | ۳

نیم‌نگاه

با توجه به تعریف ب.م.م دو عدد صحیح می‌توان نتیجه گرفت که:

$(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)$ و $(ka,kb)=|k|(a,b)$

از رابطهٔ $a|b$ نتیجه می‌گیریم $b=aq$ است. پس:

$$(32a^2,24ab)=(32a^2,24a(aq))=8a^2(4,3q)$$

حال با توجه به مقادیر مختلف q، عدد ۴ فقط می‌تواند فاکتور ۱ یا ۲ یا ۴ بدهد، پس:

$$8a^2(4,3q)=\begin{cases}8a^2\times 1=8a^2\\ 8a^2\times 2=16a^2\\ 8a^2\times 4=32a^2\end{cases}$$

۹۷ | ۲ از رابطهٔ $a|(b^3,c)$ می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ (چاق چاق‌تر شده). حال داریم:

$$\begin{cases}a|5c+17\\ a|c\end{cases}\Rightarrow a|(5c+17)-5c\Rightarrow a|17\Rightarrow a=1 \text{ یا } a=17$$

۹۸ | ۲ طبق تعریف ب.م.م دو عدد صحیح می‌توان گفت $a|(a,b)$ و $(a,b)|b$. حال داریم:

$$\begin{cases} a|(a,b) \\ (a,b)|b \end{cases} \xRightarrow{\text{تعدی}} a|b$$

۹۹ | ۱ فرض می‌کنیم $d=(n+7,n^2+9n+21)$ باشد. پس:

$$d|n+7\ ,\ d|n^2+9n+21$$

از قسمت بخش‌پذیری به یاد داریم که اگر $d|x-a$ و $d|f(x)$، آن‌گاه $d|f(a)$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} d|n+7 \\ d|n^2+9n+21 \end{cases} \Rightarrow d|(-7)^2+9(-7)+21 \Rightarrow d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 7$$

در صورت مسأله بیان شده که n مضرب ۷ نیست، پس $n+7$ هم مضرب ۷ نیست. بنابراین ب.م.م (بزرگ‌ترین فاکتور) $n+7$ با هیچ عددی نمی‌تواند ۷ باشد و فقط $d=1$ قابل‌قبول است.

۱۰۰ | ۲ فرض می‌کنیم $d=(n+4,9n-5)$ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} d|n+4 \\ d|9n-5 \end{cases} \Rightarrow d|9(-4)-5 \Rightarrow d|-41 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 41$$

با توجه به اینکه در صورت سؤال گفته‌شده مقسوم‌علیه مشترک غیر از یک است، پس $d=41$ می‌باشد. حال اعداد دورقمی n را می‌خواهیم. زمانی ب.م.م $n+4$ و $9n-5$ برابر ۴۱ می‌شود که تک‌تک آن‌ها مضرب ۴۱ باشند. کافی است یکی از آن‌ها را برابر $41k$ قرار دهیم:

$$n+4=41k \Rightarrow n=41k-4 \xRightarrow{n \text{ دو رقمی}} k=1,2 \Rightarrow \text{۲ عدد دو رقمی}$$

۱۰۱ | ۱ اگر فرض کنیم $d=(11n+2,7n+5)$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d|11n+2 \\ d|7n+5 \end{cases} \Rightarrow d|7(11n+2)-11(7n+5)$$

$$\Rightarrow d|14-55 \Rightarrow d|-41 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 41$$

با توجه به تعریف ب.م.م می‌توان گفت که مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد، شمارندهٔ ب.م.م دو عدد هستند، بنابراین ۳ نمی‌تواند مقسوم‌علیه مشترک دو عدد باشد.

۱۰۲ | ۴ **روش اول:** ابتدا ۱۰۸ را تجزیه می‌کنیم و داریم:

$$(5p^3,108)=(5p^3,2^2\times 3^3)$$

چون p یک عدد اول دورقمی است، پس حتماً ۲ و ۳ نیست، بنابراین $5p^3$ و $2^2\times 3^3$ هیچ عامل مشترکی غیر از یک ندارند. پس:

$$(5p^3,108)=(5p^3,2^2\times 3^3)=1$$

روش دوم: p را یک عدد اول دورقمی مثلاً ۱۱ در نظر می‌گیریم:

$$p=11 \Rightarrow (5p^3,108)=(5\times 11^3,2^2\times 3^3)=1$$

۱۰۳ | ۱ چون $64=2^6$ و $81=3^4$ و $125=5^3$، پس عدد ۴۹ را انتخاب می‌کنیم که نه عامل ۲ دارد و نه ۳ و نه ۵.

۱۰۴ | ۳ چون در بین اعداد داده‌شده $3k+2$ و $3k+1$ متوالی‌اند، پس نسبت به هم اولند و لذا ب.م.م همهٔ اعداد ۱ است.

۱۰۵ | ۴ **روش اول:** به کمک ویژگی $(ka,kb)=|k|(a,b)$، داریم:

$$(a,4)=2 \Rightarrow 2(\frac{a}{2},2)=2 \Rightarrow (\frac{a}{2},2)=1 \Rightarrow \frac{a}{2}=2k+1$$

$$\Rightarrow a=4k+2$$

$$(b,4)=2 \Rightarrow 2(\frac{b}{2},2)=2 \Rightarrow (\frac{b}{2},2)=1 \Rightarrow \frac{b}{2}=2k'+1$$

$$\Rightarrow b=4k'+2$$

چون $(a,4)=2$ و $(b,4)=2$ می‌باشند، پس a و b حتماً بر ۲ بخش‌پذیرند، لذا مطمئناً $\frac{a}{2}$ و $\frac{b}{2}$ اعداد صحیح هستند. حال داریم:

$$(a+b,4)=(4k+2+4k'+2,4)=(4k+4k'+4,4)$$

$$=4(k+k'+1,1)=4\times 1=4$$

روش دوم: کافی است فرض کنیم $a=2$ و $b=2$ باشند، پس:

$$(a+b,4)=(2+2,4)=(4,4)=4$$

۱۰۶ | ۱ اگر a^2+3a+3 را به صورت $\underbrace{a^2+3a+2}_{(a+1)(a+2)}+1$ در نظر بگیریم، می‌توان گفت:

$$(a^2+3a+3,8)=(\underbrace{(a+1)(a+2)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی مضرب ۲ است!}}+1,8)=(2k+1,8)=1$$

۱۰۷ | ۴ اگر فرض کنیم $d=(5n+9\ ,\ 4n+7)$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d|5n+9 \\ d|4n+7 \end{cases} \Rightarrow d|4(5n+9)-5(4n+7) \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

بنابراین این دو عدد به ازای هر $n\in\mathbb{Z}$، نسبت به هم اول‌اند و در نتیجه این مسأله به ازای $1\le n\le 50$، ۵۰ جواب دارد.

۱۰۸ | ۴ اگر فرض کنیم $d=(11n+4,25n+9)$ باشد، آن‌گاه:

$$d=(11n+4,25n+9) \Rightarrow \begin{cases} d|11n+4 \\ d|25n+9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|25(11n+4)-11(25n+9) \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

پس دو عدد فوق، به ازای همهٔ اعداد طبیعی n (از جمله دورقمی‌ها) نسبت به‌هم اولند و تعداد اعداد دورقمی برابر $99-9=90$ است.

۱۰۹ | ۱ اگر فرض کنیم $d=(5n-2\ ,\ 12n+7)$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d|5n-2 \\ d|12n+7 \end{cases} \Rightarrow d|12\times(5n-2)+(-5)\times(12n+7)$$

$$\Rightarrow d|-59 \Rightarrow d|59 \Rightarrow d=59 \text{ یا } d=1$$

با توجه به اینکه $5n-2$ و $12n+7$، نسبت به هم اول نیستند، بنابراین ب. م. م آن‌ها باید ۵۹ باشد.

۱۱۰ | ۱ **روش اول:** از رابطهٔ $b|a$ می‌توان گفت $a=bq$ و در ضمن چون a عددی فرد است، پس b و q نیز اعدادی فرد هستند. بنابراین:

$$(60ab,24b^2)=(\underbrace{60\times bq\times b}_{60b^2q},24b^2)=12b^2(\underbrace{5q}_{\text{فرد}},2)$$

$$=12b^2\times 1=12b^2$$

روش دوم: این تست را از راه عددگذاری هم می‌توان حل کرد. مثلاً $a=3$ و $b=1$ در نتیجه $(180,24)=12$ و در گزینه‌ها $12b^2$ به ازای $b=1$ برابر ۱۲ است.

۱۱۱ ۲

نیم‌نگاه

با توجه به این‌که اگر $(a,b)=d$ باشد، می‌توان گفت d بزرگ‌ترین عددی است که می‌توان از a و b فاکتور گرفت، پس می‌توان گفت که اگر عددی دو عدد صحیح را عاد کند، حتماً ب.م.م دو عدد را نیز عاد می‌کند، و بالعکس. یعنی اگر عددی ب.م.م دو عدد را عاد کند، آن‌گاه هر کدام از دو عدد را نیز عاد می‌کند.

$$m|a, m|b \Leftrightarrow m|(a,b)$$

نتیجه مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد، مقسوم‌علیه‌های ب.م.م دو عدد هستند.

فرض می‌کنیم $(2a+3b, a+4b)=d$ باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} d|2a+3b \\ d|a+4b \end{cases} \Rightarrow d|(2a+3b)-2(a+4b) \Rightarrow d|-5b \qquad (*)$$

$$\begin{cases} d|2a+3b \\ d|a+4b \end{cases} \Rightarrow d|4(2a+3b)-3(a+4b) \Rightarrow d|5a \qquad (**)$$

علامت در ب.م.م تأثیری ندارد.

$$\xRightarrow{(**)(*)} d|(5a,-5b) \Rightarrow d|5\underbrace{(a,-b)}_{1} \Rightarrow d|5 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 5$$

۱۱۲ ۴ می‌دانیم وقتی عددی دو عدد را عاد می‌کند، حتماً ب.م.م دو عدد را نیز عاد می‌کند. پس:

$$a|b, a|c \Rightarrow a|(b,c)$$

بنابراین چون $a|c$، پس $(a,c)=a$ و چون $a|(b,c)$ پس داریم:

$$((a,c),(b,c))=(a,(b,c))=a$$

۱۱۳ ۲ مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد، مقسوم‌علیه‌های ب.م.م دو عدد نیز هستند. پس کافی است مقسوم‌علیه‌های ۲۰ را پیدا کنیم که اعداد ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰ و ۲۰ می‌باشند و تعداد آن‌ها برابر ۶ تا است.

۱۱۴ ۱

نیم‌نگاه

با توجه به روابط $(a,b)|a$ و $(a,b)|b$ می‌توان نتیجه گرفت ب.م.م دو عدد لاغرتر از خود اعداد است. پس گرفتن ب.م.م از یک عدد باعث لاغرشدن و بازکردن ب.م.م باعث چاق‌شدن می‌شود.

$a|b \xRightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} (a,\bigcirc)|b$ و $a|(b,c) \xRightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a|b, a|c$

در گزینهٔ (۱) لاغر، لاغرتر شده است، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است. حال برای تمرین بیشتر، سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در گزینهٔ (۲) چاق، لاغر شده و در گزینهٔ (۳) لاغر، چاق شده است، پس هر دو نادرست هستند. گزینهٔ (۴) هم با یک مثال نقض رد می‌شود. مثلاً: $(1,4)|(1,9) \not\Rightarrow 4|9$

۱۱۵ ۳ با توجه به این‌که ک.م.م دو عدد از دو عدد چاق‌تر است، داریم:

$$a|bc \xRightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a|[b,bc]$$

۱۱۶ ۳

نیم‌نگاه

با توجه به تعریف بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد، می‌توان گفت:

$$a|b \Leftrightarrow (a,b)=|a|$$

توجه وجود قدرمطلق به خاطر این است که ب.م.م دو عدد، یک عدد طبیعی است. با گذاشتن قدرمطلق از طبیعی‌بودن ب.م.م مطمئن می‌شویم.

با توجه به ویژگی‌های بخش‌پذیری می‌توان گفت:

$$ac|b \xRightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} \begin{cases} a|b \\ c|b \end{cases}$$

حال با توجه به نیم‌نگاه گفته‌شده داریم:

$$a|b \Rightarrow (a,b)=a \quad , \quad c|b \Rightarrow (c,b)=c$$

دقت کنید که چون در صورت سؤال گفته شده a، b و c اعداد طبیعی‌اند، پس برای a و c قدرمطلق نگذاشتیم.

۱۱۷ ۴ با توجه به گزینه‌ها و ویژگی‌های بخش‌پذیری، داریم:

$$1)\ a^3|b \xRightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a|b \Rightarrow (a,b)=|a| \Rightarrow \checkmark$$

$$2)\ a^3|b \xRightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a|b \xRightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a|3b \Rightarrow (a,3b)=|a| \Rightarrow \checkmark$$

$$3)\ a^3|b \Rightarrow (a^3,b)=|a^3| \Rightarrow \checkmark$$

دقت کنید اگر $(3a,b)=3|a|$، یعنی $3a|b$ که چنین نتیجه‌ای نادرست است، زیرا لاغر، چاق شده است. نگاه کنید:

$$a^3|b \xRightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a|b \xRightarrow{\text{لاغر، چاق‌شده}} 3a|b \quad \text{غ ق ق}$$

۱۱۸ ۳ با توجه به تعریف ب.م.م دو عدد صحیح می‌دانیم $(a,b)|a$، بنابراین داریم:

$$(a,b)|a \xRightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} (a,b)|3a \Rightarrow (3a,(a,b))=(a,b)$$

۱۱۹ ۴ با توجه به این‌که کوچک‌ترین عضو A را می‌خواهیم، در واقع دنبال کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۲۴ و ۲۸ هستیم، پس:

$$\min(A)=[24,28]=[2^3\times 3^1, 2^2\times 7^1]=2^3\times 3^1\times 7^1=168$$

۱۲۰ ۴

نیم‌نگاه

با توجه به تعریف ک.م.م دو عدد صحیح می‌توان گفت:

$$a|b \Leftrightarrow [a,b]=|b|$$

می‌دانیم $a^2|a^3$، پس $(a^2,a^3)=a^2$ است. حال داریم:

$$[(a^2,a^3),(a,b^4)]=[a^2,(a,b^4)]$$

از طرفی می‌دانیم $a|a^2$، پس $(a,b^4)|a^2$ و این یعنی $[a^2,(a,b^4)]=a^2$ می‌باشد. دقت کنید ب.م.م گرفتن a با b^4 باعث لاغر شدن a شده است.

۱۲۱ ۱ چون‌گفته شده a^n بر b^n بخش‌پذیر است، یعنی $b^n|a^n$. حال داریم:

$b^n|a^n \xRightarrow{\text{با هم لاغر}} b|a \Rightarrow [a,b]=|a| \Rightarrow$ گزینهٔ (۴)

$b|a \Rightarrow b|a^2 \Rightarrow [b,a^2]=a^2 \Rightarrow$ گزینهٔ (۲)

$b|a \Rightarrow (a,b)=|b| \Rightarrow$ گزینهٔ (۳)

در مورد گزینهٔ (۱) دقت کنید که اگر $(a,b^2)=b^2$ باشد، یعنی $b^2|a$. اما:

$$b|a \xRightarrow{\text{لاغر، چاق‌شده}} b^2|a \quad \text{غقق}$$

۱۲۲ | ۲ می‌دانیم $[a^۲,a^۳]=a^۳$ است، زیرا $a^۲\,|\,a^۳$. پس داریم:

$$([a^۲,a^۳],[a^۵,b^۳])=(|a^۳|,[a^۵,b^۳])$$

از طرفی واضح است که $a^۳\,|\,[a^۵,b^۳]$، زیرا $a^۳\,|\,a^۵$ و سمت چاق با ک.م.م گیری چاق‌تر نیز شده است. پس:

$$(|a^۳|,[a^۵,b^۳])=|a^۳|$$

۱۲۳ | ۳ به جای $[a,b]$ می‌توان a یا b را قرار داد، چون $[a,b]$ در سمت لاغر است و می‌توانیم لاغر را لاغرتر کنیم. از طرفی به جای (c,d) می‌توانیم c یا d یا $[c,d]$ یا cd را قرار دهیم، چون (c,d) در سمت چاق است و چاق را می‌توان چاق‌تر کرد.

بررسی گزینه‌ها

۱) $[a,b]\,|\,(c,d) \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a\,|\,(c,d) \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a\,|\,[c,d]$ ✓

۲) $\begin{cases}[a,b]\,|\,(c,d) \xrightarrow[\text{چاق، چاق‌تر}]{\text{لاغر، لاغرتر}} a\,|\,c \Rightarrow (a,c)=a \\ [a,b]\,|\,(c,d) \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a\,|\,(c,d)\end{cases}$

$\Rightarrow [(a,c),(c,d)]=[a,(c,d)]=(c,d)$ ✓

۳) $[a,b]\,|\,(c,d) \xrightarrow[\text{چاق، چاق}]{\text{لاغر، لاغرتر}} a\,|\,d \Rightarrow (a,d)=a$

$\xrightarrow{a|c} [(a,d),c]=[a,c]=c \Rightarrow$ ✗

۴) $[a,b]\,|\,(c,d) \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} [a,b]\,|\,[c,d]$

$\Rightarrow ([c,d],[a,b])=[a,b]$ ✓

۱۲۴ | ۴ همان‌طور که گفتیم، ب.م.م گرفتن باعث لاغرشدن و ک.م.م گرفتن باعث چاق‌شدن می‌شود.

بررسی گزینه‌ها

۱) $a\,|\,(b,c) \xrightarrow[\text{چاق، چاق‌تر}]{\text{لاغر، لاغرتر}} (a,b)\,|\,c$ ✓

۲) $a\,|\,(b,c) \xrightarrow[\text{چاق، چاق‌تر}]{\text{لاغر، لاغرتر}} (a,b)\,|\,[b,c]$ ✓

۳) $a\,|\,(b,c) \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a\,|\,b \xrightarrow[|b|\,|\,[b,c]]{[a,b]=|b|} \underbrace{[a,b]}_{|b|}\,\big|\,[b,c]$ ✓

۴) $a\,|\,(b,c) \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a\,|\,b \xrightarrow[[a,b]|c]{[a,b]=|b|} |b|\,|\,c$ ✗

دلیلی برای درست بودن نتیجه به دست آمده وجود ندارد. البته می‌توانیم از مثال نقض $a=۳$، $b=۹$ و $c=۶$ برای رد گزینهٔ (۴) استفاده کنیم.

۱۲۵ | ۲ فرض می‌کنیم تقسیم مورد نظر، $a=bq+r$ باشد. حال تغییرات را به این تقسیم اعمال می‌کنیم:

$$a+۹۰=(b+۴)q+r-۲ \xrightarrow{a=bq+r} \cancel{bq}+\cancel{r}+۹۰=\cancel{bq}+۴q+\cancel{r}-۲$$

$$\Rightarrow ۴q=۹۲ \Rightarrow q=۲۳$$

۱۲۶ | ۴ تقسیم ما در ابتدا به صورت $a=b\times ۵+۱۷$ است. حالا تغییرات را به این تقسیم اعمال می‌کنیم:

$$a-۲=(b-۲)\times ۵+\frac{۵b}{۷} \xrightarrow{a=۵b+۱۷} \cancel{۵b}+۱۷-۲=\cancel{۵b}-۱۰+\frac{۵b}{۷}$$

$$\Rightarrow ۲۵=\frac{۵b}{۷} \Rightarrow ۵b=۷\times ۲۵ \Rightarrow b=۳۵$$

حال به ازای $b=۳۵$ مقدار مقسوم یعنی a را به دست می‌آوریم:

$$a=۵b+۱۷ \xrightarrow{b=۳۵} a=۵\times ۳۵+۱۷ \Rightarrow a=۱۹۲$$

۱۲۷ | ۲ فرض می‌کنیم عدد طبیعی مورد نظر a باشد، پس داریم:

$$a=۵۰q+\frac{۵}{۶}q \quad , \quad ۰\le \frac{۵}{۶}q<۵۰$$

اگر به کمک شرط تقسیم، تعداد qها را پیدا کنیم، تعداد aها معلوم می‌شود. پس:

$$۰\le \frac{۵}{۶}q<۵۰ \Rightarrow ۰\le q<۶۰ \Rightarrow q=۶,۱۲,۱۸,\ldots,۵۴ \Rightarrow \text{۹ مقدار}$$

توجه کنید که باقی‌مانده عددی صحیح است، پس برای آن‌که $\frac{۵}{۶}q$ عددی صحیح شود باید q مضرب ۶ باشد. حواستان هم هست می‌خواهیم a عدد طبیعی باشد، پس $q=۰$ قابل‌قبول نیست.

۱۲۸ | ۴ ابتدا صورت مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a=۳۷q+\underbrace{q^۲-۲}_{r}$$

از آن‌جایی که بزرگ‌ترین مقدار a را می‌خواهیم، پس باید بزرگ‌ترین مقدار q را پیدا کنیم. برای این کار باید از شرط تقسیم که $۰\le r<b$ است استفاده کنیم، یعنی:

$$۰\le r<b \Rightarrow ۰\le q^۲-۲<۳۷ \Rightarrow ۲\le q^۲<۳۹$$

$$\Rightarrow ۱/\ldots \le q<۶/\ldots \Rightarrow ۲\le q\le ۶$$

حالا بزرگ‌ترین مقدار q یعنی ۶ را در رابطهٔ $a=۳۷q+q^۲-۲$ قرار می‌دهیم:

$$Max(a)=۳۷(۶)+۳۶-۲ \Rightarrow Max(a)=۲۵۶=۱۶k$$

۱۲۹ | ۳ ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a=۳۵q+\frac{۱}{۲}q^۳ \quad , \quad ۰\le \frac{۱}{۲}q^۳<۳۵$$

حال برای آن‌که ببینیم برای a چند جواب طبیعی وجود دارد، باید ببینیم q چند مقدار طبیعی می‌پذیرد. پس سراغ شرط تقسیم می‌رویم:

$$۰\le \frac{۱}{۲}q^۳<۳۵ \Rightarrow ۰\le q^۳<۷۰ \Rightarrow q=۱,۲,۳,۴$$

از آن‌جایی که باقی‌مانده یعنی $\frac{۱}{۲}q^۳$ باید عددی صحیح باشد، پس q باید عددی زوج باشد، یعنی q فقط می‌تواند ۲ و ۴ را بپذیرد. چون دو مقدار برای q وجود دارد، پس دو جواب برای a وجود دارد. حتماً حواستان بود که a چون یک عدد طبیعی است ما $q=۰$ را کنار گذاشتیم.

۱۳۰ | ۲ ابتدا تقسیم مورد نظر را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a=bq+\frac{۱}{۹}b^۲ \quad , \quad ۰\le \frac{۱}{۹}b^۲<b$$

واضح است که از شرط تقسیم به راحتی می‌توانیم تعداد bها را پیدا کنیم:

$$۰\le \frac{۱}{۹}b^۲<b \xrightarrow{\frac{۱}{۹}b^۲\ge ۰} \frac{۱}{۹}b^۲<b \Rightarrow b^۲-۹b<۰$$

$$\Rightarrow b(b-۹)<۰ \Rightarrow ۰<b<۹$$

اما تمام bهای به دست آمده، باقی‌مانده را عددی صحیح نمی‌کنند. برای آن‌که $\frac{۱}{۹}b^۲$ عددی صحیح شود، باید b مضرب ۳ باشد، پس فقط $b=۳$ و $b=۶$ قابل‌قبول هستند. بنابراین دو جواب طبیعی برای b وجود دارد.

۱۳۱ ۲ ابتدا تقسیم مورد نظر را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$b+۲۰۰=bq+۱۵\,,\ ۱۵<b$$

حال داریم:

$$bq-b=۱۸۵\Rightarrow b(q-۱)=۱\times ۱۸۵=۵\times ۳۷$$

بنابراین برای b و $q-۱$ دو حالت رخ می‌دهد:

$$\begin{cases}b=۱۸۵\\ q-۱=۱\Rightarrow q=۲\end{cases}\qquad \begin{cases}b=۳۷\\ q-۱=۵\Rightarrow q=۶\end{cases}$$

توجه کنید که با توجه به شرط تقسیم $b>۱۵$ است. پس حالتی که $b=۱$ و $b=۵$ باشد قابل‌قبول نیست.

۱۳۲ ۴ ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$۵۴۲=b\times ۱۲+r\quad ,\quad ۰\le r<b$$

حال از تساوی $۵۴۲=۱۲b+r$، مقدار r را در نامساوی $۰\le r<b$ قرار می‌دهیم تا مقادیر ممکن برای b معلوم شود:

$$۰\le r<b\Rightarrow ۰\le ۵۴۲-۱۲b<b\Rightarrow\begin{cases}۱۲b\le ۵۴۲\Rightarrow b\le ۴۵/\cdots\\ ۱۳b>۵۴۲\Rightarrow b>۴۱/\cdots\end{cases}$$

$$\Rightarrow b=۴۲,۴۳,۴۴,۴۵$$

۱۳۳ ۲ ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$۳۱۲=b\times ۱۱+r\quad ,\quad ۰\le r<b$$

حال برای آن‌که کوچک‌ترین مقدار r را به دست آوریم، با توجه به تساوی $r=۳۱۲-۱۱b$، کافی است بزرگ‌ترین مقدار b مشخص شود، پس:

$$۰\le r<b\Rightarrow ۰\le ۳۱۲-۱۱b<b\Rightarrow\begin{cases}۳۱۲\ge ۱۱b\Rightarrow b\le ۲۸/\cdots\\ ۳۱۲<۱۲b\Rightarrow b>۲۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow b=۲۷,۲۸$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار باقی‌مانده برابر است با:

$$r=۳۱۲-۱۱(۲۸)=۴$$

۱۳۴ ۳ ابتدا صورت مسأله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases}a=bq+q\\ a=(b-۳)(q+۵)+۰\end{cases}\Rightarrow \cancel{bq}+q=\cancel{bq}+۵b-۳q-۱۵$$

$$\Rightarrow ۴q=۵b-۱۵\Rightarrow ۴q=\underbrace{۵(b-۳)}_{\text{مضرب ۵ است}}\Rightarrow q=۵k\Rightarrow \text{گزینهٔ (۳)}$$

دقت کنید که $q=۵k$ به این معنی نیست که q می‌تواند ۱۵ و ۲۰ و ... هم باشد، زیرا:

$$۴q=۵(b-۳)\Rightarrow\begin{cases}q=۵k\\ b-۳=۴k\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r<b}۵k<۴k+۳\Rightarrow k<۳\Rightarrow k=۱,۲\Rightarrow q=۵,۱۰$$

۱۳۵ ۲ ابتدا صورت مسأله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases}a=bq+q\\ a=(b-۵)(q+۷)\end{cases}\Rightarrow \cancel{bq}+q=\cancel{bq}+۷b-۵q-۳۵$$

$$\Rightarrow ۶q=۷(b-۵)\Rightarrow\begin{cases}q=۷k\\ b-۵=۶k\end{cases}$$

در تقسیم $a=bq+q$ شرط تقسیم به صورت $q<b$ است، پس:

$$q<b\Rightarrow ۷k<۶k+۵\Rightarrow k<۵\Rightarrow k=۱,۲,۳,۴$$

حال چون بزرگ‌ترین مقدار a را می‌خواهیم، باید بزرگ‌ترین مقدار b و بزرگ‌ترین مقدار q را در یکی از تقسیم‌ها جای‌گذاری کنیم:

$$a=(b-۵)(q+۷)\xrightarrow[b_{Max}=۲۹]{q_{Max}=۲۸}a_{Max}=(۲۹-۵)(۲۸+۷)=۸۴۰$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۸+۴+۰=۱۲$$

۱۳۶ ۱ ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم و داریم:

$$a=bq+۲۵,۲۵<b\xrightarrow{b=a-۱۳۲}b+۱۳۲=bq+۲۵\Rightarrow ۱۰۷=b(q-۱)$$

$$\Rightarrow b(q-۱)=۱\times ۱۰۷\xrightarrow{b>۲۵}b=۱۰۷,q-۱=۱\Rightarrow b=۱۰۷,q=۲$$

بنابراین یک جواب طبیعی برای q وجود دارد.

۱۳۷ ۲ ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$۱۶۵=br^۲+r,۰\le r<b\Rightarrow ۱۶۵=r(br+۱),\ ۰\le r<b$$

با توجه به این‌که $۱۶۵=۳\times ۵\times ۱۱$ می‌باشد، داریم:

$$r(br+۱)=۱\times ۱۶۵=۳\times ۵۵=۵\times ۳۳=۱۱\times ۱۵$$

از آن‌جایی که $r\ge ۰$ و $r<b$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $r<br+۱$ می‌باشد.

لذا فقط حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد. تک‌تک حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

$r=۱,\ br+۱=۱۶۵\Rightarrow b+۱=۱۶۵\Rightarrow b=۱۶۴$ ✓

$r=۳,\ br+۱=۵۵\Rightarrow ۳b+۱=۵۵\Rightarrow b=۱۸$ ✓

$r=۵,\ br+۱=۳۳\Rightarrow ۵b+۱=۳۳$ ✗

$r=۱۱,\ br+۱=۱۵\Rightarrow ۱۱b+۱=۱۵$ ✗

بنابراین دو عدد برای b پیدا می‌شود که $b=۱۶۴$ و $b=۱۸$ می‌باشند.

۱۳۸ ۳ ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

همواره برقرار است.

$$۱۰۵=bq+q^۲,\ ۰\le q^۲<b\Rightarrow ۱۰۵=q(b+q)\ ,\ q^۲<b$$

از آن‌جایی که $۱۰۵=۳\times ۵\times ۷$ است، پس حالات زیر داریم:

$$q(b+q)=۱\times ۱۰۵=۳\times ۳۵=۵\times ۲۱=۷\times ۱۵$$

حال تک‌تک حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

$q=۱\,,\ b+q=۱۰۵\Rightarrow b+۱=۱۰۵\Rightarrow b=۱۰۴$ ✓

$q=۳\,,\ b+q=۳۵\Rightarrow b+۳=۳۵\Rightarrow b=۳۲$ ✓

$q=۵,\ b+q=۲۱\Rightarrow b+۵=۲۱\Rightarrow b=۱۶$ ✗ $(q^۲\not< b)$

واضح است که هرچه q بزرگ‌تر شود، $b+q$ و در نتیجه b کوچک‌تر می‌شود و دیگر شرط $q^۲<b$ برقرار نیست. پس دو مقدار برای عدد طبیعی b یافت می‌شود.

۱۳۹ ۴ ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$۱۰۲=b(۳r)+r,\ ۰\le r<b\Rightarrow ۱۰۲=r(۳b+۱),۰\le r<b$$

از آن‌جایی که $۱۰۲=۲\times ۳\times ۱۷$ است، پس حالات زیر را داریم:

$r=۱\ ,\ ۳b+۱=۱۰۲\Rightarrow b=\frac{۱۰۱}{۳}$ ✗

$r=۲\ ,\ ۳b+۱=۵۱\Rightarrow b=\frac{۵۰}{۳}$ ✗

$r=۳\ ,\ ۳b+۱=۳۴\Rightarrow b=۱۱$ ✓

$r=۶\ ,\ ۳b+۱=۱۷\Rightarrow b=\frac{۱۶}{۳}$ ✗

بنابراین فقط یک جواب برای b یافت می‌شود.

۱۴۰ | ۲ ابتدا تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a=br+r\ ,\ 0\le r<b$$

از طرفی مجموع عوامل تقسیم برابر ۵۳ است. پس:

$$a+b+r+r=53 \xRightarrow{a=br+r} br+r+b+r+r=53 \Rightarrow br+3r+b=53$$

$$\Rightarrow r(b+3)+b=53 \xRightarrow{+3} r(b+3)+b+3=53+3$$

$$\Rightarrow (b+3)(r+1)=56$$

چون $r<b$ است، پس $r+1<b+3$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$(b+3)(r+1)=1\times56=2\times28=4\times14=7\times8$$

$r+1=1,\ b+3=56 \Rightarrow r=0,\ b=53$ ✓

$r+1=2,\ b+3=28 \Rightarrow r=1,\ b=25$ ✓

$r+1=4,\ b+3=14 \Rightarrow r=3,\ b=11$ ✓

$r+1=7,\ b+3=8 \Rightarrow r=6,\ b=5$ ✗

۱۴۱ | ۴ در هر تقسیم خارج‌قسمت برابر باقی‌مانده است، پس:

$$\begin{cases} a=23q+q\ ,\ 0\le q<23 \\ a=29q'+q'\ ,\ 0\le q'<29 \end{cases} \Rightarrow 24q=30q'$$

$$\Rightarrow \frac{q}{q'}=\frac{30}{24}=\frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} q=5k \\ q'=4k \end{cases}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} q<23 \Rightarrow 5k<23 \Rightarrow k_{Max}=4 \\ q'<29 \Rightarrow 4k<29 \Rightarrow k_{Max}=7 \end{cases} \Rightarrow k_{Max}=4$$

$$\Rightarrow a_{Max}=24q_{Max}=24(5\times4)=480$$

بنابراین رقم یکان برابر صفر است.

۱۴۲ | ۲ تقسیم مورد نظر به صورت $a=17b+53$ است که در آن $53<b$ می‌باشد. حال فرض می‌کنیم حداکثر x واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد.

بنابراین داریم: $a=17b+53 \Rightarrow a=17(b+x)+53-17x$

در تقسیم جدید، باقی‌مانده برابر $53-17x$ است و باید در شرط تقسیم صدق کند. پس:

$$0\le 53-17x<b+x \Rightarrow 53-17x\ge0 \Rightarrow x\le 3/\cdots \Rightarrow x_{Max}=3$$

۱۴۳ | ۳ تقسیم مورد نظر به صورت $a=35q+18$ است. حال فرض می‌کنیم حداکثر x واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج‌قسمت ۲ واحد افزایش یابد. پس: $a+x=35(q+2)+18+x-70$

در تقسیم جدید، باقی‌مانده $18+x-70$ است، پس باید در شرط تقسیم صدق کند. یعنی داریم:

$$0\le 18+x-70<35 \Rightarrow 52\le x<87 \Rightarrow x_{Max}=86$$

دقت کنید اگر سؤال می‌پرسید که حداقل چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد، آن‌گاه جواب ۵۲ می‌شد.

۱۴۴ | ۴ **روش اول:** تقسیم مورد نظر به صورت $a=37q+13$ می‌باشد.

حال اگر ۳۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، داریم:

$$a+30=37q+13+30 \Rightarrow a+30=37q+\underbrace{43}_{37+6}$$

$$\Rightarrow a+30=37(q+1)+6$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به خارج‌قسمت ۱ واحد اضافه شده و از باقی‌مانده ۷ واحد کم می‌شود.

روش دوم: در تقسیم $a=37q+13$، به q مقدار صفر می‌دهیم، پس a می‌شود ۱۳. یعنی در تقسیم ۱۳ بر ۳۷ خارج‌قسمت صفر و باقی‌مانده برابر ۱۳ است. حال ۳۰ واحد به ۱۳ اضافه می‌کنیم و خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴۳ بر ۳۷ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} 43 & 37 \\ \cline{2-2} -37 & 1 \\ \hline 6 & \end{array} \Rightarrow q=1\ ,\ r=6$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به خارج‌قسمت یک واحد اضافه شده و از باقی‌مانده ۷ واحد کم می‌شود.

۱۴۵ | ۴ تقسیم مورد نظر به صورت $a=17b+40$ است که در آن $40<b$ می‌باشد. حال فرض می‌کنیم حداقل x واحد باید به مقسوم اضافه کنیم. پس داریم:

$$a+x=(b+7)\times17+40-7\times17+x$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم جدید، $40-7\times17+x$ می‌باشد، پس باید در شرط تقسیم صدق کند:

$$0\le 40-7\times17+x<b+7 \Rightarrow 0\le x-79<b+7 \Rightarrow x\ge79$$

$$\Rightarrow x_{min}=79$$

۱۴۶ | ۳ در تقسیم $a=bq+r$ گفته شده $a=15k$ و $b=21k'$ می‌باشند، پس:

$$15k=21k'q+r \Rightarrow r=15k-21k'q \Rightarrow r=3(\underbrace{5k-7k'q}_{q'})$$

$$\Rightarrow r=3q'$$

در بین گزینه‌ها فقط ۲۷ مضرب ۳ است.

نتیجه اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۴۷ | ۳ **روش اول:** چون در این تقسیم صحبت از خارج‌قسمت نشده، پس بهتر است از همنهشتی استفاده کنیم اما به کمک قضیهٔ تقسیم، روش حل این‌گونه است. تقسیم داده‌شده به صورت $a=17q+9$ می‌باشد. فرض می‌کنیم حداقل x واحد باید به مقسوم اضافه کرد تا باقی‌مانده برابر ۳ شود، پس:

$$a=17q+9 \Rightarrow a+x=17q+9+x$$

حال $9+x$ باید برابر ۳ شود. x که منفی نیست، پس $9+x$ باید آن‌قدر زیاد شود که بتوانیم ۱۷ از آن خارج کنیم و به خارج‌قسمت بدهیم، یعنی:

$$a+x=17q+\underbrace{9+x}_{17+3} \Rightarrow a+x=17(q+1)+3$$

بنابراین $9+x=20$ است، پس $x=11$ می‌باشد.

روش دوم: این روش را بعد از فراگیری همنهشتی بررسی کنید:

$$a\overset{17}{\equiv}9 \Rightarrow a+x\overset{17}{\equiv}\underbrace{9+x}_{3} \Rightarrow 9+x_{min}=17+3 \Rightarrow x_{min}=11$$

۱۴۸ | ۲ **روش اول:** تقسیم داده‌شده به صورت $a=37q+13$ است. حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $3a+1$ را بر ۳۷ می‌خواهیم. پس:

$$a=37q+13 \Rightarrow 3a=37(3q)+39 \Rightarrow 3a+1=37(3q)+40$$

اما ۴۰ نمی‌تواند باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۳۷ باشد، پس:

$$3a+1=37(3q)+37+3 \Rightarrow 3a+1=37(\underbrace{3q+1}_{q'})+3$$

$$\Rightarrow 3a+1=37q'+3$$

نتیجه در یک تقسیم هر اتفاقی که برای مقسوم بیفتد، برای باقی‌مانده هم می‌افتد. مثلاً اگر مقسوم را ۳ برابر کنیم، باقی‌مانده هم ۳ برابر می‌شود یا اگر مقسوم را به توان ۲ برسانیم، باقی‌مانده هم به توان ۲ می‌رسد. فقط در آخر باید باقی‌مانده را طوری تعیین کنیم که در شرط تقسیم صدق کند.

روش دوم: تقسیم داده‌شده به صورت $a=۳۷q+۱۳$ است. اگر به q مقدار صفر بدهیم، یکی از aها که ۱۳ است به دست می‌آید، پس:

$$a=۱۳\Rightarrow ۳a+۱=۴۰\Rightarrow \begin{array}{r|l} ۴۰ & ۳۷ \\ \cline{2-2} -۳۷ & ۱ \\ \hline ۳ & \end{array} \quad \Rightarrow r=۳$$

روش سوم: چون در تقسیم، صحبت از خارج‌قسمت نشده است به کمک همنهشتی مسأله را حل می‌کنیم:

$$a\overset{۳۷}{\equiv}۱۳\xrightarrow{\times ۳}۳a\overset{۳۷}{\equiv}۳۹\overset{۳۷}{\equiv}۲\Rightarrow ۳a+۱\overset{۳۷}{\equiv}۲+۱\Rightarrow ۳a+۱\overset{۳۷}{\equiv}۳$$

۱۴۹ **۴** **روش اول:** تقسیم مورد نظر $a=۲۷q+۱۵$ است. چون a زوج و ۱۵ عددی فرد است، پس $۲۷q$ باید فرد باشد (می‌دانیم «فرد + فرد = زوج»). چون $۲۷q$ فرد است، پس q نیز فرد می‌باشد. بنابراین داریم:

$$a=۲۷q+۱۵\Rightarrow a=۲۷(۲k+۱)+۱۵\Rightarrow a=۵۴k+۴۲$$

$$\xrightarrow{\div ۲}\frac{a}{۲}=۲۷k+۲۱$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{a}{۲}$ بر ۲۷، برابر ۲۱ است.

روش دوم: کافی است در تقسیم $a=۲۷q+۱۵$، به q عددی بدهیم که a زوج شود، مثلاً $q=۱$. حال داریم:

$$a=۲۷q+۱۵\xrightarrow{q=۱}a=۴۲\Rightarrow\frac{a}{۲}=۲۱\Rightarrow \begin{array}{r|l} ۲۱ & ۲۷ \\ \cline{2-2} -۰ & ۰ \\ \hline ۲۱ & \end{array}$$

روش سوم: چون صحبت از خارج‌قسمت نشده است به کمک همنهشتی مسأله را حل می‌کنیم:

$$a\overset{۲۷}{\equiv}۱۵\overset{۱\times ۲۷}{\Rightarrow}a\overset{۲۷}{\equiv}۴۲\xrightarrow[(۲,۲۷)=۱]{\div ۲}\frac{a}{۲}\overset{۲۷}{\equiv}۲۱$$

۱۵۰ **۳** **روش اول:** تقسیم را به زبان ریاضی می‌نویسیم و داریم:

$$a=۱۷q+۴\Rightarrow a^۳=۱۷q'+\underset{۵۱+۱۳}{۶۴}\Rightarrow a^۳=۱۷(q'+۳)+۱۳$$

$$\Rightarrow a^۳=۱۷q''+۱۳$$

روش دوم: به کمک همنهشتی داریم:

$$a\overset{۱۷}{\equiv}۴\Rightarrow a^۳\overset{۱۷}{\equiv}۶۴\overset{۱۷}{\equiv}۱۳ \quad (-۳\times ۱۷)$$

۱۵۱ **۴** تقسیم‌ها را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a=۱۳q+۷\Rightarrow ۲a=۱۳(۲q)+۱۴\Rightarrow ۲a=۱۳k+۱۴ \\ b=۱۳q'+۱۰\Rightarrow ۳b=۱۳(۳q')+۳۰\Rightarrow ۳b=۱۳k'+۳۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲a+۳b=۱۳(\underbrace{k+k'}_{k''})+\underset{۳\times ۱۳+۵}{۴۴}$$

بنابراین داریم:

$$۲a+۳b=۱۳(\underbrace{k''+۳}_{t})+۵\Rightarrow ۲a+۳b=۱۳t+۵$$

روش دوم: می‌توانیم از راه عددگذاری مسأله را حل کنیم:

$$\begin{cases} a=۱۳q+۷\xrightarrow{q=۰}a=۷ \\ b=۱۳q'+۱۰\xrightarrow{q'=۰}b=۱۰ \end{cases}\Rightarrow ۲a+۳b=۱۴+۳۰=۴۴$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} ۴۴ & ۱۳ \\ \cline{2-2} -۳۹ & ۳ \\ \hline ۵ & \end{array}$$

روش سوم: به کمک رابطهٔ همنهشتی داریم:

$$\begin{cases} a\overset{۱۳}{\equiv}۷\Rightarrow ۲a\overset{۱۳}{\equiv}۱۴\overset{۱۳}{\equiv}۱ \\ b\overset{۱۳}{\equiv}۱۰\Rightarrow ۳b\overset{۱۳}{\equiv}۳۰\overset{۱۳}{\equiv}۴ \end{cases}\Rightarrow ۲a+۳b\overset{۱۳}{\equiv}۱+۴\Rightarrow ۲a+۳b\overset{۱۳}{\equiv}۵$$

۱۵۲ **۳** **روش اول:** فرض می‌کنیم $a=۷q+۳$ و $a=۸q'+۵$ باشد.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a=۷q+۳\xrightarrow{\times ۸}۸a=۵۶q+۲۴ \\ a=۸q'+۵\xrightarrow{\times ۷}۷a=۵۶q'+۳۵ \end{cases}\xrightarrow{-}a=۵۶(q-q')-۱۱$$

واضح است که باقی‌ماندهٔ تقسیم نمی‌تواند عددی منفی باشد. پس:

$$a=۵۶(q-q')-۱۱+۵۶-۵۶\Rightarrow a=۵۶(\underbrace{q-q'-۱}_{q''})+۴۵$$

$$\Rightarrow a=۵۶q''+۴۵$$

روش دوم: چون باقی‌مانده در گزینه‌ها داده‌شده، می‌توان از گزینه‌ها استفاده کرد. در گزینه‌ها عددی مورد قبول است که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۷ و ۸ به ترتیب ۳ و ۵ باشد. در گزینه‌ها فقط ۴۵ این شرایط را دارد.

روش سوم: چون در تقسیم، صحبت از خارج‌قسمت نشده، پس داریم:

$$\begin{cases} a\overset{۷}{\equiv}۳\equiv ۴۵ \quad (۶\times ۷) \\ a\overset{۸}{\equiv}۵\equiv ۴۵ \quad (۵\times ۸) \end{cases}\Rightarrow a\overset{[۷,۸]}{\equiv}۴۵\Rightarrow a\overset{۵۶}{\equiv}۴۵$$

۱۵۳ **۱** **روش‌اول:** فرض می‌کنیم $a=۹q+۵$ و $a=۷q'+۶$ باشد، پس:

$$\begin{cases} a=۹q+۵\xrightarrow{\times ۷}۷a=۶۳q+۳۵ \\ a=۷q'+۶\xrightarrow{\times ۹}۹a=۶۳q'+۵۴ \end{cases}\xrightarrow{-}۲a=۶۳(q'-q)+۱۹$$

حال برای آن‌که بتوانیم طرفین را بر ۲ تقسیم کنیم، داریم:

$$۲a=۶۳(q'-q)+۱۹+۶۳-۶۳\Rightarrow \underset{\text{زوج}}{۲a}=۶۳(\underbrace{q'-q-۱}_{q''})+\underset{\text{زوج}}{۸۲}$$

$\Rightarrow$ q'' حتما زوج است.

بنابراین می‌توان گفت $q''=۲k$ است، پس:

$$۲a=۶۳(۲k)+۸۲\xrightarrow{\div ۲}a=۶۳k+۴۱\Rightarrow$$ ۴۱ عددی اول است.

روش دوم: چون در تقسیم، صحبت از خارج قسمت نشده پس به کمک همنهشتی مسأله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a\overset{۹}{\equiv}۵\equiv ۴۱ \quad (۴\times ۹) \\ a\overset{۷}{\equiv}۶\equiv ۴۱ \quad (۵\times ۷) \end{cases}\Rightarrow a\overset{[۹,۷]}{\equiv}۴۱\Rightarrow a\overset{۶۳}{\equiv}۴۱\Rightarrow$$ ۴۱ عددی اول است.

۱۵۴ **۲** **روش اول:** فرض می‌کنیم $a=9q+5$ و $a=13q'+7$ باشد. از آن‌جایی که باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۳۹ را می‌خواهیم، شاید وسوسه شوید که $a=9q+5$ را به صورت $a=3(3q+1)+2$ بنویسید. اما اگر این کار را کنید، مجبورید آن را در ۱۳ و $a=13q'+7$ را در ۳ ضرب کرده و سپس از هم کم کنید که $10a$ حاصل می‌شود. شاید پیدا کردن عددی که بتوان آن را بر ۱۰ تقسیم کرد وقت‌گیر باشد. پس فعلاً با $a=9q+5$ و $a=13q'+7$ کار کرده و در آخر ۳۹ را در تقسیم ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{cases} a=9q+5 \Rightarrow 13a=13\times 9q+65 \\ a=13q'+7 \Rightarrow 9a=9\times 13q'+63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a=13\times 9\underbrace{(q-q')}_{k}+2 \Rightarrow 4a=39(3k)+2 \Rightarrow 4a=39k'+2$$

حال باید کاری کنیم تا بر ۴ تقسیم‌پذیر شوند:

$$4a=39k'+2+2\times 39-2\times 39 \Rightarrow 4a=39\underbrace{(k'-2)}_{k''}+80$$

$$\Rightarrow a=39t+20$$

روش دوم: می‌دانیم $39=3\times 13$ است و از طرفی عددی که باقی‌مانده‌اش بر ۹ برابر ۵ است، باقی‌ماندهٔ تقسیمش بر ۳ برابر ۲ می‌باشد، زیرا:

$$a=9q+\underset{\downarrow\atop 3+2}{5} \Rightarrow a=3(3q+1)+2$$

حال در گزینه‌ها عددی قبول است که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۳ برابر ۷ و بر ۳ برابر ۲ باشد. در گزینه‌ها فقط ۲۰ این‌چنین است.

روش سوم: به کمک همنهشتی داریم:

$$\begin{cases} a\overset{9}{\equiv}5 \Rightarrow a\overset{3}{\equiv}\underbrace{5\overset{3}{\equiv}20}_{5\times 3} \\ a\overset{13}{\equiv}7 \Rightarrow a\overset{13}{\equiv}\underbrace{7\overset{13}{\equiv}20}_{1\times 13} \end{cases} \Rightarrow a\overset{[3,13]}{=\!=\!=}20 \Rightarrow a\overset{39}{\equiv}20$$

۱۵۵ **۳** کافی است n را به فرم‌های $7k$، $7k+1$، $7k+2$، $7k+3$، $7k+4$، $7k+5$ و $7k+6$ در نظر بگیریم و نشان دهیم n^2 به یکی از فرم‌های $7k'$، $7k'+1$، $7k'+2$ و $7k'+4$ است. بنابراین n باید در ۷ حالت مختلف بررسی شود.

۱۵۶ **۳** **روش اول:** تقسیم مورد نظر به صورت $a=4q+3$ است. حال باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۸ را می‌خواهیم:

$$a=4q+3 \Rightarrow a^2=(4q+3)^2=16q^2+24q+\overset{8+1\atop\uparrow}{9}$$

$$\Rightarrow a^2=8\underbrace{(2q^2+3q+1)}_{q'}+1$$

روش دوم: کافی است فرض کنیم $a=3$ است. پس $a^2=9$ می‌باشد و داریم:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 8 \\ \hline -8 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

۱۵۷ **۳** تقسیم مورد نظر به صورت $a=7q+5$ است. حال باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۸ را می‌خواهیم. می‌دانیم q یکی از حالات $4k$، $4k+1$، $4k+2$ و $4k+3$ است، پس:

$$a=7q+5 \xRightarrow{q=4k} a=28k+5$$

$$a=7q+5 \xRightarrow{q=4k+1} a=28k+12$$

$$a=7q+5 \xRightarrow{q=4k+2} a=28k+19$$

$$a=7q+5 \xRightarrow{q=4k+3} a=28k+26$$

البته می‌توانستیم از روش عددگذاری هم این تست را حل کنیم.

۱۵۸ **۳** با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها داریم:

$$n=7k \Rightarrow n^3=7k'$$

$$n=7k+1 \Rightarrow n^3=7k'+1$$

$$n=7k+2 \Rightarrow n^3=7k'+8 \Rightarrow n^3=7k''+1$$

$$n=7k+3 \Rightarrow n^3=7k'+27 \Rightarrow n^3=7k''+6$$

$$n=7k+4 \Rightarrow n^3=7k'+64 \Rightarrow n^3=7k''+1$$

$$n=7k+5 \Rightarrow n^3=7k'+125 \Rightarrow n^3=7k''+6$$

$$n=7k+6 \Rightarrow n^3=7k'+216 \Rightarrow n^3=7k''+6$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به ازای هیچ مقدار n، $n^3=7k+4$ نمی‌شود، پس این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد. دقت کنید این سؤال را به راحتی می‌توانید در قسمت همنهشتی حل کنید.

۱۵۹ **۳**

> **نیم‌نگاه**
>
> اگر a یک عدد فرد باشد، داریم:
>
> $a^2=8k+1$ و $a^4=16k+1$

چون a عددی فرد است، پس مربع آن به فرم $8k+1$ و توان چهارم آن به فرم $16k'+1$ است. در نتیجه:

$$a^4+4a^2+27=(16k'+1)+4(8k+1)+27$$

$$=16k'+32k+32=16(k'+2k+2)$$

۱۶۰ **۴** با توجه به این‌که در گزینه‌ها مجموع مربعات را به فرم $4k+\bigcirc$ داده‌ایم، ابتدا باید ببینیم مربع یک عدد طبیعی وقتی تقسیم بر ۴ می‌شود چه باقی‌مانده‌هایی دارد:

$$a=4k \Rightarrow a^2=4k'$$

$$a=4k\pm 1 \Rightarrow a^2=4k'+1$$

$$a=4k+2 \Rightarrow a^2=4k'$$

بنابراین مربع هر عدد طبیعی یا به فرم $4k$ است یا به فرم $4k+1$. بنابراین داریم:

$$a^2+b^2=4k+4k'=4q$$

$$a^2+b^2=4k+1+4k'=4q+1$$

$$a^2+b^2=4k+1+4k'+1=4q+2$$

پس مجموع مربعات دو عدد طبیعی به صورت $4k+3$ نمی‌تواند باشد.

۱۶۱ | ۲ ابتدا مربع هر عدد به فرم $۵k+۴$ را به دست می‌آوریم:

$$a=۵k+۴ \Rightarrow a^۲=۵k'+۱۶ \Rightarrow a^۲=۵k''+۱$$

پس مجموع مربعات آن‌ها برابر است با:

$$a^۲+b^۲=۵k+۱+۵k'+۱=۵q+۲$$

۱۶۲ | ۳ **روش اول:** چون $(a,۱۲)=۱$ است، پس a مضرب ۲ و ۳ نیست.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a=۲k+۱ \Rightarrow a^۲=۸k'+۱ \Rightarrow a^۲-۱=۸k' \\ a=۳k\pm۱ \Rightarrow a^۲=۳k''+۱ \Rightarrow a^۲-۱=۳k'' \end{cases} \Rightarrow a^۲-۱=۲۴q$$

روش دوم:

> **نیم‌نگاه**
> **بزرگ‌ترین شمارندهٔ یک عبارت:** برای به دست آوردن بزرگ‌ترین عددی که یک عبارت پارامتری همواره بر آن بخش‌پذیر است، به پارامتر، دو عدد مختلف می‌دهیم. ابتدا کوچک‌ترین عدد قابل پذیرش و سپس عدد قابل پذیرش بعدی و ب.م.م بین آن‌ها را حساب می‌کنیم.

$$(a,۱۲)=۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۵ \Rightarrow ۵^۲-۱=۲۴ \\ a=۷ \Rightarrow ۷^۲-۱=۴۸ \end{cases} \Rightarrow (۲۴,۴۸)=۲۴$$

۱۶۳ | ۳ **روش اول:** چون a عددی زوج است، پس $a=۲k$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$a=۲k \Rightarrow a(a^۲-۴)=۲k(۴k^۲-۴)=۸k(k^۲-۱)$$

$$=۸\underbrace{k(k-۱)(k+۱)}_{\text{ضرب سه عدد متوالی مضرب !۳ است}}=۸\times۳!q=۴۸q$$

روش دوم: یک‌بار به a مقدار ۴ و بار دیگر مقدار ۶ می‌دهیم و داریم:

$$\begin{cases} a=۴ \Rightarrow a(a^۲-۴)=۴۸ \\ a=۶ \Rightarrow a(a^۲-۴)=۱۹۲ \end{cases} \Rightarrow (۴۸,۱۹۲)=۴۸$$

۱۶۴ | ۳ **روش اول:** چون p یک عدد اول دورقمی است، پس مطمئناً ۲ و ۳ نیست و همچنین مضرب ۲ و مضرب ۳ نیز نمی‌باشد، پس:

$$\begin{cases} p=۲k+۱ \Rightarrow p^۲=۸k+۱ \Rightarrow p^۲-۱=۸k \\ p=۳k'\pm۱ \Rightarrow p^۲=۳k'+۱ \Rightarrow p^۲-۱=۳k' \end{cases} \xRightarrow{(۳,۸)=۱} p^۲-۱=۲۴q$$

واضح است که چون مضرب ۲۴ می‌باشد، پس می‌تواند مضرب ۱۲ و ۸ نیز باشد، اما مضرب ۱۶ نیست.

نتیجه اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، داریم:

$$p>۳ \Rightarrow p^۲=۲۴k+۱$$

اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۵ باشد، داریم:

$$p>۵ \Rightarrow p^۴=۲۴۰k+۱$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $p=۱۱$ باشد، پس $p^۲-۱=۱۲۰$ می‌شود که مضرب ۸، ۱۲ و ۲۴ است ولی مضرب ۱۶ نیست.

۱۶۵ | ۳ چون p و q اعداد اول بزرگ‌تر از ۵ هستند، پس $p^۴=۲۴۰k+۱$ و $q^۲=۲۴k'+۱$ است. بنابراین داریم:

$$p^۴+۵q^۲-۶=(۲۴۰k+۱)+۵(۲۴k'+۱)-۶$$

$$=۲۴۰k+۱۲۰k'=۱۲۰(۲k+k')=۱۲۰q$$

۱۶۶ | ۴ کوچک‌ترین اعداد قابل پذیرش برای a و b، اعداد ۲ و ۶ هستند و اعداد قابل‌پذیرش بعدی اعداد ۲ و ۱۰ می‌باشند:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} a=۶ \\ b=۲ \end{cases} \Rightarrow a^۲-b^۲=۳۲ \\ \begin{cases} a=۱۰ \\ b=۲ \end{cases} \Rightarrow a^۲-b^۲=۹۶ \end{array}\right\} \Rightarrow (۳۲,۹۶)=۳۲$$

۱۶۷ | ۱ چون $(a,۹۰)=۱$ است، پس a نه مضرب ۲ است، نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵، بنابراین اولین عدد قابل پذیرش که عبارت را صفر نکند عدد ۷ و عدد بعدی ۱۱ می‌باشد:

$$\begin{cases} a=۷ \Rightarrow a^۴-۱=۷^۴-۱=(۴۹-۱)(۴۹+۱)=۲^۵\times۳\times۵^۲ \\ a=۱۱ \Rightarrow a^۴-۱=۱۱^۴-۱=(۱۲۱-۱)(۱۲۱+۱)=۲^۴\times۳\times۵\times۶۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow d=۲^۴\times۳\times۵=۲۴۰$$

۱۶۸ | ۴ کوچک‌ترین عدد قابل پذیرش برای عبارت، $n=۲$ و عدد قابل پذیرش بعدی $n=۳$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} n=۲ \Rightarrow n^۲(n^۲-۱)=۱۲ \\ n=۳ \Rightarrow n^۲(n^۲-۱)=۷۲ \end{cases} \Rightarrow (۱۲,۷۲)=۱۲$$

۱۶۹ | ۴ عدد ۶۳۹۶۲ به رقم ۲ ختم شده است، پس مربع کامل نیست. عدد ۵۳۴۷۵ رقم یکانش ۵ است ولی چون رقم دهگانش ۲ نیست، پس مربع کامل نمی‌باشد. عدد ۸۳۶۹۳ نیز به ۳ ختم شده است، پس مربع کامل نیست.

۱۷۰ | ۲ باید بررسی کنیم تفاضل کدام دو عدد بر ۱۷ بخش‌پذیر است. بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $۳۲۱-۲=۳۱۹ \Rightarrow ۳۱۹\neq۱۷k$ ✗

۲) $۱۶۳-(-۱۲۶)=۲۸۹ \Rightarrow ۲۸۹=۱۷k$ ✓

۳) $۲۲۰-۸۷=۱۳۳ \Rightarrow ۱۳۳\neq۱۷k$ ✗

۴) $۷۸-۱۷=۷۷ \Rightarrow ۷۷\neq۱۷k$ ✗

البته می‌توانستیم این‌گونه هم بررسی کنیم که کدام دو عدد در تقسیم بر ۱۷ باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند. که البته شاید کمی وقت‌گیر بود.

۱۷۱ | ۳

> **نیم‌نگاه**
> اگر در یک همنهشتی، پیمانه مجهول بود، باید به کمک تعریف همنهشتی، آن را به بخش‌پذیری تبدیل کرد تا پیمانه معلوم شود.
> $$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m\mid a-b$$

رابطهٔ همنهشتی را به یک رابطهٔ بخش‌پذیری تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$۷۳\overset{m}{\equiv}۱۶۴ \Rightarrow m\mid ۱۶۴-۷۳ \Rightarrow m\mid \underset{۷\times۱۳}{۹۱} \xRightarrow{\text{m دورقمی}} m=۱۳ \text{ یا } ۹۱$$

۱۷۲ | ۴ باید رابطهٔ $a+۲\mid(۲۹-a)-(a+۵)$ برقرار باشد، پس:

$$a+۲\mid -۲a+۲۴ \Rightarrow a+۲\mid -۲(-۲)+۲۴$$

$$\Rightarrow a+۲\mid ۲۸ \Rightarrow a+۲=۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۷ \text{ یا } ۱۴ \text{ یا } ۲۸$$

دقت کنید $a+۲$ (پیمانهٔ همنهشتی) باید عددی طبیعی باشد. بنابراین a می‌تواند ۶ مقدار صحیح بپذیرد.

۱۷۳ | ۲ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم عددهای ۶۸ و ۱۴۵ بر m مساوی هستند، پس ۶۸ و ۱۴۵ به پیمانهٔ m همنهشت هستند. لذا داریم:

$$۶۸\overset{m}{\equiv}۱۴۵ \Rightarrow m\mid ۱۴۵-۶۸ \Rightarrow m\mid ۷۷ \xRightarrow{\text{m دورقمی}} m=۱۱ \text{ یا } ۷۷$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۶۰ بر m خواسته شده، احتمالاً اگر m را ۱۱ یا ۷۷ در نظر بگیریم، باقی‌ماندهٔ یکسانی به ما می‌دهند. نگاه کنید:

$$\begin{array}{r|l} 160 & 77 \\ \hline -154 & 2 \\ \hline 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 160 & 11 \\ \hline -154 & 14 \\ \hline 6 & \end{array}$$

همان‌طور که ملاحظه کردید باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۶۰ بر m، برابر ۶ است.

۱۷۴ | ۱ ابتدا تقسیم را به صورت $A \overset{37}{\equiv} 23$ می‌نویسیم. می‌دانیم هر اتفاقی که برای A می‌افتد برای ۲۳ نیز می‌افتد. بنابراین داریم:

$$A \overset{37}{\equiv} 23 \Rightarrow 2A - 3 \overset{37}{\equiv} \underbrace{2 \times 23 - 3}_{43} \overset{37}{\equiv} 6 \quad (-1\times37)$$

۱۷۵ | ۱ به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی داریم:

$$a \overset{13}{\equiv} 12 \overset{13}{\equiv} -1 \Rightarrow a^3 - 2a + 1 \overset{13}{\equiv} (-1)^3 - 2(-1) + 1 \overset{13}{\equiv} 2 \quad (-1\times13)$$

۱۷۶ | ۱ تقسیم‌ها را به زبان ریاضی می‌نویسیم و سپس به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a \overset{8}{\equiv} 3 \\ b \overset{8}{\equiv} 3 \end{array}\right. \Rightarrow a + b \overset{8}{\equiv} 3 + 3 \Rightarrow a + b \overset{8}{\equiv} 6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c \overset{8}{\equiv} 4 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (a+b) \times c \overset{8}{\equiv} 6 \times 4 \Rightarrow ac + bc \overset{8}{\equiv} 0$$

۱۷۷ | ۱ می‌دانیم $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ می‌باشد. پس:

$$\begin{cases} a - b \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow (a-b)^2 \overset{5}{\equiv} 4 \\ ab \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow 2ab \overset{5}{\equiv} 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + 2ab \overset{5}{\equiv} 4 + 6 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \overset{5}{\equiv} 0$$

۱۷۸ | ۴

> **نیم‌نگاه**
> در تمام مسائل هم‌نهشتی سعی ما این است که اعداد را در پیمانه کوچک کنیم. کافی است مضارب پیمانه را از آن عدد برداریم. مثلاً عدد ۱۷ به پیمانهٔ ۲۰ را بهتر است ۳- در نظر بگیریم یا عدد ۲۷ به پیمانهٔ ۲۳ را به ۴ تبدیل کنیم.
> چند مثال ببینید:
> $$18 \overset{21}{\equiv} -3 \ (-1\times21), \quad 18 \overset{11}{\equiv} 7 \ (-1\times11), \quad 27 \overset{12}{\equiv} 3 \ (-2\times12), \quad 17 \overset{19}{\equiv} -2 \ (-1\times19)$$

می‌دانیم $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ است. بنابراین داریم:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \overset{13}{\equiv} (\underbrace{8 \times 5}_{40}) \times (\underbrace{6 \times 2}_{12}) \times (\underbrace{4 \times 3}_{12}) \times 7$$

$$\overset{13}{\equiv} 1 \times (-1) \times (-1) \times 7 \overset{13}{\equiv} 7$$

دقت کنید در محاسبات فوق، اعدادی را که کنار هم نوشته‌ایم به پیمانهٔ ۱۳ کوچک کرده‌ایم. سعی ما بر این است که اعداد را طوری انتخاب کنیم که وقتی به پیمانهٔ ۱۳ کوچک می‌شوند، اعداد کوچک‌تری شوند، ترجیحاً ۱ یا ۱-. شما می‌توانید انتخاب‌های متفاوتی داشته باشید. مثلاً یک نمونهٔ دیگر را ببینید:

$$(\underbrace{8 \times 4 \times 2}_{64}) \times (\underbrace{6 \times 5 \times 3}_{90}) \times 7 \overset{13}{\equiv} (-1) \times (-1) \times 7 \overset{13}{\equiv} 7$$

۱۷۹ | ۲ ابتدا !۱۰ را باز کرده و اعداد را طوری انتخاب می‌کنیم که به پیمانهٔ ۱۱ کوچک شوند. مثلاً یکی از انتخاب‌ها به صورت زیر است:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \overset{11}{\equiv} 10 \times 9 \times (8 \times 7) \times (6 \times 5) \times (4 \times 3) \times 2$$

$$\overset{11}{\equiv} (-1) \times (-2) \times 1 \times (-3) \times 1 \times 2 \overset{11}{\equiv} -12 \overset{11}{\equiv} 10 \quad (+2\times11)$$

نتیجه اگر p عددی اول باشد، همواره داریم:

$$(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

۱۸۰ | ۳

> **نیم‌نگاه**
> باقی‌ماندهٔ تقسیم $n!$ بر عدد اول p در صورتی‌که $n \geq p$ باشد، برابر صفر است.

واضح است که باقی‌ماندهٔ تقسیم !۲۳ و !۲۴ بر ۱۷، برابر صفر است. از طرفی می‌دانیم $16! \overset{17}{\equiv} -1$ است. پس فقط کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم !۸ بر ۱۷ را به دست آوریم:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \overset{17}{\equiv} (8 \times 2) \times (6 \times 3) \times (5 \times 7) \times 4$$

$$\overset{17}{\equiv} (-1) \times 1 \times 1 \times 4 \overset{17}{\equiv} -4$$

بنابراین داریم:

$$8! + 16! + 23! + 24! \overset{17}{\equiv} (-4) + (-1) + 0 + 0 \overset{17}{\equiv} 12$$

۱۸۱ | ۳ باید هم‌نهشتی A به پیمانهٔ ۱۲ را به دست آوریم:

$$1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 100! \overset{12}{\equiv} 1! + 2! + 3! \overset{12}{\equiv} 9$$

از این‌جا به بعد همگی بر ۱۲ بخش‌پذیرند.

دقت کنید از !۴ به بعد همگی بر ۱۲ بخش‌پذیرند، زیرا $3 \times 4 = 12$ و در اعداد ...، !۵، !۴ 3×4 وجود دارد.

۱۸۲ | ۳ با توجه به تعریف فاکتوریل می‌توان گفت عدد $n!$ به‌ازای $n \geq 5$ حتماً بر ۲۰ بخش‌پذیر است. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۲۰، برابر صفر است:

$$1! + 3! + \overset{0}{\cancel{5!}} + \cdots + \overset{0}{\cancel{19!}} \overset{20}{\equiv} 1! + 3! \overset{20}{\equiv} 7$$

۱۸۳ | ۱ چون a و ۷ نسبت به هم اول هستند، پس حتماً a مضرب ۷ نیست. بنابراین داریم:

$$a \overset{7}{\equiv} 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } \overset{-3}{\cancel{4}} \text{ یا } \overset{-2}{\cancel{5}} \text{ یا } \overset{-1}{\cancel{6}} \Rightarrow a \overset{7}{\equiv} \pm1 \text{ یا } \pm2 \text{ یا } \pm3$$

$$\Rightarrow a^2 \overset{7}{\equiv} 1 \text{ یا } 4 \text{ یا } \overset{2}{\cancel{9}} \Rightarrow a^6 \overset{7}{\equiv} 1 \text{ یا } \overset{1}{\cancel{64}} \text{ یا } \overset{1}{\cancel{8}} \Rightarrow a^6 \overset{7}{\equiv} 1$$

نتیجه به طور کلی اگر p یک عدد اول و a مضرب p نباشد، همواره داریم:

$$a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$

۱۸۴ | ۲ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a \overset{8}{\equiv} 0, \pm1, \pm2, \pm3, 4 \Rightarrow a^2 \overset{8}{\equiv} 0, 1, 4, \overset{1}{\cancel{9}}, \overset{0}{\cancel{16}}$

۲) $a \overset{7}{\equiv} 0, \pm1, \pm2, \pm3 \Rightarrow a^2 \overset{7}{\equiv} 0, 1, 4, \overset{2}{\cancel{9}} \Rightarrow$ a^2 به فرم $7k - 2$ نیست.

۳) $a \overset{5}{\equiv} 0, \pm1, \pm2 \Rightarrow a^2 \overset{5}{\equiv} 0, 1, 4$

۴) $a \overset{4}{\equiv} 0, \pm1, 2 \Rightarrow a^2 \overset{4}{\equiv} 0, 1, \overset{0}{\cancel{4}}$

۱۸۵ | ۱

نیم‌نگاه

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \mid m$، آن‌گاه $a \overset{n}{\equiv} b$، یعنی در یک هم‌نهشتی می‌توان به جای پیمانه، مقسوم‌علیه‌های پیمانه را قرار داد. به بیان خودمانی، می‌توان پیمانه را لاغر کرد.

روش اول: چون باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۹ برابر ۲۵ است، داریم:

$$a \overset{۹۹}{\equiv} ۲۵ \xRightarrow{۹|۹۹} a \overset{۹}{\equiv} ۲۵$$

اما باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ نمی‌تواند ۲۵ باشد. پس مضرب مناسبی از پیمانه را از ۲۵ کم می‌کنیم تا باقی‌مانده بزرگ‌تر و یا مساوی صفر و کوچک‌تر از ۹ شود:

$$a \overset{۹}{\equiv} \underbrace{۲۵ \overset{۹}{\equiv} ۷}_{-۲\times۹}$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $a = ۲۵$ باشد. واضح است که باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۵ بر ۹ برابر ۷ است.

۱۸۶ | ۳ می‌دانیم در هم‌نهشتی به‌جای پیمانه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های پیمانه را نیز قرار دهیم. پس:

$$\begin{cases} a \overset{۱۸}{\equiv} ۵ \xRightarrow{۶|۱۸} a \overset{۶}{\equiv} \underbrace{۵ \overset{۶}{\equiv} -۱}_{-۱\times۶} \\ b \overset{۲۴}{\equiv} ۷ \xRightarrow{۶|۲۴} b \overset{۶}{\equiv} \underbrace{۷ \overset{۶}{\equiv} ۱}_{-۱\times۶} \end{cases} \Rightarrow a^{۱۰} - ۳b^{۲} \overset{۶}{\equiv} \underbrace{(-۱)^{۱۰} - ۳(۱)^{۲}}_{-۲} \overset{۶}{\equiv} ۴ \quad (+۱\times۶)$$

۱۸۷ | ۱ می‌دانیم $x \overset{۷}{\equiv} y$ یعنی $۷ \mid x - y$، حال چون دنبال عددی هستیم که با ۳۹ در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارد، پس باید دنبال عددی باشیم که با ۳۹ در پیمانهٔ ۷ هم‌نهشت باشد. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $۹۵ - ۳۹ = ۵۶ \Rightarrow ۵۶ = ۷k$ ✓
۲) $۹۶ - ۳۹ = ۵۷ \Rightarrow ۵۷ \neq ۷k$ ×
۳) $۹۷ - ۳۹ = ۵۸ \Rightarrow ۵۸ \neq ۷k$ ×
۴) $۹۸ - ۳۹ = ۵۹ \Rightarrow ۵۹ \neq ۷k$ ×

البته می‌توانستیم بگوییم چون باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳۹ بر ۷ برابر ۴ می‌باشد، پس باید عددی پیدا کنیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن نیز بر ۷ برابر ۴ باشد که در گزینه‌ها فقط ۹۵ این‌چنین است.

۱۸۸ | ۴ چون رابطهٔ هم‌نهشتی مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۵ کلاس هم‌نهشتی افراز کرده است، پس پیمانه برابر ۵ می‌باشد. حال دنبال دو عددی هستیم که در یک کلاس هم‌نهشتی در این پیمانه باشند، پس باید دو عدد به پیمانهٔ ۵ هم‌نهشت باشند. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $۵ \nmid ۲۵ - ۷$ ×
۲) $۵ \nmid ۳۱ - ۳$ ×
۳) $۵ \nmid ۳۷ - ۱$ ×
۴) $۵ \mid ۳۷ - ۱۲$ ✓

۱۸۹ | ۲ باید ببینیم -۲۰۹ به پیمانهٔ ۱۲ با کدام عدد داده‌شده هم‌نهشت است. اما برای سرعت در کار کافی است مضربی از ۱۲ را که می‌شناسیم، مثلاً $۲۴۰ = ۲۰ \times ۱۲$ را به -۲۰۹ اضافه کنیم، سپس با برداشتن مضرب مناسبی از ۱۲ از عدد حاصل به عدد گزینه‌ها برسیم:

$$\underbrace{-۲۰۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۳}_{+۲۰\times۱۲} \quad \underbrace{۱ \overset{۱۲}{\equiv} ۷}_{-۲\times۱۲}$$

۱۹۰ | ۳ می‌دانیم اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، $p^{۲} = ۲۴k + ۱$ است، پس:

$$[p^{۲}] = [۱] \Rightarrow p^{۲} \overset{m}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲۴k + ۱ \overset{m}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow m \mid (۲۴k + ۱) - ۱ \Rightarrow m \mid ۲۴k$$

با توجه به گزینه‌ها واضح است که m نمی‌تواند ۱۶ باشد.

۱۹۱ | ۱ اعدادی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ می‌باشد، در کلاس هم‌نهشتی A قرار دارند و اعدادی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۴ است، در کلاس هم‌نهشتی B خواهند بود و اعدادی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ یا ۴ نیست در کلاس هم‌نهشتی C می‌باشند. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\begin{cases} ۲۱ \overset{۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲۱ \in C \\ ۱۳ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۱۳ \in C \end{cases}$ ✓
۲) $\begin{cases} ۱۳ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۱۳ \in C \\ ۲۳ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲۳ \in A \end{cases}$ ×
۳) $\begin{cases} ۲۱ \overset{۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲۱ \in C \\ ۳۲ \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۳۲ \in B \end{cases}$ ×
۴) $\begin{cases} ۲۳ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲۳ \in A \\ ۳۲ \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۳۲ \in B \end{cases}$ ×

۱۹۲ | ۳ چون سه عدد a، ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌نهشتی به پیمانهٔ m قرار دارند، پس سه عدد به پیمانهٔ m هم‌نهشت می‌باشند:

$$a \overset{m}{\equiv} ۴۱ \overset{m}{\equiv} ۱۳۲ \Rightarrow m \mid ۱۳۲ - ۴۱ \Rightarrow m \mid \underset{۷\times۱۳}{۹۱} \Rightarrow m = ۷ \text{ یا } ۱۳ \text{ یا } ۹۱$$

چون در سؤال خواسته‌شده مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کم‌تری کلاس هم‌نهشتی افراز شود، پس باید کوچک‌ترین m را انتخاب کنیم، یعنی m باید ۷ باشد. پس:

$$a \overset{۷}{\equiv} ۴۱ \equiv -۱ \;(-۶\times۷) \Rightarrow a = ۷k - ۱ \xRightarrow[k=۱۵]{\text{کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی } a} a = ۱۰۴$$

دقت کنید در این سؤال m نمی‌تواند ۱ باشد، چون در این صورت همهٔ اعداد صحیح در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند که آن کلاس هم‌نهشتی $[۰]_{۱}$ است و در این صورت گزینه‌ها دیگر معنایی نداشتند.

۱۹۳ | ۲ **روش اول:** مشخص است که یکی از دو گزینهٔ (۱) یا (۲) جواب است، چون یک عدد در آنِ واحد، در پیمانهٔ ۷ دو باقی‌ماندهٔ مختلف ندارد.

$$۳۶a \overset{۸۴}{\equiv} ۱۹۲ \xRightarrow[(۱۲,۸۴)=۱۲]{\div۱۲} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۱۶ \xRightarrow{۱۶ \overset{۷}{\equiv} ۲} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۲ \xRightarrow{۱\times۷}$$

$$۳a \overset{۷}{\equiv} ۹ \xRightarrow[(۳,۷)=۱]{\div۳} a \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) نادرست است.

و اما علت درستی گزینه‌های (۳) و (۴) به‌شرح زیر است:

$$a \overset{۷}{\equiv} ۳ \begin{cases} \xrightarrow{\times۲} ۲a \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \\ \xrightarrow{\times۳} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۹ \overset{۷}{\equiv} ۲ \end{cases}$$

روش دوم: در این سؤال بعد از این‌که فهمیدید یا گزینهٔ (۱) غلط است یا گزینهٔ (۲)، می‌توانید به a عدد بدهید. مثلاً فرض کنید گزینهٔ (۱) درست است و $a = ۳$ می‌باشد. چون $a = ۳$ در گزینه‌های (۳) و (۴) هم صدق می‌کند، پس گزینهٔ (۱) واقعاً درست بوده و گزینهٔ (۲) حتماً نادرست است.

۱۹۴ | **۱** گزینهٔ (۱) نادرست است، زیرا طرفین هم‌نهشتی بر ۵ تقسیم شده و $5=(5,30)$ می‌باشند، پس پیمانه باید $6=\frac{30}{5}$ شود. اما دلیل درستی بقیهٔ گزینه‌ها را ببینید:

$$2)\ 15a \overset{30}{\equiv} 20b \xrightarrow[(5,30)=5]{\div 5} 3a \overset{\frac{30}{5}}{\equiv} 4b \Rightarrow 3a \overset{6}{\equiv} 4b$$

$$3)\ 3a \overset{6}{\equiv} 4b \xrightarrow{3|6} \overset{0}{\cancel{3}}a \overset{3}{\equiv} \overset{1}{4}b \Rightarrow b \overset{3}{\equiv} 0$$

$$4)\ 3a \overset{6}{\equiv} 4b \xrightarrow{2|6} \overset{1}{\cancel{3}}a \overset{2}{\equiv} \overset{0}{\cancel{4}}b \Rightarrow a \overset{2}{\equiv} 0$$

۱۹۵ | **۳** ابتدا طرفین را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$9a \overset{18}{\equiv} 6b \xrightarrow[(3,18)=3]{\div 3} 3a \overset{\frac{18}{3}}{\equiv} 2b \Rightarrow 3a \overset{6}{\equiv} 2b \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴)

حال از روی $3a \overset{6}{\equiv} 2b$ سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$3a \overset{6}{\equiv} 2b \xrightarrow{3|6} \overset{0}{\cancel{3}}a \overset{3}{\equiv} \overset{-1}{\cancel{2}}b \Rightarrow -b \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲)

$$3a \overset{6}{\equiv} 2b \xrightarrow{2|6} \overset{1}{\cancel{3}}a \overset{2}{\equiv} \overset{0}{\cancel{2}}b \Rightarrow a \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱)

بنابراین نتیجه‌گیری $a \overset{6}{\equiv} 2$ در گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱۹۶ | **۱** از $(a^2-1, m)=1$ به شکل مبرهنی معلوم می‌شود که حتماً باید طرفین را بر a^2-1 تقسیم کرد. پس سعی می‌کنیم در طرف اول هم از a^2-1 فاکتور بگیریم:

$$(a^3-a)-(a^2-1) \overset{m}{\equiv} a^2-1 \Rightarrow a(a^2-1)-(a^2-1) \overset{m}{\equiv} a^2-1$$

$$\Rightarrow (a^2-1)(a-1) \overset{m}{\equiv} a^2-1 \Rightarrow a-1 \overset{m}{\equiv} 1 \Rightarrow a-2 \overset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow m \mid a-2$$

۱۹۷ | **۴** اگر در یک هم‌نهشتی، ضریب یکی از پارامترها به پیمانه بخش‌پذیر باشد، آن پارامتر قابل محاسبه از این هم‌نهشتی نیست.

b قابل محاسبه از این هم‌نهشتی نیست، چون $18 \overset{9}{\equiv} 0$ و b حذف می‌گردد، پس گزینهٔ (۴) نادرست است. اما دلیل درستی بقیهٔ گزینه‌ها:

$$1)\ 12a \overset{9}{\equiv} 18b \xrightarrow[(6,9)=3]{\div 6} 2a \overset{3}{\equiv} 3b$$

$$2)\ 2a \overset{3}{\equiv} 3b \xrightarrow{\times 2} 4a \overset{3}{\equiv} 6b$$

$$3)\ 2a \overset{3}{\equiv} 3b \xrightarrow[2 \overset{3}{\equiv} -1]{3 \overset{3}{\equiv} 0} -a \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{3}{\equiv} 0$$

۱۹۸ | **۱** واضح است گزینهٔ (۱) نادرست است، چون ضریب a به پیمانه بخش‌پذیر است، پس نمی‌توان مقدار a را به دست آورد. اما علت درستی سایر گزینه‌ها:

$$2)\ 3a \overset{3}{\equiv} 2b \xrightarrow[2 \overset{3}{\equiv} -1]{3 \overset{3}{\equiv} 0} 0 \overset{3}{\equiv} -1\times b \Rightarrow b \overset{3}{\equiv} 0$$

$$3)\ b \overset{3}{\equiv} \underset{+3\times a}{0} \Rightarrow b \overset{3}{\equiv} 3a$$

$$4)\ 18a \overset{9}{\equiv} 12b \xrightarrow[(6,9)=3]{\div 6} 3a \overset{3}{\equiv} 2b$$

۱۹۹ | **۳** ابتدا باید روزهای باقی‌مانده از ۱ فروردین تا ۱۹ آذر را به دست آوریم، سپس عدد حاصل را به پیمانهٔ ۷ کوچک کنیم:

$$\overset{2}{\cancel{30}} + 2\times\overset{3}{\cancel{31}} + 3\times\overset{3}{\cancel{31}} + 2\times\overset{2}{\cancel{30}} + \overset{-2}{\cancel{19}} \overset{7}{\equiv} \underbrace{2+2\times3+3\times3+2\times2-2}_{19} \overset{7}{\equiv} -2$$

-2 یعنی ۲ روز قبل از پنج‌شنبه، یعنی ۱۹ آذر، سه‌شنبه است.

۲۰۰ | **۱** بیست‌وهفتم اردیبهشت سه‌شنبه است، پس بیست‌وچهارم اردیبهشت شنبه است. بنابراین تاریخ شنبه‌های اردیبهشت را به دست می‌آوریم:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{سومین}\\ \text{شنبه}}}{24 \overset{7}{\equiv} 17} \overset{7}{\equiv} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{دومین}\\ \text{شنبه}}}{10} \overset{7}{\equiv} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{اولین}\\ \text{شنبه}}}{3}$$

بنابراین سومین شنبهٔ اردیبهشت ماه، ۱۷ اردیبهشت است.

۲۰۱ | **۳** فرض می‌کنیم آخرین شنبهٔ آبان‌ماه روز n اُم آبان باشد. پس برای آن‌که روز n اُم شنبه باشد، باید تعداد روزهای باقی‌مانده تا آن روز در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷، برابر صفر شود:

$$6+31+3\times31+30+n \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow \underbrace{-1+3+3\times3+2}_{13}+n \overset{7}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow -1+n \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow n \overset{7}{\equiv} 1$$

چون آخرین شنبه را می‌خواهیم، باید بزرگ‌ترین عددی که به پیمانهٔ ۷ برابر ۱ می‌شود را انتخاب کنیم که عدد ۲۹ می‌باشد.

۲۰۲ | **۴** می‌دانیم هر روز ۲۴ ساعت است. بنابراین باید ببینیم ۱۰۰۰ ساعت بعد، شامل چند روز و چند ساعت است:

$1000=24\times41+16 \Rightarrow$ ۴۱ روز و ۱۶ ساعت

بنابراین ابتدا ببینیم ۴۱ روز بعد، چه روزی و چندشنبه است:

$41 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow$ یک روز قبل از سه‌شنبه، یعنی دوشنبه است.

اما ۱۶ ساعت بعد از ساعت ۲۳ روز دوشنبه ۱۷مهر، ساعت ۱۵ سه‌شنبه ۱۸ مهرماه است.

$41=31+10 \Rightarrow$ ۱۰ روز بعد از هفتم مهر $\Rightarrow$ ۱۷ مهر

۲۰۳ | **۳** باید ببینیم ۲۰ شهریورماه چند روز قبل از ۲۲ بهمن است. پس:

$$-(31-20+3\times30+30+22) \overset{7}{\equiv} -(-3+3\times2+2+1) \overset{7}{\equiv} -6 \overset{7}{\equiv} 1$$

یعنی یک روز بعد از دوشنبه است، پس ۲۰ شهریور سه‌شنبه می‌باشد.

۲۰۴ | **۲** می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی هر ۳۶۰ درجه که حرکت می‌کنیم، دوباره به نقطهٔ ابتدایی حرکت برمی‌گردیم. چون در خلاف جهت دایرهٔ مثلثاتی حرکت کرده‌ایم، پس 3285° را با علامت منفی در نظر می‌گیریم. در نتیجه:

$$-3285^\circ \overset{360^\circ}{\equiv} -45^\circ \Rightarrow 305^\circ - 45^\circ = 260^\circ$$

۲۰۵ | **۱** **روش اول:** با توجه به صورت سؤال $a\overset{9}{\equiv}5$ و $a\overset{7}{\equiv}6$ است و ما باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۶۳ را می‌خواهیم. اگر طرف دوم روابط هم‌نهشتی فوق را یکسان کنیم، به راحتی می‌توانیم به کمک ک.م.م ۷ و ۹، عدد ۶۳ را ایجاد کنیم:

$$\begin{cases} a\overset{9}{\equiv}\underbrace{5}_{+4\times 9}\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}41 \\ a\overset{7}{\equiv}\underbrace{6}_{+5\times 7}\Rightarrow a\overset{7}{\equiv}41 \end{cases}\Rightarrow a\overset{[9,7]}{\equiv}41\Rightarrow a\overset{63}{\equiv}41\Rightarrow$$
باقی مانده یعنی ۴۱ عددی اول است.

روش دوم: ممکن است با خود بگویید پیداکردن عدد مشترک طرف دوم سخت و وقت‌گیر است. برای این منظور می‌توانید به عدد ۵، ۹تا ۹تا و به عدد ۶، ۷تا ۷تا اضافه کنید تا به یک عدد برابر برسید. مطمئن هستیم این عدد برابر عددی کوچک‌تر از ۶۳ است، چون قرار است همین عدد برابر، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۶۳ باشد:

$$\begin{cases} a\overset{9}{\equiv}5\to 14\to 23\to 32\to 41\to 50\to 59 \\ a\overset{7}{\equiv}6\to 13\to 20\to 27\to 34\to 41 \end{cases}\Rightarrow a\overset{63}{\equiv}41$$

روش سوم: با توجه به خاصیت $a\overset{m}{\equiv}b\xRightarrow{c>0}ac\overset{mc}{\equiv}bc$، داریم:

$$\begin{cases} a\overset{9}{\equiv}5\xRightarrow{\times 7}7a\overset{63}{\equiv}35 \\ a\overset{7}{\equiv}6\xRightarrow{\times 9}9a\overset{63}{\equiv}54 \end{cases}\xRightarrow{-}2a\overset{63}{\equiv}\underbrace{19}_{+1\times 63}\overset{63}{\equiv}82\xRightarrow[(2,63)=1]{\div 2}a\overset{63}{\equiv}41$$

۲۰۶ | **۴** تقسیم‌های داده‌شده را به صورت هم‌نهشتی می‌نویسیم و داریم:

$$\begin{cases} a\overset{29}{\equiv}\underbrace{12}_{-1\times 29}\overset{29}{\equiv}-17 \\ a+17\overset{21}{\equiv}0\Rightarrow a\overset{21}{\equiv}-17 \end{cases}\Rightarrow a\overset{[29,21]}{\equiv}-17\Rightarrow a\overset{609}{\equiv}-17$$

$$\Rightarrow a=609k-17\xRightarrow{k=1}a=592\Rightarrow \text{رقم وسط}=9$$

۲۰۷ | **۱** تقسیم‌های سؤال‌به‌زبان‌ریاضی $A\overset{23}{\equiv}5$ و $2A\overset{17}{\equiv}9$ می‌باشند. پس:

$$\begin{cases} 2A\overset{17}{\equiv}9\overset{17}{\equiv}26\xRightarrow[(2,17)=1]{\div 2}A\overset{17}{\equiv}13 \\ A\overset{23}{\equiv}5\xRightarrow{\times 17}17A\overset{391}{\equiv}85\quad(**) \end{cases}\xRightarrow{\times 23}23A\overset{391}{\equiv}299\quad(*)$$

$$\xRightarrow{(*)-(**)}6A\overset{391}{\equiv}214\xRightarrow[(2,391)=1]{\div 2}3A\overset{391}{\equiv}107\overset{391}{\equiv}498$$

$$\xRightarrow[(3,391)=1]{\div 3}A\overset{391}{\equiv}166$$

$$\Rightarrow A=391k+166\xRightarrow[k=2]{\text{بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی}}A=948$$

حال باید باقی‌ماندهٔ تقسیم ۹۴۸ بر ۱۲ را به دست آوریم. چون ۹۴۸ بر ۴ و همچنین بر ۳ بخش‌پذیر است، پس بر ۱۲ نیز بخش‌پذیر می‌باشد، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم، برابر صفر است.

۲۰۸ | **۱** در تقسیم عدد N بر ۳۱ که باقی‌مانده برابر ۲۶ می‌باشد، صحبت از خارج‌قسمت نشده است، پس داریم: $N\overset{31}{\equiv}26$

اما در تقسیم بعدی صحبت از خارج‌قسمت می‌شود، پس:

$$N=43q+q,\ 0\le q<43\Rightarrow N\le 43(42)+42\Rightarrow N\le 1848$$

یعنی بیان تقسیم دوم در صورت سؤال به این منظور است که بدانیم N هیچگاه از ۱۸۴۸ بیشتر نمی‌شود. از طرفی داریم:

$$N=43q+q\Rightarrow N=44q\Rightarrow N\overset{44}{\equiv}0$$

حال داریم:

$$\begin{cases} N\overset{44}{\equiv}0\overset{44}{\equiv}88 \\ N\overset{31}{\equiv}26\overset{31}{\equiv}88 \end{cases}\Rightarrow N\overset{[44,31]}{\equiv}88\Rightarrow N\overset{1364}{\equiv}88\Rightarrow$$

$$N=1364k+88\xRightarrow[\text{بزرگ‌ترین N به ازای k=1 به دست می‌آید}]{N\le 1848}N=1452\Rightarrow \text{رقم یکان}=2$$

۲۰۹ | **۳** با توجه به گزینه‌ها، ابتدا به کمک قانون حذف داریم:

$$6a\overset{84}{\equiv}3b\xRightarrow[(3,84)=3]{\div 3}2a\overset{28}{\equiv}b\Rightarrow \text{گزینهٔ (۲)}$$

$$6b\overset{72}{\equiv}18c\xRightarrow[(6,72)=6]{\div 6}b\overset{12}{\equiv}3c\Rightarrow \text{گزینهٔ (۴)}$$

حال به کمک خاصیت $a\overset{m}{\equiv}b$ و $b\overset{n}{\equiv}c\Rightarrow a\overset{(m,n)}{\equiv}c$، داریم:

$$\begin{cases} 2a\overset{28}{\equiv}b \\ b\overset{12}{\equiv}3c \end{cases}\Rightarrow 2a\overset{(28,12)}{\equiv}3c\Rightarrow 2a\overset{4}{\equiv}\overset{-1}{\cancel{3}}c\Rightarrow 2a\overset{4}{\equiv}-c\Rightarrow \text{گزینهٔ (۱)}$$

۲۱۰ | **۳**

نیم‌نگاه

اگر در تستی بیش از دو هم‌نهشتی وجود داشت، معمولاً برای یکسان‌کردن طرف دوم باید به سمت اعداد منفی برویم.

کافی است برای یکسان‌کردن طرف دوم به سمت اعداد منفی برویم:

$$\begin{cases} a\overset{12}{\equiv}\underbrace{5}_{-1\times 7}\overset{12}{\equiv}-7 \\ a\overset{15}{\equiv}\underbrace{8}_{-1\times 15}\overset{15}{\equiv}-7 \\ a\overset{32}{\equiv}\underbrace{25}_{-1\times 32}\overset{32}{\equiv}-7 \end{cases}\Rightarrow a\overset{[12,15,32]}{\equiv}-7\Rightarrow a\overset{480}{\equiv}-7$$

$$\Rightarrow a=480k-7\xRightarrow[k=1]{\text{کوچک‌ترین a}}a=473\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=4+7+3=14$$

۲۱۱ | **۱** چون بیش از دو هم‌نهشتی داریم، به سمت اعداد منفی می‌رویم:

$$\begin{cases} a\overset{11}{\equiv}\underbrace{5}_{-1\times 11}\overset{11}{\equiv}-6 \\ a\overset{14}{\equiv}\underbrace{8}_{-1\times 14}\overset{14}{\equiv}-6 \\ a\overset{15}{\equiv}\underbrace{9}_{-1\times 15}\overset{15}{\equiv}-6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\overset{[11,14,15]}{\equiv}-6\Rightarrow a\overset{2310}{\equiv}-6\Rightarrow a=2310k-6$$

$$\xRightarrow[k=1]{\text{کوچک‌ترین a}}a=2304\Rightarrow$$ مضرب ۴ و ۹ است، پس مضرب ۳۶ می‌باشد.

۲۱۲ **۴** چون سه هم‌نهشتی داریم، باید به سمت اعداد منفی برویم:

$$\begin{cases} A \overset{5}{\equiv} 2 \overset{5}{\equiv} -3 \\ A \overset{7}{\equiv} 4 \overset{7}{\equiv} -3 \\ A \overset{11}{\equiv} 8 \overset{11}{\equiv} -3 \end{cases} \Rightarrow A \overset{[5,7,11]}{=\!=\!=} -3 \Rightarrow A \overset{385}{\equiv} -3$$

$$\Rightarrow A = 385k - 3 \xrightarrow[k=2]{\text{بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی } A} A = 767$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم ۷۶۷ را بر ۲۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} 767 & 23 \\ \underline{-69} & 33 \\ 77 & \\ \underline{-69} & \\ 8 & \end{array} \Rightarrow r = 8$$

۲۱۳ **۲**

نیم‌نگاه

اگر بیش از دو هم‌نهشتی داشتیم و بتوان خیلی سریع دوتا از آن‌ها را یکی کرد، آن دو را یکی می‌کنیم و سپس هم‌نهشتی حاصل را با سومی در نظر می‌گیریم و ادامهٔ ماجرا ...

هم‌نهشتی‌های سؤال $x \overset{11}{\equiv} 0$، $x \overset{4}{\equiv} 1$ و $x \overset{5}{\equiv} 1$ می‌باشند. دو هم‌نهشتی آخر را به راحتی می‌توان به یک هم‌نهشتی تبدیل کرد:

$$\begin{cases} x \overset{4}{\equiv} 1 \\ x \overset{5}{\equiv} 1 \end{cases} \Rightarrow x \overset{[4,5]}{=\!=\!=} 1 \Rightarrow x \overset{20}{\equiv} 1$$

حال با $x \overset{20}{\equiv} 1$ و $x \overset{11}{\equiv} 0$ کار را ادامه می‌دهیم:

$$\begin{cases} x \overset{20}{\equiv} \underbrace{1 \overset{20}{\equiv} 121}_{+6\times 20} \\ x \overset{11}{\equiv} \underbrace{0 \overset{11}{\equiv} 121}_{+11\times 11} \end{cases} \Rightarrow x \overset{[20,11]}{=\!=\!=} 121 \Rightarrow x \overset{220}{\equiv} 121 \Rightarrow x = 220k + 121$$

$$\xrightarrow{\text{سه‌رقمی}} k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \text{۴ جواب}$$

دقت کنید استدلال ما برای رسیدن سریع به ۱۲۱ می‌تواند این‌گونه باشد؛ بگوییم هر مضرب ۲۰ که به یک اضافه کنیم، رقم یکان عدد حاصل ۱ می‌شود. حال کدام مضرب ۱۱ است که رقم یکانش ۱ است؟ که به عدد ۱۲۱ می‌رسیم.

۲۱۴ **۳** برای آن‌که معادلهٔ $6x \overset{9}{\equiv} 2a + 5$ دارای جواب باشد باید رابطهٔ $(6,9) \mid 2a + 5$ برقرار باشد، پس:

$$(6,9) = 3 \Rightarrow 3 \mid 2a + 5 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a = 41$$

۲۱۵ **۴** برای آن‌که معادلهٔ $42x \overset{15}{\equiv} 5a$ دارای جواب باشد باید رابطهٔ $(42,15) \mid 5a$ برقرار باشد. پس:

$$(42,15) = 3 \Rightarrow 3 \mid 5a \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a = 9$$

۲۱۶ **۲** برای آن‌که معادلهٔ $42x \overset{15}{\equiv} 5n - 2$ جواب داشته باشد باید $(42,15) \mid 5n - 2$ برقرار باشد، پس:

$$(42,15) = 3 \Rightarrow 3 \mid 5n - 2 \Rightarrow 5n - 2 \overset{3}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 5n \overset{3}{\equiv} 2 \overset{3}{\equiv} 5 \Rightarrow n \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow n = 3k + 1$$

حال تعداد اعداد دورقمی n را می‌خواهیم:

$$10 \le n < 100 \Rightarrow 10 \le 3k + 1 < 100 \Rightarrow 9 \le 3k < 99$$

$$\Rightarrow 3 \le k < 33 \Rightarrow \text{تعداد } n\text{ها} = 30$$

۲۱۷ **۴** باید سعی کنیم a را تنها کنیم. ابتدا ۱۳ را با ۹ کوچک می‌کنیم:

$$13a \overset{9}{\equiv} 11 \xrightarrow{13 \overset{9}{\equiv} 4} 4a \overset{9}{\equiv} 11$$

حال اگر ۹ واحد به ۱۱ اضافه کنیم، طرفین هم‌نهشتی بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود و داریم:

$$4a \overset{9}{\equiv} \underbrace{11 \overset{9}{\equiv} 20}_{+1\times 9} \xrightarrow[(4,9)=1]{\div 4} a \overset{9}{\equiv} 5 \Rightarrow a = 9k + 5 \xrightarrow[k=11]{\text{کوچک‌ترین سه‌رقمی}} a = 104$$

۲۱۸ **۳** باید سعی کنیم x را تنها کنیم:

$$\overset{-10}{\cancel{19}}x \overset{29}{\equiv} 1 \Rightarrow -10x \overset{29}{\equiv} 1 \overset{29}{\equiv} 30 \xrightarrow[(-10,29)=1]{\div(-10)} x \overset{29}{\equiv} -3$$

$$\Rightarrow x = 29k - 3 \xrightarrow{x \text{ دورقمی است}} k = 1, 2, 3$$

۲۱۹ **۱** باید سعی کنیم x را تنها کنیم:

$$\underbrace{72x \overset{31}{\equiv} 1}_{-2\times 31} \Rightarrow \underbrace{10x \overset{31}{\equiv} 1}_{-1\times 31} \Rightarrow 10x \overset{31}{\equiv} -30 \xrightarrow[(10,31)=1]{\div 10} x \overset{31}{\equiv} -3$$

$$\Rightarrow x = 31k - 3$$

حال می‌خواهیم x سه‌رقمی باشد. پس:

$$100 \le x < 1000 \Rightarrow 100 \le 31k - 3 < 1000 \Rightarrow 103 \le 31k < 1003$$

$$\Rightarrow 3/... \le k < 32/... \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 4 \le k \le 32 \Rightarrow \text{تعداد } x\text{ها} = 29$$

۲۲۰ **۴** ابتدا A و ۵۳ را به پیمانهٔ ۷ کوچک می‌کنیم:

$$1! + 3! + 5! + \underbrace{7! + \dots + 71!}_{\text{از این‌جا به بعد بر ۷ بخش‌پذیرند}} \overset{7}{\equiv} \overset{0}{\cancel{1} + \cancel{6}} + 120 \equiv 1 \ , \ 53 \overset{7}{\equiv} 4$$

بنابراین معادلهٔ $Ax \overset{7}{\equiv} 53$ به صورت $x \overset{7}{\equiv} 4$ می‌باشد. یعنی $x = 7k + 4$ است.

حال می‌خواهیم x دورقمی باشد، پس:

$$10 \le 7k + 4 \le 99 \Rightarrow 6 \le 7k \le 95$$

$$\Rightarrow 0/... \le k \le 13/... \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \le k \le 13 \Rightarrow \text{۱۳ مقدار}$$

۲۲۱ **۳** سعی می‌کنیم $10!$ و 3^{49} را به پیمانهٔ ۱۱ کوچک کنیم. ۱۱ عددی اول است. می‌دانیم اگر p عددی اول باشد، $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$ است. پس $10! \overset{11}{\equiv} -1$ می‌باشد. از طرفی داریم:

$$3^2 \overset{11}{\equiv} -2 \Rightarrow 3^{10} \overset{11}{\equiv} \underbrace{-32 \overset{11}{\equiv} 1}_{+3\times 11} \Rightarrow 3^{10} \overset{11}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 3^{50} \overset{11}{\equiv} 1 \overset{11}{\equiv} 12 \xrightarrow[(3,11)=1]{\div 3} 3^{49} \overset{11}{\equiv} 4$$

بنابراین معادلهٔ هم‌نهشتی $(10!)x \overset{11}{\equiv} 3^{49}$ به صورت $-x \overset{11}{\equiv} 4$ ساده می‌شود. پس داریم:

$$-x \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow x \overset{11}{\equiv} -4$$

$$\Rightarrow x = 11k - 4 \xrightarrow[k=10]{\text{کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی}} x = 106 \Rightarrow \text{رقم یکان} = 6$$

۲۲۲ **۳** وقتی رابطهٔ همنهشتی ۱۵ کلاس همنهشتی ایجاد کرده، پس پیمانهٔ همنهشتی ۱۵ است. از طرفی چون $\overline{6a4}$ در کلاس همنهشتی [۹] قرار دارد، پس $\overline{6a4}$ با ۹ در پیمانهٔ ۱۵ همنهشت هستند. بنابراین داریم:

$$\overline{6a4}\overset{15}{\equiv}9\Rightarrow \overset{4}{\cancel{604}}+10a\overset{15}{\equiv}9\Rightarrow 4+10a\overset{15}{\equiv}9\Rightarrow 10a\overset{15}{\equiv}5$$

حال اگر ۱۵ واحد به ۵ اضافه کنیم، طرفین همنهشتی بر ۱۰ بخش‌پذیر می‌شوند:

$$10a\overset{15}{\equiv}5\overset{15}{\equiv}20\xrightarrow[(10,15)=5]{\div 10}a\overset{3}{\equiv}2\Rightarrow a=3k+2\xrightarrow[0\le a\le 9]{\text{a رقم است}}a=2,5,8$$

۲۲۳ **۴** ابتدا تقسیم داده‌شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a=b\times 25+17\ ,\ 17<b$$

در صورت سؤال گفته‌شده، a مضرب ۶ است. حال باید بررسی کنیم برای آن‌که a مضرب ۶ باشد، b چگونه است. پس:

$a\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow 25b+17\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow b-1\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow b\overset{6}{\equiv}1\Rightarrow b=6k+1$ چون رقم دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی a را می‌خواهیم، باید کوچک‌ترین b که به فرم $6k+1$ است و در نامساوی $b>17$ صدق می‌کند را به دست آوریم:

$$b>17\xrightarrow{b=6k+1}6k+1>17\Rightarrow k_{min}=3\Rightarrow b_{min}=6(3)+1=19$$

بنابراین کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر است با:

$$a_{min}=25(19)+17\Rightarrow a_{min}=492\Rightarrow \text{رقم دهگان}=9$$

۲۲۴ **۲** ابتدا تقسیم گفته‌شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a=b\times 21+37\ ,\ 37<b$$

حال برای a دو شرط داریم. یکی این‌که مضرب ۵ است و دیگری این‌که سه‌رقمی می‌باشد. پس داریم:

$$a\overset{5}{\equiv}0\Rightarrow 21b+37\overset{5}{\equiv}0\Rightarrow b+2\overset{5}{\equiv}0\Rightarrow b\overset{5}{\equiv}-2$$

$$\Rightarrow b=5k-2\xrightarrow{b>37}k_{min}=8$$

دقت کنید اگر $k=8$ باشد، a حتماً سه‌رقمی است، پس باید حواسمان باشد که a چهاررقمی نشود. پس:

$$a<1000\Rightarrow 21b+37<1000\Rightarrow 21(5k-2)+37<1000$$

$$\Rightarrow 105k-5<1000\Rightarrow 105k<1005\Rightarrow k_{Max}=9$$

چون دو مقدار برای k به دست آمده، پس دو مقدار برای b و در نتیجه دو مقدار برای a وجود دارد.

۲۲۵ **۴** ابتدا تقسیم داده‌شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a=b\times 25+13\ ,\ 13<b$$

حال باید ببینیم برای آن‌که a مضرب ۷ باشد، b باید چگونه باشد. پس:

$$a\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow \overset{4}{\cancel{25}}b+\overset{-1}{\cancel{13}}\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow 4b-1\overset{7}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow 4b\overset{7}{\equiv}1\overset{7}{\equiv}8\xrightarrow[(4,7)=1]{\div 4}b\overset{7}{\equiv}2\Rightarrow b=7k+2$$

بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a را می‌خواهیم، پس:

$$a<1000\Rightarrow 25b+13<1000\xrightarrow{b=7k+2}25(7k+2)+13<1000$$

$$\Rightarrow 175k<937\Rightarrow k<5/...\Rightarrow k_{Max}=5$$

$$\Rightarrow a_{Max}=25(7\times 5+2)+13=938$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=9+3+8=20$$

۲۲۶ **۴** باید $(2x-1)(3x+2)(5x-3)\overset{17}{\equiv}0$ باشد. حال سعی ما این است که x را تنها کنیم:

$$2x-1\overset{17}{\equiv}0\Rightarrow 2x\overset{17}{\equiv}1\overset{17}{\equiv}18\xrightarrow[(2,7)=1]{\div 2}x\overset{17}{\equiv}9$$

$$\Rightarrow x=17k+9\xrightarrow{x<25}k=0$$

$$3x+2\overset{17}{\equiv}0\Rightarrow 3x\overset{17}{\equiv}-2\overset{17}{\equiv}15\Rightarrow x\overset{17}{\equiv}5$$

$$\Rightarrow x=17k+5\xrightarrow{x<25}k=0,1$$

$$5x-3\overset{17}{\equiv}0\Rightarrow 5x\overset{17}{\equiv}3\overset{17}{\equiv}20\Rightarrow x\overset{17}{\equiv}4$$

$$\Rightarrow x=17k+4\xrightarrow{x<25}k=0,1$$

بنابراین برای x پنج عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۵ وجود دارد.

۲۲۷ **۴** باید x را تنها کنیم:

$$2x^2-x-6\overset{53}{\equiv}0\Rightarrow (2x+3)(x-2)\overset{53}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+3\overset{53}{\equiv}0\Rightarrow 2x\overset{53}{\equiv}\underbrace{-3\Rightarrow 2x\overset{53}{\equiv}50}_{+1\times 53}\xrightarrow[(2,53)=1]{\div 2}x\overset{53}{\equiv}25\\ \Rightarrow x=53k+25\\ x-2\overset{53}{\equiv}0\Rightarrow x\overset{53}{\equiv}2\Rightarrow x=53k'+2\end{cases}$$

بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی به ازای $k=18$ از تساوی $x=53k+25$ به دست می‌آید که برابر ۹۷۹ است که رقم یکان آن ۹ می‌باشد.

۲۲۸ **۳** وقتی $3x^2+x-2$ بر ۴۱ بخش‌پذیر است، یعنی $3x^2+x-2\overset{41}{\equiv}0$ است، پس:

$$3x^2+x-2\overset{41}{\equiv}0\Rightarrow (3x-2)(x+1)\overset{41}{\equiv}0\Rightarrow\begin{cases}3x-2\overset{41}{\equiv}0\\ x+1\overset{41}{\equiv}0\end{cases}$$

حال از هر معادلهٔ به دست آمده مقادیر دورقمی x را به دست می‌آوریم:

$$3x-2\overset{41}{\equiv}0\Rightarrow 3x\overset{41}{\equiv}2\overset{41}{\equiv}-39\Rightarrow x\overset{41}{\equiv}-13$$

$$\Rightarrow x=41k-13\xrightarrow[\text{است}]{\text{x دورقمی}}x=28\ ,\ x=69$$

$$x+1\overset{41}{\equiv}0\Rightarrow x\overset{41}{\equiv}-1\Rightarrow x=41k-1\xrightarrow[\text{است}]{\text{x دو رقمی}}x=40,x=81$$

بنابراین ۴ عدد طبیعی دورقمی برای x وجود دارد.

۲۲۹ **۲** رابطهٔ $6x^2+x\overset{39}{\equiv}1$ را به صورت $6x^2+x-1\overset{39}{\equiv}0$ می‌نویسیم و داریم:

$$6x^2+x-1\overset{39}{\equiv}0\Rightarrow (3x-1)(2x+1)\overset{39}{\equiv}0\Rightarrow\begin{cases}3x-1\overset{39}{\equiv}0\\ 2x+1\overset{39}{\equiv}0\end{cases}$$

حال از هر کدام از معادلات x، بزرگ‌ترین مقدار سه‌رقمی x را می‌یابیم:

$3x-1\overset{39}{\equiv}0\Rightarrow 3x\overset{39}{\equiv}1\Rightarrow (3,39)\nmid 1\Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

$$2x+1\overset{39}{\equiv}0\Rightarrow 2x\overset{39}{\equiv}-1\overset{39}{\equiv}-40\xrightarrow[(2,39)=1]{\div 2}x\overset{39}{\equiv}-20$$

$$\Rightarrow x=39k-20\xrightarrow[k=26]{\text{بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی}}x=994\Rightarrow \text{رقم یکان}=4$$

۲۳۰ | **۳** باید $x^3-3x+4\overset{6}{\equiv}0$ باشد. حال داریم:

$$x^3-3x+4\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow x^3-x-2x+4\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow (x(x^2-1))-2x+4\overset{6}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow (\overbrace{\underbrace{(x-1)\times x\times(x+1)}_{3!q}}^{\text{ضرب سه عدد متوالی}})-2x+4\overset{6}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow -2x+4\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow 2x\overset{6}{\equiv}4\xrightarrow[(2,6)=2]{\div 2}x\overset{3}{\equiv}2\Rightarrow x=3k+2$$

حال xهای دورقمی را پیدا می‌کنیم:

$$10\le x\le 99\Rightarrow 10\le 3k+2\le 99\Rightarrow 8\le 3k\le 97$$

$$\Rightarrow 2/...\le k\le 32/...\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}3\le k\le 32\Rightarrow \text{تعداد xها}=30$$

۲۳۱ | **۲** فرض می‌کنیم که $(9n+2,11n+7)=d$ باشد، در این صورت:

$$\begin{cases}d\mid 11n+7\\ d\mid 9n+2\end{cases}\Rightarrow d\mid 9(11n+7)-11(9n+2)\Rightarrow d\mid 63-22$$

$$\Rightarrow d\mid 41\Rightarrow d=1 \text{ یا } 41$$

چون دو عبارت نسبت به هم اول نیستند، پس $d=41$ قابل قبول است. یعنی هر دو عبارت باید مضرب ۴۱ باشند (کافی است یکی از آن‌ها را مضرب ۴۱ قرار دهید):

$$9n+2\overset{41}{\equiv}0\Rightarrow 9n\overset{41}{\equiv}-2\underset{+1\times 41}{\overset{41}{\equiv}}39$$

$$\xrightarrow[(3,41)=1]{\div 3}3n\overset{41}{\equiv}13\underset{+1\times 41}{\overset{41}{\equiv}}54\xrightarrow[(3,41)=1]{\div 3}n\overset{41}{\equiv}18$$

$$\Rightarrow n=41k+18\xrightarrow{k=0}\min(n)=18\Rightarrow \text{مضرب } 6$$

۲۳۲ | **۱** اگر فرض کنیم $(11n-5,9n+2)=d$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}d\mid 11n-5\\ d\mid 9n+2\end{cases}\Rightarrow d\mid 9(11n-5)-11(9n+2)\Rightarrow d\mid -67\Rightarrow d=1 \text{ یا } 67$$

حال برای این‌که نسبت به هم غیراول باشند، باید دو عبارت مضرب ۶۷ باشند:

$$9n+2\overset{67}{\equiv}0\Rightarrow 9n\overset{67}{\equiv}-2\underset{+2\times 67}{\overset{67}{\equiv}}133\xrightarrow[(3,67)=1]{\div 3}3n\overset{67}{\equiv}44\underset{+1\times 67}{\overset{67}{\equiv}}111$$

$$\xrightarrow[(3,67)=1]{\div 3}n\overset{67}{\equiv}37\Rightarrow n=67k+37\xrightarrow{\text{n دورقمی}}k=0$$

۲۳۳ | **۲** با فرض $(9n+4,12n-5)=d$ داریم:

$$\begin{cases}d\mid 12n-5\\ d\mid 9n+2\end{cases}\Rightarrow d\mid 3(12n-5)-4(9n+4)\Rightarrow d\mid -31\Rightarrow d=1 \text{ یا } 31$$

حال چون نسبت به هم اول نیستند، پس باید هر دو مضرب ۳۱ باشند:

$$9n+4\overset{31}{\equiv}0\Rightarrow 9n\overset{31}{\equiv}-4\underset{+1\times 31}{\overset{31}{\equiv}}27\xrightarrow[(9,31)=1]{\div 9}n\overset{31}{\equiv}3$$

$$\Rightarrow n=31k+3\Rightarrow k=1,2,3\Rightarrow \text{۳ جواب}$$

۲۳۴ | **۲** با فرض $(7n+3,5n-2)=d$ داریم:

$$\begin{cases}d\mid 5n-2\\ d\mid 7n+3\end{cases}\Rightarrow d\mid 7(5n-2)-5(7n+3)\Rightarrow d\mid 29\Rightarrow d=1 \text{ یا } 29$$

از آن‌جایی که گفته شده دو عبارت نسبت به هم غیراول‌اند، پس $d=29$. کافی است یکی از عبارت‌ها را مضرب ۲۹ قرار دهیم.

$$5n-2\overset{29}{\equiv}0\Rightarrow 5n\overset{29}{\equiv}2\underset{+2\times 29}{\overset{29}{\equiv}}60\xrightarrow[(5,29)=1]{\div 5}n\overset{29}{\equiv}12$$

$$\Rightarrow n=29k+12\xrightarrow{10\le n\le 99}10\le 29k+12\le 99\Rightarrow k=0,1,2,3\Rightarrow \text{۴ مقدار}$$

۲۳۵ | **۱** فرض می‌کنیم $(13n-3,5n+4)=d$ باشد:

$$\begin{cases}d\mid 5n+4\\ d\mid 13n-3\end{cases}\Rightarrow d\mid 13(5n+4)-5(13n-3)\Rightarrow d\mid 67\Rightarrow d=1 \text{ یا } 67$$

چون دو عبارت نسبت به هم اول نیستند، پس $d=67$ قابل قبول است، یعنی هر دو عبارت باید مضرب ۶۷ باشند:

$$5n+4\overset{67}{\equiv}0\Rightarrow 5n\overset{67}{\equiv}-4\underset{+2\times 67}{\overset{67}{\equiv}}130\xrightarrow[(5,67)=1]{\div 5}n\overset{67}{\equiv}26$$

$$\Rightarrow n=67k+26\Rightarrow k=0,1$$

۲۳۶ | **۳** فرض می‌کنیم $(11n+2,9n-5)=d$ باشد، پس:

$$\begin{cases}d\mid 11n+2\\ d\mid 9n-5\end{cases}\Rightarrow d\mid 9(11n+2)-11(9n-5)\Rightarrow d\mid 73\Rightarrow d=1 \text{ یا } 73$$

چون دو عبارت نسبت به هم غیراول‌اند، پس $d=73$ است. حال کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی n را به دست می‌آوریم:

$$9n-5\overset{73}{\equiv}0\Rightarrow 9n\overset{73}{\equiv}5\overset{73}{\equiv}78\xrightarrow[(3,73)=1]{\div 3}3n\overset{73}{\equiv}26\overset{73}{\equiv}99$$

$$\xrightarrow[(3,73)=1]{\div 3}n\overset{73}{\equiv}33\Rightarrow n=73k+33$$

$$\xrightarrow[k=1]{\text{کوچک‌ترین سه‌رقمی}}n=106\Rightarrow \text{رقم یکان}=6$$

۲۳۷ | **۴** فرض می‌کنیم $(6n+5,17n+13)=d$ باشد، پس:

$$\begin{cases}d\mid 6n+5\\ d\mid 17n+13\end{cases}\Rightarrow d\mid 17(6n+5)-6(17n+13)\Rightarrow d\mid 7\Rightarrow d=1 \text{ یا } 7$$

چون دو عبارت نسبت به هم اول نیستند، پس $d=7$ می‌باشد. حال داریم:

$$6n+5\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow \overset{-1}{\cancel{6}}n\overset{7}{\equiv}-5\Rightarrow -n\overset{7}{\equiv}-5\Rightarrow n\overset{7}{\equiv}5\Rightarrow n=7k+5$$

می‌دانیم هیچ عدد مربع کاملی به فرم $7k+5$ نمی‌باشد، زیرا:

$$n\overset{7}{\equiv}0,\pm1,\pm2,\pm3\Rightarrow n^2\overset{7}{\equiv}0,1,4,\overset{2}{\cancel{9}}$$

۲۳۸ | **۲** فرض می‌کنیم $(11n-3,2n+7)=d$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{cases}d\mid 11n-3\\ d\mid 2n+7+13\end{cases}\Rightarrow d\mid 2(11n-3)-11(2n+7)\Rightarrow d\mid -83\Rightarrow d=1 \text{ یا } 83$$

چون گفته شده دو عبارت نسبت به هم اول‌اند، پس $d=83$ نباید قابل قبول باشد. پس یکی از آن‌ها را مضرب ۸۳ قرار می‌دهیم تا ببینیم به ازای چه nهایی این اتفاق می‌افتد و اولین آن‌ها کدام است؟!!

$$2n+7\overset{83}{\equiv}0\Rightarrow 2n\overset{83}{\equiv}76\xrightarrow{\div 2}n\overset{83}{\equiv}38\Rightarrow n=83k+38$$

کوچک‌ترین عددی که به ازای آن دو عبارت، نسبت به هم غیراول می‌شوند $n=38$ است، پس به ازای هر $n\le 37$ نسبت به هم اول‌اند.

۲۳۹ ۴ ابتدا ب.م.م دو عدد $۴n+۱$ و $۵n-۳$ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $d=(۵n-۳,۴n+۱)$ باشد، پس:

$$\begin{cases} d\mid ۴n+۱\\ d\mid ۵n-۳\end{cases}\Rightarrow d\mid ۵(۴n+۱)-۴(۵n-۳)\Rightarrow d\mid ۱۷\Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۱۷$$

حال بررسی می‌کنیم به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n، اعداد $۴n+۱$ و $۵n-۳$ نسبت به هم اول نیستند، یعنی ب.م.م آن‌ها ۱۷ است. پس:

$$۴n+۱\overset{۱۷}{\equiv}۰\Rightarrow ۴n\overset{۱۷}{\equiv}-۱\overset{۱۷}{\equiv}۱۶\xrightarrow[(۴,۱۷)=۱]{\div۴} n\overset{۱۷}{\equiv}۴$$

$$\Rightarrow n=۱۷k+۴\xrightarrow{n \text{ دورقمی}} k=۱,۲,۳,۴,۵$$

بنابراین به ازای ۵ عدد طبیعی، ب.م.م دو عدد $۴n+۱$ و $۵n-۳$ برابر ۱۷ است، پس به ازای $۹۰-۵=۸۵$ عدد دورقمی دو عبارت نسبت به هم اول‌اند (حتماً می‌دانید که تعداد اعداد دورقمی ۹۰ تا است!!!).

۲۴۰ ۱ ابتدا ۵۱ را به پیمانهٔ ۷ کوچک می‌کنیم و داریم:

$$۵۱\overset{۷}{\equiv}۲\Rightarrow ۵۱^{۱۳۱}\overset{۷}{\equiv}۲^{۱۳۱}$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۱۳۱}$ بر ۷ را به دست می‌آوریم. چون ۷ عددی اول است، می‌توان گفت $۲^{۶}\overset{۷}{\equiv}۱$ می‌باشد. پس:

$$۲^{۶}\overset{۷}{\equiv}۱\xrightarrow{\text{توان }۲۱}۲^{۱۲۶}\overset{۷}{\equiv}۱\xrightarrow{\times۲^{۵}}۲^{۱۳۱}\overset{۷}{\equiv}۳۲\overset{۷}{\equiv}۴$$

توجه کنید می‌توانستیم از $۲^{۳}\overset{۷}{\equiv}۱$ نیز شروع کنیم و به $۲^{۱۳۱}$ برسیم.

۲۴۱ ۱ می‌دانیم ۱۷ عددی اول است و ۳ مضرب ۱۷ نیست. پس:

$$۳^{۱۶}\overset{۱۷}{\equiv}۱\xrightarrow{\times۳^{۴}}۳^{۲۰}\overset{۱۷}{\equiv}۳^{۴}\overset{۱۷}{\equiv}۱۳$$

۲۴۲ ۳ ابتدا کوچک‌ترین توان ۳ را که از ۴۱ بیشتر شود، پیدا می‌کنیم:

$$۳^{۴}\overset{۴۱}{\equiv}-۱\xrightarrow{\text{توان }۷}۳^{۲۸}\overset{۴۱}{\equiv}-۱\xrightarrow{\times۳^{۳}}۳^{۳۱}\overset{۴۱}{\equiv}-۲۷$$

$$\Rightarrow ۳^{۳۱}-۹\overset{۴۱}{\equiv}\underbrace{-۲۷-۹}_{+۱\times۴۱}\overset{۴۱}{\equiv}۵$$

۲۴۳ ۳ ابتداکوچک‌ترین توان ۲ راکه‌از ۴۳ بیشتر شود، پیدا می‌کنیم و داریم:

$$۲^{۶}\overset{۴۳}{\equiv}۲۱\Rightarrow ۲^{۷}\overset{۴۳}{\equiv}۴۲\overset{۴۳}{\equiv}-۱$$

بنابراین $۲^{۷}\overset{۴۳}{\equiv}-۱$ می‌باشد، پس:

$$۲^{۷}\overset{۴۳}{\equiv}-۱\xrightarrow{\text{توان }۳}۲^{۲۱}\overset{۴۳}{\equiv}-۱\xrightarrow{\times۲^{۵}}۲^{۲۶}\overset{۴۳}{\equiv}-۳۲\overset{۴۳}{\equiv}۱۱$$

۲۴۴ ۴ باید $۳^{۱۵}+a\overset{۱۷}{\equiv}۰$ باشد. چون ۱۷ عددی اول است، ابتدا طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$۳^{۱۵}+a\overset{۱۷}{\equiv}۰\Rightarrow \overset{۱}{\cancel{۳^{۱۶}}}+۳a\overset{۱۷}{\equiv}۰\Rightarrow ۱+۳a\overset{۱۷}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow ۳a\overset{۱۷}{\equiv}-۱\overset{۱۷}{\equiv}-۱۸\xrightarrow[(۳,۱۷)=۱]{\div۳}a\overset{۱۷}{\equiv}-۶\Rightarrow a=۱۷k-۶$$

حال باید تعداد اعداد دورقمی a را پیدا کنیم:

$$۱۰\le a\le ۹۹\Rightarrow ۱۰\le ۱۷k-۶\le ۹۹\Rightarrow ۱۶\le ۱۷k\le ۱۰۵$$

$$\Rightarrow ۰/...\le k\le ۶/...\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}۱\le k\le ۶\Rightarrow ۶ \text{ عدد}$$

۲۴۵ ۴ ابتدا توانی از ۷ را پیدا می‌کنیم تا به پیمانهٔ ۵۷ برابر ۱ یا ۱- شود:

$$۷^{۳}\overset{۵۷}{\equiv}۱\xrightarrow{\text{توان }۵}۷^{۱۵}\overset{۵۷}{\equiv}۱\xrightarrow{\times۷^{۲}}۷^{۱۷}\overset{۵۷}{\equiv}۴۹$$

حال چون $۷^{۱۷}+a$ بر ۵۷ بخش‌پذیر است، داریم:

$$\overset{۴۹}{۷^{۱۷}}+a\overset{۵۷}{\equiv}۰\Rightarrow ۴۹+a\overset{۵۷}{\equiv}۰\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}}a=۸$$

۲۴۶ ۲ **روش اول:** ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۱۱}$ بر ۲۳ را به دست می‌آوریم:

$$۲^{۱۱}\overset{۲۳}{\equiv}۲^{۵}\times۲^{۶}\overset{۲۳}{\equiv}۹\times(-۵)\overset{۲۳}{\equiv}۱$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۲۳ برابر است با:

$$(\overset{۱}{\cancel{۲^{۱۱}}}+۷)\times۹\overset{۲۳}{\equiv}\underbrace{(۱+۷)\times۹}_{۷۲}\overset{۲۳}{\equiv}۳$$

روش دوم: حاصل $۲^{۱۱}$ را به راحتی می‌توانیم حساب کنیم. می‌دانیم $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ است، پس $۲^{۱۱}=۲۰۴۸$ می‌باشد و داریم:

$$(۲^{۱۱}+۷)\times۹\overset{۲۳}{\equiv}(۲۰۴۸+۷)\times۹\overset{۲۳}{\equiv}(۱+۷)\times۹\overset{۲۳}{\equiv}۳$$

۲۴۷ ۳ رابطهٔ هم‌باقی‌مانده بر ۱۱ همان رابطهٔ همنهشتی در پیمانهٔ ۱۱ است. از آن‌جایی که ۱۱ عددی اول است، داریم:

$$۵^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\Rightarrow ۵^{۱۰}\in[۱]_{۱۱}$$

۲۴۸ ۳ چون a و ۱۵ نسبت به هم اول‌اند، پس a مضرب ۳ و مضرب ۵ نیست. چون ۳ و ۵ عددی اول‌اند، می‌توان گفت:

$$\begin{cases} a^{۲}\overset{۳}{\equiv}۱\xrightarrow{\text{توان }۲}a^{۴}\overset{۳}{\equiv}۱\\ a^{۴}\overset{۵}{\equiv}۱\end{cases}\Rightarrow a^{۴}\overset{[۳,۵]}{\equiv}۱\Rightarrow a^{۴}\overset{۱۵}{\equiv}۱\Rightarrow a^{۴}+۲۳\overset{۱۵}{\equiv}۲۴\overset{۱۵}{\equiv}۹$$

۲۴۹ ۱ **روش اول:** چون پیمانه عدد اول ۱۱ می‌باشد، پس $۳^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$ است. حال با به توان رساندن و ضرب‌کردن در توان‌های ۳ به $۳^{۴۸}$ می‌رسیم:

$$۳^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\xrightarrow{\text{توان }۴}۳^{۴۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\xrightarrow{\times۳^{۸}}۳^{۴۸}\overset{۱۱}{\equiv}\overset{۴}{\cancel{۸۱}}\times\overset{۴}{\cancel{۸۱}}\overset{۱۱}{\equiv}۴\times۴\overset{۱۱}{\equiv}۵$$

روش دوم: ابتدا توانی از ۳ را پیدا می‌کنیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۱ برابر ۱ یا ۱- باشد:

$$۳^{۳}\overset{۱۱}{\equiv}۵\xrightarrow{\times۳}۳^{۴}\overset{۱۱}{\equiv}۱۵\overset{۱۱}{\equiv}۴\xrightarrow{\times۳}۳^{۵}\overset{۱۱}{\equiv}۱۲\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

$$\Rightarrow(۳^{۵}\overset{۱۱}{\equiv}۱)^{۹}\Rightarrow ۳^{۴۵}\overset{۱۱}{\equiv}۱\xrightarrow{\times۳^{۳}}۳^{۴۸}\overset{۱۱}{\equiv}۲۷\overset{۱۱}{\equiv}۵$$

۲۵۰ ۲ به نظر می‌رسد به دلیل اول بودن ۱۷ بگوییم $۱۳^{۱۶}\overset{۱۷}{\equiv}۱$ است. این همنهشتی کاملاً درست است اما برای رسیدن از $۱۳^{۱۶}$ به $۱۳^{۴۳}$ دچار مشکل می‌شویم. چون وقتی آن را به توان ۲ می‌رسانیم $۱۳^{۳۲}$ شده که در مرحلهٔ بعد باید طرفین را در $۱۳^{۱۱}$ ضرب کنیم که $۱۳^{۱۱}$ عدد کوچکی نیست. با کمی دقت متوجه می‌شویم که $۱۳^{۲}\overset{۱۷}{\equiv}-۱$ است، پس:

$$۱۳^{۲}\overset{۱۷}{\equiv}-۱\xrightarrow{\text{توان }۲۱}۱۳^{۴۲}\overset{۱۷}{\equiv}-۱\xrightarrow{\times۱۳}۱۳^{۴۳}\overset{۱۷}{\equiv}-۱۳\overset{۱۷}{\equiv}۴$$

۲۵۱ ۴ وقتی عدد $7^{15}+a$ مضرب ۱۷ است، یعنی $7^{15}+a \overset{17}{\equiv} 0$ می‌باشد.
چون ۱۷ عددی اول است و می‌دانیم $7^{16} \overset{17}{\equiv} 1$ می‌باشد، پس طرفین رابطهٔ هم‌نهشتی را در ۷ ضرب می‌کنیم تا بتوانیم از این قاعده استفاده کنیم:

$$7^{15}+a \overset{17}{\equiv} 0 \xRightarrow{\times 7} \overset{1}{\cancel{7^{16}}}+7a \overset{17}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 1+7a \overset{17}{\equiv} 0 \xRightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a=12$$

۲۵۲ ۴ چون $7^{200}+a$ مضرب ۱۹ است، پس $7^{200}+a \overset{19}{\equiv} 0$ می‌شود.
بنابراین 7^{200} را به پیمانهٔ ۱۹ کوچک می‌کنیم:

$$7^{18} \overset{19}{\equiv} 1 \xRightarrow{\text{توان } 11} 7^{198} \overset{19}{\equiv} 1 \xRightarrow{\times 7^2} 7^{200} \overset{19}{\equiv} \underbrace{49 \overset{19}{\equiv} 11}_{-2\times 19}$$

پس در رابطهٔ $7^{200}+a \overset{19}{\equiv} 0$ می‌توان به‌جای 7^{200} عدد ۱۱ را قرار داد. حال داریم:

$$\overset{11}{\cancel{7^{200}}}+a \overset{19}{\equiv} 0 \Rightarrow 11+a \overset{19}{\equiv} 0 \xRightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} a=8$$

۲۵۳ ۳

نیم‌نگاه
می‌دانیم اگر a مضرب عدد اول p نباشد، همواره $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$ می‌باشد. حال با ضرب طرفین در a، داریم: $\boxed{a^p \overset{p}{\equiv} a}$

باید کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a را تعیین کنیم به‌طوری که $a^{49}+12a \overset{7}{\equiv} 1$ شود. چون ۷ عددی اول است، داریم:

$$a^7 \overset{7}{\equiv} a \xRightarrow{\text{توان } 7} a^{49} \overset{7}{\equiv} a^7 \overset{7}{\equiv} a \Rightarrow a^{49}+12a \overset{7}{\equiv} a+12a \overset{7}{\equiv} 13a \overset{7}{\equiv} -a$$

بنابراین در رابطهٔ $a^{49}+12a \overset{7}{\equiv} 1$ به‌جای $a^{49}+12a$ می‌توان $-a$ قرار داد، پس:

$$-a \overset{7}{\equiv} 1 \xRightarrow{\times(-1)} a \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow a=7k-1 \xRightarrow[k=15]{\text{کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی}} a=104$$

$\Rightarrow$ رقم یکان $=4$

توجه کنید که a حتماً مضرب ۷ نیست، چون اگر مضرب ۷ بود باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^{49}+12a$ بر ۷ برابر صفر می‌شد. به همین دلیل $a^7 \overset{7}{\equiv} a$ می‌باشد.

۲۵۴ ۲ می‌دانیم $13^p \overset{p}{\equiv} 13$ است، داریم:

$$13^p-1 \overset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow 13-1 \overset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow p \mid 12 \Rightarrow p=2, p=3$$

۲۵۵ ۴ با توجه به این‌که ۱۸۵ و ۲۴ در یک کلاس هم‌نهشتی به پیمانهٔ m هستند، پس $24 \overset{m}{\equiv} 185$ می‌باشد. چون پیمانه مجهول است، رابطهٔ هم‌نهشتی را به رابطهٔ بخش‌پذیری تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$m \mid 185-24 \Rightarrow m \mid 161 \Rightarrow m=7 \text{ یا } m=161 \text{ یا } m=23$$

از آن‌جایی که $(m,7)=1$ می‌باشد، پس $m=23$ مورد قبول است. حال باید باقی‌ماندهٔ تقسیم 23^{23} بر ۷ را به دست آوریم:

$$\begin{cases} 23 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 23^{23} \overset{7}{\equiv} 2^{23} \\ 2^3 \overset{7}{\equiv} 1 \xRightarrow{\text{توان } 7} 2^{21} \overset{7}{\equiv} 1 \xRightarrow{\times 2^2} 2^{23} \overset{7}{\equiv} 4 \end{cases} \Rightarrow 23^{23} \overset{7}{\equiv} 4$$

۲۵۶ ۳

نیم‌نگاه
برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم a^{b^c} بر m، ابتدا توانی از a را پیدا می‌کنیم که در هم‌نهشتی به پیمانهٔ m برابر ۱ شود. سپس با به توان رساندن و ضرب کردن به a^{b^c} می‌رسیم.

ابتدا توانی از ۷ را پیدا می‌کنیم که به پیمانهٔ ۴۳، هم‌نهشت با ۱ شود:

$$7^2 \overset{43}{\equiv} 6 \xRightarrow{\times 7} 7^3 \overset{43}{\equiv} 42 \overset{43}{\equiv} -1 \xRightarrow{\text{توان } 2} 7^6 \overset{43}{\equiv} 1$$

سپس باقی‌ماندهٔ تقسیم 17^9 را بر ۶ به دست می‌آوریم:

$$17 \overset{6}{\equiv} -1 \xRightarrow{\text{توان } 9} 17^9 \overset{6}{\equiv} -1 \overset{6}{\equiv} 5 \Rightarrow 17^9=6q+5$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$7^6 \overset{43}{\equiv} 1 \xRightarrow{\text{توان } q} 7^{6q} \overset{43}{\equiv} 1 \xRightarrow{\times 7^5} 7^{6q+5} \overset{43}{\equiv} 7^5 \Rightarrow 7^{17^9} \overset{43}{\equiv} 7^5$$

حال اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^5 بر ۴۳ را به دست آوریم، کار تمام است:

$$7^2 \overset{43}{\equiv} 6 \xRightarrow{\times 7} 7^3 \overset{43}{\equiv} 42 \overset{43}{\equiv} -1 \xRightarrow{\times 7^2} 7^5 \overset{43}{\equiv} \underbrace{-49 \overset{43}{\equiv} 37}_{+2\times 43}$$

۲۵۷ ۱ از حسابان (۱) به یاد دارید که $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$، پس:

$$(1+2+\cdots+1380)^{1380}=\left(\frac{1380\times 1381}{2}\right)^{1380}=(690\times 1381)^{1380}$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $(1+2+\cdots+1380)^{1380}$ بر ۱۳۸۰ برابر است با:

$$(1+2+\cdots+1380)^{1380} \overset{1380}{\equiv} (690\times \overset{1}{\cancel{1381}})^{1380} \overset{1380}{\equiv} 690^{1380} \overset{1380}{\equiv} 0$$

دقت کنید $2\times 690=1380$ می‌باشد، پس واضح است که اگر ۶۹۰ به توان ۱۳۸۰ برسد، حتماً مضرب ۱۳۸۰ می‌شود.

۲۵۸ ۴ واضح است $7+5=12$ و $7\times 5=35$ است. پس:

$$(5+7)^{19} \overset{5\times 7}{\equiv} 5^{19}+7^{19} \Rightarrow 12^{19} \overset{35}{\equiv} 5^{19}+7^{19} \Rightarrow 12^{19}-5^{19}-7^{19} \overset{35}{\equiv} 0$$

۲۵۹ ۴ چون $12+11=23$ است، داریم:

$$23^{51} \overset{11\times 12}{\equiv} 11^{51}+12^{51} \Rightarrow 23^{51}-11^{51}-12^{51} \overset{132}{\equiv} 0$$

۲۶۰ ۳

نیم‌نگاه
در محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد توان‌دار بر m، اگر m مرکب بود به‌جای m یک مقسوم‌علیه m را قرار می‌دهیم (پیمانه را لاغر می‌کنیم). فقط باید از عددی به‌جای m استفاده کنید که گزینه‌ها به پیمانهٔ جدید متفاوت شوند.

همین ابتدای کار توجه کنید که گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند، چون باقی‌مانده هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. به‌جای ۳۳ می‌توان هم ۳ قرار داد و هم ۱۱، اما به ازای ۳، گزینه‌های (۳) و (۴) با صفر هم‌نهشت می‌شوند ($15 \overset{3}{\equiv} 0$ و $18 \overset{3}{\equiv} 0$)، ولی اگر ۱۱ را قرار دهیم گزینه‌ها متفاوت می‌شوند ($15 \overset{11}{\equiv} 4$ و $18 \overset{11}{\equiv} 7$):

$$(-6)^{23} \overset{11}{\equiv} -(6^{10})^2\times 6^3 \overset{11}{\equiv} -(1)\times 6^3 \overset{11}{\equiv} -6\times 36$$

$$\overset{11}{\equiv} -6\times 3 \overset{11}{\equiv} -18 \Rightarrow (-6)^{23} \overset{11}{\equiv} 4$$

که ۱۵ در پیمانهٔ ۱۱ با ۴ هم‌نهشت است، پس گزینهٔ (۳) صحیح می‌باشد.

۲۶۱ **۳** می‌توانیم به‌جای پیمانهٔ ۷ یا ۸ استفاده کنیم، اما از کدام استفاده کنیم؟ گزینه‌های (۲) و (۳) به پیمانهٔ ۷ دو عدد یکسان می‌شوند ($25 \overset{7}{\equiv} 4$ و $32 \overset{7}{\equiv} 4$). اما به پیمانهٔ ۸ تمام گزینه‌ها متفاوت هستند. نگاه کنید:

۱) $31 \overset{8}{\equiv} 7$ ۲) $32 \overset{8}{\equiv} 0$ ۳) $25 \overset{8}{\equiv} 1$ ۴) $26 \overset{8}{\equiv} 2$

پس همنهشتی 3^{1000} را به پیمانهٔ ۸ به دست می‌آوریم:

$$3^2 \overset{8}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 500} 3^{1000} \overset{8}{\equiv} 1$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم 3^{1000} بر عدد ۵۶ برابر ۲۵ است، زیرا $25 \overset{8}{\equiv} 1$ می‌باشد.

۲۶۲ **۱** به‌جای ۳۵ از ۵ استفاده می‌کنیم، چون گزینه‌ها به پیمانهٔ ۵ تبدیل به اعداد متفاوتی می‌شوند:

$$\left.\begin{array}{l} 6 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 6^{60} \overset{5}{\equiv} 1 \\ 3^4 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{60} \overset{5}{\equiv} 1 \\ 2^4 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{60} \overset{5}{\equiv} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6^{60}+3^{60}-2^{60} \overset{5}{\equiv} 1+1-1 \overset{5}{\equiv} 1$$

۲۶۳ **۱** به‌جای ۳۵، هم می‌توان ۵ قرار داد و هم ۷، ولی چون همهٔ گزینه‌ها کوچک‌تر از ۷ هستند، باقی‌مانده‌های متفاوتی بر ۷ خواهند داشت. پس کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد را بر ۷ پیدا کنیم و همچنین براساس قضیهٔ فرما داریم: $3^6 \overset{7}{\equiv} 1$ و $2^6 \overset{7}{\equiv} 1$. بنابراین:

$$3^{42}-2^{42} \overset{7}{\equiv} (3^6)^7-(2^6)^7 \overset{7}{\equiv} 1-1 \overset{7}{\equiv} 0$$

۲۶۴ **۱** می‌دانیم $-1 \overset{65}{\equiv} 64$ است و با توان‌هایی از ۲، ۴ و ۸ می‌توان ۶۴ را ساخت. پس:

$$2^{65}+4^{65}+8^{65} \overset{65}{\equiv} (\underbrace{2^6}_{-1})^{10}\times 2^5+(\underbrace{4^3}_{-1})^{21}\times 4^2+(\underbrace{8^2}_{-1})^{32}\times 8$$

$$\overset{65}{\equiv} 32-16+8 \overset{65}{\equiv} 24$$

۲۶۵ **۳** ابتدا پایه‌ها را به پیمانهٔ ۱۲ کوچک می‌کنیم:

$$241^n+242^n+\cdots+251^n \overset{12}{\equiv} 0 \Rightarrow 1^n+2^n+3^n+\cdots+11^n \overset{12}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+(-5^n)+(-4)^n$$

$$+(-3)^n+(-2)^n+(-1)^n \overset{12}{\equiv} 0$$

واضح است که اگر n یک عدد فرد و بزرگ‌تر از ۱ باشد، حاصل عبارت $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n$ با حاصل عبارت $(-1)^n+(-2)^n+(-3)^n+(-4)^n+(-5^n)$ قرینهٔ یکدیگر شده و مجموع آن‌ها صفر می‌شود. حال اگر n برابر ۱ نباشد، 6^n نیز مضرب ۱۲ شده و به پیمانهٔ ۱۲ صفر می‌شود، پس به ازای اعداد طبیعی یک‌رقمی ۳، ۵، ۷ و ۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر صفر است. توجه کنید به ازای nهای زوج، باقی‌مانده صفر نمی‌شود.

۲۶۶ **۴** ابتدا رابطهٔ بخش‌پذیری را به رابطهٔ همنهشتی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$25 \mid 6^n-3^n \Rightarrow 6^n-3^n \overset{25}{\equiv} 0 \Rightarrow 3^n(2^n-1) \overset{25}{\equiv} 0$$

در رابطهٔ اخیر واضح است که 3^n مضرب ۲۵ نیست، پس حتماً 2^n-1 مضرب ۲۵ می‌باشد و داریم:

$$2^n-1 \overset{25}{\equiv} 0 \Rightarrow 2^n \overset{25}{\equiv} 1$$

حال باید کوچک‌ترین n را پیدا کنیم:

$$2^5 \overset{25}{\equiv} 7 \Rightarrow 2^7 \overset{25}{\equiv} 28 \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow 2^{10} \overset{25}{\equiv} 24 \overset{25}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^{20} \overset{25}{\equiv} 1$$

پس کوچک‌ترین n برابر ۲۰ است. البته می‌توانستیم برای پیدا کردن کوچک‌ترین n از گزینه‌ها نیز استفاده کنیم. از کوچک‌ترین عدد گزینه‌ها شروع می‌کنیم:

$$\underset{1024}{2^{10}} \overset{25}{\equiv} -1 \xrightarrow{\times 2^5} 2^{15} \overset{25}{\equiv} -32 \xrightarrow{\times 2} 2^{16} \overset{25}{\equiv} -64$$

اما از $2^{10} \overset{25}{\equiv} -1$ می‌توان نتیجه گرفت $2^{20} \overset{25}{\equiv} 1$ است، پس کوچک‌ترین n برابر ۲۰ می‌باشد.

۲۶۷ **۳** باید $2^n+1 \overset{65}{\equiv} 0$ باشد، یعنی $2^n \overset{65}{\equiv} -1$. بنابراین ابتدا کوچک‌ترین توان ۲ را پیدا می‌کنیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۶۵ برابر ۱- شود:

$$2^6 \overset{65}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^6 \overset{65}{\equiv} -1)^{2k+1} \Rightarrow 2^{12k+6} \overset{65}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow 2^{12k+6}+1 \overset{65}{\equiv} 0 \Rightarrow n=12k+6$$

$$\Rightarrow 1 \le 12k+6 < 100 \Rightarrow -5 \le 12k < 94$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{12} \le k < \frac{94}{12} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 0 \le k \le 7 \Rightarrow \text{تعداد}=8$$

۲۶۸ **۳** چون $-1 \overset{43}{\equiv} 42$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت $7^n-1 \overset{42}{\equiv} 0$ و این یعنی $7^n \overset{43}{\equiv} 1$. پس باید ابتدا کوچک‌ترین توان ۷ را پیدا کنیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۴۳ برابر ۱ شود:

$$7^2 \overset{43}{\equiv} 6 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \overset{43}{\equiv} 42 \overset{43}{\equiv} -1 \Rightarrow 7^3 \overset{43}{\equiv} -1 \Rightarrow 7^6 \overset{43}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 7^{6k} \overset{43}{\equiv} 1 \Rightarrow n=6k \Rightarrow 1 \le 6k < 50 \Rightarrow k=1,2,\cdots,8 \Rightarrow \text{جواب } 8$$

۲۶۹ **۴** ابتدا باید کوچک‌ترین توان ۱۱ که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۹ برابر ۱ می‌باشد را پیدا کنیم:

$$11 \overset{19}{\equiv} -8 \xrightarrow{\times 11} 11^2 \overset{19}{\equiv} -88 \overset{19}{\equiv} 7 \xrightarrow{\times 11} 11^3 \overset{19}{\equiv} \underset{-4\times 19}{77} \overset{19}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 11^{3k} \overset{19}{\equiv} 1 \Rightarrow a=3k \Rightarrow 10 \le 3k \le 99 \Rightarrow 4 \le k \le 33$$

$$\Rightarrow \text{تعداد}=33-4+1=30$$

۲۷۰ **۴** اگر بتوانیم توانی از ۵ را پیدا کنیم که در همنهشتی به پیمانهٔ ۳۱ برابر ۱ یا ۱- شود، خیلی خوب می‌شود:

$$5^3 \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } n} 5^{3n} \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5^2} 5^{3n+2} \overset{31}{\equiv} 25 \overset{31}{\equiv} -6$$

$$\Rightarrow 5^{3n+2} \overset{31}{\equiv} -6 \xrightarrow{\text{توان } 2} 5^{6n+4} \overset{31}{\equiv} 36 \overset{31}{\equiv} 5$$

حال در همنهشتی به پیمانهٔ ۳۱، به‌جای 5^{6n+4} عدد ۵ و به‌جای 5^{3n+2} عدد ۶- را قرار می‌دهیم و داریم:

$$5^{6n+4}+5^{3n+2}+1 \overset{31}{\equiv} 5+(-6)+1 \overset{31}{\equiv} 0$$

بنابراین برای هر عدد طبیعی n، عبارت داده‌شده بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

۲۷۱ **۲** اگر توانی از ۷ را پیدا کنیم که در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۴۳ برابر ۱ یا ۱– شود، حل مسأله بسیار راحت می‌شود:

$$7^2 \overset{43}{\equiv} 6 \xRightarrow{\times 7^1} 7^3 \overset{43}{\equiv} 42 \overset{43}{\equiv} -1$$

بنابراین 7^{6n+4} و 7^{3n} به پیمانهٔ ۳۱ برابر است با:

$$7^3 \overset{43}{\equiv} -1 \xRightarrow{\text{توان}\, n} 7^{3n} \overset{43}{\equiv} (-1)^n$$

$$7^3 \overset{43}{\equiv} -1 \xRightarrow{\text{توان}\, 2n} 7^{6n} \overset{43}{\equiv} 1 \Rightarrow 7^{6n+4} \overset{43}{\equiv} \overset{-1}{7^3} \times 7 \overset{43}{\equiv} -1\times 7 \overset{43}{\equiv} -7$$

حال در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۴۳، به‌جای 7^{6n+4} عدد ۷– و به‌جای 7^{3n} عدد $(-1)^n$ را قرار می‌دهیم:

$$7^{6n+4} + 7^{3n} + 6 \overset{43}{\equiv} 0 \Rightarrow (-7) + (-1)^n + 6 \overset{43}{\equiv} 0 \Rightarrow -1 + (-1)^n \overset{43}{\equiv} 0$$

واضح است اگر n عددی زوج باشد، $-1+(-1)^n$ برابر صفر شده و درهم‌نهشتی فوق صدق می‌کند.

۲۷۲ **۱** ابتدا بررسی کنیم کدام توان ۱۱ در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۷ برابر ۱ یا ۱– می‌شود:

$$11^2 \overset{17}{\equiv} 2 \xRightarrow{\text{توان}\, 4} 11^8 \overset{17}{\equiv} 16 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow 11^{8n} \overset{17}{\equiv} (-1)^n$$

$$11^8 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow 11^{16n} \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 11^{16n+17} \overset{17}{\equiv} 11^8 \times 11^8 \times 11$$

$$\overset{17}{\equiv} (-1)\times(-1)\times 11 \overset{17}{\equiv} 11$$

حال داریم:

$$11^{8n} + 11^{16n+17} + 7 \overset{17}{\equiv} 0 \Rightarrow (-1)^n + 11 + 7 \overset{17}{\equiv} 0 \Rightarrow (-1)^n + 1 \overset{17}{\equiv} 0$$

واضح است برای آن‌که $1+(-1)^n$ صفر شود، n باید فرد باشد.

۲۷۳ **۳** ابتدا به‌کمک ویژگی‌های توان، عدد $15^{4n}+9^{3n+1}\times 10^{6n+2}-5$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$15^{4n} + (3^2)^{3n+1}\times 10^{6n+2} - 5 = 15^{4n} + 3^{6n+2}\times 10^{6n+2} - 5$$

$$= 15^{4n} + 30^{6n+2} - 5$$

حال ۱۵ و ۳۰ را به پیمانهٔ ۷ کوچک می‌کنیم:

$$15^{4n} + 30^{6n+2} - 5 \overset{7}{\equiv} 1^{4n} + 2^{6n+2} - 5 \overset{7}{\equiv} 2^{6n+2} - 4$$

بنابراین داریم:

$$2^6 \overset{7}{\equiv} 1 \xRightarrow{\text{توان}\, n} 2^{6n} \overset{7}{\equiv} 1 \xRightarrow{\times 2^2} 2^{6n+2} \overset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow 2^{6n+2} - 4 \overset{7}{\equiv} 4 - 4 \overset{7}{\equiv} 0$$

پس به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $15^{4n}+9^{3n+1}\times 10^{6n+2}-5$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۲۷۴ **۱** ابتدا باید به کمک هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۲۳، 5^{2n+1} را به صورت توانی از ۲ بنویسیم:

$$5^2 \overset{23}{\equiv} 2 \xRightarrow{\text{توان}\, n} 5^{2n} \overset{23}{\equiv} 2^n \xRightarrow{\times 5} 5^{2n+1} \overset{23}{\equiv} 5\times 2^n$$

حال داریم:

$$5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} \overset{23}{\equiv} 5\times 2^n + 16\times 2^n + 2\times 2^n \overset{23}{\equiv} 23\times 2^n \overset{23}{\equiv} 0$$

بنابراین به ازای تمام مقادیر طبیعی n، عبارت $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ بر عدد ۲۳ بخش‌پذیر است.

۲۷۵ **۳** در عدد داده‌شده بعضی ارقام به طور متناوب تکرار شده است، پس:

$$\overline{ababab} = \overline{ab} + 100\overline{ab} + 10000\overline{ab} = \underbrace{10101}_{111\times 91}\,\overline{ab} = 3\times 37\times 7\times 13\times \overline{ab}$$

باتوجه به اعداد به دست آمده واضح است که این عدد ممکن است مضرب ۳۱ نباشد. دلیل استفاده از قید ممکن، به خاطر $\overline{ab}$ است، شاید $\overline{ab}$ برابر ۳۱ یا ۶۲ یا ۹۳ باشد. در این صورت مضرب ۳۱ هم می‌شود.

۲۷۶ **۱** طبق گفته‌های سؤال، $7\times\overline{abcabc}=n^2$ می‌باشد. پس:

$$7\times\overline{abcabc} = n^2 \Rightarrow 7\times(\overline{abc} + 1000\times\overline{abc}) = n^2$$

$$\Rightarrow 7\times \underbrace{1001}_{11\times 91}\times\overline{abc} = n^2$$

$$\Rightarrow 7\times 11\times 7\times 13\times\overline{abc} = n^2 \Rightarrow 7^2\times 11\times 13\times\overline{abc} = n^2$$

واضح است برای آن‌که سمت چپ تساوی نیز مربع کامل باشد، باید $\overline{abc}=11\times 13\times k^2$ باشد، پس:

$$\overline{abc} = 143k^2 \begin{cases} \xrightarrow{k=1} \overline{abc} = 143 \Rightarrow a+b+c = 8 \\ \xrightarrow{k=2} \overline{abc} = 572 \Rightarrow a+b+c = 14 \end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار مجموع ارقام عدد $\overline{abc}$ برابر ۱۴ است.

۲۷۷ **۴** طبق صورت سؤال $\overline{ababab}=111\times n^2$ است، پس:

$$\overline{ababab} = 111\times n^2 \Rightarrow \overline{ab} + 100\times\overline{ab} + 10000\times\overline{ab} = 111\times n^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{10101}_{91\times 111}\times\overline{ab} = 111\times n^2 \Rightarrow 91\times\overline{ab} = n^2 \Rightarrow \overline{ab} = 91$$

$$\Rightarrow a + b = 9 + 1 = 10$$

۲۷۸ **۱** با عددی مواجهیم که ارقام آن به طور متناوب تکرار می‌شوند، پس:

$$\overline{aabb} = n^2 \Rightarrow \overline{a0b} + 10\times\overline{a0b} = n^2 \Rightarrow 11\times\overline{a0b} = n^2$$

واضح است برای آن‌که سمت چپ تساوی نیز مربع کامل شود، باید $\overline{a0b}=11k^2$ باشد. حال به k عدد می‌دهیم تا اولاً یک عدد سه‌رقمی حاصل شود، ثانیاً رقم دهگان آن نیز صفر باشد:

$$\overline{a0b} = 11k^2 \xRightarrow{k=8} \overline{a0b} = 704 \Rightarrow a = 7, b = 4$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $\overline{ab}$ یعنی ۷۴ بر ۱۳ را می‌خواهیم. پس:

$$\begin{array}{r|l} 74 & 13 \\ -65 & 5 \\ \hline 9 & \end{array} \Rightarrow r = 9$$

۲۷۹ **۴** طبق صورت سؤال $111\times\overline{ababab}=n^2$ است. پس:

$$111\times(\overline{ab} + 100\overline{ab} + 10000\overline{ab}) = n^2 \Rightarrow 111\times\underbrace{10101}_{111\times 91}\times\overline{ab} = n^2$$

$$\Rightarrow 111^2\times 91\times\overline{ab} = n^2$$

واضح است اگر $\overline{ab}=91$ باشد، سمت چپ تساوی نیز مربع کامل می‌شود. حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $\overline{ba}$ بر ۱۶ برابر است با:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 16 \\ -16 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} \Rightarrow r = 3$$

۲۸۰ ۳ با توجه به صورت سؤال، $\overline{abc}-\overline{cba}=77k$ است، پس:

$$(c+10b+100a)-(a+10b+100c)=77k$$

$$\Rightarrow 99a-99c=77k \Rightarrow 99(a-c)=77k$$

$$\xrightarrow{\div 11} 9(a-c)=7k \Rightarrow a-c=7k' \xrightarrow{a\neq c} \begin{cases} a=9, c=2 \\ a=8, c=1 \end{cases}$$

دقت کنید a و c مقادیر دیگری را نمی‌پذیرند، چون $\overline{abc}$ و $\overline{cba}$ اعداد سه‌رقمی هستند. در ضمن b می‌تواند از صفر تا ۹ باشد. بنابراین بزرگ‌ترین عدد $\overline{abc}$ برابر ۹۹۲ می‌باشد که از $961=31^2$، ۳۱ واحد بیشتر است.

۲۸۱ ۱ به کمک قواعد بخش‌پذیری بر ۸، ۹ و ۱۱، داریم:

$$\begin{cases} 736521 \overset{8}{\equiv} 521 \overset{8}{\equiv} 1 \\ 736521 \overset{9}{\equiv} 1+2+5+6+3+7 \overset{9}{\equiv} 6 \\ 736521 \overset{11}{\equiv} 1-2+5-6+3-7 \overset{11}{\equiv} -6 \overset{11}{\equiv} 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموع باقی‌مانده‌ها $=1+6+5=12$

۲۸۲ ۲ سه‌رقم سه‌رقم از سمت راست جدا می‌کنیم و داریم:

$$\overline{a1aba} \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{aba}-\overline{a1} \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow (100a+10b+a)-(10a+1) \overset{7}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow \cancel{91a}+10b-1 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 10b-1 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 10b \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{باتوجه به گزینه‌ها}} b=5$$

۲۸۳ ۲ دو رقم دو رقم از سمت راست جدا می‌کنیم و داریم:

$$\overline{5ab32} \overset{101}{\equiv} 0 \Rightarrow 32-\overline{ab}+5 \overset{101}{\equiv} 0 \Rightarrow 37-\overline{ab} \overset{101}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{ab}=37$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم ۵۳۷۳۲ بر ۹ را به دست می‌آوریم:

$$53732 \overset{9}{\equiv} 2+3+7+3+5 \overset{9}{\equiv} 2$$

۲۸۴ ۱ می‌دانیم $36=4\times 9$ می‌باشد، پس:

$$\overline{a746b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{6b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow b=0,4,8 \quad (*)$$

$$\overline{a746b} \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow b+6+4+7+a \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow b+a-1 \overset{9}{\equiv} 0$$

$$\xrightarrow{(*)} \begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} b=4 \\ a=6 \end{cases}, \quad \begin{cases} b=8 \\ a=2 \end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین N عدد ۶۷۴۶۴ می‌باشد. حال باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۶۷۴۶۴ بر ۱۱ برابر است با: $67464 \overset{11}{\equiv} 4-6+4-7+6 \overset{11}{\equiv} 1$

۲۸۵ ۳ می‌دانیم $44=4\times 11$ است. پس باید بخش‌پذیری عدد $\overline{12a3b}$ بر ۴ و ۱۱ را بررسی کنیم:

$$\overline{12a3b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{3b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow b=2, b=6$$

$$\overline{12a3b} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b-3+a-2+1 \overset{11}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow a+b-4 \overset{11}{\equiv} 0 \begin{cases} \xrightarrow{b=2} a-2 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a=2 \\ \xrightarrow{b=6} a+2 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a=9 \end{cases}$$

بنابراین دو عدد به صورت $\overline{12a3b}$ بر ۴۴ بخش‌پذیر است.

۲۸۶ ۱ می‌دانیم $44=4\times 11$ است، پس بخش‌پذیری مجموع دو عدد $\overline{4b56}$ و $\overline{233a}$ را بر ۴ و ۱۱ بررسی کنیم:

$$\overline{4b56}+\overline{233a} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \cancel{56}+\overline{3a} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{3a} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow a=2, a=6$$

$$\overline{4b56}+\overline{233a} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 6-5+b-4+a-3+3-2 \overset{11}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow a+b-5 \overset{11}{\equiv} 0$$

حال یک‌بار به ازای $a=2$ و بار دیگر به ازای $a=6$ مقدار b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a+b-5 \overset{11}{\equiv} 0 \xrightarrow{a=2} b-3 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b=3 \\ a+b-5 \overset{11}{\equiv} 0 \xrightarrow{a=6} b+1 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow \text{مقدار b به دست نمی‌آید.} \end{cases}$$

بنابراین $a+b=5$ است.

۲۸۷ ۴ می‌دانیم $44=4\times 11$ است. پس:

$$\overline{a73b8} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{b8} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow b=0,2,4,6,8$$

$$\overline{a73b8} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 8-b+3-7+a \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a-b+4 \overset{11}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=7 \end{cases}, \begin{cases} b=2 \\ a=9 \end{cases}, \begin{cases} b=4 \\ a=0 \end{cases} \text{(غ‌ق‌ق)}, \begin{cases} b=6 \\ a=2 \end{cases}, \begin{cases} b=8 \\ a=4 \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین N عدد ۲۷۳۶۸ می‌باشد که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۹ برابر است با:

$$27368 \overset{9}{\equiv} 8+\underbrace{6+3}_{0}+\underbrace{7+2}_{0} \overset{9}{\equiv} 8$$

۲۸۸ ۲ عدد داده‌شده بر ۴۴ بخش‌پذیر است، پس هم بر ۴ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است و چون مضرب ۵۵ نیست، بنابراین مضرب ۵ هم نیست، (زیرا مجبور است بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.)

$$\overline{a70b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{0b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow b=0 \text{ یا } 4 \text{ یا } 8$$

$b=0$ قابل قبول نیست، چون در این صورت عدد، مضرب ۵ هم می‌شود.

بنابراین $b=4$ یا ۸. حال داریم:

$$\overline{a70b} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b-0+7-a \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a-b \overset{11}{\equiv} 7$$

$$\begin{cases} b=4 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 11 \Rightarrow a=0 \text{ یا } 11 \text{ غ‌ق‌ق } (0<a\leq 9) \\ b=8 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 15 \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow a=4 \Rightarrow a+b=12 \end{cases}$$

۲۸۹ ۱ کافی است دورقم دورقم از سمت راست جداکرده و آن‌ها را با هم جمع کنیم

$$\overline{a63b29} \overset{99}{\equiv} 0 \Rightarrow 29+\overline{3b}+\overline{a6} \overset{99}{\equiv} 0 \xrightarrow{(*)} 29+\overline{ab}+36 \overset{99}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 65+\overline{ab} \overset{99}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{ab}=34 \Rightarrow a=3, b=4$$

(*) دقت کنید در جمع چند عدد اگر جای یکان‌ها را با هم، جای دهگان‌ها را با هم و ... عوض کنیم، حاصل‌جمع تغییری نمی‌کند، مثلاً $37+19=56$ است و $39+17$ نیز ۵۶ می‌شود. برای این‌که مطلب فوق را بهتر ببینید، یک بار اعداد را زیر هم می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r} 2\ 9 \\ +3\ b \\ +a\ 6 \\ \hline 9\ 9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2\ 9 \\ +3\ 6 \\ +a\ b \\ \hline 9\ 9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 6\ 5 \\ +a\ b \\ \hline 9\ 9 \end{array} \Rightarrow \overline{ab}=34 \Rightarrow a=3, b=4$$

۲۹۰ **۴** دورقم دورقم از سمت راست جدا کرده و زیر هم می‌نویسیم:

$$\overline{5abb6}\overset{99}{\equiv}0\Rightarrow\overline{b6}+\overline{ab}+5\overset{99}{\equiv}0\Rightarrow\begin{array}{r}b\ 6\\+a\ b\\+\ \ 5\\\hline 9\ 9\end{array}$$

واضح است برای این‌که $5+b+6$ به ما ۹ بدهد، باید $b=8$ باشد. دقت کنید در این صورت $a=0$ می‌باشد.

۲۹۱ **۲** باید دو رقم دو رقم از سمت راست جدا کنیم. سپس اعداد را زیر هم بنویسیم:

$$\overline{1ab562}\overset{99}{\equiv}0\Rightarrow 62+\overline{b5}+\overline{1a}\overset{99}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow\begin{array}{r}6\ 2\\+b\ 5\\+1\ a\\\hline 9\ 9\end{array}\Rightarrow a=2,b=2\Rightarrow a+b=4$$

۲۹۲ **۲** ابتدا دو رقم دو رقم از سمت راست جدا می‌کنیم، سپس اعداد را زیر هم می‌نویسیم:

$$\overline{82a6b}\overset{99}{\equiv}0\Rightarrow\overline{6b}+\overline{2a}+8\overset{99}{\equiv}0\Rightarrow\begin{array}{r}6\ b\\+2\ a\\+\ \ 8\\\hline 9\ 9\end{array}$$

دقت کنید $8+a+b$ باید به ما ۹ بدهد. اگر $a+b=1$ یا $a+b=11$ باشد این اتفاق رخ می‌دهد. اما به ازای $a+b=1$ حاصل جمع فوق برابر ۸۹ می‌شود که قابل‌قبول نیست، پس:

$$a+b=1\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\text{ یا }\begin{cases}b=0\\a=1\end{cases}$$

$$a+b=11\Rightarrow\begin{cases}a=2,b=9\\a=9,b=2\end{cases}\text{ یا }\begin{cases}a=3,b=8\\a=8,b=3\end{cases}$$

$$\text{ یا }\begin{cases}a=4,b=7\\a=7,b=4\end{cases}\text{ یا }\begin{cases}a=5,b=6\\a=6,b=5\end{cases}$$

بنابراین ۸ عدد پنج‌رقمی به صورت $\overline{82a6b}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است.

۲۹۳ **۳** چون دو عدد $3a-5$ و $4a-7$ رقم یکان برابر دارند، پس به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت هستند. در نتیجه داریم:

$$4a-7\overset{10}{\equiv}3a-5\Rightarrow a\overset{10}{\equiv}2\Rightarrow 9a+6\overset{10}{\equiv}\underbrace{9\times2+6}_{24}\overset{10}{\equiv}4$$

۲۹۴ **۲** رقم یکان $n!$ وقتی $n\geq5$ باشد، حتماً صفر است، چون در این صورت در $n!$ حتماً $10=2\times5$ حضور دارد. بنابراین داریم:

$$(1!+3!+\cdots+1381!)(2!+4!+\cdots+1380!)$$

$$\overset{10}{\equiv}(1+6+0+\cdots+0)(2+24+0+\cdots+0)\overset{10}{\equiv}7\times6\overset{10}{\equiv}42\overset{10}{\equiv}2$$

۲۹۵ **۱** زمانی رقم یکان a^n-a صفر می‌شود که وقتی n را بر ۴ تقسیم کنیم، باقی‌مانده ۱ شود. در این صورت به‌جای n عدد ۱ را قرار می‌دهیم و $a^n-a\overset{10}{\equiv}a^1-a\overset{10}{\equiv}0$ می‌شود. پس در گزینه‌ها باید توانی را پیدا کنیم که وقتی بر ۴ تقسیم می‌شود، باقی‌مانده‌اش ۱ شود. در گزینه‌ها، ۹۳ این‌چنین است.

۲۹۶ **۴** چون $a^p=10k+7$ است، رقم یکان a^p برابر ۷ می‌باشد. حال چون به توان a^p، ۴ واحد اضافه شده، پس رقم یکان تغییری نمی‌کند.

۲۹۷ **۳** باید ببینیم $2a^{p+20}-5$ به پیمانهٔ ۱۰ با کدام عدد هم‌نهشت است.

پس از رابطهٔ $3a^p=10k-2$، a^p را به پیمانهٔ ۱۰ کوچک می‌کنیم:

$$3a^p\overset{10}{\equiv}-2\Rightarrow3a^p\overset{10}{\equiv}-12\xrightarrow[(3,10)=1]{\div3}a^p\overset{10}{\equiv}-4$$

از طرفی چون رقم یکان a^p با رقم یکان a^{p+20} فرقی ندارد، داریم:

$$2a^{p+20}-5\overset{10}{\equiv}\underbrace{2\times(-4)-5}_{-13}\overset{10}{\equiv}7$$

۲۹۸ **۲** در واقع رقم یکان 18^{20} خواسته شده است. می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۰ بر ۴ برابر صفر است. پس:

$$18^{20}\overset{10}{\equiv}(-2)^4\overset{10}{\equiv}6$$

۲۹۹ **۳** ابتدا !۱۳۷۸ و !۱۳۷۹ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم، صفر می‌شود، پس به‌جای آن‌ها ۴ قرار می‌دهیم و داریم:

$$1378^{1378!}+1379^{1379!}\overset{10}{\equiv}8^4+9^4\overset{10}{\equiv}(-2)^4+(-1)^4\overset{10}{\equiv}16+1\overset{10}{\equiv}7$$

۳۰۰ **۳** باید هم‌نهشتی عدد را به پیمانهٔ ۱۰ به دست آوریم. ابتدا ۶۱ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده ۱ می‌شود. پس به‌جای تمام توان‌ها ۱ قرار می‌دهیم:

$$(101)^{61}+(102)^{61}+\cdots+(989)^{61}\overset{10}{\equiv}101+102+\cdots+989$$

$$\overset{10}{\equiv}1+2+\cdots+889\overset{10}{\equiv}\frac{889\times890}{2}\overset{10}{\equiv}889\times445\overset{10}{\equiv}9\times5\overset{10}{\equiv}5$$

۳۰۱ **۳** باید هم‌نهشتی A^B+B^A را به پیمانهٔ ۱۰ به دست آوریم. یک‌بار A و B را به پیمانهٔ ۱۰ و بار دیگر به پیمانهٔ ۴ کوچک می‌کنیم:

$$\begin{cases}A\overset{10}{\equiv}1!+2!+3!+\cdots+1382!\Rightarrow A\overset{10}{\equiv}1!+2!+3!+4!\overset{10}{\equiv}3\\B\overset{10}{\equiv}2!+4!+\cdots+1382!\Rightarrow A\overset{10}{\equiv}2!+4!\overset{10}{\equiv}6\end{cases}$$

$$\begin{cases}A\overset{4}{\equiv}1!+2!+3!+\cdots+1382!\Rightarrow A\overset{4}{\equiv}1!+2!+3!\overset{4}{\equiv}1\\B\overset{4}{\equiv}2!+4!+\cdots+1382!\Rightarrow B\overset{4}{\equiv}2!\overset{4}{\equiv}2\end{cases}$$

$$\Rightarrow A^B+B^A\overset{10}{\equiv}3^2+6^1\overset{10}{\equiv}5$$

۳۰۲ **۳** برای به دست آوردن رقم یکان، باید هم‌نهشتی $2^{n+5}+3^{n+5}$ را به پیمانهٔ ۱۰ به دست آوریم. حال کافی است $n+5$ را بر ۴ تقسیم کنیم که باقی‌مانده به ازای مقادیر مختلف n یکی از اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ خواهد بود. در هر حالت، رقم یکان را به دست می‌آوریم:

$$r=0\Rightarrow2^{n+5}+3^{n+5}\overset{10}{\equiv}2^4+3^4\overset{10}{\equiv}7$$

$$r=1\Rightarrow2^{n+5}+3^{n+5}\overset{10}{\equiv}2^1+3^1\overset{10}{\equiv}5$$

$$r=2\Rightarrow2^{n+5}+3^{n+5}\overset{10}{\equiv}2^2+3^2\overset{10}{\equiv}3$$

$$r=3\Rightarrow2^{n+5}+3^{n+5}\overset{10}{\equiv}2^3+3^3\overset{10}{\equiv}5$$

بنابراین بزرگ‌ترین رقم یکان برابر ۷ است.

۳۰۳ **۲** باید همنهشتی $۳^{n+۳}+۴^{n+۳}$ را به پیمانهٔ ۱۰ به دست آوریم و ببینیم چه nهایی کوچک‌ترین رقم یکان را تولید می‌کنند. برای این کار باید $n+۳$ را بر ۴ تقسیم کنیم که با یکی از حالات زیر مواجهیم:

$r=۰ \Rightarrow ۳^۴+۴^۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۱+۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۷$ $\qquad r=۱\Rightarrow ۳^۱+۴^۱ \overset{۱۰}{\equiv}۷$

$r=۲ \Rightarrow ۳^۲+۴^۲ \overset{۱۰}{\equiv}۵$ $\qquad r=۳\Rightarrow ۳^۳+۴^۳\overset{۱۰}{\equiv}۱$

بنابراین کوچک‌ترین رقم یکان به ازای nهایی به دست می‌آید که به‌ازای آن‌ها باقی‌ماندهٔ تقسیم $n+۳$ بر ۴ برابر ۳ است. پس:

$n+۳\overset{۴}{\equiv}۳ \Rightarrow n\overset{۴}{\equiv}۰ \Rightarrow n=۴k$

حالا nهای دو رقمی را می‌خواهیم. بنابراین داریم:

$۱۰\le n<۱۰۰ \Rightarrow ۱۰\le ۴k<۱۰۰$

$\Rightarrow ۲/۵\le k<۲۵ \xRightarrow{k\in\mathbb{Z}} ۳\le k\le ۲۴ \Rightarrow$ تعداد nها $=۲۲$

۳۰۴ **۲** باید رابطهٔ $(۶۰,۸۴)\,|\,۵n-۱$ برقرار باشد. پس:

$(۶۰,۸۴)\,|\,۵n-۱ \Rightarrow ۱۲\,|\,۵n-۱ \xRightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} n=۲۹$

۳۰۵ **۲** باید رابطهٔ $(۲۴,۳۹)\,|\,۷n+۱$ برقرار باشد. پس:

$(۲۴,۳۹)\,|\,۷n+۱ \Rightarrow ۳\,|\,۷n+۱ \Rightarrow ۷n+۱\overset{۳}{\equiv}۰ \Rightarrow \overset{۱}{\cancel{۷}}n\overset{۳}{\equiv}-۱$

$\Rightarrow n\overset{۳}{\equiv}-۱ \Rightarrow n=۳k-۱$

حال تعداد اعداد طبیعی و دورقمی n را به دست می‌آوریم:

$۱۰\le n\le ۹۹ \Rightarrow ۱۰\le ۳k-۱\le ۹۹\Rightarrow ۱۱\le ۳k\le ۱۰۰$

$\Rightarrow ۳/۰۰۰...\le k\le ۳۳/۰۰۰... \xRightarrow{k\in\mathbb{Z}} ۴\le k\le ۳۳ \Rightarrow$ تعداد n ها $=۳۰$

۳۰۶ **۴** باید $(۳,۶)\,|\,a^۲+۲$ برقرار باشد. پس:

$(۳,۶)=۳ \Rightarrow ۳\,|\,a^۲+۲ \Rightarrow a^۲+۲=۳k$

$\Rightarrow a^۲=۳k-۲ \Rightarrow a^۲=۳k'+۱$

می‌دانیم اگر a مضرب ۳ نباشد، $a^۲$ به فرم $۳k+۱$ است. بنابراین باید از مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۲۰\}$، a هایی را انتخاب کنیم که مضرب ۳ نباشند. پس:

تعداد aها $=۲۰-\left[\frac{۲۰}{۳}\right]=۱۴$

دقت کنید $\left[\frac{۲۰}{۳}\right]$ تعداد مضارب ۳ را مشخص می‌کند.

۳۰۷ **۲** شرط وجود جواب آن است که $۳\,|\,(a,۱۸)$ برقرار باشد. از آن‌جایی که $۱۸=۲\times۳^۲$ می‌باشد، پس اگر a زوج یا مضرب ۹ باشد، رابطهٔ $۳\,|\,(a,۱۸)$ برقرار نیست. پس از اعداد نابیشتر از ۵۰، اعداد مضرب ۲ یا مضرب ۹ را حذف می‌کنیم:

$۵۰-\left[\frac{۵۰}{۲}\right]-\left[\frac{۵۰}{۹}\right]+\left[\frac{۵۰}{۱۸}\right]=۵۰-۲۵-۵+۲=۲۲$

توجه کنید اعداد مضرب ۱۸ را دوبار حذف کردیم. یک‌بار موقع حذف مضارب ۲ و بار دیگر هنگام حذف مضارب ۹. پس یک‌بار، مضارب ۱۸ را برگرداندیم.

۳۰۸ **۴** چون فقط b را می‌خواهیم، طرفین معادله را به پیمانهٔ ضریب a، یعنی ۱۵ همنهشت قرار می‌دهیم:

$۱۵a+۲۳b=۱۲ \Rightarrow \overset{۰}{\cancel{۱۵}}a+۲۳b\overset{۱۵}{\equiv}۱۲ \Rightarrow \overset{۸}{\cancel{۲۳}}b\overset{۱۵}{\equiv}۱۲$

$\Rightarrow ۸b\overset{۱۵}{\equiv}۱۲ \xRightarrow[(۴,۱۵)=۱]{÷۴} ۲b\overset{۱۵}{\equiv}۳\overset{۱۵}{\equiv}۱۸ \xRightarrow[(۲,۱۵)=۱]{÷۲} b\overset{۱۵}{\equiv}۹$

۳۰۹ **۲** فقط y را می‌خواهیم، پس داریم:

$۱۴x+۱۸y=۱۰ \Rightarrow ۷x+۹y=۵ \Rightarrow \overset{۰}{\cancel{۷}}x+۹y\overset{۷}{\equiv}۵$

$\Rightarrow \overset{۲}{\cancel{۹}}y\overset{۷}{\equiv}\overset{-۲}{\cancel{۵}} \Rightarrow ۹y\overset{۷}{\equiv}۵ \Rightarrow ۲y\overset{۷}{\equiv}-۲ \xRightarrow[(۲,۷)=۱]{÷۲} y\overset{۷}{\equiv}-۱$

$y=۷k-۱ \xRightarrow{\text{بزرگ‌ترین سه‌رقمی}} ۷k-۱<۱۰۰۰ \Rightarrow ۷k<۱۰۰۱$

$\Rightarrow ۷k<۹۱\times۱۱ \Rightarrow k<۱۳\times۱۱\Rightarrow k<۱۴۳$

$\Rightarrow k_{Max}=۱۴۲ \Rightarrow y_{Max}=۷(۱۴۲)-۱=۹۹۳$

$\Rightarrow$ مجموع ارقام $=۹+۹+۳=۲۱$

۳۱۰ **۱** چون x را می‌خواهیم طرفین، را به پیمانهٔ ۸۷ همنهشت قرار می‌دهیم و آن را به‌صورت معادلهٔ همنهشتی درمی‌آوریم:

$۵۷x-۸۷y\overset{۸۷}{\equiv}۳۴۲ \Rightarrow -۳۰x\overset{۸۷}{\equiv}-۶$

$\xRightarrow[(۶,۸۷)=۳]{÷(-۶)} ۵x\overset{۲۹}{\equiv}\underbrace{۱\overset{۲۹}{\equiv}۳۰}_{+۱\times۲۹} \xRightarrow[(۵,۲۹)=۱]{÷۵} x\overset{۲۹}{\equiv}۶$

$\Rightarrow x=۲۹k+۶ \xRightarrow{k=۴} x=۱۲۲ \Rightarrow$ مجموع ارقام $=۵$

۳۱۱ **۲** ابتدا حاصل $(۲۲۱,۳۵۷)$ را به دست آورده، سپس طرفین معادله را بر آن تقسیم می‌کنیم:

$(۲۲۱,۳۵۷)=(۱۷\times۱۳,۳\times۷\times۱۷)=۱۷ \Rightarrow ۱۳x+۲۱y=۱$

حال چون فقط x را می‌خواهیم، داریم:

$۱۳x+۲۱y=۱ \Rightarrow ۱۳x+\overset{۰}{\cancel{۲۱}}y\overset{۲۱}{\equiv}۱ \Rightarrow \overset{-۸}{\cancel{۱۳}}x\overset{۲۱}{\equiv}\overset{-۲۰}{\cancel{۱}}$

$\Rightarrow -۸x\overset{۲۱}{\equiv}-۲۰ \xRightarrow[(-۴,۲۱)=۱]{÷(-۴)} ۲x\overset{۲۱}{\equiv}۵\overset{۲۱}{\equiv}۲۶ \xRightarrow[(۲,۲۱)=۱]{÷۲} x\overset{۲۱}{\equiv}۱۳$

$\Rightarrow x=۲۱k+۱۳ \xRightarrow{\text{x دورقمی}} k=۰,۱,۲,۳,۴ \Rightarrow$ ۵ مقدار

۳۱۲ **۲** ابتدا طرفین معادلهٔ $۷x+۵y=۱۳۰$ را به پیمانهٔ ۵ همنهشت می‌کنیم:

$۷x+۵y=۱۳۰\Rightarrow ۷x+\overset{۰}{\cancel{۵}}y\overset{۵}{\equiv}\overset{۰}{\cancel{۱۳۰}} \Rightarrow ۷x\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}۰\Rightarrow x=۵k$

حال $x=۵k$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$۷x+۵y=۱۳۰\Rightarrow ۷(۵k)+۵y=۱۳۰ \xRightarrow{÷۵} ۷k+y=۲۶ \Rightarrow y=۲۶-۷k$

جواب‌های معادله را در مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌خواهیم. پس:

$\begin{cases}x=۵k\\ y=۲۶-۷k\end{cases} \Rightarrow k=۱,۲,۳ \Rightarrow$ ۳ جواب

۳۱۳ **۳** طرفین معادلهٔ سیاله را به پیمانهٔ ۱۴ همنهشت می‌کنیم:

$۱۵x+۱۴y=۱۰۵۰ \Rightarrow ۱۵x+\overset{۰}{\cancel{۱۴}}y\overset{۱۴}{\equiv}۱۰۵۰$

$\Rightarrow \overset{۱}{\cancel{۱۵}}x\overset{۱۴}{\equiv}\overset{۰}{\cancel{۱۰۵۰}} \Rightarrow x\overset{۱۴}{\equiv}۰ \Rightarrow x=۱۴k$

حال $x=۱۴k$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$۱۵(۱۴k)+۱۴y=۱۰۵۰ \Rightarrow ۱۵k+y=۷۵ \Rightarrow y=۷۵-۱۵k$

جواب‌های معادله را در مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌خواهیم. پس:

$\begin{cases}x=۱۴k\\ y=۷۵-۱۵k\end{cases} \Rightarrow k=۱,۲,۳,۴ \Rightarrow$ ۴ جواب

۳۱۴ ۲ ابتدا طرفین معادلهٔ $۲۵x+۱۲y=۱۱۱۰$ را به پیمانهٔ ۱۲ هم‌نهشت می‌کنیم:

$$۲۵x+۱۲y=۱۱۱۰ \Rightarrow ۲۵x+\overset{۰}{\cancel{۱۲}}y \overset{۱۲}{\equiv} ۱۱۱۰$$

$$\Rightarrow \overset{۱}{\cancel{۲۵}}x \overset{۱۲}{\equiv} \overset{۶}{\cancel{۱۱۱۰}} \Rightarrow x \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \Rightarrow x=۱۲k+۶$$

حال $x=۱۲k+۶$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$۲۵(۱۲k+۶)+۱۲y=۱۱۱۰ \Rightarrow ۲۵(۱۲k)+۱۲y=۹۶۰$$

$$\Rightarrow ۲۵k+y=۸۰ \Rightarrow y=۸۰-۲۵k$$

جواب‌های معادله را در مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌خواهیم. پس:

$$\begin{cases} x=۱۲k+۶ \\ y=۸۰-۲۵k \end{cases} \Rightarrow k=۰,۱,۲,۳ \Rightarrow \text{۴جواب}$$

۳۱۵ ۱ ابتدا حاصل $(۳۵۷,۶۲۹)$ را به دست آورده، سپس طرفین معادله را بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$(۳۵۷,۶۲۹)=(۱۷\times۲۱,۱۷\times۳۷)=۱۷ \Rightarrow ۲۱x+۳۷y=۱$$

حال طرفین معادلهٔ سیاله را به پیمانهٔ ۲۱ هم‌نهشت می‌کنیم:

$$۲۱x+۳۷y=۱ \Rightarrow ۲۱x+۳۷y \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow \overset{-۵}{\cancel{۳۷}}y \overset{۲۱}{\equiv} \overset{-۲۰}{\cancel{۱}}$$

$$\Rightarrow -۵y \overset{۲۱}{\equiv} -۲۰ \xRightarrow[(-۵,۲۱)=۱]{\div(-۵)} y \overset{۲۱}{\equiv} ۴ \Rightarrow y=۲۱k+۴$$

مقدار y را در معادله قرار داده تا x مشخص شود:

$$۲۱x+۳۷(۲۱k+۴)=۱ \Rightarrow ۲۱x+۳۷(۲۱k)=-۱۴۷$$

$$\xRightarrow{\div۲۱} x+۳۷k=-۷ \Rightarrow x=-۳۷k-۷$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $x+y$ برابر است با:

$$x+y=(-۳۷k-۷)+(۲۱k+۴)=-۱۶k-۳ \xRightarrow[k=-۱]{\text{کوچک‌ترین عدد مثبت}} x+y=۱۳$$

۳۱۶ ۲ ابتدا طرفین معادله را به پیمانهٔ ۹ هم‌نهشت می‌کنیم:

$$۹x+۱۱y=۱۰۰۰ \Rightarrow \overset{۰}{\cancel{۹}}x+۱۱y \overset{۹}{\equiv} ۱۰۰۰ \Rightarrow \overset{۲}{\cancel{۱۱}}y \overset{۹}{\equiv} \overset{۱}{\cancel{۱۰۰۰}}$$

$$\Rightarrow ۲y \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{۹}{\equiv} ۱۰ \xRightarrow[(۲,۹)=۱]{\div۲} y \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow y=۹k+۵$$

حال $y=۹k+۵$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$۹x+۱۱(۹k+۵)=۱۰۰۰ \Rightarrow ۹x+۱۱(۹k)=۹۴۵$$

$$\Rightarrow x+۱۱k=۱۰۵ \Rightarrow x=۱۰۵-۱۱k$$

جواب‌های معادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی عبارتند از:

$$\begin{cases} y=۹k+۵ \\ x=۱۰۵-۱۱k \end{cases} \Rightarrow k=۰,۱,۲,۳,\ldots,۹ \Rightarrow \text{۱۰ جواب}$$

۳۱۷ ۳ فرض می‌کنیم x تمبر ۵۰ ریالی و y تمبر ۹۰ ریالی می‌خواهیم. پس:

$$۵۰x+۹۰y=۸۵۰ \Rightarrow ۵x+۹y=۸۵ \Rightarrow \overset{۰}{\cancel{۵}}x+۹y \overset{۵}{\equiv} ۸۵$$

$$\Rightarrow \overset{-۱}{\cancel{۹}}y \overset{۵}{\equiv} \overset{۰}{\cancel{۸۵}} \Rightarrow -y \overset{۵}{\equiv} ۰ \xRightarrow{\times(-۱)} y \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow y=۵k$$

حال $y=۵k$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$۵x+۹(۵k)=۸۵ \xRightarrow{\div۵} x+۹k=۱۷ \Rightarrow x=۱۷-۹k$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $x+y$ که همان کم‌ترین تعداد تمبر لازم برای بسته می‌باشد برابر است با:

$$x+y=(۱۷-۹k)+(۵k)=۱۷-۴k$$

از طرفی حواسمان هست که x و y منفی نیستند، چون x و y تعداد تمبرها می‌باشند، پس k فقط می‌تواند صفر و یک باشد:

$$x+y=۱۷-۴k \xRightarrow[k=۱]{\text{کم‌ترین مقدار}} x+y=۱۳$$

۳۱۸ ۱ فرض می‌کنیم x تمبر ۱۵۰ ریالی و y تمبر ۲۵۰ ریالی داریم. پس:

$$۱۵۰x+۲۵۰y=۳۷۰۰ \xRightarrow{\div۵۰} ۳x+۵y=۷۴ \Rightarrow \overset{۰}{\cancel{۳}}x+۵y \overset{۳}{\equiv} ۷۴$$

$$\Rightarrow \overset{-۱}{\cancel{۵}}y \overset{۳}{\equiv} \overset{-۱}{\cancel{۷۴}} \Rightarrow -y \overset{۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow y \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow y=۳k+۱$$

حال $y=۳k+۱$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$۳x+۵(۳k+۱)=۷۴ \Rightarrow ۳x+۵(۳k)=۶۹ \xRightarrow{\div۳} x+۵k=۲۳$$

$$\Rightarrow x=۲۳-۵k$$

چون تعداد تمبرها منفی نمی‌شود، پس:

$$\begin{cases} x=۲۳-۵k \\ y=۳k+۱ \end{cases} \Rightarrow k=۰,۱,۲,۳,۴ \Rightarrow \text{۵ طریق}$$

۳۱۹ ۴ باید معادله $۲۰۰A+۱۵۰B=۷۵۵۰$ را حل کنیم:

$$۲۰۰A+۱۵۰B=۷۵۵۰ \Rightarrow ۴A+۳B=۱۵۱ \Rightarrow ۴A+۳B \overset{۳}{\equiv} ۱۵۱$$

$$\Rightarrow \overset{۱}{\cancel{۴}}A \overset{۳}{\equiv} \overset{۱}{\cancel{۱۵۱}} \Rightarrow A \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow A=۳k+۱$$

حال $A=۳k+۱$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$۴(۳k+۱)+۳B=۱۵۱ \Rightarrow ۴(۳k)+۳B=۱۴۷ \xRightarrow{\div۳} ۴k+B=۴۹$$

$$\Rightarrow B=۴۹-۴k$$

بنابراین $A+B$ برابر است با:

$$A+B=(۳k+۱)+(۴۹-۴k)=۵۰-k$$

چون تعداد تمبرها منفی نیست، پس k از صفر تا ۱۲ می‌تواند باشد و به ازای $k=۱۲$ کم‌ترین مقدار $A+B$ حاصل می‌شود که برابر $۵۰-۱۲=۳۸$ است.

۳۲۰ ۳ ابتدا طرفین معادله را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$۷x+۲۱y=۲۸ \Rightarrow x+۳y=۴$$

چون ضریب x برابر ۱ است، با فرض $y=k$ مقدار $x=۴-۳k$ خواهد بود.

حال داریم:

$$\begin{cases} -۲۰<x<۲۰ \Rightarrow -۲۰<۴-۳k<۲۰ \Rightarrow -۲۴<-۳k<۱۶ \\ \Rightarrow -۵/... <k<۸ \\ -۲۰<y<۲۰ \Rightarrow -۲۰<k<۲۰ \end{cases}$$

$$\xRightarrow{k\in\mathbb{Z}} -۵\le k<۸ \Rightarrow \text{۱۳جواب}$$