پاسخنامه تشریحی سوالات

ریاضیات جامع تجربی

(ویژه ی دکترها)

مؤلفان:

محمدامین نباخته، محمد پور سعید

انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفین

اکنون که این نوشته را می‌نویسم، دو سال از شروع کارمان برای تألیف این کتاب می‌گذرد. کاری که فکر می‌کردیم ظرف شش ماه تمامش می‌کنیم، ولی هر چقدر جلوتر رفتیم حساسیت و وسواس‌مان باعث شد تا زمان را فدای کیفیت کنیم. خیلی خلاصه ویژگی‌های کتاب را برایتان لیست می‌کنیم:

* درسنامه‌های کامل و عمیق؛ درسنامه‌ها آنچه که باید بدانید را شامل می‌شوند، نه بیشتر و نه کمتر. درگیر حاشیه و نکات عجیب و غریب و حالت‌های خاص نشده‌ایم و ضمناً تا آنجا که جا داشته سعی کرده‌ایم، بسیاری از نکات مهم را خودتان از حل مثال‌ها نتیجه بگیرید. در واقع تلاش کرده‌ایم از بیان نکات حفظی به‌صورت مستقیم و بدون فهم مطلب پرهیز کنیم. جداول دسته‌بندی حالات متفاوت حل یک مسئله (بدون این که تحلیل آن مطلب را آورده باشیم) در کتاب نخواهید دید، چرا که اعتقاد داریم شما دانش‌آموز گرامی باید به فهمی عمیق و تحلیلی درست از هر مطلب برسید تا در صورت تغییرات جزئی و کلی در صورت سؤال یا جابه‌جایی داده‌ها دچار سردرگمی نشوید.

* تست‌های با کیفیت؛ تست‌ها تماماً تألیفی‌اند، تألیفی به معنای واقعی و در آنها تست‌های جدید و ایده‌های ناب زیاد هست. ضمناً تست‌ها سطح‌بندی شده‌اند. دقت کنید که تست‌های کنکور معمولاً هم سطح تست‌های "ساده" و "متوسط" هستند و تست‌های "سخت" را برای دانش‌آموزان قوی‌تر که علاقه‌مندی بیشتری دارند طراحی کرده‌ایم. در پایان تست‌های هر درس تعدادی تست با عنوان "ترکیب سطوح" آورده‌ایم که بدون اینکه در مورد سطح‌شان پیش‌زمینه‌ای داشته باشید، آنها را حل کنید.

* تست‌های کنکور؛ تست‌های سراسری از سال ۸۵ تا ۹۸ را بدون کم و کاست در پایان هر فصل آورده‌ایم. این تست‌ها شامل تست‌های رشته‌های ریاضی و تجربی و کنکورهای داخل و خارج از کشور است.

* آزمون‌ها؛ هر فصل ۳ آزمون دارد، (به جز آمار توصیفی که دو آمون دارد) از این آزمون‌ها می‌توانید برای آمادگی قبل از آزمون‌های آزمایشی‌تان استفاده کنید.

* پاسخنامه‌ی تشریحی؛ پاسخ‌های تشریحی را خیلی با دقت و کامل نوشته‌ایم و سعی کرده‌ایم با روش تدریس موضوعات در درسنامه همخوانی داشته باشند. در بسیاری از تست‌ها راه‌حل دوم گفته شده است و از بیان نکات خیلی خاص یا راه‌حل‌های رد گزینه‌ای به عنوان راه‌حل اول پرهیز کرده‌ایم.

* فیلم‌های آموزشی سایت آلا؛ در ابتدای هر فصل یک QR-code قرار گرفته است که با اسکن آن به سایت آلا منتقل می‌شوید و می‌توانید فیلم‌های آموزشی مرتبط با آن فصل را که توسط مؤلفین همین کتاب تولید شده است، ببینید. در این فیلم‌ها دقیقاً درسنامه‌ی همین کتاب کاملاً تدریس و سؤال‌ها و تست‌های آن حل شده‌اند.

تشکر ویژه‌ای از آقای حاجی‌زاده، مدیریت انتشارات خوشخوان داریم که بازهم به ما اعتماد کردند.

لازم است از آقای سپهر متولی و خانم‌ها مریم شیردل، ریحانه پورافخمی و فاطمه جعفرزاده که در ویرایش کتاب کمک کردند تشکر کنیم.

و اما بیش از همه مدیون زحمات دوست عزیزمان، آقای دکتر محمدجمال صادقی هستیم که کل کتاب را به لحاظ فنی و علمی مطالعه کردند و نکات بسیار ارزنده‌ای را به ما متذکر شدند.

لازم است از دوستان عزیزمان در مؤسسه آموزشی آلا، آقایان سهراب ابوذرخانی مدیریت مجموعه و صادق ثابتی و مهدی امینی‌راد همکاران ارجمندی که همفکری و مشورت با ایشان همواره کمک ویژه‌ای برای ما بوده، تشکر کنیم.

در پایان لازم است از زحمات آقای محمد وزیرزاده مدیر تألیف انتشارات تشکر کنیم.

برای تمام ایرادها و اشکالات احتمالی پوزش می‌خواهیم و خواهش می‌کنیم نقدهای بی‌رحمانه‌ی خود را به ایمیل amin.nabakhteh@gmail.com ارسال کنید.

خرداد ۱۳۹۹

محمدامین نباخته، محمد پورسعید

فهرست مطالب

پاسخ‌نامه تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول

۱. ۱ ۲ ۳ **۴**

چون π رادیان معادل با ۱۸۰° است، پس خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۲۰}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲۰}=۹^\circ \text{ رادیان}$$

تذکر

می‌دانیم رابطه‌ی بین اندازه‌ی زاویه برحسب واحد درجه (D) و اندازه‌ی زاویه برحسب واحد رادیان (R) به صورت زیر است که می‌توان برای تبدیل واحد رادیان به درجه استفاده کرد:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{\pi}{۲۰}}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰^\circ}{۲۰}=۹^\circ$$

بنابراین جایگذاری ۱۸۰° به‌جای π رادیان نیز معادل استفاده از همین رابطه است.

۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

گزینه ۱ : رادیان $\frac{۷\pi}{۵}=\frac{۷\times۱۸۰^\circ}{۵}=۷\times۳۶^\circ=۲۵۲^\circ$ ✓

گزینه ۲ : رادیان $\frac{۵\pi}{۸}=\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۸}=۵\times۲۲/۵^\circ=۱۱۲/۵^\circ$ ✓

گزینه ۳ : $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{۳}{\pi}\Rightarrow D=(\frac{۵۴۰}{\pi})^\circ$ ✓

گزینه ۴ : رادیان $\frac{۹}{۵}\simeq\frac{۹}{۵}\times۵۷/۳^\circ=۱۰۳/۱۴^\circ\neq۱۰۰^\circ$

۳. ۱ **۲** ۳ ۴

اگر زوایای مورد نظر را α و β بنامیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۶۰^\circ\\ \alpha-\beta=\frac{\pi}{۱۵}^{rad}=\frac{۱۸۰^\circ}{۱۵}=۱۲^\circ\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۶۰^\circ\\ \alpha-\beta=۱۲^\circ\end{cases}\Rightarrow ۲\alpha=۷۲^\circ\Rightarrow\alpha=۳۶^\circ\Rightarrow\beta=۲۴^\circ$$

بنابراین اندازه‌ی زاویه کوچک‌تر ۲۴° است.

۴. ۱ ۲ ۳ **۴**

چون ۲π رادیان معادل ۳۶۰° است پس ابتدا زاویه‌ی داده شده را بر ۳۶۰° تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l}۳۹۱۵^\circ & ۳۶۰^\circ\\ -\,۳۶۰۰ & ۱۰\\ \hline ۳۱۵ & \end{array}\qquad\Rightarrow ۳۹۱۵^\circ=۱۰\,(۳۶۰^\circ)+۳۱۵^\circ$$

حال اگر زاویه‌ی ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۳۱۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۳۱۵\pi}{۱۸۰}=\frac{۷\pi}{۴}$$

۵. **۱** ۲ ۳ ۴

بنا به تعریف، یک رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع دایره مساوی است. پس گزاره «الف» نادرست است. همچنین یک رادیان تقریباً برابر ۵۷° است که از تناسب زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{cc}۲\pi^{rad} & ۳۶۰^\circ\\ ۱^{rad} & ?\end{array}\Rightarrow ?\simeq ۵۷/۳^\circ$$

پس گزاره‌ی «ب» نیز نادرست است.

اگر اندازه‌ی زاویه‌ای برحسب درجه را در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب کنیم، اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان به‌دست می‌آید.

مثلاً اگر $\alpha=۶۰^\circ$ باشد، با ضرب آن در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ خواهیم داشت:

$$\alpha=۶۰^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۳} \text{ رادیان}$$

بنابراین گزاره‌ی «ج» نیز نادرست است.

۶. ۱ ۲ **۳** ۴

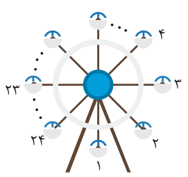
عقربه‌ی ساعت شمار در هر ۱۲ ساعت، ۳۶۰° یا $۲\pi^{rad}$ را طی می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۷}{۱۰}\text{ساعت}\xrightarrow{\text{تناسب}}\overset{\text{ساعت}}{\frac{۴۲}{۶۰}}=۴۲\text{ دقیقه}$$

$$\begin{array}{cc}\overset{\text{ساعت}}{۱۲} & ۲\pi^{rad}\\ \frac{۷}{۱۰} & ?\end{array}\Rightarrow ?=\frac{\frac{۷}{۱۰}\times۲\pi}{۱۲}\Rightarrow ?=\frac{۷\pi}{۶۰}^{rad}$$

۷. ۱ ۲ ۳ **۴**

زاویه‌ی بین هر دو کابین متوالی برابر $\frac{۲\pi}{۲۴}=\frac{\pi}{۱۲}^{rad}=۱۵^\circ$ است. از طرفی داریم:



$$\frac{۵۳\pi}{۶}=\frac{۴۸\pi}{۶}+\frac{۵\pi}{۶}=۸\pi+\frac{۵\pi}{۶}=۸\pi+۵(\frac{\pi}{۶})=۸\pi+۱۰\,(\frac{\pi}{۱۲})$$

یعنی پس از آن‌که چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{۵۳\pi}{۶}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران می‌کند، کابین شماره‌ی یک به ۱۰ کابین جلوتر از موقعیت اولیه‌اش انتقال می‌یابد. یعنی در موقعیت کابین ۱۱ قرار می‌گیرد.

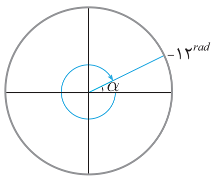
تذکر توجه شود که بعد از دوران ۸π رادیان، هر کابین در موقعیت اولیه فورش قرار می‌گیرد و $\frac{۱۰\pi}{۱۲}$ دوران بعدی، باعث می‌شود تا کابین شماره‌ی ۱ به ۱۰ کابین جلوتر از فورش منتقل شود.

۸. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم هر رادیان تقریباً معادل $۵۷/۳^\circ$ است، پس خواهیم داشت:

$-۱۲^{rad} \simeq -۱۲\times ۵۷/۳^\circ = -۶۸۷/۶^\circ$

اگر در جهت منفی مثلثاتی، به اندازه‌ی $۶۸۷/۶^\circ$ دوران انجام شود، چون $۶۳۰^\circ < ۶۸۷/۶^\circ < ۷۲۰^\circ$ است

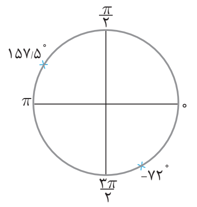


پس از یک دور کامل، دور دوم کامل نخواهد شد و بنابراین انتهای کمان مربوط به این زاویه، در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی خواهد بود.

۹. ۱ ۲ ۳ ۴

$-\frac{۲\pi}{۵} = -\frac{۳۶۰^\circ}{۵} = -۷۲^\circ$ ، $\frac{۷\pi}{۸} = \frac{۷\times ۱۸۰^\circ}{۸} = ۱۵۷/۵^\circ$ رادیان

رادیان

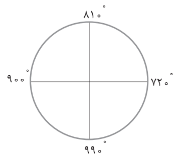


بنابراین زاویه‌ی $-\frac{۲\pi}{۵}$ رادیان در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی و زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۸}$ رادیان در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارند.

۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴

$۱۷ \simeq ۱۷\times ۵۷/۳^\circ \simeq ۹۷۴^\circ$ رادیان

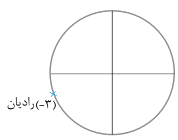
انتهای کمان زاویه‌ی ۱۷ رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است، زیرا $۹۰۰^\circ < ۹۷۴^\circ < ۹۹۰^\circ$



$\frac{۸\pi}{۹} = ۸\times\frac{۱۸۰^\circ}{۹} = ۱۶۰^\circ \Rightarrow$ رادیان

انتهای کمان $\frac{۸\pi}{۹}^{rad}$ در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی است.

$(-۳) \simeq -۳\times ۵۷/۳^\circ \simeq -۱۷۲^\circ$ رادیان



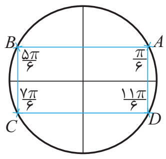
انتهای کمان (-۳) رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است.

$\frac{۷\pi}{۵} = ۷\times\frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۷\times ۳۶^\circ = ۲۵۲^\circ$ رادیان

انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۵}$ رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است.

بنابراین زاویه‌ی $\frac{۸\pi}{۹}$ رادیان با بقیه زوایا، هم‌ناحیه نیست.

۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴



اگر نقاط انتهای کمان‌های مورد نظر را A، B، C و D بنامیم چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است زیرا زوایای آن ۹۰° هستند. (زوایا، محاطی و اندازه‌ی آن‌ها نصف کمان مقابلشان است پس اندازه‌ی آن‌ها $\frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$ است.) از طرفی کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ هریک مساوی ۱۲۰° و کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{DA}$ هریک مساوی ۶۰° هستند.

۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴

دو زاویه در صورتی هم انتها هستند که اختلاف اندازه‌های آن‌ها مضربی از ۳۶۰° باشد. بنابراین خواهیم داشت:

گزینه ۱: $۵۲۰^\circ - ۱۲۴۰^\circ = -۷۲۰^\circ = (-۲)(۳۶۰^\circ)$

گزینه ۲: $۵۲۰^\circ - (-۵۶۰^\circ) = ۱۰۸۰^\circ = ۳(۳۶۰^\circ)$

گزینه ۳: $\frac{۴۴\pi}{۹}^{rad} = \frac{۴۴\times ۱۸۰^\circ}{۹} = ۸۸۰^\circ$

$\Rightarrow ۵۲۰^\circ - ۸۸۰^\circ = -۳۶۰^\circ$

گزینه ۴: $\frac{۵\pi}{۶}^{rad} = \frac{۵\times ۱۸۰^\circ}{۶} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow ۵۲۰^\circ - ۱۵۰^\circ = ۳۷۰^\circ$

بنابراین زاویه‌ی ۵۲۰° با زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}^{rad}$ هم انتها نیست.

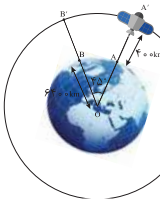
۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا زاویه‌ی طی شده توسط برف پاک‌کن را به رادیان تبدیل می‌کنیم سپس از رابطه‌ی $l = r\theta$ کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن را محاسبه می‌کنیم.

$\theta = ۱۲۰^\circ = ۱۲۰\times\frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۳}^{rad}$

$l = r\theta \Rightarrow l = ۲۴\times\frac{۲\pi}{۳} = ۱۶\pi\, cm \simeq ۵۰/۲۴\, cm$

.۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴



چون طول کمان $A'B'$ مورد نظر است، پس با داشتن زاویه‌ی مرکزی $A'\hat{O}B'=۴۵^\circ=\frac{\pi}{۴}\,rad$ و شعاع دایره‌ای که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، $r=۶۴۰۰+۴۰۰=۶۸۰۰km$ خواهیم داشت:

$$l=r\theta=۶۸۰۰\times\frac{\pi}{۴}=۱۷۰۰\pi\simeq ۵۳۳۸km$$

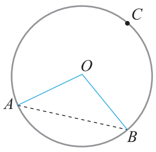
.۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$l=r\theta\Rightarrow ۸=۱۰\times\theta\Rightarrow\theta=\frac{۸}{۱۰}$ رادیان $=\frac{۴}{۵}$ رادیان

تذکر

توجه شود که در رابطه‌ی $l=r\theta$ همواره l و r هم واحدند و اندازه‌ی θ برحسب واحد رادیان است.

.۱۶ ۱ ۲ **۳** ۴



چون طول کمان ACB برابر ۱۶π است، بنابراین اگر طول کمان ACB را از محیط دایره کم کنیم، طول کمان AB به‌دست می‌آید.

محیط دایره $=۲\pi\times۱۲=۲۴\pi$

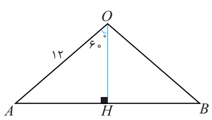
$۲۴\pi-۱۶\pi=۸\pi\Rightarrow$ طول کمان $AB=۸\pi$

حال با استفاده از رابطه‌ی $l=r\theta$ می‌توانیم اندازه‌ی زاویه‌ی AOB را محاسبه کنیم.

$l=r\theta\Rightarrow ۸\pi=۱۲\theta\Rightarrow\theta=\frac{۸\pi}{۱۲}=\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان

حال در مثلث OAB که متساوی‌الساقین با ساق‌های ۱۲ است و زاویه‌ی رأس آن $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است، خواهیم داشت:

اگر ارتفاع OH را رسم کنیم، ضلع AB را نصف می‌کند و نیمساز زاویه‌ی O نیز خواهد بود. پس داریم:



$$\overset{\Delta}{OAH}:\sin ۶۰^\circ=\frac{AH}{۱۲}$$

$$\Rightarrow AH=۱۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AB=۱۲\sqrt{۳}$$

.۱۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A=\frac{۳\cot\frac{\pi}{۶}+\sin\frac{\pi}{۳}\cos\pi}{۴\tan\frac{\pi}{۶}-\sqrt{۳}\cos^{۲}\frac{\pi}{۴}}=\frac{۳\sqrt{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}(-۱)}{۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}-\sqrt{۳}\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}}=\frac{\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۵}{۶}\sqrt{۳}}=۳$$

.۱۸ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin a$ و $\cos b$ برابر ۱ است. پس تساوی داده شده، فقط وقتی برقرار است که $\sin a=۱$ و $-\cos b=۱$ باشد. یعنی باید $\sin a=۱$ و $\cos b=-۱$ باشد که در این صورت $\sin a\cos b=-۱$ خواهد بود.

.۱۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی $\cos\alpha>۰$ و $\sin\alpha<۰$ است پس همواره $\sin\alpha<\cos\alpha$ است. در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha>۰$ است و همواره داریم:

$$۰<\alpha<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\cos\alpha>\sin\alpha\quad ,$$

$$\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\sin\alpha>\cos\alpha$$

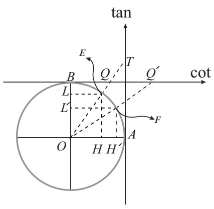
در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha<۰$ است و همواره داریم:

$$\pi<\alpha<\frac{۵\pi}{۴}\Rightarrow\cos\alpha<\sin\alpha\quad ,$$

$$\frac{۵\pi}{۴}<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\sin\alpha<\cos\alpha$$

در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$ است و همواره $\sin\alpha>\cos\alpha$ است.

.۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴



اگر نقطه‌ی انتهای کمان زاویه‌ی ۷۰° را با E و نقطه‌ی انتهای کمان زاویه‌ی ۴۰° را با F نمایش دهیم، با تصویر کردن این نقاط روی محور سینوس و کسینوس و امتداد شعاع‌های OE و OF که محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع کنند، مشخص می‌شود که روابط زیر برقرارند:

$$\sin۷۰^\circ>\sin۴۰^\circ\xrightarrow{\text{زیرا}}OL>OL'$$

$$\cos۷۰^\circ<\cos۴۰^\circ\xrightarrow{\text{زیرا}}OH<OH'$$

$$\tan۷۰^\circ>\tan۴۰^\circ\xrightarrow{\text{زیرا}}AT>AT'$$

$$\cot۷۰^\circ<\cot۴۰^\circ\xrightarrow{\text{زیرا}}BQ<BQ'$$

تذکر

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی شکل بالا، می‌توان نتیجه گرفت که اگر زاویه‌ی α از ۰° تا ۹۰° تغییر کند، همواره $\sin\alpha$ از صفر تا ۱ افزایش می‌یابد (یعنی تابع $y=\sin x$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی صعودی است) و $\cos\alpha$ از ۱ تا صفر کاهش می‌یابد (یعنی تابع $y=\cos x$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی نزولی است) و $\tan\alpha$ از صفر تا $+\infty$ افزایش می‌یابد (یعنی تابع $y=\tan x$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی صعودی است) و $\cot\alpha$ از $+\infty$ تا صفر کاهش می‌یابد. (یعنی تابع $y=\cot x$ در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی نزولی است.)

۲۱. ۱ ۲ ۳ ۴

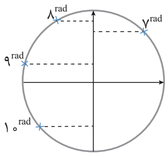
چون هر رادیان تقریباً برابر $۵۷/۳^\circ$ است پس خواهیم داشت:

$۷^{rad} \simeq ۷\times ۵۷/۳ \simeq ۴۰۱/۱^\circ \Rightarrow$ ۷^{rad} در ناحیه‌ی اول

$۸^{rad} \simeq ۸\times ۵۷/۳ \simeq ۴۵۸/۴^\circ \Rightarrow$ ۸^{rad} در ناحیه‌ی دوم

$۹^{rad} \simeq ۹\times ۵۷/۳ \simeq ۵۱۵/۷^\circ \Rightarrow$ ۹^{rad} در ناحیه‌ی دوم

$۱۰^{rad} \simeq ۱۰\times ۵۷/۳ \simeq ۵۷۳^\circ \Rightarrow$ ۱۰^{rad} در ناحیه‌ی سوم

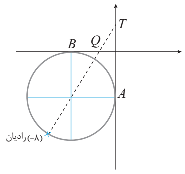


با توجه به شکل، مشخص است که تصویر زاویه‌ی ۸ رادیان روی محور سینوس‌ها، از تصویر سایر زوایا، بالاتر است. یعنی مقدار $\sin ۸^{rad}$ از سایر مقادیر بزرگ‌تر است.

۲۲. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا زاویه‌ی (-۸) رادیان را به درجه تبدیل می‌کنیم:

$-۸\times ۵۷/۳ \simeq -۴۵۸/۴^\circ$



بنابراین زاویه‌ی (-۸) رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد و بنابراین $\sin(-۸)$ و $\cos(-۸)$ مقادیری منفی هستند ولی $\tan(-۸)$ و $\cot(-۸)$ مقادیری مثبت هستند ولی طبق شکل $\tan(-۸) > \cot(-۸)$ زیرا $AT > BQ$، بنابراین از میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی (-۸) رادیان، تانژانت آن از سایر نسبت‌های مثلثاتی بزرگ‌تر است.

۲۳. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\tan\alpha\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha < ۰ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha} < ۰$$

چون $\sin^۲\alpha > ۰$ است پس قطعاً $\cos\alpha < ۰$ است.

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

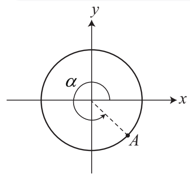
$$= \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} > ۰ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha > ۰$$

چون $\cos\alpha < ۰$ پس قطعاً $\sin\alpha < ۰$ است. بنابراین هم $\cos\alpha < ۰$ و $\sin\alpha < ۰$ و در نتیجه α در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

تذکر

می‌دانیم: $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$

۲۴. ۱ ۲ ۳ ۴

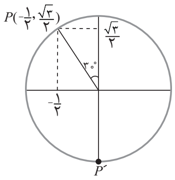


چون نقطه‌ی A، نقطه‌ی انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی α است پس مختصات نقطه‌ی A به صورت $A(\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha)$ است. پس خواهیم داشت:

$$\sin\alpha = -\frac{۱۵}{۱۷}\quad,\quad \cos\alpha = \frac{۸}{۱۷}$$

و بنابراین $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{۱۵}{۱۷} - \frac{۸}{۱۷} = -\frac{۲۳}{۱۷}$

۲۵. ۱ ۲ ۳ ۴



چون $P(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{۱}{۲} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

بنابراین $\theta = ۱۲۰^\circ$ (دقت شود که نقطه در ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات قرار دارد) است و پس از دوران ۲۱۰° در جهت منفی مثلثاتی به نقطه‌ی P' خواهیم رسید که مختصات آن به صورت $P'(۰\ ,-۱)$ خواهد بود یعنی طول نقطه‌ی جدید برابر صفر خواهد بود.

۲۶. ۱ ۲ ۳ ۴

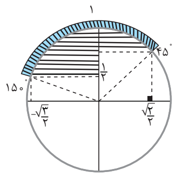
مقادیر $\sin x$ و $\cos y$ هر کدام حداکثر برابر یک هستند، پس هنگامی حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۲ خواهد شد که هر کدام از آن‌ها برابر یک باشند. یعنی داریم:

$$\sin x + \cos y = ۲ \Rightarrow \sin x = ۱\ ,\ \cos y = ۱$$

$$\xrightarrow[۰\le y<۳۶۰^\circ \text{ و}]{۰\le x<۳۶۰^\circ \text{ چون}} x = ۹۰^\circ\ ,\ y = ۰^\circ$$

$$\sin(x+y) - \cos(x-y) = \sin ۹۰^\circ - \cos ۹۰^\circ = ۱ - ۰ = ۱$$

۲۷. ۱ ۲ ۳ ۴

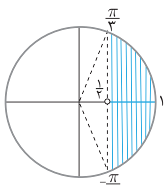


اگر محدوده‌ی تغییرات کمان یک نسبت مثلثاتی را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم محدوده‌ی تغییرات نسبت مثلثاتی آن کمان را بیابیم، باید حتماً از دایره‌ی مثلثاتی استفاده کنیم. با توجه به شکل اگر تغییرات کمان در محدوده‌ی $۴۵^\circ \le x \le ۱۵۰^\circ$ باشد، محدوده‌ی تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۲} \le \sin x \le ۱\quad,\quad -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le \cos x \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

برای یافتن تغییرات $\sin x$ از نقاط انتهای کمان‌ها بر محور سینوس‌ها و برای یافتن تغییرات $\cos x$ از نقاط انتهای کمان‌ها بر محور کسینوس‌ها عمود می‌کنیم.

۲۸. ۱ ۲ ۳ ۴



$$-\frac{\pi}{۳} < x < \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}}$$

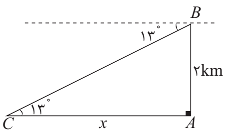
$$\frac{۱}{۲} < \cos x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۲m-۱}{۳} \le ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} < ۲m-۱ \le ۳$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲} < ۲m \le ۴ \Rightarrow \frac{۵}{۴} < m \le ۲$$

۲۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

چون زاویه‌ی هواپیما با افق حدود ۱۳° است پس طبق شکل زاویه‌ی $\hat{C}$ نیز برابر ۱۳° خواهد بود (قضیه خطوط موازی و مورب) بنابراین طبق شکل خواهیم داشت:

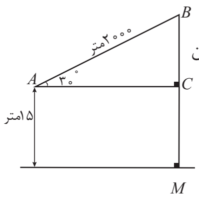


$$\tan ۱۳^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow ۰/۲۳ = \frac{۲}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{۲}{۰/۲۳} \simeq ۸/۶۹۵\ km = ۸۶۹۵\ m$$

۳۰. ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل مقابل داریم:



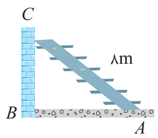
ارتفاع موشک از سطح زمین $= BC + MC$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \sin ۳۰^\circ = \frac{BC}{۲۰۰۰}$$

$$\Rightarrow BC = ۲۰۰۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰۰۰$$

ارتفاع موشک از سطح زمین $= ۱۰۰۰ + ۱۵ = ۱۰۱۵$

۳۱. **۱** ۲ ۳ ۴



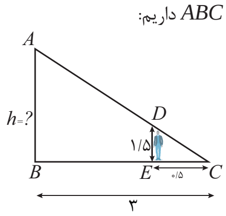
$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BC}{۸} \Rightarrow BC = ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۴$$

$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AB^۲ = AC^۲ - BC^۲$$

$$= ۶۴ - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow AB = ۴\sqrt{۳}$$

۳۲. ۱ ۲ **۳** ۴

راه‌حل اول: طبق قضیه‌ی تالس در مثلث ABC داریم:

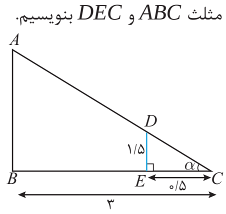


$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{۱/۵} = \frac{۳}{۰/۵} \Rightarrow ۰/۵h = ۴/۵$$

$$\Rightarrow h = \frac{۴/۵}{\frac{۱}{۲}} = ۹$$

راه‌حل دوم: کافی است $\tan\alpha$ را در دو مثلث ABC و DEC بنویسیم.



در این صورت خواهیم داشت:

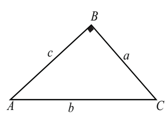
$$\tan\alpha = \frac{DE}{EC} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{۱/۵}{۰/۵} = \frac{AB}{۳}$$

$$\Rightarrow AB = ۹$$

۳۳. ۱ ۲ **۳** ۴

چون نسبت دو ضلع زاویه‌ی قائمه برابر $\frac{۱}{۳}$ است، پس داریم:

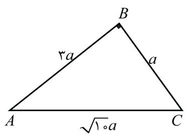


$$\frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow c = ۳a$$

از طرفی طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ \Rightarrow b^۲ = a^۲ + ۹a^۲ \Rightarrow b^۲ = ۱۰a^۲ \Rightarrow b = \sqrt{۱۰}\,a$$

پس می‌توان ابعاد مثلث قائم‌الزاویه را به صورت زیر نمایش داد:



$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{۳a}{\sqrt{۱۰}\,a} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

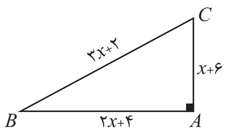
$$\Rightarrow \sin^۲ C = \frac{۹}{۱۰}$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{۱۰}\,a} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \cos^۲ C = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ C . \cos^۲ C = \frac{۹}{۱۰} \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۹}{۱۰۰}$$

۳۴. ۱ ۲ **۳** ۴

چون مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است، بنابراین داریم: (طبق قضیه‌ی فیثاغورس)



$$(۳x+۲)^۲ = (۲x+۴)^۲ + (x+۶)^۲$$

$$\Rightarrow ۹x^۲ + ۱۲x + ۴ = ۴x^۲ + ۱۶x + ۱۶ + x^۲ + ۱۲x + ۳۶$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۱۶x - ۴۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۲) = ۰$$

$\Rightarrow x = -۲$ غ.ق.ق , $x = ۶$ ✓

$$\Rightarrow BC = ۲۰ \ , \ AB = ۱۶ \ , \ AC = ۱۲$$

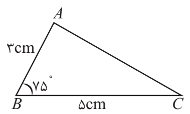
$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{۱۶}{۱۲} = \frac{۴}{۳} \quad , \quad \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{۱۲}{۱۶} = \frac{۳}{۴}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵} \quad , \quad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{۱۶}{۲۰} = \frac{۴}{۵}$$

حاصل عبارت مطلوب $= (\frac{۳}{۴} + \frac{۴}{۳})(\frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۵}) = \frac{۲۵}{۱۲} \times \frac{۷}{۵} = \frac{۳۵}{۱۲}$

۳۵. ۱ **۲** ۳ ۴

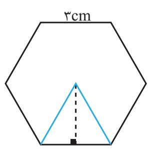
مساحت یک مثلث، برابر است با $\frac{۱}{۲}$ حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع. بنابراین در شکل بالا خواهیم داشت:



مساحت مثلث $S = \frac{۱}{۲} AB.\ BC\ .\sin B = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin ۷۵^\circ$

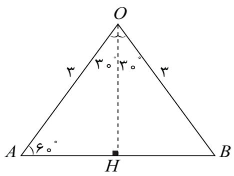
$$= \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times ۰/۹۶ = ۷/۲\,cm^۲$$

۳۶. ۱ **۲** ۳ ۴



می‌دانیم شش ضلعی منتظم از شش مثلث متساوی‌الاضلاع یکسان تشکیل شده است. پس کافی است مساحت یکی از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را محاسبه کرده و آن را ۶ برابر کنیم.

حال برای محاسبه‌ی مثلث OAB داریم:



$$\overset{\Delta}{OAH}:\sin ۶۰^\circ=\frac{OH}{۳}$$

$$\Rightarrow OH=۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}OH\times AB$$

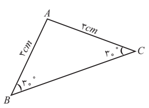
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times ۳=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

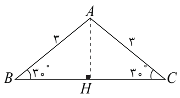
شش ضلعی منتظم $S=۶\times\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$

تذکر *برای محاسبه‌ی مساحت مثلث OAB می‌توان از رابطه‌ی $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ (a طول ضلع متساوی‌الاضلاع است) نیز استفاده کرد. همچنین می‌توان برای مساحت مثلث OAB از رابطه‌ی $S=\frac{۱}{۲}OA.OB.\sin ۶۰^\circ$ نیز استفاده کرد (مساحت مثلثی با اضلاع a، b و c از روابط زیر قابل محاسبه است:*
$(S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A)$

۳۷. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس با رسم ارتفاع AH، ضلع مقابل نصف می‌شود یعنی AH نقش میانه را نیز خواهد داشت. حال می‌توان نوشت:





$$\overset{\Delta}{AHB}:\sin ۳۰^\circ=\frac{AH}{۳}\Rightarrow AH=\frac{۳}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AHB}:\cos ۳۰^\circ=\frac{BH}{۳}\Rightarrow BH=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow BC=۲\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times ۳\sqrt{۳}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

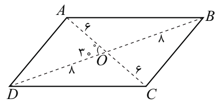
راه‌حل دوم:

مساحت مثلث $S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin A$

چون $\hat{B}+\hat{C}=۶۰^\circ$ پس $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳\times\sin ۱۲۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

۳۸. ۱ ۲ ۳ ۴



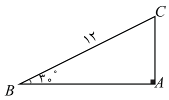
می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع از ۴ مثلث با مساحت مساوی تشکیل شده است (توجه کنید که زوایای بین قطرها ۳۰° و ۱۵۰° هستند و $\sin ۳۰^\circ=\sin ۱۵۰^\circ$ است.) بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{ABCD}=S_{AOD}+S_{AOB}+S_{BOC}+S_{DOC}$$

$$=۴\times(\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۸\times\sin ۳۰^\circ)=۴\times(\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۸\times\frac{۱}{۲})=۴۸$$

نکته پس می‌توان فهمید مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها.

۳۹. ۱ ۲ ۳ ۴

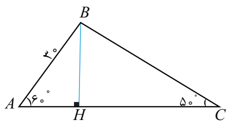


$$\sin ۳۰^\circ=\frac{AC}{۱۲}\Rightarrow AC=\frac{۱}{۲}\times ۱۲=۶$$

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{AB}{۱۲}\Rightarrow AB=۱۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث $S=\frac{۱}{۲}AB.AC=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\sqrt{۳}=۱۸\sqrt{۳}$

۴۰. ۱ ۲ ۳ ۴



راه‌حل اول: ابتدا ارتفاع BH را رسم می‌کنیم و طول آن را در مثلث AHB محاسبه می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{AHB}:\sin A=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۳۰}\Rightarrow BH=۱۵\sqrt{۳}$$

حال در مثلث BHC با استفاده از $\sin ۵۰^\circ$ طول BC را به‌دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{BHC}:\sin ۵۰^\circ=\frac{BH}{BC}\Rightarrow ۰/۷۶=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{BC}\Rightarrow BC=۱۹/۷۴\sqrt{۳}$$

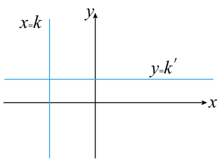
راه‌حل دوم: از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{AB}{\sin ۵۰^\circ}\Rightarrow\frac{BC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۳۰}{۰/۷۶}\Rightarrow BC=۱۹/۷۴\sqrt{۳}$$

۴۱. ۱ ۲ ۳ ۴

همه‌ی خطوط موازی محور y ها دارای معادله‌ای به شکل $x=k$ (k عددی حقیقی و ثابت است) هستند و با محور x ها زاویه‌ی ۹۰° می‌سازند و شیب آن‌ها «تعریف نشده» یا نامعین است.

همچنین خطوط موازی محور x ها، دارای معادله‌ای به شکل $y=k'$ (k' عددی حقیقی و ثابت است) هستند و شیب آن‌ها برابر صفر است.



بنابراین خط $۳x+۱=۰$ یا $x=-\frac{۱}{۳}$ خطی به موازات محور y ها است و زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور x ها، برابر ۹۰° است. همچنین شیب خط $\sqrt{۳}x+y-۶=۰$ برابر است با:

$$m=-\sqrt{۳}\Rightarrow\tan\theta=-\sqrt{۳}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

(زیرا $\tan ۱۲۰^\circ=-\sqrt{۳}$)

.۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

چون زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد برابر 30° است، پس شیب این خط $m=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ است. پس معادله‌ی خط مطلوب برابر است با:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-0=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\xrightarrow{\text{طرفین در ۳ ضرب}}3y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

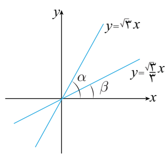
.۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم شیب هر خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد. پس خواهیم داشت:

$$y=\sqrt{3}x\Rightarrow m=\sqrt{3}\Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{3}\Rightarrow \alpha=60^\circ$$

$$x=\sqrt{3}y\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\Rightarrow m'=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

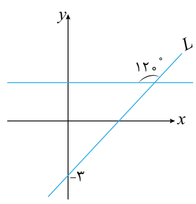
$$\Rightarrow \beta=30^\circ$$



بنابراین طبق شکل زاویه‌ی بین دو خط برابر است با:

$$\alpha-\beta=60^\circ-30^\circ=30^\circ$$

.۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴



چون در تعیین شیب یک خط، زاویه‌ی خط با قسمت مثبت محور x ها، مهم است، پس زاویه‌ی خط داده شده با قسمت مثبت محور x ها برابر $180^\circ-120^\circ=60^\circ$ است و بنابراین شیب خط L برابر است با $m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$. از طرفی خط L از نقطه‌ی $A(0,-3)$ نیز می‌گذرد، پس معادله‌ی خط L به صورت زیر خواهد بود:

$$y-(-3)=\sqrt{3}(x-0)\Rightarrow y=\sqrt{3}x-3$$

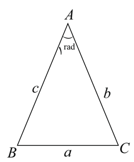
.۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴

شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(m,-3)$ و $B(-6,1)$ برابر است با:

$$m=\frac{1-(-3)}{-6-m}=\frac{4}{-6-m}$$

$$\tan 135^\circ=-1\Rightarrow \frac{4}{-6-m}=-1\Rightarrow 4=6+m\Rightarrow m=-2$$

.۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴



گزاره‌ی «الف» صحیح است، زیرا اگر زاویه‌ی رأس مثلث متساوی الساقین برابر ۱ رادیان باشد، آن‌گاه چون $1^{rad}\simeq 57^\circ$ است، پس $\hat{A}<60^\circ$ و بنابراین $\hat{B}+\hat{C}>120^\circ$ و در نتیجه $\hat{B}=\hat{C}>60^\circ$ و چون در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $a<b$ و $a<c$

گزاره‌ی «ب» صحیح است، زیرا:

$$l=r\theta\Rightarrow l=1cm\times\pi=\pi\,cm\simeq 3.14\,cm$$

گزاره‌ی «ج» نادرست است، زیرا داریم:

$$\frac{6\pi}{5}=\frac{6\times180^\circ}{5}=6\times36^\circ=216^\circ \text{ رادیان}$$

و زاویه‌ی 216° در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، زیرا $180^\circ<216^\circ<270^\circ$ است.

تذکر

بدون تبدیل واحد رادیان به واحد درجه نیز مشخص است که $\pi<\frac{6\pi}{5}<\frac{3\pi}{2}$ و از این رو می‌توان نتیجه گرفت که این زاویه در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

گزاره‌ی «د» نادرست است، زیرا مجموع زوایای داخلی یک مثلث باید برابر 180° یا π رادیان شود. اما داریم:

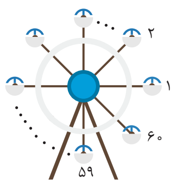
$$\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{9}+\frac{7\pi}{36}=\frac{24\pi+4\pi+7\pi}{36}=\frac{35\pi}{36}\neq\pi$$

بنابراین دو گزاره از گزاره‌های داده شده صحیح هستند.

.۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

وقتی عقربه‌ی دقیقه شمار یک دور کامل می‌چرخد، (یعنی پس از گذشت یک ساعت) عقربه‌ی ساعت شمار $\frac{1}{12}$ دور می‌چرخد (زیرا عقربه‌ی ساعت شمار در ۱۲ ساعت یک دور کامل می‌چرخد) بنابراین عقربه‌ی دقیقه شمار همیشه ۱۲ برابر عقربه‌ی ساعت شمار دوران می‌کند. پس اگر عقربه‌ی ساعت شمار زاویه‌ی $\frac{5\pi}{36}$ رادیان دوران کند، عقربه‌ی دقیقه شمار به اندازه‌ی $12\times\frac{5\pi}{36}=\frac{5\pi}{3}$ رادیان دوران می‌کند.

.۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴



زاویه‌ی بین هر دو کابین برابر $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}^{rad}$ است. حال اگر چرخ و فلک ۱۰ دقیقه بچرخد، ۴ دور کامل می‌زند و هر کابینی در موقعیت قبلی خود قرار می‌گیرد. در ۲ دقیقه‌ی بعدی، باید $\frac{2}{5}\times2=\frac{4}{5}$ دور بچرخد یعنی معادل $\frac{4}{5}\times2\pi=\frac{8\pi}{5}$ رادیان می‌چرخد. به عبارت دیگر معادل $\frac{48\pi}{30}$ رادیان دوران می‌کند. پس هر کابین به ۴۸ کابین جلوتر منتقل می‌شود. یعنی کابین شماره‌ی ۱ به محل کابین شماره‌ی ۴۹ منتقل می‌شود.

.۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت $h:M'$ از رابطه‌ی $\theta=|۳۰h-۵/۵M|$ به‌دست می‌آید. پس داریم:

$$\theta=|۳۰\times ۸-۵/۵(۱۲)|=|۲۴۰^\circ-۶۶^\circ|=۱۷۴^\circ$$

حال برای محاسبه‌ی اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان، کافی است آن را در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب کنیم:

$$\theta=۱۷۴^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{۸۷\pi}{۹۰}^{rad}$$

.۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

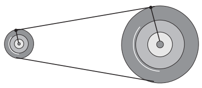
اگر اندازه‌ی زاویه برحسب درجه را با D و اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان را با R نمایش دهیم، در این صورت خواهیم داشت: $D=\frac{۲۴۰}{\pi}R-۷۰$ از طرفی همواره رابطه‌ی $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ بین اندازه‌ی زاویه برحسب درجه و رادیان برقرار است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{۲۴۰}{\pi}R-۷۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۲۴۰R-۷۰\pi=۱۸۰R$$

$$\Rightarrow ۶۰R=۷۰\pi\Rightarrow R=\frac{۷\pi}{۶}^{rad}\xrightarrow{\text{مطلوب مسئله}}\frac{\frac{۷\pi}{۶}}{\frac{\pi}{۳}}=\frac{۷}{۲}$$

.۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم وصل شده‌اند، بنابراین طول کمان طی شده روی دو قرقره با هم برابر خواهند بود (به عبارت دیگر برابر طول تسمه‌ی جابه‌جا شده است) بنابراین خواهیم داشت:



$$l_۱=l_۲\Rightarrow r_۱\theta_۱=r_۲\theta_۲ \qquad (۱)$$

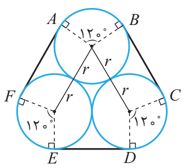
زاویه‌ای که قرقره‌ی بزرگ‌تر طی می‌کند، ۲۲۵° است که معادل آن برحسب رادیان برابر است با:

$$۲۲۵^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{۵\pi}{۴}^{rad}\xrightarrow{\text{در رابطه ی (۱) جایگذاری می کنیم}}$$

$$۱۸\times\frac{۵\pi}{۳}=r_۲\times\frac{۵\pi}{۴}\Rightarrow ۶=\frac{r_۲}{۴}\Rightarrow r_۲=۲۴cm$$

.۵۲ ۱ ۲ ۳ ۴

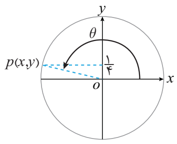
طول بخشی از تسمه فلزی که $FABC$ نامیده شده است، به صورت زیر قابل محاسبه است:



$$\text{طول } FABC=FA+AB+BC=۲r+r\theta+۲r$$

$$=۴r+r\theta=۴(۵۰)+۵۰\times\frac{۲\pi}{۳}=۲۰۰+\frac{۱۰۰\pi}{۳}$$

.۵۳ ۱ ۲ ۳ ۴



مختصات هر نقطه‌ی دلخواه روی دایره‌ی مثلثاتی به صورت $P(\cos\theta,\sin\theta)$ است که θ زاویه‌ای است که شعاع OP با قسمت مثبت محور xها می‌سازد.

چون عرض نقطه‌ی P برابر $\frac{۱}{۴}$ است، پس $\sin\theta=\frac{۱}{۴}$

از طرفی بین مختصات x و y هر نقطه‌ی دلخواه P روی دایره‌ی مثلثاتی، همواره رابطه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ یا $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ برقرار است.

پس خواهیم داشت:

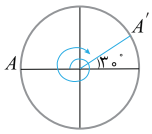
$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\cos^۲\theta=\frac{۱۵}{۱۶}$$

از طرفی داریم:

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Rightarrow\cot^۲\theta=\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{\frac{۱۵}{۱۶}}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۵$$

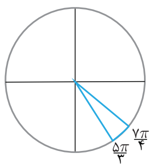
$$\Rightarrow ۲\cot^۲\theta+۸\cos^۲\theta=۲\times۱۵+۸\times\frac{۱۵}{۱۶}=۳۰+\frac{۱۵}{۲}=\frac{۷۵}{۲}$$

.۵۴ ۱ ۲ ۳ ۴



اگر نقطه‌ی $A(-۱,۰)$ را ۵۱۰° در خلاف جهت مثلثاتی دوران دهیم، (توجه شود که $۵۱۰^\circ=۳۶۰^\circ+۱۵۰^\circ$) به نقطه‌ی A' خواهیم رسید. زاویه‌ی متناظر با نقطه‌ی A' نسبت به مبدأ دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی ۳۰° است. پس مختصات نقطه‌ی A' به صورت $A'(\cos۳۰^\circ,\sin۳۰^\circ)$ یعنی $A'(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ خواهد بود.

.۵۵ ۱ ۲ ۳ ۴



در بازه‌ی $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۴})$ همواره $|\sin x|>|\cos x|$ و در بازه‌ی $(\frac{۷\pi}{۴},۲\pi)$ همواره $|\cos x|>|\sin x|$

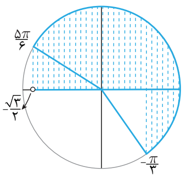
(با تصویر کردن نقاط این بازه‌ها روی محورهای سینوس و کسینوس، این موضوع قابل تشخیص است) بنابراین در بازه‌ی $\frac{۵\pi}{۳}<x<\frac{۷\pi}{۴}$ که قسمتی از ناحیه‌ی چهارم است، $\sin x<۰$ و $\cos x>۰$ است ولی $|\sin x|>|\cos x|$ است. پس عبارت $(\sin x+\cos x)$ منفی است. از طرفی عبارت $(\sin x-\cos x)$ نیز منفی است، زیرا:

منفی = (مثبت) − (منفی) است. از این رو حاصل عبارت A به صورت زیر خواهد بود:

$$A=|\sin x-\cos x|+|\sin x+\cos x|$$
$$=-\sin x+\cos x-\sin x-\cos x=-۲\sin x$$

۵۶. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا از روی محدوده‌ی تغییرات کمان x، محدوده‌ی تغییرات کمان $۶x$ را تعیین می‌کنیم، سپس محدوده‌ی تغییرات کمان $۶x$ را روی دایره‌ی مثلثاتی در نظر گرفته و آن را روی محور کسینوس‌ها تصویر می‌کنیم تا محدوده‌ی تغییرات $\cos ۶x$ مشخص شود.



$$-\frac{\pi}{۱۸}<x<\frac{۵\pi}{۳۶}\xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین در ۶}}$$
$$-\frac{\pi}{۳}<۶x<\frac{۵\pi}{۶}$$
$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<\cos ۶x\le ۱$$

۵۷. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر $\sin\theta$ و $\tan\theta$ هم علامت باشند، θ در ناحیه‌ی اول یا چهارم دایره‌ی مثلثاتی است، زیرا در ناحیه‌ی اول $\sin\theta>۰$ و $\tan\theta>۰$ و در ناحیه‌ی چهارم $\sin\theta<۰$ و $\tan\theta<۰$، بنابراین گزاره‌ی «الف» نادرست است.

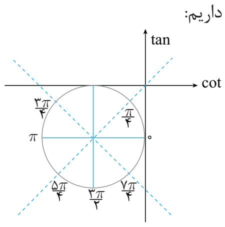
اگر $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ باشد، آن‌گاه α در ناحیه‌ی دوم یا چهارم دایره‌ی مثلثاتی است، زیرا در ناحیه‌ی دوم $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$ و در ناحیه‌ی چهارم $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$ است. پس گزاره‌ی «ب» نادرست است.

اگر $\cos\alpha=\frac{۳}{۷}$ و α در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$
$$\Rightarrow\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۴۹}=\frac{۴۰}{۴۹}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۷}$$

زیرا $\sin\alpha$ در ناحیه‌ی چهارم منفی است پس گزاره‌ی «ج» نادرست است.

اما گزاره‌ی «د» صحیح است زیرا همواره داریم:



$$\begin{cases}۰<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\cot x>\tan x\\ \frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan x>\cot x\end{cases}$$

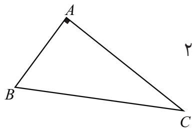
$$\begin{cases}\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\cot x>\tan x\\ \frac{۳\pi}{۴}<x<\pi\Rightarrow\tan x>\cot x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\pi<x<\frac{۵\pi}{۴}\Rightarrow\cot x>\tan x\\ \frac{۵\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\tan x>\cot x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{۳\pi}{۲}<x<\frac{۷\pi}{۴}\Rightarrow\cot x>\tan x\\ \frac{۷\pi}{۴}<x<۲\pi\Rightarrow\tan x>\cot x\end{cases}$$

بنابراین در هیچ‌یک از نواحی دایره‌ی مثلثاتی، به ازای هر زاویه‌ی دلخواه α در آن ناحیه، رابطه‌ی $\tan\alpha>\cot\alpha$ برقرار نیست.

۵۸. ۱ ۲ ۳ ۴



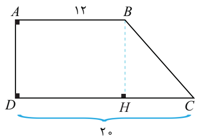
$$۲\tan B=۳\sin B\Rightarrow ۲\frac{\sin B}{\cos B}=۳\sin B$$

چون $\sin B\ne ۰$ است، پس طرفین را بر $\sin B$ تقسیم می‌کنیم:

$$۲\times\frac{۱}{\cos B}=۳\Rightarrow\cos B=\frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{AB}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AB=۸$$
$$\Rightarrow AC^۲=BC^۲-AB^۲$$
$$\Rightarrow AC^۲=۱۲^۲-۸^۲=۱۴۴-۶۴\Rightarrow AC^۲=۸۰$$
$$\Rightarrow AC=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

پس اندازه‌ی کوچک‌ترین ضلع مثلث برابر ۸ است.

۵۹. ۱ ۲ ۳ ۴



اگر ذوزنقه‌ی شکل مقابل را در نظر بگیریم و ارتفاع BH را رسم کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

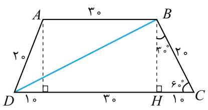
$$DH=AB=۱۲\Rightarrow HC=۲۰-۱۲=۸$$

مساحت ذوزنقه $S=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times BH=۱۲۸\sqrt{۳}\Rightarrow$

$$\frac{۱}{۲}(۲۰+۱۲)\times BH=۱۲۸\sqrt{۳}\Rightarrow BH=\frac{۱۲۸\sqrt{۳}}{۱۶}=۸\sqrt{۳}\Rightarrow$$
$$\overset{\triangle}{HBC}:\ \tan\hat{C}=\frac{HB}{HC}=\frac{۸\sqrt{۳}}{۸}=\sqrt{۳}\Rightarrow\hat{C}=۶۰^\circ$$

چون در ذوزنقه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ مکملند، پس $\hat{B}=۱۲۰^\circ$، یعنی بزرگ‌ترین زاویه‌ی ذوزنقه برابر ۱۲۰° است.

۶۰. ۱ ۲ ۳ ۴



مطابق شکل مقابل می‌توانیم با رسم یک قطر ذوزنقه، آن را به دو مثلث تبدیل کنیم، سپس مساحت هر مثلث را از طریق رابطه‌ی $S=\frac{۱}{۲}ab\sin C$ بدست آوریم. توجه شود که چون ساق‌های ذوزنقه با هم برابرند، پس ذوزنقه، متساوی الساقین است و زوایای مجاور به ساق‌ها با هم برابرند. از طرفی یک زاویه‌ی حاده و یک زاویه‌ی منفرجه در ذوزنقه، مکملند. بنابراین اگر $\hat{C}=۶۰^\circ$ آن‌گاه $\hat{D}=۶۰^\circ$ و $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ است. حال خواهیم داشت:

$$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{۱}{۲}AB.AD.\sin\hat{A}+\frac{۱}{۲}BC.DC.\sin\hat{C}$$
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}\times۳۰\times۲۰\times\sin۱۲۰^\circ+\frac{۱}{۲}\times۲۰\times۵۰\times\sin۶۰^\circ$$

توجه شود که $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\times 30\times 20\times \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 20\times 50\times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=150\sqrt{3}+250\sqrt{3}=400\sqrt{3}$$

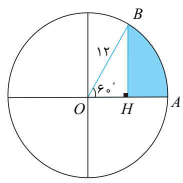
تذکر

برای پیدا کردن قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{CH}{20} \Rightarrow CH=10$$

$$\Rightarrow CD = 30+2(10)=50$$

۶۱. ۱ ۲ ۳ ۴



با توجه به شکل مقابل در مثلث OBH داریم:

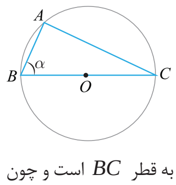
$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{12} \Rightarrow BH = 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{OH}{12} \Rightarrow OH = 12\times\frac{1}{2}=6$$

$$\overset{\frown}{AB} = r\theta \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 12\times\frac{\pi}{3}=4\pi$$

$$\text{محیط قسمت رنگی} = 6\sqrt{3}+6+4\pi = 6(\sqrt{3}+1)+4\pi$$

۶۲. ۱ ۲ ۳ ۴



با توجه به فرض مسئله، مساحت دایره برابر 100π است، بنابراین داریم:

$$\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r^2 = 100$$

$$\Rightarrow r = 10 \Rightarrow BC = 20$$

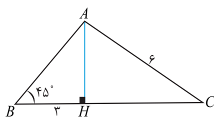
توجه شود که زاویه‌ی A، زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر BC است و چون اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی نصف کمان مقابلش است، پس $\hat{A}=90^\circ$ (زیرا کمان مقابل به آن 180° است) پس مثلث ABC در رأس A، قائمه است. بنابراین داریم:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC}=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AC}{20}=\frac{4}{5} \Rightarrow AC=16$$

حال می‌توانیم با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس، اندازه‌ی ضلع AC را به‌دست آوریم:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 400-256=144 \Rightarrow AB=12$$

۶۳. ۱ ۲ ۳ ۴



$$\overset{\triangle}{ABH}: \tan 45^\circ = \frac{AH}{BH}$$

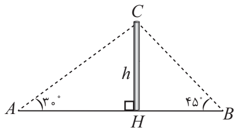
$$\Rightarrow 1=\frac{AH}{3} \Rightarrow AH=3$$

$$\overset{\triangle}{AHC}: HC^2 = AC^2 - AH^2 \Rightarrow HC^2 = 36-9=27 \Rightarrow HC=3\sqrt{3}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}(AH)(BC)=\frac{1}{2}(3)(3+3\sqrt{3})=\frac{9+9\sqrt{3}}{2}$$

۶۴. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر ارتفاع دکل را h فرض کنیم، در این صورت خواهیم داشت:



$$AH+HB=8 \quad ,$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{h}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{HC}{AH}$$

$$AH=\sqrt{3}HC$$

$$\tan 45^\circ = \frac{HC}{HB} \Rightarrow 1=\frac{HC}{HB} \Rightarrow HC=HB$$

$$AB=AH+HB=\sqrt{3}HC+HC=(\sqrt{3}+1)HC \Rightarrow$$

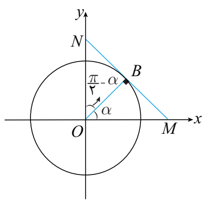
$$8=(\sqrt{3}+1)HC \Rightarrow HC=\frac{8}{\sqrt{3}+1}=\frac{8}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{8(\sqrt{3}-1)}{3-1}=4(\sqrt{3}-1)=4\sqrt{3}-4$$

۶۵. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است.

بنابراین OB بر MN عمود است. از این رو در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OBM و OBN خواهیم داشت:



$$\overset{\triangle}{OBM}: \tan\alpha = \frac{BM}{OB}=\frac{BM}{1}$$

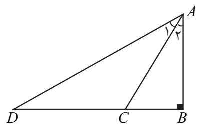
$$\Rightarrow BM=\tan\alpha$$

$$\overset{\triangle}{OBN}: \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{BN}{OB}=\frac{BN}{1}$$

$$\Rightarrow BN=\cot\alpha$$

$$\Rightarrow MN=MB+BN=\tan\alpha+\cot\alpha$$

۶۶. ۱ ۲ ۳ ۴



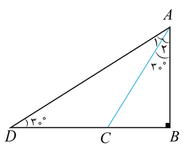
با توجه به مقادیر داده شده در صورت سؤال داریم:

$$BC=2\sqrt{3} \quad , \quad DC=4\sqrt{3}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB=6$$

$$\overset{\triangle}{ABD}: \tan\hat{D}=\frac{6}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{D}=30^\circ$$

حال چون مجموع زوایای داخلی مثلث ABD برابر 180° است بنابراین خواهیم داشت:



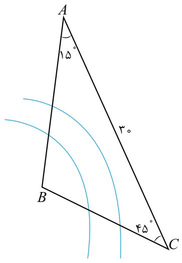
$$\hat{A}_1+30^\circ+90^\circ+30^\circ=180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1=30^\circ \Rightarrow \hat{A}_1-\hat{D}=0$$

۶۷. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا دقت شود که $\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۱۲}=۱۵^\circ$ رادیان و $\frac{\pi}{۴}=\frac{۱۸۰^\circ}{۴}=۴۵^\circ$ رادیان

و بنابراین خواهیم داشت:



$$\hat{B}=۱۸۰^\circ-(۱۵^\circ+۴۵^\circ)=۱۲۰^\circ$$

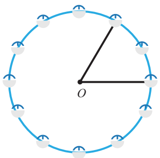
حال طبق قضیه‌ی سینوس‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{۳۰}{\sin ۱۲۰^\circ}=\frac{c}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow c=\frac{۳۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۳۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=۱۰\sqrt{۶}$$

۶۸. ۱ ۲ ۳ ۴

بیش‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی P از سطح افقی وقتی است که $\theta=\frac{\pi}{۲}$ و کم‌ترین فاصله وقتی است که $\theta=\frac{۳\pi}{۲}$ باشد. بنابراین داریم:



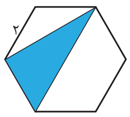
$$h_{\max}=۷۰+۴۰\sin\frac{\pi}{۲}=۷۰+۴۰=۱۱۰$$

$$h_{\min}=۷۰+۴۰\sin\frac{۳\pi}{۲}=۷۰-۴۰=۳۰$$

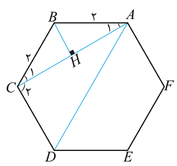
$\Rightarrow ۱۱۰-۳۰=۸۰m=$ قطر چرخ و فلک

$\Rightarrow$ شعاع چرخ و فلک $=۴۰m$

۶۹. ۱ ۲ ۳ ۴



در شکل مقابل که یک شش ضلعی منتظم است، هر زاویه‌ی داخلی برابر ۱۲۰° است. (زیرا هر زاویه‌ی داخلی n منتظم از رابطه‌ی $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ به‌دست می‌آید) مثلث ABC، مثلث متساوی‌الساقین است که در آن $\hat{B}=۱۲۰^\circ$ و بنابراین خواهیم داشت: $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱=۳۰^\circ$



$$\overset{\Delta}{ABH}:\ \cos\hat{A}_۱=\frac{AH}{۲}$$

$$\Rightarrow AH=۲\cos ۳۰^\circ=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

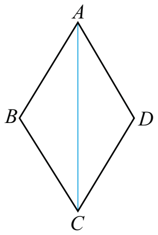
$$AC=۲AH=۲\sqrt{۳}$$

از طرفی چون $\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۲۰^\circ$ پس $\hat{C}_۲=۹۰^\circ$ و بنابراین مثلث ACD قائم‌الزاویه است و مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{AC\times CD}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}\times ۲}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

۷۰. ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل، مساحت لوزی، دو برابر مساحت مثلثی است که با رسم قطر آن حاصل می‌شود. بنابراین داریم:



$$S=۲S_{ABC}=۲\times\frac{۱}{۲}AB.BC.\sin B \quad \text{لوزی}$$

$$=AB.BC.\sin B=۳۶\times۳۶\times\sqrt{۱-\cos^۲ B}$$

$$=۳۶\times۳۶\times\sqrt{۱-\frac{۱۵}{۱۶}}=۳۶\times۳۶\times\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}$$

$$=۳۶\times۳۶\times\frac{۱}{۴}=۳۲۴$$

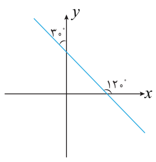
۷۱. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع است بنابراین خواهیم داشت:

$$S=\frac{۱}{۲}\times۶\times۱۲\times\sin\alpha$$

چون حداکثر مقدار $\sin\alpha$ برابر ۱ است، پس حداکثر مقدار مساحت برابر است با: $\max S=\frac{۱}{۲}\times۶\times۱۲=۳۶$

۷۲. ۱ ۲ ۳ ۴



طبق شکل، شیب خط منفی است و زاویه‌ای که خط با قسمت مثبت محور x ها می‌سازد، برابر $۳۰^\circ+۹۰^\circ=۱۲۰^\circ$ است و بنابراین شیب خط برابر است با:

$$m=\tan ۱۲۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

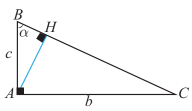
از این رو خواهیم داشت:

$$\frac{-\sqrt{۳}m}{۳m-۱}=-\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{m}{۳m-۱}=۱$$

$$\Rightarrow m=۳m-۱\Rightarrow ۲m=۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۷۳. ۱ ۲ ۳ ۴

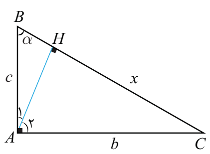
با توجه به شکل زیر داریم:



$$\overset{\Delta}{AHB}:\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=c\sin\alpha$$

$$\overset{\Delta}{AHC}:\tan A_۲=\frac{HC}{AH}\Rightarrow x=AH.\tan A_۲=c\sin\alpha\tan A_۲$$

توجه شود که $\hat{A}_۲=\alpha$ زیرا:



$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ \quad (۱)$$

$$\hat{A}_۱+\alpha=۹۰^\circ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\alpha=\hat{A}_۲$$

$$\xrightarrow{\text{بنابراین خواهیم داشت}}x=c\sin\alpha\tan\alpha$$

۷۴. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا عبارت را به صورت مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$A=\sin^{۲}x-\sin x+۱=\sin^{۲}x-\sin x+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=(\sin x-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}$$

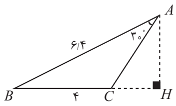
چون حداقل عبارت $(\sin x-\frac{۱}{۲})^{۲}$ برابر صفر است (به ازای $\sin x=\frac{۱}{۲}$)

بنابراین حداقل عبارت A برابر $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود.

تذکر

حداقل عباراتی که مربع یک عبارت جبری یعنی به شکل کلی $(f(x))^{۲}$ هستند، به شرط آن‌که $f(x)$ بتواند صفر شود، قطعاً برابر صفر است، زیرا همواره $(f(x))^{۲}\geq ۰$

۷۵. ۱ ۲ ۳ ۴



کافی است مساحت مثلث ABC را از دو طریق محاسبه کنیم:

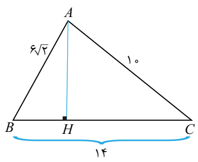
$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin A \quad , \quad S=\frac{۱}{۲}BC\times AH$$

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin A=\frac{۱}{۲}BC\times AH$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times ۶/۴\times AC\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times AH\Rightarrow\frac{AH}{AC}=\frac{۱/۶}{۲}=۰/۸$$

۷۶. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا در مثلث ABC، قضیه‌ی کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos C$$

$$\Rightarrow ۷۲=۱۰۰+۱۹۶-۲(۱۰)(۱۴)\cos C$$

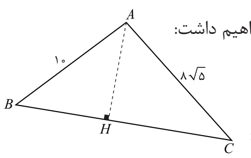
$$\Rightarrow\cos C=\frac{۲۲۴}{۲۸۰}=\frac{۴}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{AHC}:\cos C=\frac{HC}{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{HC}{۱۰}\Rightarrow HC=۸\Rightarrow BH=۱۴-۸=۶$$

پس طول قسمت کوچک‌تر برابر ۶ است.

۷۷. ۱ ۲ ۳ ۴



راه‌حل اول: با رسم ارتفاع AH خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{AHB}:\cos B=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{BH}{۱۰}\Rightarrow BH=۶$$

حال با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث AHB داریم:

$$AH=\sqrt{AB^{۲}-BH^{۲}}=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=\sqrt{۶۴}=۸$$

$$\overset{\Delta}{AHC}:CH=\sqrt{AC^{۲}-AH^{۲}}=\sqrt{۳۲۰-۶۴}=\sqrt{۲۵۶}=۱۶$$

$$\Rightarrow BC=BH+HC=۶+۱۶=۲۲$$

راه‌حل دوم: می‌توانیم از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC استفاده کنیم:

$$AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}-۲AB.BC.\cos B$$

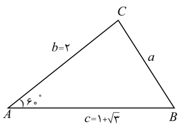
$$\Rightarrow(۸\sqrt{۵})^{۲}=۱۰۰+BC^{۲}-۲(۱۰)BC\times\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow ۳۲۰=۱۰۰+BC^{۲}-۱۲BC\Rightarrow BC^{۲}-۱۲BC-۲۲۰=۰$$

$$\Rightarrow(BC-۲۲)(BC+۱۰)=۰\Rightarrow BC=۲۲$$ یا $BC=-۱۰$ غ.ق.ق

۷۸. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها، طول ضلع BC را محاسبه می‌کنیم:



$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A$$

$$a^{۲}=(۱+\sqrt{۳})^{۲}+۲^{۲}-۲(۱+\sqrt{۳})\times ۲\times\frac{۱}{۲}$$

$$=۱+۳+۲\sqrt{۳}+۴-۲-۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow a^{۲}=۶\Rightarrow a=\sqrt{۶}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها، خواهیم داشت:

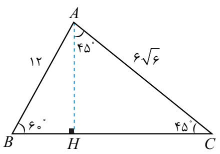
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{\sqrt{۶}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲}{\sin B}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲}{\sin B}$$

$$\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow B=۴۵^\circ$$ یا ۱۳۵°

چون مجموع زوایای داخلی مثلث برابر ۱۸۰° است پس $B=۱۳۵^\circ$ غیرقابل قبول است. $B=۴۵^\circ\Rightarrow C=۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۶۰^\circ)=۷۵^\circ$

۷۹. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{AHB}:\cos\hat{B}=\frac{BH}{AB}$$

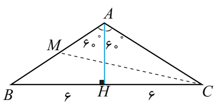
$$\Rightarrow\cos ۶۰^\circ=\frac{BH}{۱۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{BH}{۱۲}\Rightarrow BH=۶$$

$$\frac{AH}{AB}=\sin ۶۰^\circ\Rightarrow AH=AB\sin ۶۰^\circ=۱۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow HC=AH=۶\sqrt{۳}$$

۸۰. ۱ ۲ ۳ ۴



$$\sin(BAH)=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow\sin ۶۰^\circ=\frac{۶}{AB}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۶}{AB}\Rightarrow AB=\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}=۴\sqrt{۳}\Rightarrow AC=۴\sqrt{۳}$$

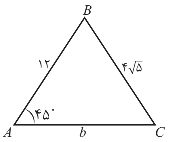
$$\Rightarrow AM=MB=۲\sqrt{۳}$$

حال در مثلث ACM، قضیه‌ی کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$CM^۲ = AM^۲ + AC^۲ - ۲(AM)(AC)\cos A$$
$$\Rightarrow CM^۲ = (۲\sqrt{۳})^۲ + (۴\sqrt{۳})^۲ - ۲(۲\sqrt{۳})(۴\sqrt{۳})\cos ۱۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow CM^۲ = ۱۲+۴۸-۴۸\times(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow CM^۲ = ۶۰+۲۴=۸۴$$
$$\Rightarrow CM=\sqrt{۸۴}=۲\sqrt{۲۱}$$

۸۱. **۱** ۲ ۳ ۴

قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای رأس A می‌نویسیم:



$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$
$$\Rightarrow (۴\sqrt{۵})^۲ = b^۲+(۱۲)^۲-۲(b)(۱۲)\cos ۴۵^\circ$$
$$\Rightarrow ۸۰=b^۲+۱۴۴-۲b\times ۱۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow b^۲-۱۲\sqrt{۲}b+۶۴=۰$$
$$\Rightarrow b=\frac{۱۲\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲۸۸-۲۵۶}}{۲}\Rightarrow b=۶\sqrt{۲}\pm ۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow b=۸\sqrt{۲}\ \ ,\ ۴\sqrt{۲}$$

۸۲. ۱ ۲ **۳** ۴

$$b^۳+a^۲c=c^۳+a^۲b\Rightarrow b^۳-c^۳=a^۲b-a^۲c$$
$$\Rightarrow (b-c)(b^۲+bc+c^۲)=a^۲(b-c)$$

چون اضلاع مثلث نابرابر هستند پس $b\neq c$ و در نتیجه $b-c\neq ۰$ و بنابراین می‌توانیم طرفین را بر $b-c$ تقسیم کنیم.

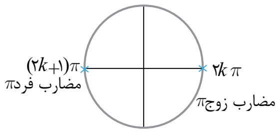
$$b^۲+bc+c^۲=a^۲ \xrightarrow{\text{قضیه کسینوس‌ها}}$$
$$b^۲+bc+c^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos \hat{A}$$
$$\Rightarrow bc=-۲bc\cos A\Rightarrow \cos A=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow A=۱۲۰^\circ=\frac{۲\pi}{۳}^{rad}$$

۸۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

دو زاویه‌ی α و β را در صورتی مکمل گویند که مجموع آن‌ها برابر ۱۸۰° یا π رادیان شود. بنابراین مکمل زاویه‌ی -۲۵° برابر است با $۱۸۰^\circ-(-۲۵^\circ)=۲۰۵^\circ$ و مکمل زاویه‌ی $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان برابر است با:

$$\pi-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱۱\pi}{۱۲}^{rad}$$

۸۴. ۱ ۲ ۳ **۴**



$$۱۰۰۰^\circ=۱۰۸۰^\circ-۸۰^\circ=۳(۳۶۰^\circ)-۸۰^\circ\Rightarrow$$ ناحیه‌ی چهارم

$$\frac{۳۵\pi}{۶}=\frac{۳۶\pi-\pi}{۶}=۶\pi-\frac{\pi}{۶}=۳(۲\pi)-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow$$ ناحیه‌ی چهارم

$$-\frac{۷\pi}{۳}=-\frac{۶\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}=-۲\pi-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow$$ ناحیه‌ی چهارم

$$\frac{۲۸\pi}{۳}=\frac{۲۷\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}=۹\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow$$ ناحیه‌ی سوم

بنابراین زاویه‌ی $\frac{۲۸\pi}{۳}$ رادیان در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار ندارد ولی سایر زوایا در ناحیه‌ی چهارم قرار دارند.

۸۵. ۱ ۲ ۳ **۴**

۵ رادیان $۵=۵\times ۵۷/۳\simeq ۲۸۶/۵^\circ\Rightarrow ۲۸۶/۵^\circ<۲۷۰^\circ+۳۰^\circ$

بنابراین ۵ رادیان در گزینه‌ی ۱ صحیح است ولی در گزینه‌ی ۲ نادرست نمایش داده شده است.

۸ رادیان $۸=۸\times ۵۷/۳\simeq ۴۵۸/۴^\circ\Rightarrow ۴۵۸/۴^\circ<۴۵۰^\circ+۳۰$

بنابراین ۸ رادیان در گزینه‌ی ۱ نادرست نمایش داده شده است ولی در گزینه‌ی ۲ صحیح است.

رادیان ۹ $۹=۹\times ۵۷/۳\simeq ۵۱۵/۷^\circ\Rightarrow ۵۱۵/۷^\circ>۴۵۰^\circ+۶۰$

۹ رادیان در گزینه‌ی ۳ نادرست است ولی در گزینه‌ی ۴ صحیح نمایش داده شده است.

رادیان ۱۲ $۱۲=۱۲\times ۵۷/۳\simeq ۶۸۷/۶^\circ\Rightarrow ۶۸۷/۶^\circ<۶۳۰^\circ+۶۰$

۱۲ رادیان در گزینه‌ی ۳ نادرست است ولی در گزینه‌ی ۴ صحیح نمایش داده شده است.

بنابراین در گزینه‌ی ۴، انتهای کمان مربوط به هر دو زاویه‌ی ۹ رادیان و ۱۲ رادیان به‌طور صحیح نمایش داده شده است.

۸۶. ۱ ۲ **۳** ۴

اگر انتهای دو کمان، برهم منطبق باشند، باید تفاضل آن‌ها مضربی از ۲π باشد، بنابراین داریم:

گزینه ۱: $\frac{۳۵\pi}{۶}-(-\frac{۵\pi}{۶})=\frac{۴۰\pi}{۶}=\frac{۲۰\pi}{۳}$

گزینه ۲: $\frac{۳۵\pi}{۶}-\frac{۱۳\pi}{۶}=\frac{۲۲\pi}{۶}=\frac{۱۱\pi}{۳}$

گزینه ۳: $\frac{۳۵\pi}{۶}-\frac{۸۳\pi}{۶}=-\frac{۴۸\pi}{۶}=-۸\pi$ ✓

گزینه ۴: $\frac{۳۵\pi}{۶}-(-\frac{۱۹\pi}{۶})=\frac{۵۴\pi}{۶}=۹\pi$

بنابراین کمان‌های $\frac{۳۵\pi}{۶}$ و $\frac{۸۳\pi}{۶}$، دو زاویه‌ای هستند که انتهای کمان آن‌ها برهم منطبق است.

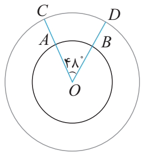
۸۷. ۱ **۲** ۳ ۴

در هر ساعت عقربه‌ی ساعت شمار $\frac{۱}{۱۲}$ دور می‌چرخد که معادل است با $\frac{۱}{۱۲}(۲\pi)=\frac{\pi}{۶}^{rad}$ بنابراین خواهیم داشت:

۶۰ دقیقه	$\frac{\pi}{۶}^{rad}$	$\Rightarrow x=\dfrac{\frac{۵\pi}{۲۴}\times ۶۰}{\frac{\pi}{۶}}=۷۵$ دقیقه
x	$\frac{۵\pi}{۲۴}$	

۸۸. ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا زاویه‌ی بین دو شعاع را به رادیان تبدیل می‌کنیم:



$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow$$

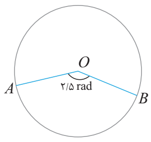
$$\frac{۴۸^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۴\pi}{۱۵}$$ رادیان

$$l_۱=r_۱\theta\Rightarrow l_۱=۱۱\times\frac{۴\pi}{۱۵}\quad,\quad l_۲=r_۲\theta\Rightarrow l_۲=۱۷\times\frac{۴\pi}{۱۵}$$

$$L_۲-L_۱=۶\times\frac{۴\pi}{۱۵}=\frac{۸\pi}{۵}$$ رادیان

۸۹. ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا توسط رابطه‌ی $l=r\theta$، اندازه‌ی شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:



$$l=r\theta\Rightarrow ۱۵=r.\frac{۵}{۲}\Rightarrow r=۶cm$$

حال با داشتن اندازه‌ی شعاع، محیط و مساحت دایره قابل محاسبه است:

محیط $P=۲\pi r=۲\pi\times۶=۱۲\pi$

مساحت $S=\pi r^۲=\pi(۶)^۲=۳۶\pi$

مجموع محیط و مساحت $=۱۲\pi+۳۶\pi=۴۸\pi$

۹۰. ۱ **۲** ۳ ۴

$$l=r\theta\Rightarrow ۳r-۹=\frac{۹}{۴}r\Rightarrow ۳r-\frac{۹}{۴}r=۹\Rightarrow\frac{۳r}{۴}=۹\Rightarrow r=۱۲$$

از طرفی چون می‌خواهیم طول کمان مقابل به زاویه‌ی ۷۵° را محاسبه کنیم، باید ابتدا زاویه‌ی ۷۵° را به رادیان تبدیل کنیم، سپس از رابطه‌ی $l=r\theta$ استفاده کنیم.

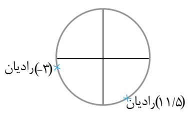
$$\frac{x^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{x^{rad}}{\pi}\Rightarrow\frac{۷۵}{۱۸۰}=\frac{x^{rad}}{\pi}\Rightarrow x^{rad}=\frac{۵\pi}{۱۲}^{rad}$$

$$l=r\theta\Rightarrow l=۱۲\times\frac{۵\pi}{۱۲}=۵\pi$$

۹۱. **۱** ۲ ۳ ۴

تمامی عبارات داده شده، تعریف نشده هستند، زیرا در موارد «الف» و «د» و «هـ» مخرج کسرها برابر صفر هستند و در موارد «ب»، «ج» و «و» نیز پس از تبدیل آن‌ها به کسر (یعنی $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$) باز هم مخرج کسرها برابر صفر هستند.

۹۲. **۱** ۲ ۳ ۴



ابتدا زوایای ۱۱ رادیان و (۳−) رادیان را به درجه تبدیل می‌کنیم:

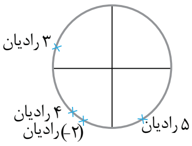
$$۱۱/۵^{rad}\simeq ۱۱/۵\times۵۷/۳\simeq۶۵۸/۹۵^\circ$$

پس کمان ۱۱/۵ رادیان در بازه‌ی $(۶۳۰^\circ\ ,\ ۷۲۰^\circ)$ قرار دارد، یعنی در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی است، پس $\cos(۱۱/۵)$ مثبت است.

$$-۳^{rad}\simeq-۳\times۵۷/۳\simeq-۱۷۱/۹^\circ$$

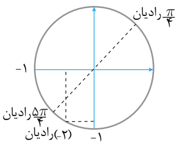
پس کمان $(-۳)^{rad}$ در بازه‌ی $(-۱۸۰^\circ\ ,\ -۹۰^\circ)$ قرار دارد، یعنی در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است. پس $\cot(-۳)$ مثبت است.

۹۳. ۱ ۲ ۳ **۴**



چون کمان ۴ رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است و $\sin۴$ و $\cos۴$ هر دو منفی هستند، پس $\sin۴\cos۴>۰$ و بنابراین گزاره‌ی «الف» صحیح است.

چون کمان ۳ رادیان در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی است و $\tan۳$ و $\cot۳$ هر دو منفی هستند، پس $\tan۳+\cot۳<۰$ و در نتیجه گزاره‌ی «ب» صحیح است.



چون کمان (۲−) رادیان در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است و بعد از نقطه‌ی $x=\frac{۵\pi}{۴}$ قرار دارد، پس طبق شکل، اگر از انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی (۲−) رادیان بر محور سینوس‌ها و کسینوس‌ها، عمود کنیم، تصویر آن روی محور سینوس‌ها، عددی منفی‌تر از تصویر آن روی محور کسینوس‌ها خواهد بود. یعنی $\sin(-۲)<\cos(-۲)$ صحیح است.

تذکر

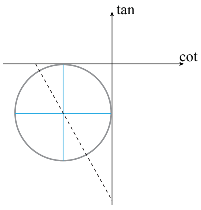
به‌طور کلی در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی همواره داریم:
($\sin x$ و $\cos x$ هر دو در ناحیه‌ی سوم منفی هستند)

$$\pi<x<\frac{۵\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \cos x<\sin x$$

$$\frac{۵\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۲}$$

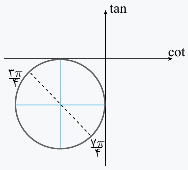
$$\Rightarrow \sin x<\cos x$$



همچنین کمان ۵ رادیان کمانی در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی است و هر دو نسبت مثلثاتی $\tan۵$ و $\cot۵$ منفی هستند ولی اگر از انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی ۵ رادیان، شعاع دایره را از دو طرف امتداد دهیم، تا محورهای tan و cot را قطع کند، به‌طور واضح مشخص است که $\tan۵<\cot۵$ است، زیرا امتداد شعاع دایره، محور تانژانت را در عددی منفی‌تر از محور کتانژانت قطع می‌کند. (از روی شکل کاملاً واضح است.)

تذکر

به‌طور کلی در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی همواره داریم:
($\tan x$ و $\cot x$ هر دو در ناحیه‌ی چهارم منفی هستند.)



$\frac{۳\pi}{۲} < x < \frac{۷\pi}{۴}$
$\Rightarrow \tan x < \cot x$
$\frac{۷\pi}{۴} < x < ۲\pi$
$\Rightarrow \cot x < \tan x$

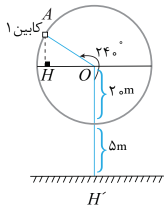
بنابراین تمامی گزاره‌های داده شده، صحیح هستند.

.۹۴ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا زاویه‌ی چرخش چرخ و فلک را به درجه تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱۰\pi}{۳} = ۲\pi + \frac{۴\pi}{۳}^{rad} = ۳۶۰^\circ + ۲۴۰^\circ$$

بنابراین چرخ و فلک یک دور کامل می‌زند و سپس زاویه‌ی ۲۴۰° را طی می‌کند. با توجه به شکل خواهیم داشت:



$H\hat{O}A = ۳۰^\circ$

$\Rightarrow \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{OA}$

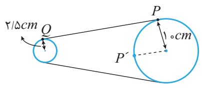
$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AH}{۲۰} \Rightarrow AH = ۱۰$

از طرفی فاصله‌ی مرکزی چرخ و فلک تا سطح زمین ۲۵ متر است، پس فاصله‌ی کابین شماره‌ی ۱ از سطح زمین برابر است با:

فاصله‌ی کابین شماره‌ی ۱ تا سطح زمین $= AH + OH' = ۲۵ + ۱۰ = ۳۵$

.۹۵ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا مسافتی که نقطه‌ی P بر روی محیط قرقره‌ی بزرگ‌تر طی می‌کند را به‌دست می‌آوریم: $(۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}^{rad})$



$PP' = r\theta = ۱۰ \times \frac{\pi}{۲} = ۵\pi\, cm$

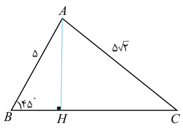
چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره‌ی کوچک‌تر نیز $۵\pi\, cm$ حرکت می‌کند. حال برای قرقره‌ی کوچک‌تر داریم:

$$l = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{l}{r} = \frac{۵\pi}{\frac{۵}{۲}} = ۲\pi^{rad}$$

بنابراین وقتی قرقره‌ی بزرگ‌تر ربع دور می‌چرخد، قرقره‌ی کوچک‌تر یک دور کامل می‌زند و نقطه‌ی Q به مکان خود باز می‌گردد.

.۹۶ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا توسط قضیه‌ی سینوس‌ها، اندازه‌ی زاویه‌ی C را محاسبه می‌کنیم:



$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{۵\sqrt{۲}}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{۵}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{۵\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۵}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{C} = ۳۰^\circ$

حال اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، در این صورت برای محاسبه‌ی طول BC خواهیم داشت:

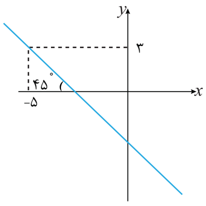
$BC = BH + HC \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{۵} \Rightarrow \cos ۴۵^\circ = \frac{BH}{۵}$

$\Rightarrow BH = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \cos C = \frac{HC}{۵\sqrt{۲}} \Rightarrow \cos ۳۰^\circ = \frac{HC}{۵\sqrt{۲}}$

$\Rightarrow HC = \frac{۵\sqrt{۶}}{۲}$

$\Rightarrow BC = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۵\sqrt{۶}}{۲} = \frac{۵}{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$

.۹۷ ۱ ۲ ۳ ۴



زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر $۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$ است. پس شیب این خط برابر $m = \tan ۱۳۵^\circ = -۱$ است.

(توجه کنید که $\tan ۱۳۵^\circ = -۱$)

چون خط از نقطه‌ی $(-۵, ۳)$ می‌گذرد، پس معادله‌ی خط به صورت زیر است:

$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۳ = (-۱)(x + ۵)$

$\Rightarrow y - ۳ = -x - ۵ \Rightarrow y = -x - ۲ \xrightarrow{x=۰} y = -۲$

$\Rightarrow$ عرض از مبدأ $= -۲$

.۹۸ ۱ ۲ ۳ ۴

چون زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر ۴۵° است، پس شیب این خط برابر $m = \tan ۴۵^\circ = ۱$ است. پس معادله‌ی خط مطلوب برابر است با:

$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۲ = ۱(x - ۰) \Rightarrow y = x + ۲$

با امتحان گزینه‌ها، مشخص می‌شود که گزینه‌ی ۳ جواب است زیرا مختصات آن در معادله‌ی خط $y = x + ۲$ صدق می‌کند، ولی سایر گزینه‌ها صدق نمی‌کنند.

.۹۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\tan^۲\frac{\pi}{۶} + \sin^۲\frac{\pi}{۴}}{\cot^۲\frac{\pi}{۴} - \cos^۲\frac{\pi}{۳}} + \cos^۲ ۷۵^\circ + \sin^۲ ۷۵^\circ$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{۱^۲ - (\frac{۱}{۲})^۲} + ۱ = \frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}} + ۱ = \frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۳}{۴}} + ۱ = \frac{۱۰}{۹} + ۱ = \frac{۱۹}{۹}$$

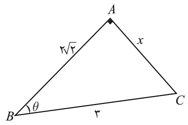
۱۰۰. (۱) (۲) (۳) (۴)

راه‌حل اول: چون $\cos\theta<۰$ و $\cot\theta>۰$ است، پس θ در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است و داریم:

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow ۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\frac{۸}{۹}}\Rightarrow ۱+\tan^۲\theta=\frac{۹}{۸}$$

$$\Rightarrow \tan^۲\theta=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \tan\theta=+\frac{۱}{\sqrt{۸}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

راه‌حل دوم: مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که اندازه‌ی وتر آن برابر ۳ و اندازه‌ی یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، زیرا بدون توجه به علامت منفی و بنا به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



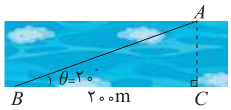
$$\cos\theta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\xrightarrow{\text{قضیه فیثاغورس}}$$

$$x^۲=۳^۲-(۲\sqrt{۲})^۲=۹-۸=۱\Rightarrow x=۱$$

$$\tan\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۰۱. (۱) (۲) (۳) (۴)

ابتدا با داشتن $\sin ۲۰^\circ$، مقدار $\cot ۲۰^\circ$ را محاسبه می‌کنیم:



$$۱+\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱}{\sin^۲ ۲۰^\circ}$$

$$\Rightarrow ۱+\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱}{(۰/۳۴)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱+\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱}{۰/۱۱۵۶}$$

$$\cot^۲ ۲۰^\circ=\frac{۱۰۰۰۰}{۱۱۵۶}-۱\Rightarrow \cot^۲ ۲۰^\circ=۷/۶۵\Rightarrow \cot ۲۰^\circ\simeq ۲/۷۶$$

از طرفی در مثلث ABC خواهیم داشت:

$$\cot ۲۰^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{۲۰۰}{AC}\Rightarrow AC=\frac{۲۰۰}{\cot ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۲۰۰}{۲/۷۶}\simeq ۷۲/۴۶$$

۱۰۲. (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A=\frac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)}=\frac{\cos ۹۰^\circ-\sin ۲۷۰^\circ}{-\sin ۱۸۰^\circ-\cos ۳۶۰^\circ}$$

$$=\frac{۰-(-۱)}{۰-۱}=-۱$$

$$B=\cot(-\frac{\pi}{۶})+\tan(-\frac{\pi}{۳})=-\cot(\frac{\pi}{۶})-\tan(\frac{\pi}{۳})$$

$$=-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{-۱}{-۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

۱۰۳. (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\sin x-\frac{۱}{\sin x}=a^۳\Rightarrow a^۳=\frac{\sin^۲ x-۱}{\sin x}=\frac{-\cos^۲ x}{\sin x}\qquad (۱)$$

$$\cos x-\frac{۱}{\cos x}=b^۳\Rightarrow b^۳=\frac{\cos^۲ x-۱}{\cos x}=\frac{-\sin^۲ x}{\cos x}\qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\xrightarrow{\text{تقسیم برهم}}\frac{b^۳}{a^۳}=\frac{\frac{-\sin^۲ x}{\cos x}}{\frac{-\cos^۲ x}{\sin x}}=\frac{\sin^۳ x}{\cos^۳ x}=\tan^۳ x$$

$$\frac{b^۳}{a^۳}=\tan^۳ x\xrightarrow{\text{ریشه سوم}}\frac{b}{a}=\tan x\Rightarrow b=a\tan x$$

۱۰۴. (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\frac{a}{۱+\sin x}+\frac{b}{۱-\sin x}=۱+\tan^۲ x$$

$$\Rightarrow \frac{a(۱-\sin x)+b(۱+\sin x)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

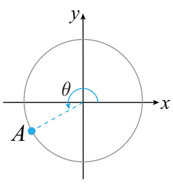
$$\Rightarrow \frac{a-a\sin x+b+b\sin x}{۱-\sin^۲ x}=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)\sin x+a+b}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

برای آن‌که تساوی بالا به ازای هر x حقیقی برقرار باشد (یعنی یک اتحاد باشد) باید داشته باشیم: $b-a=۰\ ,\ a+b=۱$

$$\begin{cases}b-a=۰\\ a+b=۱\end{cases}\Rightarrow ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ab=\frac{۱}{۴}$$

۱۰۵. (۱) (۲) (۳) (۴)



اگر نقطه‌ی $A(x,y)$ روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow (-\frac{۴}{۵})^۲+y^۲=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵}+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{۳}{۵}\Rightarrow$$

چون نقطه‌ی A در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی است، پس y منفی است

$$y=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow \sin\theta=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}$$

$$۲\cot\theta-۳\cos\theta=\frac{۸}{۳}-(-\frac{۱۲}{۵})=\frac{۴۰+۳۶}{۱۵}=\frac{۷۶}{۱۵}$$

۱۰۶. (۱) (۲) (۳) (۴)

الف) $\dfrac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\dfrac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{۱-\sin^۲\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{\cos^۲\theta}=\dfrac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow$ گزاره‌ی «الف» صحیح است.

ب) $\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha}=\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\Rightarrow$ بنابراین گزاره‌ی «ب» صحیح است.

ج) $1-\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=1-\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}=1-\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}$

$=1-(1-\sin x)=1-1+\sin x=\sin x\Rightarrow$ گزاره‌ی «ج» صحیح است

د) $\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$

$=\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos(1+\sin x)}=\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$

$=\frac{\cos x}{1+\sin x}\Rightarrow$ گزاره‌ی «د» صحیح است.

بنابراین هر چهار گزاره‌ی داده شده صحیح هستند، یعنی هر چهار تساوی، همواره برقرار هستند و یک اتحاد محسوب می‌شوند.

۱۰۷. ۱ ۲ ۳ ۴

$\sin x+\tan x=\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}$

$=\frac{\sin x(\cos x+1)}{\cos x}=\tan x\underbrace{(\cos x+1)}_{\text{نامنفی}}>0$

$\xrightarrow[\text{همواره نامنفی است}]{\text{چون عبارت }(1+\cos x)}\tan x>0$ در ناحیه‌ی اول یا سوم x (۱)

$\frac{1}{\cos x}-\sin x\tan x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$

$=\frac{\cos^2 x}{\cos x}=\cos x<0\Rightarrow$ در ناحیه‌ی دوم یا سوم x (۲)

$(1),(2)\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ در ناحیه‌ی سوم x

۱۰۸. ۱ ۲ ۳ ۴

$A=(\cot x-\frac{1}{\sin x})(\cot x+\frac{1}{\sin x})+\frac{\cot^2 x}{\cot^2 x-\cos^2 x}$

$=\cot^2 x-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\cos^2 x}$

$=(\cot^2 x-(1+\cot^2 x))+\frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 x}{\sin^2 x}}$

$=-1+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\sin^2 x)}=-1+\frac{1}{1-\sin^2 x}=-1+\frac{1}{\cos^2 x}$

$=-1+1+\tan^2 x=\tan^2 x$

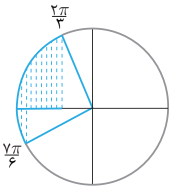
۱۰۹. ۱ ۲ ۳ ۴

$A=\cos x(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x})$

$=\cos x(\frac{1-\sin x+1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)})$

$A=\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{2\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos x}$

چون می‌خواهیم با داشتن محدوده‌ی تغییرات x، بیش‌ترین مقدار عبارت $\frac{2}{\cos x}$ را بیابیم، برای این منظور از دایره‌ی مثلثاتی کمک می‌گیریم. یعنی با تصویر کردن محدوده‌ی تغییرات کمان x روی دایره، مشخص می‌شود که $-1\le\cos x\le-\frac{1}{2}$ است. پس خواهیم داشت:



$-1\le\cos x\le-\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{\text{طرفین معکوس}}-2\le\frac{1}{\cos x}<-1$

$\xrightarrow{\text{طرفین در ۲ ضرب}}-4\le\frac{2}{\cos x}\le-2$

$\Rightarrow-4\le A\le-2$

پس بیش‌ترین مقدار عبارت A برابر ۲- است.

۱۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، مقادیر $\sin\alpha$، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{9}{49}=\frac{40}{49}\xrightarrow{\sin\alpha<0}$

$\sin\alpha=-\sqrt{\frac{40}{49}}=-\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{-2\sqrt{10}}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{-2\sqrt{10}}{3}$

$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{-2\sqrt{10}}$

$A=\sqrt{10}\sin\alpha-\frac{4-\tan^2\alpha}{1-4\cot^2\alpha}$

$=\sqrt{10}\times\frac{-2\sqrt{10}}{7}-\frac{4-\frac{40}{9}}{1-\frac{36}{40}}=\frac{-20}{7}-\frac{-\frac{4}{9}}{\frac{4}{40}}$

$A=-\frac{20}{7}+\frac{40}{9}=\frac{100}{63}$

۱۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴

$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\tan x-\frac{1}{\cos x}\Rightarrow\sqrt{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$

$=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}$

$$\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}=\frac{\sin x-1}{\cos x}\Rightarrow\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}=\frac{\sin x-1}{\cos x}\Rightarrow$$

$$\frac{|1-\sin x|}{|\cos x|}=\frac{\sin x-1}{\cos x}\Rightarrow$$

چون همواره $-1\le\sin x\le 1$ بنابراین همواره $1-\sin x\ge 0$

$$\frac{1-\sin x}{|\cos x|}=\frac{\sin x-1}{\cos x}\Rightarrow\frac{1-\sin x}{|\cos x|}=\frac{1-\sin x}{-\cos x}$$

$$\xrightarrow{\text{باید}}|\cos x|=-\cos x\Rightarrow\cos x<0$$

x در ناحیه‌ی دوم یا سوم قرار دارد.

۱۱۲. ۱ **۲** ۳ ۴

$$A=\sqrt{1+2\sin x\cos x}+\sqrt{1-2\sin x\cos x}$$
$$=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}+\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}$$
$$=|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|$$
$$=|\sin 20^\circ+\cos 20^\circ|+|\sin 20^\circ-\cos 20^\circ|$$

چون $0<20^\circ<45^\circ$ بنابراین $\sin 20^\circ<\cos 20^\circ$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$A=|\sin 20^\circ+\cos 20^\circ|+|\sin 20^\circ-\cos 20^\circ|$$
$$=\sin 20^\circ+\cos 20^\circ+\cos 20^\circ-\sin 20^\circ=2\cos 20^\circ$$

دقت شود که $\sin 20^\circ$ و $\cos 20^\circ$ هر دو مثبت هستند زیرا کمان آن‌ها حاده است به همین دلیل حاصل $\sin 20^\circ+\cos 20^\circ$ عددی مثبت است.

۱۱۳. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{2}{5}\Rightarrow\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{10}\qquad(1)$$

از طرفی داریم:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x\xrightarrow{\text{طبق رابطه‌ی (1)}}$$
$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3(\frac{3}{10})=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

۱۱۴. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan x+\cot x=2\Rightarrow\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$$
$$\Rightarrow\frac{\tan^2 x+1}{\tan x}=2\Rightarrow\tan^2 x+1=2\tan x$$
$$\Rightarrow\tan^2 x-2\tan x+1=0\Rightarrow(\tan x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow\tan x-1=0\Rightarrow\tan x=1$$

بنابراین یکی از مقادیر ممکن برای x، مقدار $x=\frac{\pi}{4}$ است که در این صورت خواهیم داشت:

$$A=\sin^8 x+\cos^6 x+\tan^4 x+\cot^2 x$$
$$=\sin^8\frac{\pi}{4}+\cos^6\frac{\pi}{4}+\tan^4\frac{\pi}{4}+\cot^2\frac{\pi}{4}$$
$$=(\frac{\sqrt{2}}{2})^8+(\frac{\sqrt{2}}{2})^6+(1)^4+(1)^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+1+1=\frac{35}{16}$$

تذکر

دقت کنید که مثلاً $x=\frac{5\pi}{4}$ نیز یکی دیگر از جواب‌های $\tan x=1$ است که در آن داریم، $\cos x=\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ولی چون توان‌های سینوس و کسینوس زوج هستند، مقدار خواسته شده فرقی نمی‌کند.

۱۱۵. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\gamma+\theta=180^\circ\Rightarrow\gamma=180^\circ-\theta\Rightarrow\tan\gamma=\tan(180^\circ-\theta)$$

$\tan\gamma=-\tan\theta\Rightarrow\tan\gamma+\tan\theta\Rightarrow$ گزاره‌ی «الف» صحیح است.

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+\theta)=270^\circ\Rightarrow\alpha+\gamma=270^\circ-(\beta+\theta)$$
$$\Rightarrow\sin(\alpha+\gamma)=\sin(270^\circ-(\beta+\theta))\Rightarrow$$

$\sin(\alpha+\gamma)=-\cos(\beta+\theta)\Rightarrow$ گزاره‌ی «ب» نادرست است.

$$(\gamma+\theta)-(\alpha+\beta)=90^\circ\Rightarrow\gamma-\alpha=90^\circ-(\theta-\beta)$$
$$\Rightarrow\tan(\gamma-\alpha)=\tan(90^\circ-(\theta-\beta))$$

$\Rightarrow\tan(\gamma-\alpha)=\cot(\theta-\beta)\Rightarrow$ گزاره‌ی «ج» صحیح است.

$$\gamma+\theta=180^\circ\Rightarrow\gamma=180^\circ-\theta\Rightarrow\sin\gamma=\sin(180^\circ-\theta)$$

$\Rightarrow\sin\gamma=\sin\theta\Rightarrow$ بنابراین گزاره‌ی «د» نیز صحیح است.

یعنی سه گزاره از گزاره‌های داده شده صحیح هستند.

۱۱۶. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan 660^\circ=\tan(720^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\cot 150^\circ=\cot(180^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$
$$\cot 120^\circ=\cot(180^\circ-60^\circ)=-\cot 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot 240^\circ=\cot(180^\circ+60^\circ)=\cot 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot 210^\circ=\cot(180^\circ+30^\circ)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$$

بنابراین $\tan 660^\circ=\cot 150^\circ$ و گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۱۱۷. **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر کمان‌های α و β مکمل یکدیگر باشند، یعنی $\alpha+\beta=\pi$

آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$ و بنابراین $\cos^3\beta=-\cos^3\alpha$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$A=\cos^3\frac{\pi}{13}+\cos^3\frac{2\pi}{13}+\cos^3\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos^3\frac{12\pi}{13}$$

$$A=\cos^3\frac{\pi}{13}+\cos^3\frac{2\pi}{13}+\cos^3\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos^3\frac{6\pi}{13}+$$
$$\cos^3(\pi-\frac{6\pi}{13})+\cos^3(\pi-\frac{5\pi}{13})+\cdots+\cos^3(\pi-\frac{\pi}{13})$$

$$A=\cos^3\frac{\pi}{13}+\cos^3\frac{2\pi}{13}+\cos^3\frac{3\pi}{13}+\cdots+\cos^3\frac{6\pi}{13}-$$
$$\cos^3\frac{6\pi}{13}-\cos^3\frac{5\pi}{13}-\cdots-\cos^3\frac{\pi}{13}=0$$

تذکر

توجه شود که کمان‌های $\frac{12\pi}{13}$ و $\frac{\pi}{13}$ و همچنین $\frac{11\pi}{13}$ و $\frac{2\pi}{13}$ و ... و همچنین $\frac{7\pi}{13}$ و $\frac{6\pi}{13}$ مکمل یکدیگرند زیرا حاصل‌جمع آن‌ها برابر π می‌شود.

به همین دلیل $\cos^3\frac{12\pi}{13}=-\cos^3\frac{\pi}{13}$ و $\cos^3\frac{11\pi}{13}=-\cos^3\frac{2\pi}{13}$ و ... و $\cos^3\frac{7\pi}{13}=-\cos^3\frac{6\pi}{13}$ است.

۱۱۸. ۱ **۲** ۳ ۴

چون مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است، پس خواهیم داشت:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=\pi-\hat{A}\Rightarrow$$
$$\tan(B+C)=\tan(\pi-A)\Rightarrow\tan(B+C)=-\tan A$$

۱۱۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\tan(B+20^\circ)\tan(C+40^\circ)=1\Rightarrow\tan(B+20^\circ)=\frac{1}{\tan(C+40^\circ)}$$
$$\Rightarrow\tan(B+20^\circ)=\cot(C+40^\circ)\Rightarrow$$

چون تانژانت یک زاویه با کتانژانت زاویه‌ی دیگری برابر شده است، پس این زوایا متمم یکدیگرند. یعنی خواهیم داشت:

$$B+20^\circ+C+40^\circ=90^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=30^\circ$$
$$\Rightarrow\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=180^\circ-30^\circ=150^\circ$$

۱۲۰. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A=\frac{\cos70^\circ+2\sin110^\circ}{\cos160^\circ-2\sin200^\circ}=\frac{\cos(90^\circ-20^\circ)+2\sin(90^\circ+20^\circ)}{\cos(180^\circ-20^\circ)-2\sin(180^\circ+20^\circ)}$$
$$=\frac{\sin20^\circ+2\cos20^\circ}{-\cos20^\circ+2\sin20^\circ}\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}\ \cos20^\circ]{\text{صورت و مخرج کسر را بر}}$$
$$A=\frac{\tan20^\circ+2}{-1+2\tan20^\circ}=\frac{2/36}{-1+0/72}=\frac{2/36}{-0/28}=\frac{236}{-28}=-\frac{59}{7}$$

۱۲۱. **۱** ۲ ۳ ۴

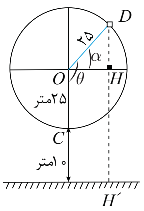
$$\frac{\sin66^\circ+\tan24^\circ\sin24^\circ}{\cos156^\circ}=\frac{\sin66^\circ+\frac{\sin24^\circ}{\cos24^\circ}\sin24^\circ}{\cos156^\circ}$$
$$=\frac{\sin66^\circ\cos24^\circ+\sin^2 24^\circ}{\cos24^\circ\cos156^\circ}$$

چون کمان‌های 66° و 24° متمم یکدیگرند، پس $\sin66^\circ=\cos24^\circ$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\sin66^\circ\cos24^\circ+\sin^2 24^\circ}{\cos24^\circ\cos156^\circ}=\frac{\cos^2 24^\circ+\sin^2 24^\circ}{\cos24^\circ\cos(180^\circ-24^\circ)}$$
$$=\frac{1}{\cos24^\circ(-\cos24^\circ)}=\frac{1}{-\cos^2 24^\circ}=\frac{1}{-(1-a^2)}=\frac{1}{a^2-1}$$

۱۲۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر شخصی از نقطه‌ی C شروع به حرکت کند و به نقطه‌ی مفروض D برسد، در این صورت با فرض این‌که زاویه‌ی شعاع OD با محور xها (سطح افقی) برابر α باشد، خواهیم داشت:



$$\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha \qquad (1)$$
$$\sin\alpha=\frac{DH}{OD}=\frac{DH}{25}\Rightarrow DH=25\sin\alpha$$
$$\xrightarrow{(1)} DH=25\sin(\theta-\frac{\pi}{2})$$
$$\Rightarrow DH=-25\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=-25\cos\theta$$
$$\Rightarrow DH'=DH+HH'=-25\cos\theta+35$$
$$\Rightarrow h(\theta)=35-25\cos\theta$$

۱۲۳. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan(\frac{10\pi}{3})=\tan(3\pi+\frac{\pi}{3})=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

چون باید عبارت مطلوب، عکس $\tan\frac{10\pi}{3}$ باشد، پس گزینه‌ای جواب است که حاصل آن برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\cot30^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot210^\circ=\cot(180^\circ+30^\circ)=\cot30^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot240^\circ=\cot(180^\circ+60^\circ)=\cot60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot300^\circ=\cot(360^\circ-60^\circ)=-\cot60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس با ضرب $\tan\frac{10\pi}{3}$ در $\cot240^\circ$، حاصل‌ضرب، برابر یک می‌شود.

۱۲۴. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan ۲۲۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$\cos(-\frac{۴\pi}{۳}) = \cos\frac{۴\pi}{۳} = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) = -\sin\frac{۷\pi}{۶} = -\sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) = -(-\sin\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cot(\frac{۵\pi}{۴}) = \cot(\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cot\frac{\pi}{۴} = ۱$$

$$A = \frac{\tan ۲۲۵^\circ - \cos(-\frac{۴\pi}{۳})}{\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) + \cot(\frac{۵\pi}{۴})} = \frac{۱-(-\frac{۱}{۲})}{\frac{۱}{۲}+۱} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = ۱$$

۱۲۵. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan ۷۲۰^\circ = \tan(۴\times ۱۸۰^\circ) = ۰$$

$$\sin ۶۳۰^\circ = \sin(۴\times ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ) = -\sin ۹۰^\circ = -۱$$

$$\cos(-۷۲۰^\circ) = \cos ۷۲۰^\circ = \cos(۴\times ۱۸۰^\circ) = ۱$$

$$\tan(-۵۴۰^\circ) = -\tan(۵۴۰^\circ) = -\tan(۳۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ) = -\tan ۱۸۰^\circ = ۰$$

$$\cot(-۶۰۰^\circ) = -\cot(۶۰۰^\circ) = -\cot(۳\times ۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan(-۶۰۰^\circ) = -\tan ۶۰۰^\circ = -\tan(۳\times ۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

$$A = ۰ + (-۱) + ۰ + ۱ + (-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) - (-\sqrt{۳}) = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۲۶. ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم اگر α و β متمم یکدیگر باشند، آن‌گاه $\tan\alpha = \cot\beta$ و $\tan\beta = \cot\alpha$ بنابراین خواهیم داشت:

$$(۲x - \frac{\pi}{۱۵}) + (\frac{۳\pi}{۱۵} + ۳x) = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۵x + \frac{۲\pi}{۱۵} = \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵x = \frac{\pi}{۲} - \frac{۲\pi}{۱۵} \Rightarrow ۵x = \frac{۱۱\pi}{۳۰} \Rightarrow x = \frac{۱۱\pi}{۱۵۰}$$

تذکر

در حالت کلی‌تر داریم:

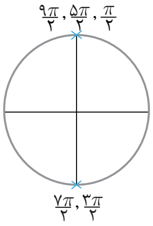
$$\tan\alpha = \cot\beta \Rightarrow \alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

۱۲۷. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha \quad , \quad \sin(\frac{۷\pi}{۲} + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\frac{۵\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با:



$$A = ۲\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) - ۳\sin(\frac{۷\pi}{۲} + \alpha) - ۴\sin(\frac{۵\pi}{۲} + \alpha) + ۵\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha)$$

$$= ۲(-\cos\alpha) - ۳(-\cos\alpha) - ۴(\cos\alpha) + ۵(\cos\alpha) = ۲\cos\alpha$$

مقدار عبارت A به ازای $\alpha = \frac{۲۲\pi}{۳}$ برابر است با:

$$A = ۲\cos(\frac{۲۲\pi}{۳}) = ۲\cos(۷\pi + \frac{\pi}{۳}) = -۲\cos\frac{\pi}{۳} = -۲(\frac{۱}{۲}) = -۱$$

۱۲۸. ۱ ۲ **۳** ۴

برای محاسبه‌ی $\sin ۱۵^\circ$ می‌توانیم از رابطه‌ی $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$ استفاده کنیم:

$$\cos ۳۰^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۱۵^\circ = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲} = \frac{۲ - \sqrt{۳}}{۴} \xrightarrow[\text{است}]{\text{چون } \sin ۱۵^\circ > ۰}$$

$$\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲}$$

۱۲۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

از فرمول‌های مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ و

$$\sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha \quad \text{و} \quad \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$

استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ (۲\cos^۲ ۱۵^\circ - ۱)}{\sin^۶ ۱۵^\circ + \cos^۶ ۱۵^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ (\cos ۳۰^\circ)}{۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ - \frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۴})} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۸}}{۱ - \frac{۳}{۱۶}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۸}}{\frac{۱۳}{۱۶}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۱۳}$$

۱۳۰. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\text{صورت کسر} = \cos\frac{\pi}{۸}(\cos\frac{\pi}{۸} - \sin\frac{\pi}{۸}) = \cos^۲\frac{\pi}{۸} - \cos\frac{\pi}{۸}\sin\frac{\pi}{۸}$$

$$= \frac{۱ + \cos\frac{\pi}{۴}}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{مخرج کسر} = \sin ۱۵^\circ(\sin^۴(۷/۵)^\circ - \cos^۴(۷/۵)^\circ)$$

$$= \sin ۱۵^\circ(\underbrace{\sin^۲(۷/۵)^\circ - \cos^۲(۷/۵)^\circ}_{-\cos(۲(۷/۵)^\circ)})(\sin^۲(۷/۵)^\circ + \cos^۲(۷/۵)^\circ)$$

$$= \sin 15^\circ(-\cos 15^\circ)(1) = -\frac{1}{2}\sin 30^\circ = -\frac{1}{4}$$

$$A = \frac{\cos\frac{\pi}{8}(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8})}{\sin 15^\circ(\sin^4(7/5)^\circ - \cos^4(7/5)^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}} = -2$$

۱۳۱. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{\cos x}{2\sin x + 5\cos x} = 3 \Rightarrow \cos x = 6\sin x + 15\cos x$$

$$\Rightarrow -14\cos x = 6\sin x \xrightarrow{\text{طرفین بر } \cos x \text{ تقسیم}} -14 = 6\tan x$$

$$\Rightarrow \tan x = -\frac{7}{3} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{2(-\frac{7}{3})}{1 - \frac{49}{9}} = \frac{-\frac{14}{3}}{-\frac{40}{9}} = \frac{21}{20} \Rightarrow \cot 2x = \frac{1}{\tan 2x} = \frac{20}{21}$$

۱۳۲. ۱ **۲** ۳ ۴

برای حل سؤال از فرمول‌های مثلثاتی $(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 = 1 + \sin x$ و $(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 = 1 - \sin x$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 9 \Rightarrow \frac{(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2}{(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2} = 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}} = \pm 3$$

$$\xrightarrow[\text{چپ را بر } \cos\frac{x}{2} \text{ تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج کسر سمت}} \frac{\tan\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2} + 1} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\tan\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2} + 1} = 3 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} - 1 = 3\tan\frac{x}{2} + 3 \Rightarrow \\ \dfrac{\tan\frac{x}{2} - 1}{\tan\frac{x}{2} + 1} = -3 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} - 1 = -3\tan\frac{x}{2} - 3 \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\frac{x}{2} = -2 \\ \tan\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون x در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی است پس $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ و بنابراین $\frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi$ یعنی $-1 < \tan\frac{x}{2} < 0$ به همین دلیل فقط مقدار $-\frac{1}{2}$ برای $\tan\frac{x}{2}$ قابل قبول است.

۱۳۳. ۱ ۲ **۳** ۴

برای حل سؤال از فرمول مثلثاتی $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \pm 1$$

۱۳۴. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos(\frac{5\pi}{2} - x) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$\sin(\frac{11\pi}{2} + x) = \sin(5\pi + \frac{\pi}{2} + x) = -\cos x$$

$$\xrightarrow{\text{فرض سوال}} \cos(\frac{5\pi}{2} - x) = 2\sin(\frac{11\pi}{2} + x)$$

$$\Rightarrow \sin x = -2\cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -2$$

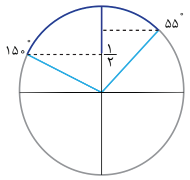
$$\Rightarrow \tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$$

$$B = 3\cot(x - 7\pi) + \tan(\frac{41\pi}{2} + x)$$

$$= -3\cot(7\pi - x) + \tan(20\pi + \frac{\pi}{2} + x)$$

$$B = -3(-\cot x) + (-\cot x) = 2\cot x = 2(-\frac{1}{2}) = -1$$

۱۳۵. **۱** ۲ ۳ ۴



$$\sin(1260^\circ - 2\alpha)$$

$$= \sin(7 \times 180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

$$27/5^\circ < \alpha < 75^\circ$$

$$\Rightarrow 55^\circ < 2\alpha < 150^\circ \xrightarrow{\text{طبق شکل}}$$

$$\frac{1}{2} < \sin 2\alpha \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2m - 1}{m} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{m} \le 1$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < -\frac{1}{m} \le -1 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{m} < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < m \le 1$$

۱۳۶. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha - 2\beta = 3\pi \Rightarrow 2\alpha - \beta = 3\pi + \beta$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین در منفی ضرب}} \beta - 2\alpha = -3\pi - \beta$$

$$\Rightarrow \sin(\beta - 2\alpha) = \sin(-3\pi - \beta) = -\sin(3\pi + \beta)$$

$$= -(-\sin\beta) = \sin\beta \xrightarrow{\text{طبق فرض } \beta = \alpha - \frac{3\pi}{2}}$$

$$\sin(\beta - 2\alpha) = \sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = -\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$$

$$= -(-\cos\alpha) = \cos\alpha$$

$$\alpha-\beta=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow 4\alpha-4\beta=6\pi\Rightarrow 4\alpha-3\beta=6\pi+\beta$$

$$\Rightarrow\cos(4\alpha-3\beta)=\cos(6\pi+\beta)\Rightarrow\cos(4\alpha-3\beta)=\cos\beta$$

$$\overset{\text{فرض}}{=}\cos(\alpha-\frac{3\pi}{2})=\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$A=\sin(\beta-2\alpha)+\cos(4\alpha-3\beta)=\cos\alpha-\sin\alpha$$

۱۳۷. **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر دو زاویه‌ی α و β متمم یکدیگر باشند، آن‌گاه تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است یعنی داریم: $\tan\alpha=\cot\beta$ و $\tan\beta=\cot\alpha$، بنابراین برای محاسبه‌ی حاصل عبارت A کافی است از جمله‌ی وسط به بعد، به‌جای $\tan\alpha$، مقدار $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ را جایگذاری کنیم (یعنی به‌جای $\tan\alpha$، کتانژانت زاویه‌ی متممش را جایگذاری می‌کنیم) در این صورت خواهیم داشت:

$$A=\tan 1^\circ.\tan 2^\circ...\tan 44^\circ.\tan 45^\circ\ ,\ \cot 44^\circ.\cot 43^\circ...\cot 2^\circ.\cot 1^\circ$$

حال چون $\tan\alpha.\cot\alpha=1$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\tan 1^\circ.\cot 1^\circ=1\ ,\ \tan 2^\circ.\cot 2^\circ=1\ ,\ ...\ ,\tan 44^\circ.\cot 44^\circ=1$$

فقط جمله‌ی وسط باقی می‌ماند که $\tan 45^\circ$ است و مقدار آن برابر یک است، پس خواهیم داشت: $A=1\times 1\times 1\times ...\times 1=1$

برای محاسبه‌ی حاصل عبارت B کافی است آن‌را در $\sin\frac{\pi}{5}$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$B=\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}$$

زوایای $\frac{4\pi}{5}$ و $\frac{\pi}{5}$ مکمل یکدیگرند زیرا حاصل‌جمع آن‌ها برابر π است پس $\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}$ و بنابراین داریم: $B=\frac{\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{4}$

پس $\frac{A}{B}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ یعنی حاصل عبارت A، چهار برابر حاصل عبارت B است.

۱۳۸. **۱** ۲ ۳ ۴

$$A=\frac{1}{1+\cot 1^\circ}+\frac{1}{1+\cot 2^\circ}+\frac{1}{1+\cot 3^\circ}+\cdots+\frac{1}{1+\cot 89^\circ}$$

$$A=\frac{1}{1+\cot 1^\circ}+\frac{1}{1+\cot 2^\circ}+\cdots+\frac{1}{1+\cot 43^\circ}+\frac{1}{1+\cot 44^\circ}+\frac{1}{1+\cot 45^\circ}+\frac{1}{1+\tan 44^\circ}+\frac{1}{1+\tan 43^\circ}+\cdots+\frac{1}{1+\tan 2^\circ}+\frac{1}{1+\tan 1^\circ}$$

دقت شود که چون در زوایای متمم، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و بالعکس، بنابراین در رابطه‌ی فوق، از جمله‌ی وسط به بعد، به‌جای $\cot\alpha$، عبارت $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ جایگذاری شده است. حال اگر جملات اول و آخر را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+\cot 1^\circ}+\frac{1}{1+\tan 1^\circ}=\frac{1+\tan 1^\circ+1+\cot 1^\circ}{(1+\cot 1^\circ)(1+\tan 1^\circ)}$$

$$=\frac{1+\tan 1^\circ+1+\cot 1^\circ}{1+\tan 1^\circ+1+\cot 1^\circ}=1$$

به همین ترتیب اگر سایر کسرهای متناظر را درنظر بگیریم، حاصل جمع هر دو کسر، برابر ۱ خواهد شد و بنابراین ۴۴ جفت از کسرها، حاصلی برابر یک خواهند داشت و از این رو فقط کسر $\frac{1}{1+\cot 45^\circ}$ باقی می‌ماند که حاصل آن برابر $\frac{1}{2}$ است. پس حاصل عبارت A برابر است با:

$$A=44(1)+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$$

۱۳۹. ۱ **۲** ۳ ۴

توجه شود که زوایای 10° و 80° و همچنین زوایای 35° و 55° متمم یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$\sin 35^\circ=\cos 55^\circ\quad,\quad \sin 80^\circ=\cos 10^\circ\quad,\quad \tan 35^\circ=\cot 55^\circ$$

حال با جایگذاری این مقادیر در عبارت A خواهیم داشت:

$$A=\frac{1-\sin 80^\circ-(\sin^2 35^\circ+\sin^2 55^\circ)}{\tan 35^\circ\tan 55^\circ-1-2\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1-\cos 10^\circ-(\cos^2 55^\circ+\sin^2 55^\circ)}{\cot 55^\circ\tan 55^\circ-1-2\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1-\cos 10^\circ-1}{1-1-2\cos 10^\circ}=\frac{-\cos 10^\circ}{-2\cos 10^\circ}=\frac{1}{2}$$

$$B=\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}$$

$$=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})+\sin(\pi+\frac{\pi}{4})+\sin(2\pi-\frac{\pi}{4})$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{-\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۱۴۰. ۱ ۲ **۳** ۴

دقت کنید که:

$$\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\cos\beta\quad,\quad\cos\alpha=\sin\beta\quad,$$

$$\alpha+\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\cot\beta\quad,\quad\cot\alpha=\tan\beta$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\sin x=\cos(۲۰^\circ+x)\Rightarrow x+۲۰^\circ+x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۹}\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۱۸}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۷\pi}{۳۶}$$

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۳۶} \quad , \quad k=۱\Rightarrow x=\frac{۴۳\pi}{۳۶},\ldots\Rightarrow$$

$$\tan(y+\frac{\pi}{۱۸})=\cot(\frac{۲\pi}{۹}+y)\Rightarrow y+\frac{\pi}{۱۸}+\frac{۲\pi}{۹}+y=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲y=k\pi+\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۱۸}\Rightarrow ۲y=k\pi+\frac{۴\pi}{۱۸}\Rightarrow y=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۹}$$

$$k=۰\Rightarrow y=\frac{\pi}{۹}\ ,\ k=۱\Rightarrow y=\frac{۱۱\pi}{۱۸}, k=۲\Rightarrow y=\frac{۱۰\pi}{۹}\ ,\ldots$$

پس گزینه‌ی ۳ می‌تواند مناسب باشد.

۱۴۱. ۱ ۲ ۳ ۴

الف) $(۱-\sin\theta)(\frac{۱}{\cos\theta}+\tan\theta)$

$$=(۱-\sin\theta)(\frac{۱}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})=(۱-\sin\theta)(\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta})$$

$$=\frac{(۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)}{\cos\theta}=\frac{۱-\sin^۲\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

بنابراین گزاره‌ی «الف» صحیح است.

ب) $\sin^۴\theta-\cos^۴\theta=(\sin^۲\theta-\cos^۲\theta)(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)$

$$=(\sin^۲\theta-\cos^۲\theta)\times ۱=\sin^۲\theta-\cos^۲\theta$$

بنابراین گزاره‌ی «ب» صحیح است.

ج) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

$$=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

بنابراین گزاره‌ی «ج» صحیح نیست.

د) $\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{۱}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos^۲\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

بنابراین گزاره‌ی «د» صحیح است.

پس سه گزاره از گزاره‌های داده شده صحیح هستند.

۱۴۲. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر زوایای α و β متمم یکدیگر باشند، در این صورت $\sin\alpha=\cos\beta$ و $\cos\alpha=\sin\beta$ بنابراین داریم:

$$\sin۸۰^\circ=\cos۱۰^\circ\Rightarrow\sin^۲۱۰^\circ+\sin^۲۸۰^\circ=\sin^۲۱۰^\circ+\cos^۲۱۰^\circ=۱$$

$$\sin۷۰^\circ=\cos۲۰^\circ\Rightarrow\sin^۲۲۰^\circ+\sin^۲۷۰^\circ=\sin^۲۲۰^\circ+\cos^۲۲۰^\circ=۱$$

$$\sin۶۰^\circ=\cos۳۰^\circ\Rightarrow\sin^۲۳۰^\circ+\sin^۲۶۰^\circ=\sin^۲۳۰^\circ+\cos^۲۳۰^\circ=۱$$

$$\sin۵۰^\circ=\cos۴۰^\circ\Rightarrow\sin^۲۴۰^\circ+\sin^۲۵۰^\circ=\sin^۲۴۰^\circ+\cos^۲۴۰^\circ=۱$$

به همین ترتیب برای جملات مخرج کسر خواهیم داشت:

$$\cos^۲۱۰^\circ+\cos^۲۸۰^\circ=۱ \quad , \quad \cos^۲۲۰^\circ+\cos^۲۷۰^\circ=۱$$

$$\cos^۲۳۰^\circ+\cos^۲۶۰^\circ=۱ \quad , \quad \cos^۲۴۰^\circ+\cos^۲۵۰^\circ=۱$$

در صورت کسر $\sin^۲۹۰^\circ=۱$ و در مخرج کسر $\cos^۲۹۰^\circ=۰$ باقی می‌ماند، بنابراین حاصل عبارت A برابر است با:

$$A=\frac{۱+۱+۱+۱+۱}{۱+۱+۱+۱+۰}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

۱۴۳. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به‌دست می‌آوریم:

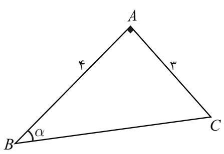
$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{\cos\alpha<۰}\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\sin\alpha>۰}\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}$$

$$=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۳}{۵} \quad , \quad \cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۴}{۳}$$

$$A=\frac{۲\sin\alpha-۳\cot\alpha}{۴\cos\alpha}=\frac{۲\times\frac{۳}{۵}-۳(-\frac{۴}{۳})}{۴\times(-\frac{۴}{۵})}=\frac{\frac{۶}{۵}+۴}{-\frac{۱۶}{۵}}$$

$$=\frac{\frac{۲۶}{۵}}{-\frac{۱۶}{۵}}=-\frac{۱۳}{۸}$$



راه‌حل دوم: می‌توانیم با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه و بدون توجه به علامت منفی برای $\tan\alpha$، مثلثی قائم‌الزاویه درنظر بگیریم که اضلاع قائم آن برابر ۳ و ۴ باشند. سپس از طریق مثلث قائم‌الزاویه، سایر مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را محاسبه کنیم:

$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{۳}{۴}$$

(علامت منفی در نسب مثلثاتی $\tan\alpha$، مربوط به ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی است، یعنی $\tan\alpha$ در ناحیه‌ی دوم منفی است که در مثلث قائم‌الزاویه، علامت منفی را نادیده می‌گیریم.)

وتر این مثلث قائم‌الزاویه برابر ۵ خواهد بود (طبق رابطه‌ی فیثاغورس) و بنابراین خواهیم داشت:

$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم}} \sin\alpha = +\frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم}} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم}} \cot\alpha = -\frac{4}{3}$$

حال می‌توان این مقادیر را در عبارت مربوطه جایگذاری کرد و حاصل عبارت A را همانند روش اول به‌دست آورد.

۱۴۴. ۱ ۲ **۳** ۴

$$A = \sin^2\theta(3+2\cot^2\theta) + \frac{8-\sin^3\theta}{2-\sin\theta} + 1 - 2\sin\theta$$

$$A = 3\sin^2\theta + 2\sin^2\theta\cot^2\theta + \frac{(2-\sin\theta)(4+2\sin\theta+\sin^2\theta)}{2-\sin\theta} + 1 - 2\sin\theta$$

$$A = 3\sin^2\theta + 2\sin^2\theta\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 4 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - 2\sin\theta$$

$$A = 3\sin^2\theta + 2\cos^2\theta + 5 + \sin^2\theta$$

$$A = 4\sin^2\theta + 2\cos^2\theta + 5 = 2\sin^2\theta + 2(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1}) + 5$$

$$A = 2\sin^2\theta + 2(1) + 5 \Rightarrow A = 2\sin^2\theta + 7$$

تذکر

در حل مثال بالا از اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ استفاده شده است.

۱۴۵. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\cot(630^\circ + \alpha) = \cot(\frac{7\pi}{2} + \alpha) = -\tan\alpha$$

حال برای محاسبه‌ی $\tan\alpha$ با استفاده از $\cos\alpha$ خواهیم داشت:

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{9}} \Rightarrow \tan^2\alpha = 8$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه چهارم}} \tan\alpha = -2\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل عبارت مطلوب برابر است با:

$$3\sin(270^\circ - \alpha) - \sqrt{2}\cot(630^\circ + \alpha) = 3(-\frac{1}{3}) - \sqrt{2}(2\sqrt{2})$$

$$= -1 - 4 = -5$$

۱۴۶. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin^2 385^\circ = \sin^2(360^\circ + 25^\circ) = \sin^2 25^\circ$$

$$\sin^2 785^\circ = \sin^2(720^\circ + 65^\circ) = \sin^2 65^\circ$$

$$= \sin^2(90^\circ - 25^\circ) = \cos^2 25^\circ$$

$$\tan 751^\circ = \tan(720^\circ + 31^\circ) = \tan 31^\circ$$

$$\cot(1049^\circ) = \cot(720^\circ + 329^\circ) = \cot 329^\circ$$

$$= \cot(360^\circ - 31^\circ) = -\cot 31^\circ$$

$$A = \frac{\sin^2 385^\circ + \sin^2 785^\circ}{\tan(751^\circ)\times\cot(1049^\circ)} = \frac{\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ}{\tan 31^\circ(-\cot 31^\circ)}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

از طرفی در عبارت B، کمان‌های $\frac{5\pi}{16}$ و $\frac{3\pi}{16}$ متمم یکدیگرند زیرا حاصل جمع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ است. پس $\sin\frac{5\pi}{16} = \cos\frac{3\pi}{16}$ و همچنین کمان‌های $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}$ متمم یکدیگرند پس $\tan\frac{\pi}{8} = \cot\frac{3\pi}{8}$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$B = \frac{\sin\frac{5\pi}{16}\tan\frac{\pi}{8}}{\cot\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{16}} = \frac{\sin\frac{5\pi}{16}\tan\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{16}} = 1$$

پس حاصل عبارت A، دو واحد کم‌تر از حاصل عبارت B است.

۱۴۷. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{13}{10} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha + \frac{13}{10}$$

چون تغییرات $\sin\alpha$ به صورت $-1 \le \sin\alpha \le 1$ است، پس قطعاً $\cos\alpha < 0$ است. از طرفی کم‌ترین مقدار $\cos\alpha$ برابر ۱- است و بنابراین قطعاً $\sin\alpha > 0$ خواهد بود. (زیرا حتی اگر $\cos\alpha = -1$ باشد خواهیم داشت: $\sin\alpha = -1 + \frac{13}{10} = \frac{3}{10} > 0$) بنابراین $\cos\alpha < 0$ و $\sin\alpha > 0$ است و قطعاً انتهای کمان α در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

۱۴۸. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin x\cos x = -\frac{4}{9}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x\cos x(\sin x + \cos x)$$

$$= (\frac{1}{3})^3 - 3(-\frac{4}{9})(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - (-\frac{4}{9}) = \frac{1}{27} + \frac{4}{9} = \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}$$

۱۴۹. **۱** ۲ ۳ ۴

اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + kx + k - 2 = 0$ باشند، باید حاصل‌ضرب ریشه‌ها برای یک باشد. یعنی داریم:

$$P = \tan\alpha.\cot\alpha = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{k-2}{1} = 1 \Rightarrow k = 3$$

از طرفی چون $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$ پس عبارت مطلوب سؤال، همان مجموع ریشه‌هاست پس داریم:

$$S=\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\Rightarrow\frac{-b}{a}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{-k}{1}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\xrightarrow{k=3}\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=-3$$

۱۵۰. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر زوایای α و β مکمل باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\alpha+\beta=\pi\Rightarrow\sin\alpha=\sin\beta\ ,\quad \cos\alpha=-\cos\beta$$

بنابراین داریم:

$$A=\frac{\cos^2 130^\circ-\sin^2 50^\circ}{\sin140^\circ\cos40^\circ}=\frac{\cos^2(180^\circ-50^\circ)-\sin^2 50^\circ}{\sin(180^\circ-40^\circ)\cos40^\circ}$$

$$=\frac{(-\cos50^\circ)^2-\sin^2 50^\circ}{\sin40^\circ\cos40^\circ}=\frac{\cos^2 50^\circ-\sin^2 50^\circ}{\frac12\sin80^\circ}$$

$$=\frac{\cos(100^\circ)}{\frac12\sin80^\circ}=\frac{\cos(180^\circ-80^\circ)}{\frac12\sin80^\circ}=\frac{-\cos80^\circ}{\frac12\sin80^\circ}=-2\cot80^\circ$$

۱۵۱. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\sqrt{1+\sin50^\circ}}{3\sin25^\circ-2\sin65^\circ}=\frac{\sqrt{(\sin25^\circ+\cos25^\circ)^2}}{3\sin25^\circ-2\cos25^\circ}$$

$$=\frac{|\sin25^\circ+\cos25^\circ|}{3\sin25^\circ-2\cos25^\circ}=\frac{\sin25^\circ+\cos25^\circ}{3\sin25^\circ-2\cos25^\circ}$$

$$\xrightarrow[\text{بر } \sin25^\circ \text{ تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}}\frac{1+\cot25^\circ}{3-2\cot25^\circ}=a$$

$$\Rightarrow 3a-2a\cot25^\circ=1+\cot25^\circ\Rightarrow(2a+1)\cot25^\circ=3a-1$$

$$\Rightarrow\cot25^\circ=\frac{3a-1}{2a+1}$$

۱۵۲. ۱ ۲ ۳ ۴

$$A=\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{11\pi}{24}$$

دقت شود که کمان‌های $\frac{\pi}{24}$ و $\frac{11\pi}{24}$ و همچنین کمان‌های $\frac{5\pi}{24}$ و $\frac{7\pi}{24}$ متمم یکدیگرند، زیرا حاصل جمع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین داریم: $\cos\frac{11\pi}{24}=\sin\frac{\pi}{24}$ و $\cos\frac{7\pi}{24}=\sin\frac{5\pi}{24}$ حال اگر این مقادیر را در عبارت داده شده، جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$A=\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}$$

$$=\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin\alpha\cos\alpha=\frac12\sin2\alpha$، بنابراین می‌توان عبارت A را به صورت زیر نوشت:

$$A=\frac12\sin\frac{\pi}{12}\times\frac12\sin\frac{5\pi}{12}=\frac14\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$$

کمان‌های $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ متمم یکدیگرند زیرا حاصل‌جمع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ است، پس $\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$A=\frac14\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac14(\frac12\sin\frac{\pi}{6})=\frac14\times\frac14=\frac{1}{16}$$

۱۵۳. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}=1-\frac12\sin^2\frac{\pi}{4}=1-\frac12(\frac{\sqrt2}{2})^2=1-\frac14=\frac34$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{5\pi}{8}=\sin^2\frac{\pi}{8}-\sin^2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8})$$

$$=\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}=-(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

$$A=\frac{\frac34}{-\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{-3}{2\sqrt2}=\frac{-3\sqrt2}{4}$$

۱۵۴. ۱ ۲ ۳ ۴

$$A=\cos^5 2x\sin2x-\sin^5 2x\cos2x$$

$$=\sin2x\cos2x(\cos^4 2x-\sin^4 2x)$$

$$=\frac12\sin4x\underbrace{(\cos^2 2x-\sin^2 2x)}_{\cos4x}\underbrace{(\cos^2 2x+\sin^2 2x)}_{1}$$

$$=\frac12\sin4x\cos4x=\frac14\sin8x$$

حال باید به‌جای x مقدار $\frac{\pi}{48}$ را جایگذاری کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$A=\frac14\sin(8\times\frac{\pi}{48})=\frac14\sin\frac{\pi}{6}=\frac14\times\frac12=\frac18$$

۱۵۵. ۱ ۲ ۳ ۴

$$A=4\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})\sin(2\pi-2\alpha)$$

$$=2\times2\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)(-\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(2\pi-2\alpha)$$

$$=-2\times(2\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(2\pi-2\alpha)$$

$$=-2\sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha)\sin(2\pi-2\alpha)$$

$$=-2\cos2\alpha(-\sin2\alpha)=2\sin2\alpha\cos2\alpha=\sin4\alpha$$

۱۵۶. ۱ ۲ ۳ ۴

از فرمول‌های مثلثاتی $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ و $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ و $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sin 44^\circ \cos 22^\circ}{(1+\cos 44^\circ)(1-\cos 22^\circ)}=\frac{2\sin 22^\circ \cos 22^\circ \cos 22^\circ}{2\cos^2 22^\circ \times 2\sin^2 11^\circ}$$

$$=\frac{\sin 22^\circ}{2\sin^2 11^\circ}=\frac{2\sin 11^\circ \cos 11^\circ}{2\sin^2 11^\circ}=\frac{\cos 11^\circ}{\sin 11^\circ}=\cot 11^\circ$$

.۱۵۷ ۱ **۲** ۳ ۴

با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ و $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ خواهیم داشت:

$$A=\frac{1+\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{1+\sin 40^\circ+\cos 40^\circ}=\frac{1-\cos 40^\circ+\sin 40^\circ}{1+\cos 40^\circ+\sin 40^\circ}$$

$$=\frac{2\sin^2 20^\circ+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{2\cos^2 20^\circ+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}$$

$$=\frac{2\sin 20^\circ(\sin 20^\circ+\cos 20^\circ)}{2\cos 20^\circ(\cos 20^\circ+\sin 20^\circ)}=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\tan 20^\circ$$

.۱۵۸ ۱ ۲ **۳** ۴

برای حل سؤال از فرمول مثلثاتی $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\cos 2x}{\tan x+\cot x}=\frac{\cos 2x}{\frac{2}{\sin 2x}}=\frac{\sin 2x\cos 2x}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sin 4x}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\sin 4x$$

حال به ازای $x=\frac{\pi}{32}$ خواهیم داشت: $A=\frac{1}{4}\sin(4\times\frac{\pi}{32})=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}$

برای محاسبه‌ی مقدار $\sin\frac{\pi}{8}$ از فرمول مثلثاتی $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

توجه شود که چون $\frac{\pi}{8}$ کمانی در ناحیه‌ی اول است، پس $\sin\frac{\pi}{8}$ مثبت است به همین دلیل جذر مثبت عدد $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ محاسبه شده است.

$$A=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}$$

.۱۵۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin x-\cos x=-\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow \sin 2x=\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \cos 4x=1-2\sin^2 2x=1-2(\frac{8}{9})^2=1-2(\frac{64}{81})=1-\frac{128}{81}=-\frac{47}{81}$$

.۱۶۰ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\tan^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cot^2 x}=14$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=14$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=14$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=14$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=14$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{1-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=14$$

$$\Rightarrow \frac{2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=14$$

$$\Rightarrow 2-2\sin^2 x\cos^2 x=14\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 16\sin^2 x\cos^2 x=2\Rightarrow \sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{8}\Rightarrow \sin^2 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos^2 2x=1-\sin^2 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

.۱۶۱ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2(\frac{4}{5})^2=1-\frac{32}{25}=-\frac{7}{25}$$

$$1+\tan^2 2\alpha=\frac{1}{\cos^2 2\alpha}\Rightarrow 1+\tan^2 2\alpha=\frac{1}{\frac{49}{625}}=\frac{625}{49}$$

$$\Rightarrow \tan^2 2\alpha=\frac{625}{49}-1=\frac{576}{49}\Rightarrow \tan 2\alpha=\pm\frac{24}{7}$$

دقت شود که چون $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ پس $\pi<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$ یعنی 2α کمانی در ناحیه‌ی سوم است و بنابراین $\tan 2\alpha$ باید عددی مثبت باشد، پس $\tan 2\alpha=\frac{24}{7}$ قابل قبول است و داریم:

$$\tan 2\alpha=\frac{24}{7}\Rightarrow \cot 2\alpha=\frac{7}{24}$$

$$\tan 2\alpha+\cot 2\alpha=\frac{24}{7}+\frac{7}{24}=\frac{576+49}{7\times 24}=\frac{625}{168}$$

.۱۶۲ **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم طبق فرمول، $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=-4\Rightarrow \cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}=4\Rightarrow 2\cot x=4$$

$$\Rightarrow \cot x = ۲ \Rightarrow \tan x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲} x} = \frac{۲\times\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan ۴x = \frac{۲\tan ۲x}{۱-\tan^{۲} ۲x} = \frac{۲(\frac{۴}{۳})}{۱-\frac{۱۶}{۹}} = \frac{\frac{۸}{۳}}{-\frac{۷}{۹}} = -\frac{۲۴}{۷}$$

۱۶۳. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا از فرمول‌های مثلثاتی $\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$ و $\cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{(۱-\tan^{۲}\alpha)\tan\alpha}{(۱+\tan^{۲}\alpha)^{۲}} = \frac{۳}{۱۶} \Rightarrow \frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha} \times \frac{\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha} = \frac{۳}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \cos ۲\alpha \times \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha = \frac{۳}{۱۶} \Rightarrow \sin ۲\alpha \cos ۲\alpha = \frac{۳}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \sin ۴\alpha = \frac{۳}{۴}$$

$$\cos ۸\alpha = ۱-۲\sin^{۲} ۴\alpha = ۱-۲(\frac{۳}{۴})^{۲} = ۱-۲\times\frac{۹}{۱۶}$$

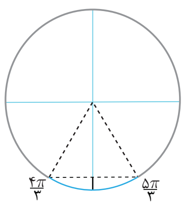
$$= ۱-\frac{۹}{۸} = -\frac{۱}{۸}$$

۱۶۴. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{۱-\tan^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}{۱+\tan^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)} = \frac{۱-\frac{\sin^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}{\cos^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}}{۱+\frac{\sin^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}{\cos^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)-\sin^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}{\cos^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}}{\frac{\cos^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)+\sin^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}{\cos^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}}$$



$$= \frac{\cos ۲(۴۵^\circ-۲\alpha)}{۱}$$

$$= \frac{\cos(۹۰^\circ-۴\alpha)}{۱} = \sin ۴\alpha$$

$$\frac{\pi}{۳} \le \alpha \le \frac{۵\pi}{۱۲} \Rightarrow \frac{۴\pi}{۳} \le ۴\alpha \le \frac{۵\pi}{۳}$$

طبق شکل، تغییرات $\sin ۴\alpha$ به صورت زیر خواهد بود:

$$-۱ \le \sin ۴\alpha \le -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار عبارت A برابر $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ خواهد بود.

تذکر

می‌توانستیم در حل مثال بالا از فرمول $\cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$ استفاده کنیم. یعنی خواهیم داشت:

$$\frac{۱-\tan^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)}{۱+\tan^{۲}(۴۵^\circ-۲\alpha)} = \cos(۲(۴۵^\circ-۲\alpha))$$

$$= \cos(۹۰^\circ-۲\alpha) - \sin ۴\alpha$$

۱۶۵. ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \frac{۱-\cot^{۲}\frac{۵\pi}{۱۲}}{۱+\cot^{۲}\frac{۵\pi}{۱۲}} = \frac{۱-\cot^{۲}(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲})}{۱+\cot^{۲}(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲})} = \frac{۱-\tan^{۲}\frac{\pi}{۱۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{\pi}{۱۲}}$$

$$= \cos(\frac{۲\pi}{۱۲}) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

توجه شود که در حل سؤال بالا از فرمول مثلثاتی $\cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$ استفاده شده است.

۱۶۶. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر از رابطه‌ی $\cos^{۲}\alpha = ۱-\sin^{۲}\alpha$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin^{۲} A + \cos^{۲} B + \cos^{۲} C = ۲$$

$$\Rightarrow \sin^{۲} A + ۱ - \sin^{۲} B + ۱ - \sin^{۲} C = ۲$$

$$\Rightarrow \sin^{۲} A = \sin^{۲} B + \sin^{۲} C \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم طبق قضیه‌ی سینوس‌ها همواره داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

اگر مقدار مشترک کسرهای فوق را برابر k فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A} = k \Rightarrow \frac{a}{k} = \sin A \quad , \quad \frac{b}{\sin B} = k \Rightarrow \frac{b}{k} = \sin B$$

$$\frac{c}{\sin C} = k \Rightarrow \frac{c}{k} = \sin C$$

حال روابط فوق را در رابطه‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت: $\frac{a^{۲}}{k^{۲}} = \frac{b^{۲}}{k^{۲}} + \frac{c^{۲}}{k^{۲}} \Rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$

چون رابطه‌ی $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$ برقرار است، پس طبق عکس قضیه‌ی فیثاغورس، مثلث ABC در رأس A قائمه است، یعنی $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است.

۱۶۷. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: دو طرف تساوی داده شده را بر $\cos^{۲} x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\sin^{۲} x + ۴\sin x\cos x + ۵\cos^{۲} x = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x} + \frac{۴\sin x\cos x}{\cos^{۲} x} + \frac{۵\cos^{۲} x}{\cos^{۲} x} = \frac{۳}{\cos^{۲} x}$$

$\Rightarrow \tan^2 x+4\tan x+5=3(1+\tan^2 x)$

$\Rightarrow \tan^2 x-2\tan x-1=0$

$\Rightarrow \tan x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}\Rightarrow \tan x=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan x=1+\sqrt{2}$ یا $\tan x=1-\sqrt{2}$

$$\begin{cases}\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{1-(1+\sqrt{2})^2}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{1-1-2-2\sqrt{2}}\\[2mm] \quad =\dfrac{2+2\sqrt{2}}{-(2+2\sqrt{2})}=-1\\[2mm] \tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{2(1-\sqrt{2})}{1-(1-\sqrt{2})^2}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{1-1-2+2\sqrt{2}}\\[2mm] \quad =\dfrac{2-2\sqrt{2}}{-(2-2\sqrt{2})}=-1\end{cases}$$

بنابراین در هر دو حالت، حاصل $\tan 2x$ برابر ۱- خواهد بود.

راه‌حل دوم:

$1-\cos^2 x+4\sin x\cos x+5\cos^2 x=3$

$\Rightarrow 4\cos^2 x-2+4\sin x\cos x=0$

$\Rightarrow 2\cos^2 x-1+2\sin x\cos x=0$

$\Rightarrow \cos 2x+\sin 2x=0\Rightarrow \cos 2x=-\sin 2x$

$\Rightarrow \tan 2x=-1$

۱۶۸. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}-1\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{8}$$

$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-2\tan\alpha\cot\alpha$$

$$=(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha})^2-2=(-\frac{8}{3})^2-2=\frac{64}{9}-2=\frac{46}{9}$$

$$\Rightarrow \tan^4\alpha+\cot^4\alpha=(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha)^2-2\tan^2\alpha\cot^2\alpha$$

$$=(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha)^2-2(\tan\alpha.\cot\alpha)^2=(\frac{46}{9})^2-2(1)$$

$$=\frac{2116}{81}-2=\frac{1954}{81}$$

۱۶۹. ۱ **۲** ۳ ۴

راه‌حل اول: کافی است خروجی تابع f را برحسب تابعی از ورودی بنویسیم، تا بتوانیم با مقایسه‌ی ورودی و خروجی، ضابطه‌ی تابع f را تشخیص دهیم. $f(\sin x)=\cos 4x\Rightarrow f(\sin x)=2\cos^2 2x-1$

$=2(1-2\sin^2 x)^2-1\Rightarrow$ از مقایسه‌ی ورودی و خروجی می‌توان ضابطه‌ی f را تشخیص داد. $f(x)=2(1-2x^2)^2-1$

بنابراین برای محاسبه‌ی $f(\frac{1}{2})$ کافی است به‌جای x مقدار $\frac{1}{2}$ را قرار دهیم: $f(\frac{1}{2})=2(1-2(\frac{1}{2})^2)^2-1=2(1-\frac{1}{2})^2-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

راه‌حل دوم: چون ضابطه‌ی $f(\sin x)$ را در اختیار داریم و مقدار $f(\frac{1}{2})$ مورد نظر است، پس کافی است به‌جای x مقدار $x=\frac{\pi}{6}$ را قرار دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$f(\sin x)=\cos 4x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f(\sin\frac{\pi}{6})=\cos(4\times\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{2})=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow f(\frac{1}{2})=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

۱۷۰. ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا عبارت را در $\sin 20^\circ$، ضرب و تقسیم می‌کنیم، تا بتوانیم از فرمول مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ استفاده کنیم:

$$A=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$

$$=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{4}\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{8}\sin(180^\circ-20^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{8}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}$$

۱۷۱. **۱** ۲ ۳ ۴

کافی است عبارت داده شده را در $\cos 18^\circ$ ضرب و تقسیم کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\sin 18^\circ\sin 54^\circ=\frac{\sin 18^\circ\cos 18^\circ\sin 54^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin 36^\circ\sin 54^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{\frac{1}{4}\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{1}{4}$$

توجه شود که در محاسبه‌ی حاصل عبارت، از روابط $\sin 54^\circ=\cos 36^\circ$ و $\sin 72^\circ=\cos 18^\circ$ استفاده شده است. (زوایای متمم)

۱۷۲. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-(2-\sqrt{3})^2}{1+(2-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{1-(4+3-4\sqrt{3})}{1+(4+3-4\sqrt{3})}=\frac{4\sqrt{3}-6}{8-4\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos 2x=2\cos^2 x-1=2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-1$$
$$=2(\frac{3}{4})-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

۱۷۳. **۱** ۲ ۳ ۴

از فرمول مثلثاتی $\cot x-\tan x=2\cot 2x$ استفاده می‌کنیم یعنی در عبارت داده شده به‌جای عبارت $2\cot 80^\circ$ از فرمول $2\cot 80^\circ=\cot 40^\circ-\tan 40^\circ$ استفاده می‌کنیم:

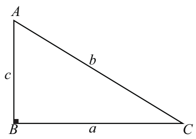
$$A=\tan 20^\circ+2\tan 40^\circ+2(2\cot 80^\circ)$$
$$=\tan 20^\circ+2\tan 40^\circ+2(\cot 40^\circ-\tan 40^\circ)$$
$$A=\tan 20^\circ+2\tan 40^\circ+2\cot 40^\circ-2\tan 40^\circ$$
$$=\tan 20^\circ+2\cot 40^\circ$$

مجدداً به‌جای $2\cot 40^\circ$ از فرمول $2\cot 40^\circ=\cot 20^\circ-\tan 20^\circ$ استفاده می‌کنیم: $A=\tan 20^\circ+\cot 20^\circ-\tan 20^\circ=\cot 20^\circ$

و چون $\cot 20^\circ=\tan 70^\circ$ است، بنابراین گزینه‌ی ۱ جواب است.

۱۷۴. **۱** ۲ ۳ ۴

برای حل سؤال می‌توانیم از فرمول مثلثاتی $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$ استفاده کنیم.



$$\sin A=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}$$
$$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{c}{b}}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b+c}{b}}=\frac{a}{b+c}$$
$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}$$

تذکر

برای اثبات فرمول مثلثاتی $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ *می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:*

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

۱۷۵. ۱ **۲** ۳ ۴

اگر $\alpha+\beta=2\pi$ آن‌گاه $\tan\alpha=-\tan\beta$ و در نتیجه $\tan\alpha+\tan\beta=0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{9}+\frac{17\pi}{9}=2\pi\Rightarrow \tan\frac{\pi}{9}+\tan\frac{17\pi}{9}=0$$
$$\frac{2\pi}{9}+\frac{16\pi}{9}=2\pi\Rightarrow \tan\frac{2\pi}{9}+\tan\frac{16\pi}{9}=0$$

به همین ترتیب حاصل جمع دوبه‌دوی سایر جملات نیز برابر صفر خواهد شد و تنها جمله‌ای که باقی می‌ماند، جمله‌ی وسط است که $\tan\frac{9\pi}{9}$ یا همان $\tan\pi$ است که مقدار آن برابر صفر است. پس حاصل کل عبارت A برابر صفر است.

۱۷۶. ۱ ۲ **۳** ۴

دقت شود اگر α و β متمم یکدیگر باشند، آن‌گاه $\sin\alpha=\cos\beta$ و $\cos\alpha=\sin\beta$ بنابراین داریم:

$$\sin 10^\circ=\cos 80^\circ\quad,\quad \sin 20^\circ=\cos 70^\circ$$
$$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ,\ \dots,\quad \sin 80^\circ=\cos 10^\circ$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\cdots+\sin 80^\circ=\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cdots+\cos 80^\circ$$

حال در صورت کسر یک جمله باقی می‌ماند که $\sin 90^\circ=1$ است و در مخرج کسر، یک جمله باقی می‌ماند که $\cos 90^\circ=0$ است، یعنی صورت کسر یک واحد از مخرج کسر، بزرگ‌تر است و چون صورت و مخرج، مقادیری مثبت هستند، پس قطعاً $A>1$ است. زیرا اگر فرض کنیم $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\cdots+\sin 80^\circ=a$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$A=\frac{a+1}{a+0}=\frac{a+1}{a}>1$$

۱۷۷. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{\pi}{20}+\frac{9\pi}{20}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\frac{\pi}{20}=\cos\frac{9\pi}{20}$$
$$\frac{2\pi}{20}+\frac{8\pi}{20}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\frac{2\pi}{20}=\cos\frac{8\pi}{20}$$
$$\frac{3\pi}{20}+\frac{7\pi}{20}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\frac{3\pi}{20}=\cos\frac{7\pi}{20}$$
$$\frac{4\pi}{20}+\frac{6\pi}{20}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\frac{4\pi}{20}=\cos\frac{6\pi}{20}$$

از طرفی $\sin\frac{5\pi}{20}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\frac{10\pi}{20}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ بنابراین خواهیم داشت:

$$A=\sin^2\frac{\pi}{20}+\sin^2\frac{2\pi}{10}+\sin^2\frac{3\pi}{20}+\cdots+\sin^2\frac{10\pi}{20}$$
$$=\cos^2\frac{9\pi}{20}+\cos^2\frac{8\pi}{20}+\cos^2\frac{7\pi}{20}+\cos^2\frac{6\pi}{20}+$$
$$\sin^2\frac{5\pi}{20}+\sin^2\frac{6\pi}{20}+\sin^2\frac{7\pi}{20}+\sin^2\frac{8\pi}{20}+\sin^2\frac{9\pi}{20}+\sin^2\frac{10\pi}{20}$$
$$=1+1+1+1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(1)^2=5/5$$

۱۷۸. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-\frac{۳\pi}{۴})=-\sin\frac{۳\pi}{۴}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(-\frac{۴\pi}{۳})=-\tan\frac{۴\pi}{۳}=-\tan(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$A=\frac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(-\frac{۳\pi}{۴})+\frac{۱}{۲}\tan(-\frac{۴\pi}{۳})}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{۲}}=-۱$$

$$\sin\frac{۲۵\pi}{۳}=\sin(۸\pi+\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\sin^۲\frac{۲۵\pi}{۳}=\frac{۳}{۴}$$

$$\cos\frac{۲۳\pi}{۴}=\cos(۶\pi-\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\cos^۲\frac{۲۳\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$B=\sin^۲\frac{۲۵\pi}{۳}-\cos^۲\frac{۲۳\pi}{۴}=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow B-A=\frac{۱}{۴}-(-۱)=\frac{۵}{۴}$$

۱۷۹. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sqrt{\frac{\cot^۲\alpha}{۱+\cot^۲\alpha}}=\sqrt{\frac{\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}}{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}}=\sqrt{\cos^۲\alpha}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha$$

چون α کمانی در ناحیه‌ی دوم است پس $\cos\alpha<۰$ است.

$$\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha}+\frac{۱+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^۲\alpha+(۱+\sin\alpha)^۲}{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)}$$

$$=\frac{\cos^۲\alpha+۱+\sin^۲\alpha+۲\sin\alpha}{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)}=\frac{۲+۲\sin\alpha}{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)}$$

$$=\frac{۲(۱+\sin\alpha)}{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)}=\frac{۲}{\cos\alpha}$$

$$A=(-\cos\alpha)(\frac{۲}{\cos\alpha})=-۲$$

۱۸۰. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\sin\theta+۳\cos\theta}{\sin\theta-۲\cos\theta}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳\sin\theta+۹\cos\theta=\sin\theta-۲\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۱۱\cos\theta=-۲\sin\theta\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow\tan\theta=-\frac{۱۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow ۱+\frac{۱۲۱}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$\Rightarrow\cos^۲\theta=\frac{۴}{۱۲۵}\xrightarrow[\text{دوم است}]{\text{چون }\theta\text{ در ناحیه}}\cos\theta=-\sqrt{\frac{۴}{۱۲۵}}=-\frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$$

۱۸۱. ۱ ۲ ۳ ۴

به منظور استفاده از فرض ابتدا، طرفین تساوی داده شده را بر $\cos^۲\alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$۶\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=۳$$

$$\Rightarrow\frac{۶\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}-\frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^۲\alpha}=\frac{۳}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow ۶\tan^۲\alpha-۱+\tan\alpha=۳(۱+\tan^۲\alpha)$$

$$\Rightarrow ۶\tan^۲\alpha-۱+\tan\alpha=۳+۳\tan^۲\alpha$$

$$\Rightarrow ۳\tan^۲\alpha+\tan\alpha-۴=۰\xrightarrow[\text{صفر}]{\text{مجموع ضرایب}}$$

$$\tan\alpha=۱\ ,\quad \tan\alpha=-\frac{۴}{۳}$$

چون α کمانی در ناحیه‌ی دوم است، پس $\tan\alpha<۰$ و بنابراین $\tan\alpha=۱$ غیرقابل‌قبول است و فقط $\tan\alpha=-\frac{۴}{۳}$ قابل قبول است.

حال داریم: $\tan(\frac{۱۲۵\pi}{۲}-\alpha)-\cot(-۹\pi-\alpha)$

$$=\tan(۶۲\pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha)+\cot(۹\pi+\alpha)=\cot\alpha+\cot\alpha$$

$$=۲\cot\alpha=۲(-\frac{۳}{۴})=-\frac{۳}{۲}$$

توجه شود که چون $\tan\alpha=-\frac{۴}{۳}$ پس $\cot\alpha=-\frac{۳}{۴}$

۱۸۲. ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا باید عبارت را به ساده‌ترین صورت ممکن تبدیل کنیم، سپس کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار آن را به‌دست آوریم:

$$A=\frac{۱-۴\cos^۲x}{-۳+۲\cos^۲x}=\frac{-۵+۶-۴\cos^۲x}{-۳+۲\cos^۲x}$$

$$=\frac{-۵}{-۳+۲\cos^۲x}+\frac{-۲(-۳+۲\cos^۲x)}{-۳+۲\cos^۲x}$$

$$A=\frac{-۵}{-۳+۲\cos^۲x}-۲$$

حال می‌دانیم همواره تغییرات $\cos x$ به صورت زیر است:

$$-۱\le\cos x\le ۱\Rightarrow ۰\le\cos^۲x\le ۱\Rightarrow ۰\le ۲\cos^۲x\le ۲$$

$$\Rightarrow -۳\le -۳+۲\cos^۲x\le -۱\Rightarrow -۱\le\frac{۱}{-۳+۲\cos^۲x}\le -\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۳}\le\frac{-۵}{-۳+۲\cos^۲x}\le ۵\Rightarrow\frac{۵}{۳}-۲\le\frac{-۵}{۲\cos^۲x-۳}-۲\le ۵-۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le A\le ۳$$

مجموع کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار عبارت $A=-\frac{۱}{۳}+۳=\frac{۸}{۳}$

۱۸۳. ۱ ۲ ۳ ۴

توجه شود که کمان‌های $\frac{\pi}{۸}$ و $\frac{۷\pi}{۸}$ و همچنین کمان‌های $\frac{۵\pi}{۸}$ و $\frac{۳\pi}{۸}$ مکمل یکدیگرند زیرا حاصل‌جمع آن‌ها برابر π می‌شود. بنابراین

$\sin\frac{\pi}{8}=\sin\frac{7\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{5\pi}{8}$ (اگر α و β مکمل یکدیگر باشند، یعنی $\alpha+\beta=\pi$ آن‌گاه $\sin\alpha=\sin\beta$) پس می‌توان عبارت A را به صورت زیر نوشت:

$$A=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$$
$$=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}$$
$$A=2\sin^4\frac{\pi}{8}+2\sin^4\frac{3\pi}{8}=2(\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8})$$

حال دقت شود که کمان‌های $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}$ متمم یکدیگرند زیرا $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ بنابراین $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$

$$A=2(\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8})\xrightarrow[\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha]{\text{طبق فرمول مثلثاتی}}$$
$$A=2(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4})$$
$$A=2(1-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2)=2(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{2}$$

یادآوری: فرمول‌های مثلثاتی زیر را به خاطر بسپارید:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

۱۸۴. ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا از فرمول‌های مثلثاتی $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$ و $(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$ استفاده می‌کنیم تا عبارات مثلثاتی از زیر رادیکال خارج شوند:

$$\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}=\frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}+\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|=\frac{4}{5}$$

چون $0<x<\frac{\pi}{4}$ پس $\sin x>0$ و $\cos x>0$ و $\cos x>\sin x$ است و بنابراین داریم:

$$|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|=\frac{4}{5}\Rightarrow$$
$$\sin x+\cos x+\cos x-\sin x=\frac{4}{5}\Rightarrow 2\cos x=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos x=\frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow\cos 2x=2\cos^2 x-1=2(\frac{2}{5})^2-1=\frac{8}{25}-1=-\frac{17}{25}$$
$$\cos 4x=2\cos^2 2x-1=2(-\frac{17}{25})^2-1=2(\frac{289}{625})-1$$
$$=\frac{578}{625}-1=-\frac{47}{625}$$

۱۸۵. **۱** ۲ ۳ ۴

برای حل سؤال، از فرمول‌های مثلثاتی $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ و $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$A=\frac{\sin 2x+\sin 4x}{1+\cos 2x+\cos 4x}-\cot 2x$$
$$=\frac{\sin 2x+2\sin 2x\cos 2x}{1+\cos 4x+\cos 2x}-\cot 2x$$
$$=\frac{\sin 2x+2\sin 2x\cos 2x}{2\cos^2 2x+\cos 2x}-\cot 2x$$
$$=\frac{\sin 2x(1+2\cos 2x)}{\cos 2x(2\cos 2x+1)}-\cot 2x$$
$$=\tan 2x-\cot 2x=-2\cot 4x$$

در انتهای حل سؤال از فرمول $\tan\alpha-\cot\alpha=-2\cot 2\alpha$ استفاده شده است.

۱۸۶. ۱ **۲** ۳ ۴

$$A=\frac{4\cos 2x}{\tan x+\cot x}=\frac{4\cos 2x}{\frac{2}{\sin 2x}}=2\sin 2x\cos 2x=\sin 4x$$
$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{16}}a=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

توجه شود که در محاسبه‌ی حاصل عبارت A از فرمول $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ استفاده شده است.

حال برای محاسبه‌ی حاصل عبارت B از فرمول مثلثاتی $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$B=\sin^2(\frac{\pi}{4}+x)-\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)$$
$$=\cos^2(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}+x))-\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)$$
$$=\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)-\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\sin 2x$$
$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{8}}b=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

همچنین از فرمول مثلثاتی $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$ استفاده شده است.

$$a+b=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

۱۸۷. ۱ **۲** ۳ ۴

توجه شود که $(68^\circ-\beta)+(22^\circ+\beta)=90^\circ$ و همچنین $(38^\circ+\alpha)+(52^\circ-\alpha)=90^\circ$ بنابراین می‌توان از روابط مربوط به زوایای متمم استفاده کرد و داریم:

$$A=\sin^2(38^\circ+\alpha)+\cot(22^\circ+\beta)\cot(\beta-68^\circ)+\sin^2(52^\circ-\alpha)$$
$$=\sin^2(38^\circ+\alpha)+\cot(22^\circ+\beta)(-\cot(68^\circ-\beta))+\cos^2(38^\circ+\alpha)$$
$$=1-\cot(22^\circ+\beta)\tan(22^\circ+\beta)=1-1=0$$

$$B=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}}{\sin(\pi-\frac{\pi}{5})+\sin(\pi-\frac{2\pi}{5})}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}}=1$$

پس حاصل عبارت A، یک واحد از عبارت B، کم‌تر است.

۱۸۸. ۱ ۲ ۳ ۴

از فرمول‌های مثلثاتی $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ و $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2(\frac{1}{5})^2-1=\frac{2}{25}-1=-\frac{23}{25}$$

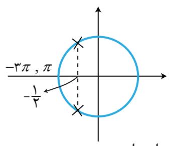
$$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=2(-\frac{23}{25})^2-1=2(\frac{529}{625})-1$$

$$=\frac{1058}{625}-1=\frac{433}{625}$$

$$A=3\tan^2\frac{\alpha}{2}+25\cos 4\alpha=3(\frac{2}{3})+25(\frac{433}{625})$$

$$=2+\frac{433}{25}=\frac{483}{25}$$

۱۸۹. ۱ ۲ ۳ ۴

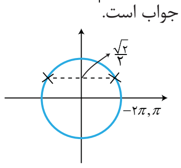


با رسم دایره‌ی مثلثاتی داریم:

برای رسیدن از -3π به π دو دور، در دایره مثلثاتی گردش می‌کنیم.

بنابراین معادله در بازه‌ی $[-3\pi\ ,\ \pi]$ دارای ۴ جواب است.

۱۹۰. ۱ ۲ ۳ ۴



$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

با رسم دایره‌ی مثلثاتی داریم:

برای رسیدن از -2π به 2π دو دور، در دایره مثلثاتی گردش می‌کنیم.

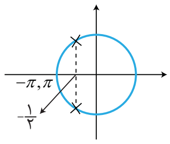
بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازه‌ی $[-2\pi\ ,\ 2\pi]$ برابر ۴ است.

۱۹۱. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos x(2\cos x-9)=5\Rightarrow 2\cos^2 x-9\cos x-5=0$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{4}=\frac{9\pm 11}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\ ,\ \cos x=5\ \text{غ.ق}$$



$$\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

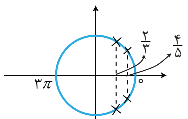
از شکل مشخص است که معادله‌ی $\cos x=-\frac{1}{2}$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$، دو جواب دارد.

۱۹۲. ۱ ۲ ۳ ۴

$$(3\cos x-2)(2\cos x-3)(4\cos x-5)(5\cos x-4)=0$$

$$\begin{cases}3\cos x-2=0\Rightarrow\cos x=\frac{2}{3}\\ 2\cos x-3=0\Rightarrow\cos x=\frac{3}{2}\quad \text{غ.ق}\Rightarrow\ \text{معادله جواب ندارد}\\ 4\cos x-5=0\Rightarrow\cos x=\frac{5}{4}\quad \text{غ.ق}\Rightarrow\ \text{معادله جواب ندارد}\\ 5\cos x-4=0\Rightarrow\cos x=\frac{4}{5}\end{cases}$$

حال برای تعیین تعداد جواب‌های هر یک از معادلات $\cos x=\frac{2}{3}$ و $\cos x=\frac{4}{5}$ از دایره‌ی مثلثاتی استفاده می‌کنیم. از ۰ تا 3π باید ۱/۵ دور در دایره گردش کنیم.



پس معادله جمعاً دارای ۶ ریشه در بازه‌ی $[0\ ,\ 3\pi]$ است.

۱۹۳. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم مساحت یک مثلث، برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع است، بنابراین داریم:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C\Rightarrow 3=\frac{1}{2}\times 2\times 6\times\sin C\Rightarrow \sin C=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[0<\hat{C}<180^\circ]{\text{با توجه به محدودیت}} C=30^\circ\quad \text{یا}\quad 150^\circ$$

پس باید زاویه‌ی بین این دو ضلع برابر 30° یا 150° باشد و بنابراین دو مثلث با این شرایط موجود است.

۱۹۴. ۱ ۲ ۳ ۴

$$d=\frac{V^2\sin 2\theta}{10}\Rightarrow 12/8=\frac{16^2\sin 2\theta}{10}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta=\frac{12/8\times 10}{256}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}2\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow\theta=k\pi+\frac{\pi}{12} & k\in\mathbb{Z}\\ 2\theta=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\theta=k\pi+\frac{5\pi}{12} & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

به ازای $k=0$ جواب‌های $\theta=\frac{\pi}{12}$ و $\theta=\frac{5\pi}{12}$ به‌دست می‌آیند که $\theta=\frac{\pi}{12}$ در گزینه‌ها موجود است.

۱۹۵. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos^2 x-\tan^2 x=1\Rightarrow\cos^2 x=1+\tan^2 x$$

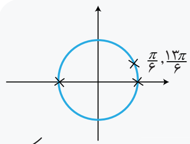
$$\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$\cos^4 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{k=1} x = 2\pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{k=0} x = \pi \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $(\frac{\pi}{6} , \frac{13\pi}{6})$ دارای دو جواب است.

تذکر

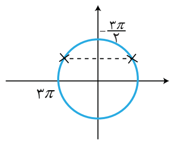


تعداد ریشه‌های معادلات $\cos x = 1$ و $\cos x = -1$ را با دایره‌ی مثلثاتی نیز می‌توانیم محاسبه کنیم: از $\frac{\pi}{6}$ تا $\frac{13\pi}{6}$ یک دور در دایره می‌زنیم و دو بار از کنار جواب‌ها عبور می‌کنیم. ■

.۱۹۶ ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول:

$$2\sin 3x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



با تغییر متغیر $3x = t$ بازه‌ی t به شکل $t \in [-\frac{3\pi}{2} , 3\pi]$ خواهد بود. حال تعداد ریشه‌های معادله‌ی $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ را با توجه به دایره در بازه‌ی $[-\frac{3\pi}{2} , 3\pi]$ می‌شماریم. از $-\frac{3\pi}{2}$ تا 3π، پنج بار از کنار جواب‌ها عبور می‌کنیم.

راه‌حل دوم:

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} & \checkmark \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} & \checkmark \end{cases}$$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$ ✓

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$ ✓

$\xrightarrow{k=-1} x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12}$ ×

$\xrightarrow{k=-1} x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{12}$ ✓

به ازای سایر مقادیر k معادله در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2} , \pi]$ ریشه‌ای ندارد. پس تعداد جواب‌های آن در این بازه برابر ۵ است.

.۱۹۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

k	-1	-2	-3
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{17\pi}{6}$

k	-1	-2	-3
x	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$

بنابراین معادله در بازه‌ی داده شده دارای ۶ جواب است.

تذکر

با دایره‌ی مثلثاتی هم می‌توانید تعداد جواب‌ها را بشمارید.

.۱۹۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\tan 2x - \cot 2x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow -2\cot 4x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cot 4x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan 4x = -\sqrt{3}$$

$$4x = k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$$

k	0	1	2	3
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازه‌ی $(0 , \pi)$ برابر ۴ است.

تذکر

با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی و تغییر متغیر $4x = t$ هم می‌توانید تعداد ریشه‌ها را در بازه‌ی $t \in (0, 4\pi)$ بشمارید.

.۱۹۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{4} = \frac{-2 \pm 4}{4}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ , \ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \begin{array}{c|c} k & 0 \\ \hline x & \frac{\pi}{6} \end{array} \\ \sin x = -\frac{3}{2} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$ فقط یک ریشه دارد.

.۲۰۰ ۱ ۲ ۳ ۴

در نقاطی که $\sin 5x = 1$ است، نمودار تابع f، حداکثر مقدار خود را اختیار می‌کند. بنابراین داریم:

$$\sin 5x = 1 \Rightarrow 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

فقط به ازای $k=-1$ و $k=0$ و $k=1$ جواب‌هایی در بازه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آید بنابراین معادله در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$ سه ریشه دارد، یعنی نمودار تابع در بازه‌ی مورد نظر، ۳ بار حداکثر مقدار خود را اختیار می‌کند.

۲۰۱. ۱ **[۲]** ۳ ۴

برای این‌که تابع $f(x)$، کم‌ترین مقدار خود را اختیار کند، باید $\sin(3\pi x-\frac{\pi}{4})=1$ باشد در این صورت کم‌ترین مقدار $f(x)$ به‌دست می‌آید که برابر ۴- است (زیرا تغییرات سینوس هر زاویه‌ای همواره در بازه‌ی $[-1,1]$ است) پس داریم:

$$\sin(3\pi x-\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow 3\pi x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 3\pi x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2k}{3}+\frac{1}{4}$$

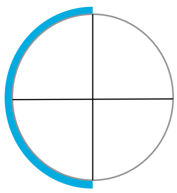
k	0	1	2	$\dots$
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{19}{12}$	$\dots$

به ازای $k=1$ مقدار $x=\frac{11}{12}$ به‌دست می‌آید که در گزینه‌ها موجود است.

۲۰۲. ۱ ۲ ۳ **[۴]**

اگر معادله در بازه‌ی $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ دارای ریشه باشد، یعنی $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ و بنابراین $\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3\pi}{2}$ خواهد بود و در این صورت طبق شکل داریم:

$$\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow -1\le\cos 2x<0$$



از طرفی طبق معادله‌ی داده شده داریم:

$$\cos 2x=\frac{7-m}{3}\Rightarrow -1\le\frac{7-m}{3}<0$$

$$\Rightarrow -3\le 7-m<0$$

$$\Rightarrow -10\le -m<-7$$

$$\Rightarrow 7<m\le 10$$

۲۰۳. **[۱]** ۲ ۳ ۴

اگر به k مقادیر صحیح $k=0$ و $k=1$ و $k=2$ و .. و. $k=7$ و $k=8$ را مقداردهی کنیم، زوایای $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{4}$ و $x=\pi$ و $x=\frac{5\pi}{4}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ و $x=\frac{7\pi}{4}$ و $x=2\pi$ به‌دست می‌آید که مشخص می‌شود گزینه‌ی ۱ جواب است.

(توجه شود که ۸ نقطه‌ی متمایز روی دایره مشخص خواهد شد زیرا از $k=8$ به بعد، جواب‌های به‌دست آمده برای x، بر جواب‌های قبلی منطبق می‌شوند.)

۲۰۴. ۱ ۲ **[۳]** ۴

در صورتی می‌توان برای کمان‌های مشخص شده در یک دایره یک فرمول کلی ارائه کرد که فاصله‌ی بین کمان‌های متوالی، عددی ثابت باشد. در بین گزینه‌های داده شده، فقط در گزینه‌ی ۳ فاصله‌ی بین کمان‌های متوالی $\frac{2\pi}{3}^{rad}=120^\circ$ است. فرمول کلی این کمان‌ها به صورت $x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$ است. (با مقداردهی به k که عددی صحیح است، جای این کمان‌ها روی دایره مشخص خواهد شد. مثلاً اگر به k، مقادیر صفر و ۱ و ۲ را مقداردهی کنیم، جواب‌های آن به صورت $x=-\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{7\pi}{6}$ خواهد بود که دقیقاً همان نقاط مشخص شده در گزینه‌ی ۳ است. به ازای سایر مقادیر k، کمان‌های به‌دست آمده بر کمان‌های قبلی منطبق خواهند شد.)

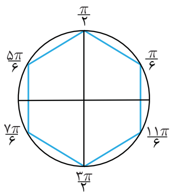
۲۰۵. ۱ ۲ **[۳]** ۴

باید به k مقادیر مختلف $k=0$ و $k=1$ و $k=2$ و ... را مقداردهی کنیم، که در این صورت مقادیر زیر برای زاویه‌ی x به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \ x=\frac{5\pi}{6}\ ,\ \ x=\frac{7\pi}{6}$$

$$x=\frac{3\pi}{2}\ ,\ \ x=\frac{11\pi}{6}\ ,\ \ x=\frac{13\pi}{6}\ ,\ \dots$$

به ازای $k=6$ و اعداد طبیعی بزرگ‌تر از آن انتهای زوایا، بر انتهای زوایای قبلی منطبق می‌شود. بنابراین از وصل کردن این نقاط به یکدیگر یک شش ضلعی منتظم ایجاد می‌شود زیرا اندازه‌ی کمان‌ها با هم مساویند و در نتیجه وتر نظیر این کمان‌ها نیز با هم مساویند.



۲۰۶. ۱ ۲ **[۳]** ۴

$$\cos 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi\Rightarrow x=k\pi$$

یادآوری: جواب معادلات مثلثاتی در حالات خاص زیر را به خاطر بسپارید:

$$\sin x=0\ \Rightarrow x=k\pi$$

$$\sin x=1\ \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x=-1\ \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x=0\ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x=1\ \Rightarrow x=2k\pi$$

$$\cos x=-1\ \Rightarrow x=2k\pi+\pi$$

علت نام‌گذاری حالات فوق به حالات خاص این است که این معادلات به‌جای دو دسته جواب حالت عادی، دارای یک دسته جواب هستند که اجتماع دو دسته جواب حالت عادی است.

۲۰۷. ۱ ۲ ۳ **[۴]**

$$\sin^3 x-\sin x=0\ \Rightarrow\ \sin x(\sin^2 x-1)=0\Rightarrow \sin x=0$$

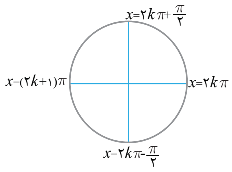
$$\sin x=\pm 1 \qquad \sin x=0\ \Rightarrow x=k\pi \qquad (1)$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = \frac{k\pi}{2}$$

توجه شود که اگر بخواهیم اجتماع جواب‌های به‌دست آمده برای معادله را تعیین کنیم باید نقاط انتهای کمان نظیر جواب‌ها را روی دایره‌ی مثلثاتی به‌دست آوریم، در این صورت با امتحان کردن گزینه‌ها مشخص می‌شود که مجموعه‌ی تمای جواب‌های معادله به صورت $x=\frac{k\pi}{2}$ خواهد بود. زیرا در دسته جواب $x=\frac{k\pi}{2}$ به ازای $k=0$ و $k=1$ و $k=2$ و $k=3$، چهار نقطه‌ی اصلی دایره‌ی مثلثاتی که در شکل نشان داده شده‌اند، به‌دست می‌آید.



۲۰۸. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan \pi x = -1 \Rightarrow \pi x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k - \frac{1}{4}$$

۲۰۹. **۱** ۲ ۳ ۴

با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{1-2\sin^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin x = \cos x \xrightarrow{\text{طرفین بر } \cos \text{ تقسیم}}$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

نکته‌ی مهمی که باید به آن دقت شود این است که به ازای مقادیر فرد k جواب‌های معادله یعنی مقادیر به‌دست آمده برای x در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرد که چون در ناحیه‌ی سوم، مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ منفی هستند، پس جواب‌های قابل قبولی نخواهند بود، زیرا زیر رادیکال را منفی می‌کنند. پس باید در دسته جواب $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$، مقادیر k زوج باشند، تا انتهای کمان‌های جواب‌های x در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی قرار گیرند. بنابراین دسته جواب معادله باید به صورت $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ باشد.

۲۱۰. ۱ **۲** ۳ ۴

$$(\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \text{ یا } 2\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

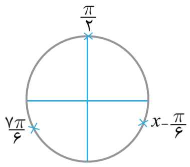
$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

اگر انتهای کمان مربوط، به جواب‌های به‌دست آمده را روی دایره‌ی مثلثاتی تعیین کنیم، نقاط نمایش داده روی شکل زیر به‌دست می‌آیند که مجموعه‌ی تمامی این نقاط در جواب کلی $x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$ موجود است، زیرا:

$$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$



۲۱۱. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sqrt{3}\tan(2x-\frac{\pi}{8}) - \sin^2\frac{\pi}{16} = \cos^2\frac{\pi}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\tan(2x-\frac{\pi}{8}) = \sin^2\frac{\pi}{16} + \cos^2\frac{\pi}{16} = 1$$

$$\Rightarrow \tan(2x-\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{8} = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{7\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{48}$$

۲۱۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sqrt{1+\cot^2\alpha}\,.\sqrt{1+\tan^2\alpha} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}\,.\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\sin\alpha|}\cdot\frac{1}{|\cos\alpha|} = 2 \Rightarrow \frac{1}{|\sin\alpha\cos\alpha|} = 2$$

$$\Rightarrow |\sin\alpha\cos\alpha| = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = \pm 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1$$

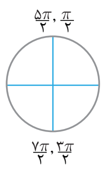
$$0 \le \alpha \le 2\pi \Rightarrow 0 \le 2\alpha \le 4\pi$$

باید نقاطی را بیابیم که $\sin 2\alpha$ برابر ۱ یا ۱- شود ولی $0 \le 2\alpha \le 4\pi$ باشد:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ یا } 2\alpha = \frac{5\pi}{2} \text{ یا } 2\alpha = \frac{3\pi}{2} \text{ یا } 2\alpha = \frac{7\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ یا } \alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ یا } \alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ یا } \alpha = \frac{7\pi}{4}$$

یعنی به ازای ۴ مقدار برای α در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ تساوی برقرار است.



۲۱۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x = 2 \Rightarrow \cos 4x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 2x) \Rightarrow 4x = 2k\pi \pm (\pi - 2x)$$

$$\begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow 6x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 4x = 2k\pi - \pi + 2x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

k	-۳	-۲	-۱
x	$-\frac{۵\pi}{۶}$	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۶}$

k	۰
x	$-\frac{\pi}{۲}$

بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[-\pi, ۰]$ دارای سه جواب است.

۲۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin ۲x+\sin x+\cos ۲x+\cos x=-۱$$
$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x+\sin x+۲\cos^۲ x-۱+\cos x=-۱$$
$$\Rightarrow \sin x(۲\cos x+۱)+\cos x(۲\cos x+۱)=۰$$
$$\Rightarrow (۲\cos x+۱)(\sin x+\cos x)=۰$$
$$\begin{cases} ۲\cos x+۱=۰ \Rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \\ \sin x+\cos x=۰ \Rightarrow \sin x=-\cos x \Rightarrow \tan x=-۱ \\ \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

k	۰	۱
x	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۴\pi}{۳}$

k	۱	۲
x	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۷\pi}{۴}$

بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ دارای چهار جواب است.

۲۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول:

$$\tan^۳\frac{\pi x}{۲}+\cot^۳\frac{\pi x}{۲}=۰ \Rightarrow \tan^۳\frac{\pi x}{۲}=-\cot^۳\frac{\pi x}{۲}$$
$$\Rightarrow \tan^۳\frac{\pi x}{۲}=-\frac{۱}{\tan^۳\frac{\pi x}{۲}} \Rightarrow \tan^۶\frac{\pi x}{۲}=-۱ \Rightarrow$$ ریشه ندارد

زیرا حاصل $\tan^۶\frac{\pi x}{۲}$ هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

راه‌حل دوم:

$$\tan^۳\frac{\pi x}{۲}+\cot^۳\frac{\pi x}{۲}=۰ \Rightarrow \tan^۳\frac{\pi x}{۲}+\frac{۱}{\tan^۳\frac{\pi x}{۲}}=۰$$

اگر $\tan^۳\frac{\pi x}{۲}=a$ فرض شود، در این صورت خواهیم داشت: $a+\frac{۱}{a}=۰$

ولی می‌دانیم همواره $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ یا $a+\frac{۱}{a}\leq -۲$ خواهد بود، زیرا:

$$\begin{cases} a+\frac{۱}{a}\geq ۲ & a>۰ \\ a+\frac{۱}{a}\leq -۲ & a<۰ \end{cases}$$

به همین دلیل هیچ‌گاه $a+\frac{۱}{a}=۰$ نخواهد بود، یعنی معادله جواب ندارد.

۲۱۶. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\tan ۴x=\sin ۸x \Rightarrow \frac{\sin ۴x}{\cos ۴x}=۲\sin ۴x\cos ۴x$$
$$\Rightarrow \sin ۴x=۲\sin ۴x\cos^۲ ۴x \Rightarrow ۲\sin ۴x\cos^۲ ۴x-\sin ۴x=۰$$
$$\Rightarrow \sin ۴x(۲\cos^۲ ۴x-۱)=۰$$
$$\begin{cases} \sin ۴x=۰ \Rightarrow ۴x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴} \\ ۲\cos^۲ ۴x-۱=۰ \Rightarrow \cos ۸x=۰ \Rightarrow ۸x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۸}+\frac{\pi}{۱۶} \end{cases}$$

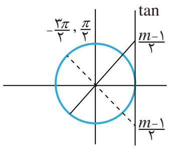
k	۱
x	$\frac{\pi}{۴}$

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{۱۶}$	$\frac{۳\pi}{۱۶}$	$\frac{۵\pi}{۱۶}$	$\frac{۷\pi}{۱۶}$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $(۰, \frac{\pi}{۲})$ دارای ۵ جواب است. توجه شود که هیچ‌یک از جواب‌های به‌دست آمده، مخرج کسر، یعنی $\cos ۴x$ را صفر نمی‌کنند. پس همه‌ی جواب‌ها قابل قبول هستند.

۲۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴

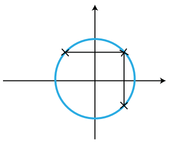
$$\sin x=(\frac{m-۱}{۲})\cos x$$
$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=\frac{m-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \tan x=\frac{m-۱}{۲}$$



با توجه دایره‌ی مثلثاتی و محور تانژانت‌ها چون از $-\frac{۳\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ یک دور کامل در دایره مثلثاتی گردش می‌کنیم، معادله دو جواب دارد و به علامت و مقدار $\frac{m-۱}{۲}$ بستگی ندارد.

۲۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴

$(۵\sin ۲x-۳)(۵\cos ۲x-۴)=۰ \Rightarrow ۵\sin ۲x-۳=۰$ یا $۵\cos ۲x-۴=۰ \Rightarrow \sin ۲x=\frac{۳}{۵}$ یا $\cos ۲x=\frac{۴}{۵}$



با تغییر متغیر $۲x=t$ تعداد ریشه‌های معادلات $\sin t=\frac{۳}{۵}$ و $\cos t=\frac{۴}{۵}$ را در بازه‌ی $t\in(۰,۲\pi)$ می‌یابیم. دقت کنید که در ناحیه‌ی اول یک جواب مشترک دارند چرا که: $(\frac{۳}{۵})^۲+(\frac{۴}{۵})^۲=۱$. پس معادله سه جواب دارد.

۲۱۹. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\tan^۲ x-۱}{۱+\tan^۲ x}=\sqrt{۳}\sin ۲x \Rightarrow \frac{-(۱-\tan^۲ x)}{۱+\tan^۲ x}=\sqrt{۳}\sin ۲x$$
$$\Rightarrow -\cos ۲x=\sqrt{۳}\sin ۲x \Rightarrow \cot ۲x=-\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow ۲x=k\pi+(\pi-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$$
$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}$$

k	-1	0	1
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$

بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ دارای سه جواب است.

۲۲۰. ① ② ③ ④

می‌دانیم تغییرات $\cos\alpha$ همواره در بازه‌ی $[-1,1]$ است. بنابراین برای این‌که تابع f، بیش‌ترین مقدار خود را اختیار کند باید $\cos(3x-\frac{\pi}{4})$ برابر ۱- شود، زیرا در این صورت تابع f حداکثر مقدار خود را که برابر ۵ است اختیار خواهد کرد. از این رو باید تعداد جواب‌های معادله‌ی $\cos(3x-\frac{\pi}{4})=-1$ را در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ به‌دست آوریم.

$$\cos(3x-\frac{\pi}{4})=-1 \Rightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi$$

$$\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{5\pi}{4} \quad \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}$$

k	-1	0	1
x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$

بنابراین در سه نقطه‌ی $x=-\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{12}$ و $x=\frac{13\pi}{12}$ از بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ تابع f دارای بیش‌ترین مقدار خواهد بود.

۲۲۱. ① ② ③ ④

$$2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x+\frac{5\pi}{8})+1=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x+\frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{8})+1=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})+\cos\left(\frac{\pi}{2}+(x+\frac{\pi}{8})\right)+1=0$$

از آن‌جا که $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ است، پس خواهیم داشت:

$$2\cos^2(x+\frac{\pi}{8})-\sin(x+\frac{\pi}{8})+1=0$$

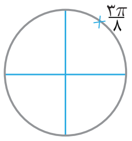
$$\Rightarrow 2(1-\sin^2(x+\frac{\pi}{8}))-\sin(x+\frac{\pi}{8})+1=0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})+\sin(x+\frac{\pi}{8})-3=0 \xrightarrow[\text{برابر صفر}]{\text{مجموع ضرایب}}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})=1 \quad , \quad \sin(x+\frac{\pi}{8})=-\frac{3}{2} \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})=1 \Rightarrow x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{8}$$

به ازای مقادیر مختلف $k\in\mathbb{Z}$، انتهای کمان جواب‌های این معادله روی دایره، فقط یک نقطه را مشخص می‌کنند.



۲۲۲. ① ② ③ ④

$$\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin x\cos x}=2$$

$$\Rightarrow \frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin x\cos x}=2$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2 \Rightarrow -2\cot 2x=2 \Rightarrow \cot 2x=-1$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+(\pi-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8} \xrightarrow{\text{طبق صورت سوال}}$$

$$-2\pi\le\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\le 2\pi \Rightarrow -2\le\frac{k}{2}+\frac{3}{8}\le 2$$

$$\Rightarrow -\frac{19}{8}\le\frac{k}{2}\le\frac{13}{8} \Rightarrow -\frac{19}{4}\le k\le\frac{13}{4} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} -4\le k\le 3$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ دارای ۸ جواب است. (تعداد مقادیر k در بازه‌ی $-4\le k\le 3$ برابر ۸ است.)

تذکر

توجه شود که چون عبارت $\sin x\cos x$ به ازای $x=\frac{k\pi}{2}$ صفر می‌شود، پس به ازای $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$ مخالف صفر خواهد بود. بنابراین به ازای هیچ‌یک از مقادیر فوق، مخرج برابر صفر نمی‌شود. به همین دلیل همه‌ی جواب‌ها قابل قبول هستند.

۲۲۳. ① ② ③ ④

$$\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\cos 4x+\cos 2x+1}=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\sin 2x\cos 2x+\sin 2x}{2\cos^2 2x-1+\cos 2x+1}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x(2\cos 2x+1)}{\cos 2x(2\cos 2x+1)}=\sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

k	0	1	2	3
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$

ظاهراً تعداد جواب‌های معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ برابر ۴ است. اما توجه شود که چون عبارت $2\cos 2x+1$ را از صورت و مخرج کسر، حذف کرده‌ایم، پس باید جواب‌های به‌دست آمده ریشه‌ی این عبارت نباشند اما با کمی دقت مشخص می‌شود که مقادیر $x=\frac{2\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ عبارت $2\cos 2x+1$ را صفر می‌کنند، پس غیرقابل قبول هستند. بنابراین در واقع معادله‌ی اصلی در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ دارای دو جواب است.

۲۲۴. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}+\cos^2(2x+\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \cos^2(2x+\frac{\pi}{4})-\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(2(2x+\frac{\pi}{4}))=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(4x+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\sin 4x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 4x=\frac{1}{2} \Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$4x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24} \quad , \quad x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}$$

k	0	1	2	3
x	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{25\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$

k	0	1	2	3
x	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{17\pi}{24}$	$\frac{29\pi}{24}$	$\frac{41\pi}{24}$

بنابراین معادله در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ دارای ۸ جواب است.

۲۲۵. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{2\pi}{3}))=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(-x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4} \xrightarrow{\cos(-\alpha)=\cos\alpha}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12} \\ 2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

k	0	1	2
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{23\pi}{12}$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ دارای ۶ جواب است.

۲۲۶. **۱** ۲ ۳ ۴

$$3\cos 3x-2=\cos 6x \Rightarrow 3\cos 3x-2=2\cos^2 3x-1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 3x-3\cos 3x+1=0 \xrightarrow[\text{برابر صفر}]{\text{مجموع ضرایب}}$$

$$\cos 3x=1 \ , \ \cos 3x=\frac{1}{2} \Rightarrow 3x=2k\pi \ ,$$

$$3x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$$

k	0	1
x	0	$\frac{2\pi}{3}$

k	0	1
x	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{9}$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازه‌ی مورد نظر برابر ۴ است.

۲۲۷. **۱** ۲ ۳ ۴

$$8\cos^4 x-15\cos 2x+3=0$$

$$\Rightarrow 8(\frac{1+\cos 2x}{2})^2-15\cos 2x+3=0$$

$$\Rightarrow 8(\frac{1+\cos^2 2x+2\cos 2x}{4})-15\cos 2x+3=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 2x-11\cos 2x+5=0$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{4}=\frac{11\pm 9}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \quad , \quad \cos 2x=5 \ \text{غ.ق}$$

$$\cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

k	-1	0	1
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ دارای چهار جواب است.

۲۲۸. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan x+a\cot x=1 \Rightarrow \tan x+\frac{a}{\tan x}=1$$

$$\Rightarrow \tan^2 x+a=\tan x \Rightarrow \tan^2 x-\tan x+a=0$$

$$\xrightarrow[\text{جواب}]{\text{شرط وجود}} \Delta\geq 0 \Rightarrow 1-4a\geq 0 \Rightarrow a\leq\frac{1}{4}$$

۲۲۹. ۱ ۲ **۳** ۴

$$4\cos(x+\frac{3\pi}{8})=\sqrt{12}$$

$$\Rightarrow \cos(x+\frac{3\pi}{8})=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} x+\frac{3\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{8} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{5\pi}{24} \\ x+\frac{3\pi}{8}=2k\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{8} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{13\pi}{24} \end{cases}$$

بنابراین با توجه به صورت سؤال $i\in\{5, 13\}$ است.

۲۳۰. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos 2x-5\cos x+3=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1-5\cos x+3=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0 \Rightarrow \cos x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x=2 \ \text{غ.ق} \quad , \quad \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۲۳۱. (۴) (۳) (۲) **(۱)**

$$\sin^2(3\pi+x)-\sin(\frac{5\pi}{2}+x)+1=0$$

چون $\sin(3\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ و $\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ بنابراین خواهیم داشت:

$$(-\sin x)^2-\cos x+1=0\Rightarrow\sin^2x-\cos x+1=0$$

$$\Rightarrow1-\cos^2x-\cos x+1=0\Rightarrow\cos^2x+\cos x-2=0$$

$$\xrightarrow[\text{برابر صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}\cos x=-2\ \text{غ.ق.ق}\ ,\ \cos x=1\Rightarrow x=2k\pi$$

۲۳۲. (۴) **(۳)** (۲) (۱)

$$\frac{1-\cos2x}{2}+\sin(\frac{9\pi}{2}+x)\cos(5\pi-x)=\cos^2\frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{2\sin^2x}{2}+\sin(4\pi+\frac{\pi}{2}+x)\cos(5\pi-x)=\cos^2(2\pi-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\sin^2x+\cos x(-\cos x)=(\cos\frac{\pi}{4})^2$$

$$\Rightarrow\sin^2x-\cos^2x=(\frac{\sqrt2}{2})^2\Rightarrow\sin^2x-\cos^2x=\frac12$$

$$\Rightarrow-\cos2x=\frac12\Rightarrow\cos2x=-\frac12\Rightarrow2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۲۳۳. (۴) (۳) (۲) **(۱)**

$$\sin x=-1\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow\begin{cases}\sin2x=2\sin x\cos x=0\\\cos2x=2\cos^2x-1=-1\end{cases}$$

توجه شود که همواره حاصل $\tan\alpha.\cot\alpha$ با شرط این‌که $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ تعریف شده باشند، برابر یک است. به همین دلیل داریم:

$$\tan\frac{x}{2}\,.\,\cot\frac{x}{2}=1$$

$$A=(2(-1)-3(0))(3(0)+2(-1))+1=(-2)(-2)+1=5$$

۲۳۴. (۴) **(۳)** (۲) (۱)

$$\sin x-\cos2x=0\Rightarrow\sin x=\cos2x$$

$$\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\cos2x\Rightarrow2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+x\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\\x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

همان‌طور که در گزینه‌ها مشخص است، جواب $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ در گزینه‌ها موجود است.

۲۳۵. **(۴)** (۳) (۲) (۱)

$$\tan^22x-9\cot^22x=0\Rightarrow\tan^22x=9\cot^22x$$

$$\Rightarrow\tan2x=\pm3\cot2x$$

$$\begin{cases}\tan2x=3\cot2x\Rightarrow\tan2x=\frac{3}{\tan2x}\Rightarrow\tan^22x=3\\\Rightarrow\tan2x=\pm\sqrt3\\\tan2x=-3\cot2x\Rightarrow\tan2x=\frac{-3}{\tan2x}\\\Rightarrow\tan^22x=-3\Rightarrow\text{ریشه ندارد}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan2x=\sqrt3\Rightarrow2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\\\tan2x=-\sqrt3\Rightarrow2x=k\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

بنابراین جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی داده شده به صورت $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$ است.

۲۳۶. (۴) **(۳)** (۲) (۱)

$$\sin(\pi\cos x)=-1\Rightarrow\pi\cos x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos x=2k-\frac12$$

با توجه به این‌که تغییرات $\cos x$ در بازه‌ی $[-1,1]$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\cos x=2k-\frac12\xrightarrow{k=0}\cos x=-\frac12\Rightarrow x=2k\pi\pm(\pi-\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

k	-1	0	1
x	$-\frac{4\pi}{3}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $[-2\pi,2\pi]$ دارای چهار ریشه است.

۲۳۷. (۴) (۳) (۲) **(۱)**

$$3\cos^2(x+\frac{\pi}{6})-2\sin(\frac{\pi}{3}-x)=5$$

$$\Rightarrow3\cos^2(x+\frac{\pi}{6})-2\cos(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-x))=5$$

$$\Rightarrow3\cos^2(x+\frac{\pi}{6})-2\cos(\frac{\pi}{6}+x)-5=0\xrightarrow{a+c=b}$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{6})=-1\ ,\ \cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac53\ \text{غ.ق.ق}$$

چون تغییرات $\cos\alpha$ در بازه‌ی $[-1,1]$ است پس معادله‌ی $\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac53$ جواب ندارد.

$$\cos(x+\frac{\pi}{6})=-1\Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

۲۳۸. **(۴)** (۳) (۲) (۱)

برای حل معادله‌ی داده شده از تغییر متغیر $\cot^2x=t$ استفاده می‌کنیم:

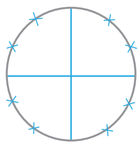
$$3\cot^4x-10\cot^2x+3=0\xrightarrow{t=\cot^2x}3t^2-10t+3=0$$

$$t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm8}{6}\Rightarrow t_1=3\ ,\ t_2=\frac13$$

$$\Rightarrow \cot^۲ x = ۳\ ,\ \cot^۲ x = \frac{۱}{۳}$$

$$\begin{cases} \cot^۲ x = ۳ \Rightarrow \cot x = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \\ \cot^۲ x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \cot x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

اگر نقاط انتهای کمان جواب‌های به‌دست آمده را روی دایره مشخص کنیم، مشخص می‌شود که ۸ نقطه پدید می‌آید که در رابطه‌ی $x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$ صدق می‌کنند. زیرا به ازای مقادیر مختلف k در دسته جواب $x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$ دقیقاً این ۸ نقطه به‌دست می‌آیند. به عبارت دیگر اجتماع جواب‌های به‌دست آمده به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$ خواهد بود.



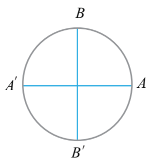
۲۳۹. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\cos ۳x = \cos x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \\ ۳x = ۲k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

توجه شود که دسته جواب $x=\frac{k\pi}{۲}$، جواب‌های $x=k\pi$ را نیز شامل می‌شود، بنابراین جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}$ خواهد بود.

(نقاط انتهای کمان مربوط به‌دسته جواب $x=\frac{k\pi}{۲}$، نقاط A، A'، B و B' هستند و نقاط انتهای کمان مربوط به دسته جواب $x=k\pi$، نقاط A و A' هستند. به همین دلیل جواب‌های مربوط به‌دسته جواب $x=k\pi$، در جواب‌های مربوط به‌دسته جواب $x=\frac{k\pi}{۲}$ موجود هستند.)



۲۴۰. ۱ ۲ **۳** ۴

از رابطه‌ی مثلثاتی $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$ و همچنین از رابطه‌ی مثلثاتی $\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^۴\frac{x}{۲}+\cos^۴\frac{x}{۲}=\sin^۴ x+\cos^۴ x$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ x = ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x \Rightarrow \sin^۲ x = \sin^۲ ۲x$$

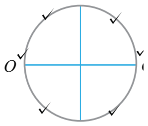
$$\Rightarrow \frac{۱-\cos ۲x}{۲}=\frac{۱-\cos ۴x}{۲} \Rightarrow ۱-\cos ۲x = ۱-\cos ۴x$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = \cos ۴x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi \pm ۲x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + ۲x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ ۴x = ۲k\pi - ۲x \Rightarrow ۶x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} \end{cases}$$

با دقت در جواب‌های به‌دست آمده مشخص می‌شود که دسته جواب $x=\frac{k\pi}{۳}$، جواب‌های مربوط به‌دسته جواب $x=k\pi$ را نیز دربرمی‌گیرد.

بنابراین اجتماع جواب‌های به‌دست آمده، همان $x=\frac{k\pi}{۳}$ است. این مطلب از روی دایره‌ی مثلثاتی نیز به راحتی قابل تشخیص است.



۲۴۱. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos ۳x\cos x=\cos^۲ x \Rightarrow \cos ۳x\cos x-\cos^۲ x=۰$$

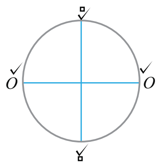
$$\Rightarrow \cos x(\cos ۳x-\cos x)=۰ \Rightarrow \cos x=۰ \text{ یا } \cos ۳x-\cos x=۰$$

$$\begin{cases} \cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} & (۱) \\ \cos ۳x=\cos x \Rightarrow ۳x=۲k\pi\pm x \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳x=۲k\pi+x \Rightarrow x=k\pi & (۲) \\ ۳x=۲k\pi-x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲} & (۳) \end{cases}$$

$$(۱),(۲),(۳) \xrightarrow{\text{اجتماع}} x=\frac{k\pi}{۲}$$

اجتماع جواب‌های به‌دست آمده به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}$ خواهد بود، زیرا دو دسته جواب دیگر را نیز دربرمی‌گیرد. این مطلب از روی دایره‌ی مثلثاتی، به راحتی قابل تشخیص است.



۲۴۲. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\tan(۳x+\frac{\pi}{۱۲})\cot(۲x-\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow \tan(۳x+\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۱}{\cot(۲x-\frac{\pi}{۴})}$$

$$\Rightarrow \tan(۳x+\frac{\pi}{۱۲})=\tan(۲x-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow ۳x+\frac{\pi}{۱۲}=k\pi+۲x-\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳}$$

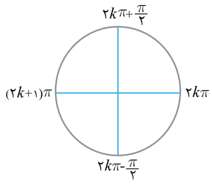
۲۴۳. **۱** ۲ ۳ ۴

حداکثر مقدار $\cos\alpha$ برابر یک است، پس برای این‌که معادله‌ی فوق برقرار باشد، باید هر سه مقدار $\cos x$، $\cos ۲x$ و $\cos ۴x$ برابر یک باشند. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \cos x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi & (۱) \\ \cos ۲x=۱ \Rightarrow ۲x=۲k\pi \Rightarrow x=k\pi & (۲) \\ \cos ۴x=۱ \Rightarrow ۴x=۲k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲} & (۳) \end{cases}$$

$$(۱),(۲),(۳) \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=۲k\pi$$

توجه شود که برای اشتراک گرفتن از جواب‌های فوق از دایره‌ی مثلثاتی استفاده می‌کنیم. جواب $x=2k\pi$ یک نقطه و جواب $x=k\pi$ دو نقطه و جواب $x=\frac{k\pi}{2}$ چهار نقطه از دایره‌ی مثلثاتی را نمایش می‌دهند.



به همین دلیل اشتراک جواب‌های به‌دست آمده، همان $x=2k\pi$ است.

۲۴۴. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin 2x=\sin 3x \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+3x \Rightarrow x=-2k\pi \\ 2x=2k\pi+\pi-3x \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

k	-1	0
x	2π	0

k	0	1	2	3	4
x	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{5}$

بنابراین معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارای ۷ جواب است.

۲۴۵. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan 3x=\cot 2x \Rightarrow \tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-2x)$$

$$\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-2x \Rightarrow 5x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$$

$$\Rightarrow -\pi<\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}<\pi \Rightarrow -1<\frac{k}{5}+\frac{1}{10}<1$$

$$\Rightarrow -\frac{11}{10}<\frac{k}{5}<\frac{9}{10} \Rightarrow -\frac{55}{10}<k<\frac{45}{10}$$

$$\Rightarrow -5/5<k<4/5$$

$$\Rightarrow k=-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$$

پس معادله‌ی داده شده در بازه‌ی داده شده دارای ۱۰جواب است، که عبارتند از:

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	$\frac{-9\pi}{10}$	$\frac{-7\pi}{10}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-3\pi}{10}$	$\frac{-\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{10}$

از میان جواب‌های به‌دست آمده دو جواب $x=-\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ غیرقابل قبول هستند، زیرا $\tan 3x$ به ازای آن‌ها تعریف نشده است، پس تعداد جواب‌های معادله در این بازه، برابر ۸ جواب است.

۲۴۶. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\tan\frac{x}{2}\tan 2x=1 \Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\frac{1}{\tan 2x} \Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\cot 2x$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\tan(\frac{\pi}{2}-2x) \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}-2x$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5}$$

k	-2	-1	0	1
x	$-\frac{3\pi}{5}$	$-\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$

بنابراین تعداد ریشه‌های معادله در بازه‌ی $(-\pi, \pi)$ برابر ۴ است.

۲۴۷. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{5}=0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2}=\cos\frac{3x}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{x}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{5})$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{5} \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{3x}{5}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \frac{11x}{10}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{2}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{3x}{5} \Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{3x}{5}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow -\frac{x}{10}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{20k\pi}{11}+\frac{5\pi}{11} \\ x=-20k\pi-5\pi \end{cases}$$

اولین دسته جواب به ازای $k=0$، جواب $x=\frac{5\pi}{11}$ را خواهد داد که در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ قرار دارد و این جواب، تنها جواب در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ است. یعنی معادله‌ی داده شده، در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ دارای فقط یک جواب است.

۲۴۸. ۱ **۲** ۳ ۴

$$1+\sin^4 2x=2\cos^2 x+\cos^4 2x$$

$$\Rightarrow \sin^4 2x-\cos^4 2x=2\cos^2 x-1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\sin^2 2x-\cos^2 2x)}_{-\cos 4x}\underbrace{(\sin^2 2x+\cos^2 2x)}_{1}=\cos 2x$$

$$\Rightarrow -\cos 4x=\cos 2x \Rightarrow \cos 4x=-\cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 4x=\cos(\pi-2x)$$

$$\Rightarrow 4x=2k\pi\pm(\pi-2x)$$

$$\begin{cases} 4x=2k\pi+\pi-2x \Rightarrow 6x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \\ 4x=2k\pi-\pi+2x \Rightarrow 2x=2k\pi-\pi \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

k	-2	-1	0	1
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

k	0	1
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

چون جواب‌های $x=-\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ تکراری هستند، پس معادله در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ دارای ۴ ریشه است.

۲۴۹. ۱ ۲ ۳ ۴

$$3-\cot^2(\pi x-\frac{\pi}{8})=0 \Rightarrow \cot^2(\pi x-\frac{\pi}{8})=3$$

$$\Rightarrow \cot(\pi x-\frac{\pi}{8})=\pm\sqrt{3}$$

$$\begin{cases}\cot(\pi x-\frac{\pi}{8})=\sqrt{3} \Rightarrow \pi x-\frac{\pi}{8}=k\pi+\frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow \pi x=k\pi+\frac{7\pi}{24} \\ \cot(\pi x-\frac{\pi}{8})=-\sqrt{3} \Rightarrow \pi x-\frac{\pi}{8}=k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow \pi x=k\pi+\frac{23\pi}{24}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=k+\frac{7}{24} \\ x=k+\frac{23}{24}\end{cases} \Rightarrow$$

k	-1	0
x	$-\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$

k	-1	0
x	$-\frac{1}{24}$	$\frac{23}{24}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه‌ی $(-1, 1)$ برابر است با:

$$(-\frac{17}{24})+\frac{7}{24}+(-\frac{1}{24})+\frac{23}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

۲۵۰. ۱ ۲ ۳ ۴

$$4\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{x}{2}}=2+2\sqrt{3} \xrightarrow{\cos\frac{x}{2}=t}$$

$$4t+\frac{\sqrt{3}}{t}=2+2\sqrt{3} \Rightarrow 4t^2+\sqrt{3}=(2+2\sqrt{3})t$$

$$\Rightarrow 4t^2-(2+2\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow \Delta=4(1+\sqrt{3})^2-4(4)\sqrt{3}=4(4+2\sqrt{3})-16\sqrt{3}$$

$$=16-8\sqrt{3}=(2-2\sqrt{3})^2$$

$$t=\frac{(2+2\sqrt{3})\pm\sqrt{(2-2\sqrt{3})^2}}{8}=\frac{(2+2\sqrt{3})\pm(2-2\sqrt{3})}{8}$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{1}{2} \quad , \quad t_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=4k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

k	0
x	$\frac{2\pi}{3}$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=4k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

k	0
x	$\frac{\pi}{3}$

پس مجموع جواب‌های معادله در بازه‌ی $(0, \pi)$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$$

۲۵۱. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin^3 x-\cos^3 x=\sin x-\cos x$$

$$\Rightarrow (\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)=\sin x-\cos x$$

$$(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)-(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Rightarrow (\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow (\sin x-\cos x)(\sin x\cos x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin x-\cos x=0 \Rightarrow \sin x=\cos x \Rightarrow \tan x=1 \\ \sin x\cos x=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x=0 \Rightarrow \sin 2x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{4} \\ 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\end{cases}$$

k	2	3
x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$

k	4	5	6	7	8
x	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π

مجموع جواب‌های معادله در بازه‌ی $[2\pi, 4\pi]$ برابر است با:

مجموع جواب ها $=\frac{9\pi}{4}+\frac{13\pi}{4}+2\pi+\frac{5\pi}{2}+3\pi+\frac{7\pi}{2}+4\pi=\frac{41\pi}{2}$

۲۵۲. ۱ ۲ ۳ ۴

$$2\cos^2 x+3\cos x+1=0 \xrightarrow{a+c=b}$$

$$\cos x=-1 \ , \ \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi$$

$$\cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

k	0	1
x	π	3π

k	0	1	2
x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$

بنابراین بزرگ‌ترین جواب معادله در بازه‌ی $[0 , \frac{7\pi}{2}]$ برابر $x=\frac{10\pi}{3}$ است.

۲۵۳. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2}{\sin^2 2x} \Rightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{2}{\sin^2 2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}=\frac{2}{\sin^2 2x} \Rightarrow \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}=\frac{2}{\sin^2 2x}$$

چون مخرج کسرها مساویند و نمی‌توانند برابر صفر باشند، پس باید صورت کسرها برابر باشند.

$$4\cos 2x=2 \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

به ازای $k=2$، کوچک‌ترین جواب در بازهٔ $[2\pi , 4\pi]$ برابر $x=\frac{13\pi}{6}$

و به ازای $k=4$، بزرگ‌ترین جواب در این بازه برابر $x=\frac{23\pi}{6}$ خواهد بود

که اختلاف آن‌ها برابر است با: $\frac{23\pi}{6}-\frac{13\pi}{6}=\frac{10\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$

.۲۵۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$4\sin^3 x+2\sin^2 x-10\sin x-5=0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x(2\sin x+1)-5(2\sin x+1)=0$$

$$\Rightarrow (2\sin x+1)(2\sin^2 x-5)=0$$

$$\Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\ ,\ \sin^2 x=\frac{5}{2}\quad \text{غ.ق.}$$

توجه شود که چون همواره $0\le \sin^2 x\le 1$ است پس امکان این‌که $\sin^2 x=\frac{5}{2}$ باشد وجود ندارد.

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

k	-1	0
x	$-\frac{13\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$

k	-2	-1
x	$-\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$

بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $(-3\pi , 0)$ دارای ۴ جواب است.

.۲۵۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$$2\cos^3 x=\sin x\xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{طرفین بر } \sin^3 x}\frac{2\cos^3 x}{\sin^3 x}=\frac{\sin x}{\sin^3 x}$$

$$\Rightarrow 2\cot^3 x=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow 2\cot^3 x=1+\cot^2 x$$

$$\Rightarrow 2\cot^3 x-\cot^2 x-1=0$$

چون مجموع ضرایب معادلهٔ فوق برابر صفر است پس معادله دارای ریشهٔ $\cot x=1$ است و بر $(\cot x-1)$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} 2\cot^3 x-\cot^2 x-1 & \cot x-1 \\ \hline 2\cot^3 x-2\cot^2 x & 2\cot^2 x+\cot x+1 \\ \hline \cot^2 x-1 & \\ \cot^2 x-\cot x & \\ \hline \cot x-1 & \\ \cot x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2\cot^3 x-\cot^2 x-1=(\cot x-1)\underbrace{(2\cot^2 x+\cot x+1)}_{\substack{\Delta<0 \\ \downarrow \\ \text{فاقد ریشه ی حقیقی}}}=0$$

$$\Rightarrow \cot x-1=0\Rightarrow \cot x=1$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

k	0	1	2	3	4
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{4}$

بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $(0 , 5\pi)$ دارای ۵ جواب است.

.۲۵۶ ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا باید تک‌تک معادلات را حل کنیم:

$$\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x\Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

k	0	1	2	3	4
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{6}$

تعداد ریشه‌های معادله در بازهٔ $[0 , 3\pi]$ برابر ۵ است.

$$\cos 2x-\cos x+1=0\Rightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x+1=0$$

$$\Rightarrow \cos x(2\cos x-1)=0\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$

$$2\cos x-1=0\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

k	0	1
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}$

تعداد ریشه‌های معادله در بازهٔ $[0 , 3\pi]$ برابر ۶ است.

$$\cos x=\cos 2x\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi \\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

k	0	1
x	0	2π

k	0	1	2	3	4
x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$

توجه شود که چون $x=0$ و $x=2\pi$ جواب‌هایی تکراری هستند، پس تعداد ریشه‌های معادله در بازهٔ $[0 , 3\pi]$ برابر ۵ است.

$$\cos 2x-\sin x+1=1\Rightarrow \cos 2x-\sin x=0$$

$$\Rightarrow 1-2\sin^2 x-\sin x=0\Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\sin x=-1\ ,\ \sin x=\frac{1}{2}$$

k	1
x	$\frac{3\pi}{2}$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad , \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

k	0		1	
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{6}$

تعداد ریشه‌های معادله در بازه‌ی $[0 , 3\pi]$ برابر ۵ است.

۲۵۷. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \sin x + \sin x \cos x + \cos x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \sin x(1 + \cos x) + (1 + \cos x) = 0$$
$$\Rightarrow (1 + \cos x)(\sin x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

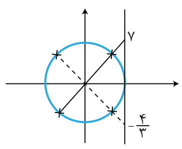
k	0	1	2
x	π	3π	5π

k	1	2
x	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$

بنابراین معادله در بازه‌ی $[0 , 5\pi]$ دارای ۵ جواب است.

۲۵۸. ۱ ۲ ۳ ۴

$$3\sin^2 x - 17\sin x \cos x - 28\cos^2 x = 0$$
$$\Rightarrow \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{17\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{28\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$\Rightarrow 3\tan^2 x - 17\tan x - 28 = 0$$
$$\Rightarrow \tan x = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 336}}{6} = \frac{17 \pm \sqrt{625}}{6} = \frac{17 \pm 25}{6}$$
$$\Rightarrow \tan x = 7 \quad , \quad \tan x = -\frac{4}{3}$$



بدیهی است که هر یک از معادلات فوق در بازه‌ی $[0 , 2\pi]$ دارای دو ریشه هستند. زیرا با شروع از 0 تا 2π یک دور کامل در دایره‌ی مثلثاتی گردش می‌کنیم. پس معادله مجموعاً ۴ ریشه دارد.

۲۵۹. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم همواره نامساوی زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} \geq 2 & a > 0 \\ a + \frac{1}{a} \leq -2 & a < 0 \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = \tan x + \frac{1}{\tan x} \geq 2 & \tan x > 0 \\ \tan x + \cot x = \tan x + \frac{1}{\tan x} \leq -2 & \tan x < 0 \end{cases}$$

از این رو حاصل $\tan x + \cot x$ هیچ‌گاه نمی‌تواند در بازه‌ی $(-2 , 2)$ باشد. پس معادله‌ی $\tan x + \cot x = -1$ ریشه ندارد.

تذکر

با تبدیل معادلات به معادله‌ی درجه دوم نیز می‌توان تشخیص داد که معادله‌ی $\tan x + \cot x = -1$ ریشه ندارد. زیرا داریم؛

$$\tan x + \cot x = -1 \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = -1$$
$$\Rightarrow \tan^2 x + 1 = -\tan x$$
$$\tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(1) < 0 \Rightarrow$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۲۶۰. ۱ ۲ ۳ ۴

برای این‌که شرط وجود جواب معادله را به‌دست آوریم، بهتر است از عبارت داده شده، یک عبارت مربع کامل بسازیم.

$$\cos^2 x - 6\cos x + t - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x - 6\cos x = 1 - t$$

به طرفین ۹ واحد اضافه می‌کنیم.

$$\cos^2 x - 6\cos x + 9 = 10 - t \Rightarrow (\cos x - 3)^2 = 10 - t$$
$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq \cos x - 3 \leq -2$$
$$\Rightarrow 4 \leq (\cos x - 3)^2 \leq 16 \Rightarrow 4 \leq 10 - t \leq 16$$
$$\Rightarrow -6 \leq -t \leq 6 \Rightarrow -6 \leq t \leq 6$$

۲۶۱. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{\sin 2x} \Rightarrow \sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x = 1$$
$$\Rightarrow \sin 2x \cos 2x = 1 - \sin^2 2x \Rightarrow \sin 2x \cos 2x = \cos^2 2x$$
$$\Rightarrow \sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x \\ \Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ و $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{2\pi}{8}$ هستند یعنی $i \in \{1 , 2\}$ است.

۲۶۲. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos^3 x - \cos 2x = \sin^3 x \Rightarrow \cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$$
$$\Rightarrow (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow (\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0$$
$$\Rightarrow (\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x-\cos x-\sin x)=0$$
$$\Rightarrow (\cos x-\sin x)(1-\sin x-\cos x(1-\sin x))=0$$
$$\Rightarrow (\cos x-\sin x)(1-\sin x)(1-\cos x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x-\sin x=0 \Rightarrow \cos x=\sin x \Rightarrow \tan x=1 \\ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \\ 1-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 1-\cos x=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi \end{cases}$$

k	0	1
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

k	0
x	$\frac{\pi}{2}$

k	0
x	0

مجموع جواب‌های معادله در بازه‌ی $[0, \frac{3\pi}{2}]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=2\pi$$

۲۶۳. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan(x-\frac{\pi}{6})-\cot 3x=0 \Rightarrow \tan(x-\frac{\pi}{6})=\cot 3x$$
$$\Rightarrow \tan(x-\frac{\pi}{6})=\tan(\frac{\pi}{2}-3x) \Rightarrow x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}-3x$$
$$\Rightarrow 4x=k\pi+\frac{4\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$$

k	-2	-1	0	1
x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ برابر است با:

$$\text{مجموع جواب ها}=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

۲۶۴. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sin 4x=\sqrt{2}\sin 2x \Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x=0$$
$$\Rightarrow \sin 2x(2\cos 2x-\sqrt{2})=0$$

$$\begin{cases} \sin 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2} \\ 2\cos 2x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

k	1	2	3	4
x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

k	1	2
x	$\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}, \frac{17\pi}{8}$

پس کوچک‌ترین جواب در بازه‌ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}]$ برابر $x=\frac{\pi}{2}$ و بزرگ‌ترین جواب در این بازه برابر $\frac{17\pi}{8}$ است که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{2}+\frac{17\pi}{8}=\frac{21\pi}{8}$$

۲۶۵. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos^2 2x=\sin^2 x \Rightarrow \cos^2 2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\Rightarrow 2\cos^2 2x=1-\cos 2x \Rightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x-1=0$$
$$\xrightarrow{a+c=b} \cos 2x=-1 \ , \ \cos 2x=\frac{1}{2}$$
$$\cos 2x=-1 \Rightarrow 2x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

k	0	1
x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارای ۶ جواب است.

۲۶۶. **۱** ۲ ۳ ۴

$$2\sin^2 x+\sin 2x=0 \Rightarrow 2\sin^2 x+2\sin x\cos x=0$$
$$\Rightarrow 2\sin x(\sin x+\cos x)=0$$

$$\begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \\ \sin x+\cos x=0 \Rightarrow \sin x=-\cos x \Rightarrow \tan x=-1 \\ \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

k	0	1
x	0	π

k	1
x	$\frac{3\pi}{4}$

پس معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارای ۳ جواب است یعنی $m=3$ است.

$$2\cos^2 x+\cos 2x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x+2\cos^2 x-1=0$$
$$\Rightarrow 4\cos^2 x-1=0 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \\ \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

k	0
x	$\frac{\pi}{3}$

k	0
x	$\frac{2\pi}{3}$

پس معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارای دو جواب است یعنی $n=2$ است. بنابراین رابطه‌ی میان m و n به صورت $m=n+1$ است.

۲۶۷. ۱ ۲ **۳** ۴

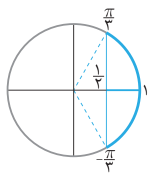
$\cos^2 x - 3(m+1)\cos x + 9m = 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{(3m+3)\pm\sqrt{9m^2+18m+9-36m}}{2}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{(3m+3)\pm\sqrt{9m^2-18m+9}}{2} = \frac{(3m+3)\pm\sqrt{(3m-3)^2}}{2}$

$= \frac{(3m+3)\pm(3m-3)}{2} \Rightarrow \cos x = 3m \;,\; \cos x = 3$

بدیهی است که $\cos x = 3$ جواب ندارد زیرا تغییرات $\cos x$ در بازه‌ی $[-1,1]$ است. پس $\cos x = 3$ غیرقابل قبول است. حال اگر بخواهیم معادله‌ی $\cos x = 3m$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ دارای جواب باشد، خواهیم داشت:



$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{طبق شکل}} \frac{1}{2} < \cos x \le 1$

$\frac{1}{2} < 3m \le 1 \Rightarrow \frac{1}{6} < m \le \frac{1}{3}$

۲۶۸. ۱ ۲ **۳** ۴

$\sin(\pi+x) = -\sin x \qquad \cos(\frac{5\pi}{2}-x) = \sin x$

$\cos(3\pi - x) = -\cos x$

$\sin\frac{19\pi}{4} = \sin(5\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\pi+x)\cos(\frac{5\pi}{2}-x) + \cos^2(3\pi - x) = \sin^2\frac{19\pi}{4}$

$(-\sin x)(\sin x) + \cos^2 x = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \Rightarrow -\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲۶۹. ۱ **۲** ۳ ۴

$\frac{\sin 5x}{\sin x} + 2\cos x = 0 \Rightarrow \frac{\sin 5x + 2\sin x\cos x}{\sin x} = 0$

$\Rightarrow \sin 5x + 2\sin x\cos x = 0 \Rightarrow \sin 5x + \sin 2x = 0$

$\Rightarrow \sin 5x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 5x = \sin(-2x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 7x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-2x) \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \\ \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4	5
x	0	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{4\pi}{7}$	$\frac{6\pi}{7}$	$\frac{8\pi}{7}$	$\frac{10\pi}{7}$

k	0	1
x	$\frac{\pi}{3}$	π

توجه شود که چون $x = 0$ و $x = \pi$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، یعنی $\sin x$ که در مخرج کسر قرار گرفته است، به ازای این مقادیر برابر صفر می‌شود، پس این جواب‌ها غیرقابل‌قبول هستند و بنابراین معادله در بازه‌ی $[0,\frac{3\pi}{2}]$ دارای ۶ جواب است.

۲۷۰. ۱ **۲** ۳ ۴

$\sin(x-\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{4}-x) = 0 \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{4}-x)$

$\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}-x))$

$\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{4}+x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow x\ \text{حذف می شود} \\ \Rightarrow\ \text{بنابراین جوابی به دست نمی‌آید} \\ x-\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{13\pi}{12} \\ \Rightarrow x = k\pi + \frac{13\pi}{24} \end{cases}$$

k	-2	-1	0	1
x	$-\frac{35\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$

به ازای سایر مقادیر k، جواب‌های معادله در بازه‌ی $(-2\pi,2\pi)$ قرار نمی‌گیرند. بنابراین معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $(-2\pi,2\pi)$ دارای چهار جواب است.

۲۷۱. ۱ ۲ **۳** ۴

$\tan 3x = \cot 5x \Rightarrow \tan 3x = \tan(\frac{5\pi}{2} - x)$

$\Rightarrow 3x = k\pi + (\frac{\pi}{2} - 5x) \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$

به ازای مقادیر $-8 \le k \le -1$، جواب‌های به‌دست آمده در بازه‌ی $[-\pi,0]$ قرار دارند، زیرا:

$-\pi \le \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16} \le 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \pi} -1 \le \frac{k}{8} + \frac{1}{16} \le 0$

$\Rightarrow -\frac{17}{16} \le \frac{k}{8} \le -\frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{17}{2} \le k \le -\frac{1}{2} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}$

$k \in \{-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$

یعنی معادله‌ی مورد نظر در بازه‌ی $[-\pi,0]$ دارای هشت جواب است.

۲۷۲. ۱ **۲** ۳ ۴

$\cos^4 x - \sin^8 x = 1 \Rightarrow \cos^4 x = \sin^8 x + 1$

اگر $\sin x \ne 0$ باشد، سمت راست معادله از ۱ بزرگ‌تر خواهد شد و نمی‌تواند برابر $\cos^4 x$ شود، زیرا حداکثر مقدار $\cos^4 x$ برابر ۱ است. پس به ناچار باید $\sin x = 0$ باشد که در این صورت $\cos^4 x = 1$ و در نتیجه $\cos x = \pm 1$ خواهد شد. در بازه‌ی $[0,3\pi]$ نقاطی که در آن‌ها $\sin x = 0$ و $\cos x = \pm 1$ باشد، فقط نقاط $x = 0$ و $x = \pi$ و $x = 2\pi$ و $x = 3\pi$ هستند و بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

مجموع جواب‌های معادله $= 0 + \pi + 2\pi + 3\pi = 6\pi$

۲۷۳. **۱** ۲ ۳ ۴

برای حل معادله از روابط $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ و $\cos(7\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$1+\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4})=\cos(7\pi-\frac{x}{2})\Rightarrow 1+\cos\frac{x}{4}=-\cos\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{4}=0\Rightarrow 2\cos^2\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}=0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{4}(2\cos\frac{x}{4}+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{x}{4}=0\Rightarrow\frac{x}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=4k\pi+2\pi\\ 2\cos\frac{x}{4}+1=0\Rightarrow\cos\frac{x}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x}{4}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\\ \Rightarrow x=8k\pi\pm\frac{8\pi}{3}\end{cases}$$

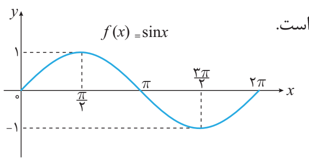
k	0
x	2π

k	0
x	$\frac{8\pi}{3}$

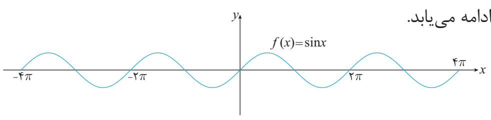
تنها جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,3\pi]$ مقادیر $x=2\pi$ و $x=\frac{8\pi}{3}$ هستند که تفاضل آن‌ها برابر است با: $\frac{8\pi}{3}-2\pi=\frac{2\pi}{3}$

۲۷۴. **۱** ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\sin x$، همهٔ موارد بالا صحیح است. زیرا نمودار تابع سینوس در فواصلی به طول 2π، دائماً تکرار می‌شود و بنابراین حداقل مقدار تابع f، در نقاطی به طول $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ و حداکثر مقدار تابع f، در نقاطی به طول $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ اتفاق می‌افتد و همواره $\sin(2k\pi+x)=\sin x$ است.

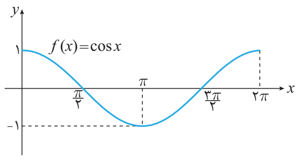


همچنین نقاط برخورد تابع سینوس با محور xها که در آن‌ها $f(x)=0$ می‌شود، نقاط $x=k\pi$ هستند. مقدار تابع سینوس همواره در بازهٔ $[-1,1]$ تغییر می‌کند پس برد تابع بازهٔ $[-1,1]$ است ولی دامنهٔ آن همهٔ اعداد حقیقی است، یعنی نمودار سینوس به شکلی که در بالا رسم شده است، در سایر بازه‌هایی به شکل $[2k\pi,(2k+2)\pi]$ به صورت زیر ادامه می‌یابد.



۲۷۵. **۱** ۲ ۳ ۴

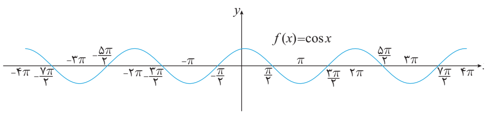
با توجه به نمودار تابع f، فقط گزارهٔ «هـ» صحیح است.



یعنی نمودار تابع کسینوس، در بازه‌های $[0,2\pi]$ و $[2\pi,4\pi]$ و $[4\pi,6\pi]$ و ... دارای نمودار یکسانی است و نمودار آن به همین صورت که در شکل بالا نمایش داده شده است، تکرار می‌شود. اما دامنهٔ تابع کسینوس برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-1,1]$ است، پس گزارهٔ «الف» نادرست است.

مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ برابر صفر می‌شود، یعنی در نقاطی مانند $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ و $x=\frac{5\pi}{2}$ و ...، پس گزارهٔ «ب» نادرست است. حداکثر مقدار تابع f، در نقاطی به طول $x=2k\pi$ به‌دست می‌آید که برابر ۱ می‌شود. پس گزارهٔ «ج» نادرست است.

حداقل مقدار تابع f، در نقاطی به طول $x=2k\pi+\pi$ به‌دست می‌آید که برابر ۱- است، پس گزارهٔ «د» نادرست است.



۲۷۶. ۱ ۲ ۳ **۴**

طبق روابط بین نسبت‌های مثلثاتی داریم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$$

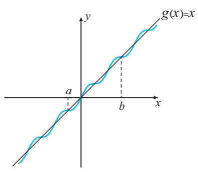
$$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x \quad , \quad \cos(2\pi-x)=\cos x$$

$$\sin(5\pi-x)=\sin x$$

بنابراین در تمام موارد، نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های داده شده، برهم منطبقند.

۲۷۷. **۱** ۲ ۳ ۴

طبق شکل باید نقاط تلاقی دو تابع f و g را بیابیم. از این رو ابتدا معادلهٔ حاصل از تلاقی دو منحنی را حل می‌کنیم، سپس جواب‌های مطلوب را تعیین می‌کنیم.



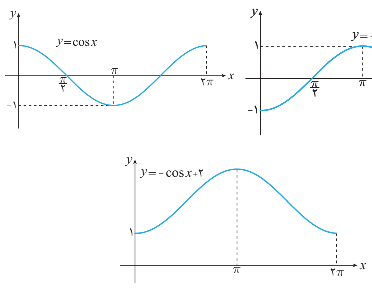
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x+\sin x=x\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$$

k	-1	0	1	2	3
x	$-\pi$	0	π	2π	3π

طبق شکل سومین نقطه‌ی تلاقی با طول مثبت و اولین نقطه‌ی تلاقی با طول منفی مورد نظر است که مطابق جدول فوق اولین نقطه‌ی تلاقی با طول منفی $x=-\pi$ و سومین نقطه‌ی تلاقی با طول مثبت $x=۳\pi$ است. پس $a=-\pi$ و $b=۳\pi$ و بنابراین $b-a=۴\pi$ است.

۲۷۸. ۱ ۲ ۳ ۴

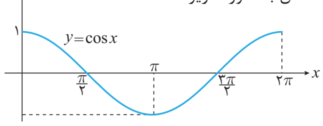
راه‌حل اول:

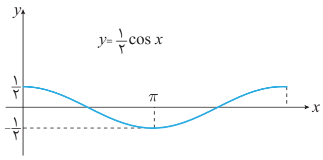


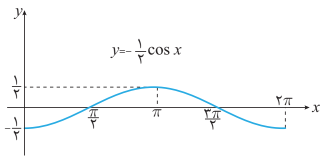
راه‌حل دوم: چون حداکثر مقدار تابع $\sin x$ یا $\cos x$ برابر ۱ است، پس گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ مردود هستند زیرا حداکثر مقدار تابع f در گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ نمی‌تواند برابر ۳ باشد، بنابراین گزینه‌ی ۲ جواب است. زیرا در صورتی که $\cos x=-۱$ باشد، حداکثر مقدار تابع برابر ۳ خواهد شد.

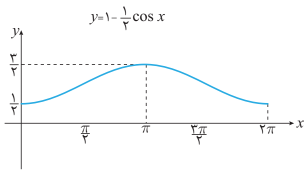
۲۷۹. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: مراحل رسم نمودار تابع $y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$ از روی نمودار $y=\cos x$ با استفاده از انتقال به صورت زیر است:



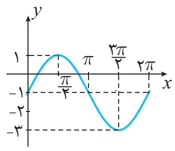






راه‌حل دوم: در تابع $f(x)=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$ داریم $f(۰)=\frac{۱}{۲}$ پس گزینه‌های ۲ و ۴ مردود هستند همچنین داریم $f(\pi)=\frac{۳}{۲}$ بنابراین گزینه‌ی ۱ نیز مردود است. از این رو گزینه‌ی ۳ جواب است.

۲۸۰. ۱ ۲ ۳ ۴



راه‌حل اول: در نمودار داده شده داریم: $f(۰)=-۱$ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ مردود هستند، زیرا در این گزینه‌ها، به ترتیب $f(۰)=۳$ و $f(۰)=۱$ و $f(۰)=-۲$ است.

پس گزینه‌ی ۳ جواب است.

راه‌حل دوم: می‌توانیم برد تک‌تک ضابطه‌ها را به‌دست آوریم، سپس با برد تابع داده شده که طبق شکل، بازه‌ی $[-۳,۱]$ است مقایسه کنیم.

گزینه ۱ : $-۱\le \cos x\le ۱ \Rightarrow -۲\le ۲\cos x\le ۲$

$\Rightarrow -۱\le ۲\cos x+۱\le ۳ \Rightarrow -۱\le y\le ۳$

گزینه ۲ : $-۱\le \cos x\le ۱ \Rightarrow -۱\le -\cos x\le ۱$

$\Rightarrow ۱\le ۲-\cos x\le ۳ \Rightarrow ۱\le y\le ۳$

گزینه ۳ : $-۱\le \sin x\le ۱ \Rightarrow -۲\le ۲\sin x\le ۲$

$\Rightarrow -۳\le ۲\sin x-۱\le ۱ \Rightarrow -۳\le y\le ۱$

گزینه ۴ : $-۱\le \sin x\le ۱ \Rightarrow -۳\le \sin x-۲\le -۱$

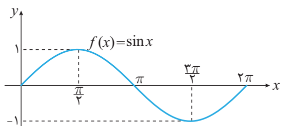
$\Rightarrow -۳\le y\le -۱$

فقط در گزینه‌ی ۳ است که برد تابع بازه‌ی $[-۳,۱]$ است.

تذکر

اگر نمودار هر یک از ضابطه‌ها را از طریق انتقال رسم کنیم، به راحتی مشخص می‌شود که گزینه‌ی ۳ جواب است. (یعنی پیدا کردن جواب از طریق انتقال منحنی‌های $y-\sin x$ یا $y-\cos x$ نیز امکان‌پذیر است.)

۲۸۱. ۱ ۲ ۳ ۴



راه‌حل اول: می‌دانیم طبق شکل نمودار تابع $f(x)=\sin x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi)$ دو بار محور xها را قطع می‌کند (در نقطه‌ی $x=۲\pi$ نیز برای سومین بار محور xها را قطع می‌کند) در نمودار $f(x)=\sin ۵x$، نمودار تابع $\sin x$ در راستای محور xها، $\frac{۱}{۵}$ برابر می‌شود (یعنی منقبض

می‌شود) به عبارت دیگر در بازه‌ی $[0\,,2\pi)$، نمودار $y=\sin x$ فشرده شده و ۵ بار عیناً تکرار می‌شود تا نمودار $y=\sin 5x$ به‌دست آید و بنابراین نمودار $y=\sin 5x$ در بازه‌ی $[0\,,2\pi)$، به تعداد $5\times 2=10$ بار محور xها را قطع می‌کند و چون در نقطه‌ی $x=2\pi$ نیز یک بار دیگر محور xها را قطع خواهد کرد، پس جمعاً ۱۱ بار محور xها را در بازه‌ی $[0\,,2\pi]$ قطع خواهد کرد.

راه‌حل دوم: چون نقاط تلاقی نمودار تابع $y=\sin 5x$ با محور xها، همان جواب‌های معادله‌ی $\sin 5x=0$ هستند، بنابراین کافی است تعداد ریشه‌های این معادله را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ بیابیم.

$$\sin 5x=0\Rightarrow 5x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}\Rightarrow 0\le\frac{k\pi}{5}\le 2\pi$$

$$\Rightarrow 0\le k\pi\le 10\pi\Rightarrow 0\le k\le 10$$

$\Rightarrow k$ تعداد مقادیر $=11\Rightarrow$ تعداد ریشه‌ها $=11$

.۲۸۲ **۱** ۲ ۳ ۴

نمودار تابع g، انتقال یافته‌ی نمودار تابع f است که مراحل انتقال آن به صورت زیر است:

ابتدا نمودار f را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم. سپس عرض نقاط واقع بر نمودار را دو برابر می‌کنیم و در نهایت کل نمودار را در راستای محور yها، یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

بنابراین خواهیم داشت:

$$A(\frac{3\pi}{2}\,,-1)\Rightarrow A_1(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\,,-1)\Rightarrow A_2(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\,,-2)$$

$$\Rightarrow A_3(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\,,-2+1)\Rightarrow A_3(\frac{5\pi}{4}\,,-1)$$

بنابراین نقطه‌ی $A'(\frac{5\pi}{4}\,,-1)$ روی نمودار g نقطه‌ی متناظر با نقطه‌ی $A(\frac{3\pi}{2}\,,-1)$ روی نمودار تابع f است.

.۲۸۳ **۱** ۲ ۳ ۴

با توجه به صورت سؤال مشخص می‌شود که:

$$f(x-\frac{\pi}{2})-1=\frac{1}{2}\sin x\Rightarrow f(x-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\sin(x)+1$$

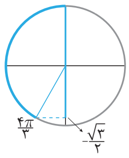
کافی است x را به $x+\frac{\pi}{2}$ تبدیل کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin(x+\frac{\pi}{2})+1=\frac{1}{2}\cos(x)+1$$

.۲۸۴ ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا محدوده‌ی تغییرات کمان $2x$ را تعیین می‌کنیم، سپس تغییرات $\sin 2x$ را از روی دایره‌ی مثلثاتی به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le 2x\le\frac{4\pi}{3}$$



از روی دایره‌ی مثلثاتی می‌توان تشخیص داد که محدوده‌ی تغییرات $\sin 2x$ به صورت مقابل است: $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin 2x\le 1$

با توجه به مقدار به‌دست آمده برای $\sin 2x$، مشخص می‌شود که کم‌ترین مقدار $\sin 2x$ برابر $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

.۲۸۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم در توابعی به شکل کلی $f(x)=a\sin(bx+c)+d$ یا $f(x)=a\cos(bx+c)+d$، بیش‌ترین مقدار تابع برابر $|a|+d$ و کم‌ترین مقدار تابع برابر $-|a|+d$ است.

بنابراین در تابع $f(x)=a\cos 3x+b$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}|a|+b=7\\-|a|+b=3\end{cases}\Rightarrow 2b=10\Rightarrow b=5\Rightarrow|a|=2\Rightarrow a=\pm 2$$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=2\cos(3x)+5$ یا $f(x)=-2\cos(3x)+5$ خواهد بود. چون حداکثر مقدار $f(\frac{5\pi}{12})$ مورد نظر است، پس خواهیم داشت:

اگر $f(x)=2\cos(3x)+5\Rightarrow f(\frac{5\pi}{12})=2\cos(\frac{5\pi}{4})+5$

$$=2\cos(\pi+\frac{\pi}{4})+5=2(-\frac{\sqrt{2}}{2})+5$$

اگر $f(x)=-2\cos(3x)+5\Rightarrow f(\frac{5\pi}{12})=-2\cos(\frac{5\pi}{4})+5$

$$=-2\cos(\pi+\frac{\pi}{4})+5=-2(-\frac{\sqrt{2}}{2})+5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{5\pi}{12})=-\sqrt{2}+5\\f(\frac{5\pi}{12})=\sqrt{2}+5\end{cases}$$

پس حداکثر مقدار $f(\frac{5\pi}{12})$ برابر $\sqrt{2}+5$ است.

.۲۸۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

دوره‌ی تناوب توابع $f(x)=a\sin bx+c$ و $f(x)=a\cos bx+c$ به صورت $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$y=3\sin(2x)-2\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$y=-\frac{1}{4}\cos(\pi x)\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

$$y=\pi\sin(-x)+1\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$$

$$y=8\cos\frac{x}{3}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$$

بنابراین دوره‌ی تناوب گزینه‌ی ۴ از سایر گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

۲۸۷. ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم دوره‌ی تناوب توابع $f(x)=a\sin(bx+c)$ و $f(x)=a\cos(bx+c)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=-4\sin(\frac{\pi x}{3})\Rightarrow T_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$$

$$g(x)=7\cos(\frac{\pi}{6}-ax)\Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{|-a|}=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$T_1=3T_2\Rightarrow 6=3\times\frac{2\pi}{|a|}\Rightarrow |a|=\pi\Rightarrow a=\pm\pi$$

۲۸۸. ۱ ۲ ۳ **۴**

در تابع $f(x)=6\cos(3x)+3$ دوره‌ی تناوب برابر است با: $T=\frac{2\pi}{3}$

در تابع $f(x)=-3\sin(3x)+6$ دوره‌ی تناوب برابر است با: $T=\frac{2\pi}{3}$

در تابع $f(x)=6\cos(\frac{2\pi}{3}x)+3$ دوره‌ی تناوب برابر است با $T=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$ و مقدار ماکزیمم آن برابر ۹ ولی می‌نیمم آن برابر ۳- است.

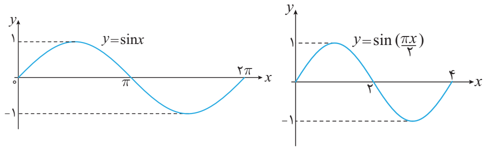
زیرا: $-1\le\cos(\frac{2\pi}{3}x)\le 1\Rightarrow -6\le 6\cos(\frac{2\pi}{3}x)\le 6$

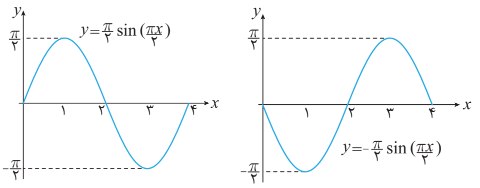
$$\Rightarrow -3\le 6\cos(\frac{2\pi}{3}x)+3\le 9$$

اما در تابع $f(x)=-3\sin(\frac{2\pi}{3}x)+6$، هم دوره‌ی تناوب $T=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$ است و هم ماکزیمم و می‌نیمم آن برابر ۹ و ۳ خواهند بود.

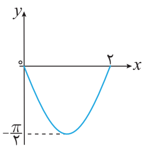
۲۸۹. ۱ **۲** ۳ ۴

با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=\sin x$، می‌توانیم نمودار تابع f را رسم کنیم. دوره‌ی تناوب این تابع $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ است و داریم:





چون نمودار تابع در بازه‌ای به طول نصف دوره‌ی تناوب مورد نظر است، پس نمودار تابع در بازه‌ی مطلوب به صورت مقابل است:



۲۹۰. ۱ ۲ ۳ **۴**

در مورد گزینه‌ی ۱، تناوب تابع و مقدار ماکزیمم صحیح هستند ولی می‌نیمم تابع برابر ۱- است، زیرا:

$$-1\le\sin 7x\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin 7x\le 2\Rightarrow -1\le 2\sin 7x+1\le 3$$

در مورد گزینه ۲، تناوب تابع، نادرست است ولی ماکزیمم و می‌نیمم تابع، صحیح محاسبه شده‌اند: $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

در مورد گزینه‌ی ۳، تناوب و مقدار می‌نیمم نادرست هستند ولی ماکزیمم درست محاسبه شده است زیرا: $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

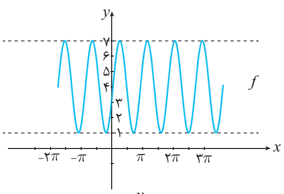
$$-1\le\sin\frac{x}{2}\le 1\Rightarrow -\pi\le-\pi\sin\frac{x}{2}\le\pi$$

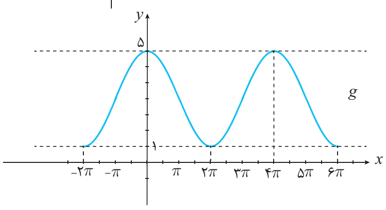
$$\Rightarrow -\pi-2\le-\pi\sin(\frac{x}{2})-2\le\pi-2$$

بنابراین می‌نیمم تابع برابر $\min=-\pi-2$ خواهد بود.

اما در گزینه‌ی ۴، همه‌ی موارد صحیح محاسبه شده‌اند.

۲۹۱. ۱ ۲ **۳** ۴





در مورد تابع f، با توجه به شکل، ضابطه‌ی تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y=a\sin bx+c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دوره‌ی تناوب برابر π است لذا $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\pi$ و بنابراین $|b|=۲$ است از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم به ترتیب $|a|+c$ و $-|a|+c$ است، پس همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم است، یعنی $c=\frac{۱+۷}{۲}=۴$ و در نتیجه $|a|=۳$.

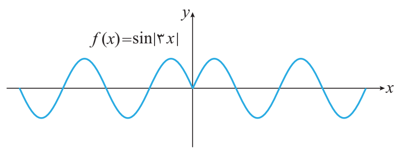
با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از مقادیر a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دو مقدار a و b باید مثبت یا هر دو منفی باشند، یعنی داریم: $f(x)=۳\sin(۲x)+۴$

در مورد تابع g، با توجه به شکل، ضابطه‌ی تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y=a\cos bx+c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره‌ی تناوب برابر $T=۴\pi$ است. بنابراین $c=۳$ و $|b|=\frac{۱}{۲}$ و $|a|=۲$ لذا $a=۲$ و $b=\pm\frac{۱}{۲}$ و بنابراین داریم: $y=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳$

۲۹۲. ۱ **۲** ۳ ۴

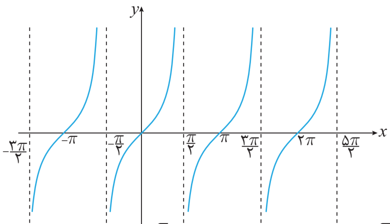
شرط متناوب بودن توابع مثلثاتی این است که کمان آن‌ها خطی باشد یعنی به صورت $(ax+b)$ باشد. در توابع داده شده، فقط $f(x)=\cos|۴x|$ متناوب است زیرا طبق ویژگی $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ می‌توان نوشت: $f(x)=\cos|۴x|=\cos ۴x$ و تابع $f(x)=\cos ۴x$ که کمان آن خطی است، تابعی متناوب است. ولی سایر توابع داده شده، متناوب نیستند، زیرا به عنوان نمونه در تابع $f(x)=\sin|۳x|$ خواهیم داشت:

$$f(x)=\sin|۳x|=\begin{cases}\sin ۳x & x\geq ۰\\ -\sin ۳x & x<۰\end{cases}$$



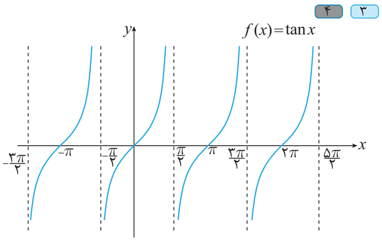
۲۹۳. ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\tan x$ مشخص می‌شود که گزاره‌های «الف» و «ب» و «د» گزاره‌هایی صحیح هستند زیرا $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و بنابراین در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ که مخرج کسر برابر صفر می‌شود، تابع $y=\tan x$ تعریف نشده (نامعین) است ولی برد آن کلیه‌ی اعداد حقیقی است (تصویر نمودار تابع روی محور عرض‌ها، برد تابع را نشان می‌دهد.) همچنین در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی یعنی در بازه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ تابع $y=\tan x$ تابعی صعودی اکید است ولی در کل بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ غیر یکنواست.



زیرا از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش یافته و بعد از نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$، مقدار $\tan x$ از $-\infty$ شروع به افزایش می‌کند. بنابراین در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ غیر یکنواست. همچنین تابع $y=\tan x$ دارای دوره‌ی تناوب $T=\pi$ است زیرا نمودار آن در فواصلی به طول π عیناً تکرار می‌شود.

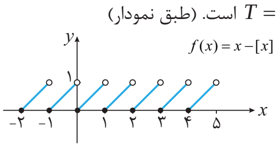
۲۹۴. ۱ ۲ ۳ **۴**



طبق شکل، تابع $y=\tan x$ در فاصله‌ی بین دو مجانب قائم متوالی (خطوط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=\frac{-\pi}{۲}$ و $x=-\frac{۳\pi}{۲}$ و ... مجانب قائم منحنی نامیده می‌شوند که شاخه‌های منحنی به این خطوط نزدیک شده، اما آن را قطع نمی‌کنند) اکیداً صعودی است ولی در بازه‌هایی که طول آن‌ها از فاصله‌ی بین دو مجانب قائم متوالی بیش‌تر باشد و یا بازه‌هایی که شامل مجانب قائم باشد، غیریکنواست. به همین دلیل تابع در بازه‌هایی به شکل $(\frac{(۲k+۱)\pi}{۲},\frac{(۲k+۳)\pi}{۲})$ اکیداً صعودی خواهد بود. در بین گزینه‌های داده شده، تابع در بازه‌ی $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است و بنابراین اکیداً یکنواست.

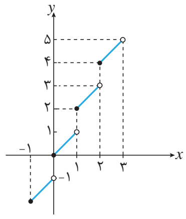
۲۹۵. ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع ثابت $f(x)=k$ تابعی متناوب است اما فاقد دوره‌ی تناوب اصلی است بنابراین تابع $f(x)=۴$ تابعی متناوب است. تابع $f(x)=x-[x]$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=۱$ است. (طبق نمودار)



به‌طور کلی توابعی به شکل کلی $f(x)=ax-[ax]$ توابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=\frac{۱}{|a|}$ هستند.

تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ که از جمع دو تابع متناوب تشکیل شده است، تابعی متناوب است و دوره‌ی تناوب آن برابر $T=۲\pi$ است. تابع $f(x)=x+[x]$ متناوب نیست زیرا این تابع، طبق شکل اکیداً صعودی است و رفتار تکرار شونده ندارد.



۲۹۶. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: چون طبق فرض به ازای هر مقدار حقیقی x، شرط $f(x-۳)=f(x+۱)$ برقرار است، پس به عنوان نمونه داریم:

$x=۰\to f(-۳)=f(۱)$ $\quad x=۴\to f(۱)=f(۵)$

$x=۸\to f(۵)=f(۹)$ $\quad ,\ldots$

یعنی می‌توان نتیجه گرفت: $f(-۳)=f(۱)=f(۵)=f(۹)=\ldots$ پس در فواصلی به طول ۴ واحد، مقادیر تابع تکرار شونده است و بنابراین $T=۴$ خواهد بود.

راه‌حل دوم: $x-۳=t\Rightarrow x=t+۳$ با جایگذاری در فرض داده شده، خواهیم داشت: $f(t)=f(t+۴)$. حال به تعریف تابع متناوب دقت کنید: تابع $y=f(x)$ را متناوب گویند، هرگاه به ازای هر $x\in D_f$، عدد حقیقی و مثبت T موجود باشد، به طوری‌که $f(x+T)=f(x)$، بنابراین از مقایسه‌ی رابطه‌ی $f(t)=f(t+۴)$ با تعریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که $T=۴$ است (زیرا رابطه‌ی فوق به ازای هر عدد حقیقی t برقرار است.)

۲۹۷. ۱ ۲ ۳ ۴

چون f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=۲$ است، بنابراین داریم: $f(x+۲)=f(x)$ و از این رو می‌توان نوشت:

$$f(-۴/۵۱)=f(-۴/۵۱+۲)=f(-۲/۵۱)$$
$$=f(-۲/۵۱+۲)=f(-۰/۵۱)=f(-۰/۵۱+۲)$$
$$=f(۱/۴۹)=۱/۴۹+\sqrt{۱/۴۹-[۱/۴۹]}$$
$$=۱/۴۹+\sqrt{۰/۴۹}=۱/۴۹+۰/۷=۲/۱۹$$

۲۹۸. ۱ ۲ ۳ ۴

دوره‌ی تناوب توابعی به شکل کلی $f(x)=ax-[ax]$ برابر است با $T=\frac{۱}{|a|}$

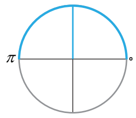
بنابراین دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=۲x-[۲x]$ برابر است با $T=\frac{۱}{۲}$

و دوره‌ی تناوب تابع $g(x)=۲(x-[x])$ برابر است با $T=۱$

توجه شود که ضریب ۲ در تابع g که پشت پرانتز قرار دارد، یک انبساط عرضی در راستای محور yها ایجاد می‌کند و بنابراین در تناوب تابع تأثیری ندارد. به عبارت دیگر دوره‌ی تناوب توابعی به شکل $f(x)=k(ax-[ax])$ نیز برابر است با $T=\frac{۱}{|a|}$

۲۹۹. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin x\geq ۰ \xrightarrow[\text{دایره‌ی مثلثاتی}]{\text{با توجه به}}$$
$$۲k\pi+۰\leq x\leq ۲k\pi+\pi$$
$$۱۶-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۱۶\Rightarrow -۴<x<۴$$



اعداد صحیحی که در بازه‌ی $(-۴,۴)$ وجود دارند، عبارتند از ۳- و ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ که وقتی به عنوان کمان سینوس در $\sin x$ قرار گیرند، واحد آن‌ها رادیان خواهد بود. چون می‌خواهیم $\sin x\geq ۰$ باشد، پس باید مقادیر این کمان‌ها در نواحی اول و دوم دایره‌ی مثلثاتی باشند تا شرط $\sin x\geq ۰$ برقرار شود. از این رو فقط مقادیر ۰^{rad} و ۱^{rad} و ۲^{rad} و ۳^{rad} در بازه‌ی $[۰,\pi]$ قرار می‌گیرند ولی مقادیر -۱^{rad} و -۲^{rad} و -۳^{rad} در نواحی اول و دوم نیستند. پس دامنه‌ی تابع شامل چهار عدد صحیح است.

۳۰۰. ۱ ۲ ۳ ۴

برای تعیین برد تابع باید ابتدا ضابطه‌ی تابع را به ساده‌ترین صورت ممکن تبدیل کنیم، سپس برد تابع را به‌دست آوریم.

$$f(x)=۳\sin^۲ ۲x-۴\cos^۲ ۲x+۵$$
$$=۳\sin^۲ ۲x-۴(۱-\sin^۲ ۲x)+۵$$
$$f(x)=۳\sin^۲ ۲x-۴+۴\sin^۲ ۲x+۵$$
$$\Rightarrow f(x)=۷\sin^۲ ۲x+۱$$

بدیهی است که: $۰\leq \sin^۲ ۲x\leq ۱\Rightarrow ۰\leq ۷\sin^۲ ۲x\leq ۷$

$$\Rightarrow ۱\leq ۷\sin^۲ ۲x+۱\leq ۸\Rightarrow ۱\leq y\leq ۸\Rightarrow R_f=[۱,۸]$$

۳۰۱. ۱ ۲ ۳ ۴

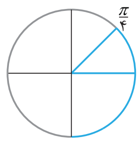
برای یافتن کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار تابع f، ابتدا آن را ساده می‌کنیم تا به یک نسبت مثلثاتی تبدیل شود در این صورت خواهیم داشت:

$$f(x)=۳-\frac{۱}{۲}\sin^۳ x\cos^۳ x=۳-\frac{۱}{۲}(\sin x\cos x)^۳$$
$$=۳-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۳=۳-\frac{۱}{۱۶}\sin^۳ ۲x$$

همواره $-۱\leq \sin ۲x\leq ۱\Rightarrow -۱\leq \sin^۳ ۲x\leq ۱$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۶}\geq -\frac{۱}{۱۶}\sin^۳ ۲x\geq -\frac{۱}{۱۶}$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۱۶}+۳\leq ۳-\frac{۱}{۱۶}\sin^۳ ۲x\leq \frac{۱}{۱۶}+۳\Rightarrow \frac{۴۷}{۱۶}\leq f(x)\leq \frac{۴۹}{۱۶}$$
$$\max-\min=\frac{۴۹}{۱۶}-\frac{۴۷}{۱۶}=\frac{۲}{۱۶}=\frac{۱}{۸}$$

۳۰۲. ۱ ۲ ۳ ۴



برای تعیین حداقل و حداکثر مقدار تابع f در بازه‌ی $[\frac{\pi}{4},\pi]$ کافی است محدوده‌ی تغییرات کمان را روی دایره‌ی مثلثاتی در نظر گرفته و تغییرات کسینوس این کمان را با تصویر کردن کمان روی محور کسینوس‌ها به‌دست آوریم:

$$\frac{\pi}{4}\le x\le\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le x-\frac{3\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le\cos(x-\frac{3\pi}{4})\le 1\Rightarrow$$

$$-1\le -\cos(x-\frac{3\pi}{4})\le 0\Rightarrow 2\le 3-\cos(x-\frac{3\pi}{4})\le 3\Rightarrow 2\le y\le 3$$

بنابراین حداقل مقدار تابع در این بازه برابر ۲ و حداکثر مقدار تابع در این بازه برابر ۳ است که مجموع آن‌ها برابر ۵ است.

۳۰۳. ۱ ۲ ۳ ۴

فرض می‌کنیم دوره‌ی تناوب تابع $y=f(x)$ برابر n باشد در این صورت دوره‌ی تناوب $y=3f(\frac{2x}{3})$ برابر است با: $T_1=\frac{n}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}n$ که در این صورت خواهیم داشت: $n=\frac{2}{3}T_1$

حال دوره‌ی تناوب تابع $y=\frac{1}{2}f(7x-\frac{3}{2})$ برابر است با:

$$T_2=\frac{n}{7}=\frac{\frac{2}{3}T_1}{7}=\frac{2}{21}T_1$$

تذکر

یادآوری می‌شود که اگر دوره‌ی تناوب تابع $y=f(x)$ برابر T باشد، دوره‌ی تناوب تابع $y=f(ax)$ برابر $\frac{T}{|a|}$ خواهد بود.

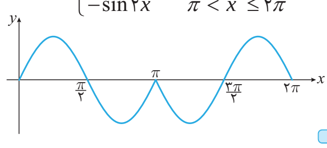
۳۰۴. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x)=2\cos x|\sin x|=\begin{cases}2\cos x\sin x & \sin x\ge 0\\ -2\cos x\sin x & \sin x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sin 2x & \sin x\ge 0\\ -\sin 2x & \sin x<0\end{cases}$$

یعنی باید در بازه‌هایی که $\sin x$ نامنفی است، نمودار تابع $y=\sin 2x$ را رسم کنیم و در بازه‌هایی که $\sin x$ منفی است باید نمودار $y=-\sin 2x$ را رسم کنیم.

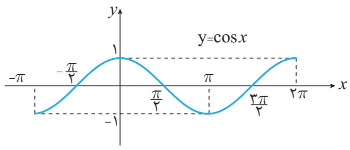
$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x & 0\le x\le\pi\\ -\sin 2x & \pi<x\le 2\pi\end{cases}$$

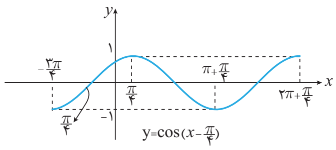


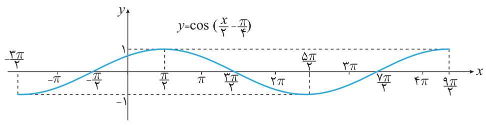
۳۰۵. ۱ ۲ ۳ ۴

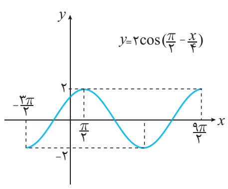
راه‌حل اول: می‌توانیم مراحل انتقال را برای رسم نمودار تابع، طی کنیم.

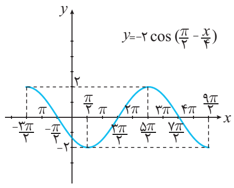
یعنی ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ در راستای محور طول‌ها به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول تمامی نقاط را در راستای محور طول‌ها دو برابر می‌کنیم و در نهایت عرض تمامی نقاط را در راستای محور yها، دو برابر کرده و در آخر، نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.











راه‌حل دوم: در تابع $f(x)=-2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$ به ازای $x=0$ داریم: $f(0)=-2\cos(-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$، بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ مردود هستند و به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $f(\frac{\pi}{2})=-2\cos(0)=-2$ بنابراین گزینه‌ی ۴ نیز مردود است. پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۳۰۶. ۱ ۲ ۳ ۴

طبق نمودار داده شده باید $f(0)=-7$ باشد، در این صورت داریم:

$$f(0)=4a+2b\cos 0=-7\Rightarrow 4a+2b=-7 \qquad (1)$$

از طرفی بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱- است، پس داریم:

$$4a+|2b|=-1\Rightarrow\begin{cases}4a+2b=-1 & \text{غ.ق.ق}\\ 4a-2b=-1\end{cases}$$

رابطه‌ی $4a+2b=-1$ غیر قابل قبول است زیرا طبق رابطه‌ی (۱) باید $4a+2b=-7$ باشد.

بنابراین رابطه‌ی $4a-2b=-1$ قابل قبول است و داریم:

$$\begin{cases}4a+2b=-7\\4a-2b=-1\end{cases}\Rightarrow 8a=-8\Rightarrow a=-1\Rightarrow b=-\frac{3}{2}$$

پس ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=-4-3\cos x$ خواهد بود و داریم:

$$f(-\frac{2\pi}{3})=-4-3\cos(-\frac{2\pi}{3})=-4-3\cos(\frac{2\pi}{3})$$
$$=-4-3\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=-4+3\cos\frac{\pi}{3}=-4+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$$

۳۰۷. ۱ ۲ ۳ ۴

طبق شکل دوره‌ی تناوب تابع $T=\pi$ است. پس داریم: $\frac{2\pi}{|b|}=\pi$ یعنی $|b|=2$. از طرفی چون کم‌ترین مقدار تابع $y=-4$ و بیش‌ترین مقدار تابع $y=2$ است، پس داریم:

$$\begin{matrix}-|a|+c=-4\\|a|+c=2\end{matrix}\Rightarrow c=-1\Rightarrow|a|=3$$

تابع f دارای ضابطه‌ی $f(x)=a\cos(bx)+c$ است و طبق شکل باید a منفی باشد پس $a=-3$ است و بنابراین ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=-3\cos(2x)-1$ است.
(توجه شود که چون $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ است پس $b=2$ یا $b=-2$ تفاوتی نخواهد داشت) حال مطلوب سؤال برابر است با:

$$f(\frac{5\pi}{3})=-3\cos(\frac{10\pi}{3})-1=-3\cos(3\pi+\frac{\pi}{3})-1$$
$$=-3(-\frac{1}{2})-1=\frac{1}{2}$$

۳۰۸. ۱ ۲ ۳ ۴

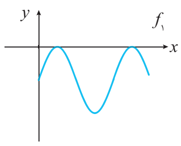
طبق شکل داریم $f(0)=-2\pi$ و $f(1)=0$ بنابراین می‌توان نوشت:

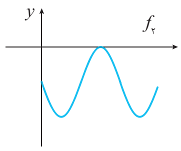
$$f(0)=-2\pi\Rightarrow a\cos 0=-2\pi\Rightarrow a=-2\pi$$
$$f(-1)=0\Rightarrow a\cos(-b^2)=0\Rightarrow -b^2=-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow b^2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow a+b^2=-2\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{2}$$

توجه شود که اولین مقدار منفی که $\cos(-b^2)$ را برابر صفر می‌کند به ازای کمان $-\frac{\pi}{2}$ اتفاق می‌افتد به همین دلیل تساوی $-b^2=-\frac{\pi}{2}$ نوشته شده است.

۳۰۹. ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار تابع، دوره‌ی تناوب تابع $T=4$ است. پس $\frac{2\pi}{|\pi b|}=4$ است و بنابراین $b=\pm\frac{1}{2}$ است. چون تابع بر محور xها مماس است، حداکثر مقدار آن برابر صفر است پس $a=-1$ است، چون حداکثر مقدار سینوس برابر ۱ است. حال هر دو تابع $f_1(x)=-1+\sin(\frac{\pi}{2}x)$ و $f_2(x)=-1+\sin(-\frac{\pi}{2}x)$ را در نظر می‌گیریم.





از نمودار داده شده، مشخص می‌شود که ضابطه‌ی تابع $f(x)=-1+\sin(-\frac{\pi}{2}x)$ است که داریم:

$$f(\frac{25}{3})=-1+\sin(-\frac{25\pi}{6})=-1-\sin(\frac{25\pi}{6})$$
$$=-1-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})=-1-\sin\frac{\pi}{6}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

۳۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴

چون تابع f از نقطه‌ی $(0\,,2)$ می‌گذرد، پس باید $f(0)=2$ باشد. یعنی داریم:

$$f(0)=2\Rightarrow 3a+2\cos(-\frac{5\pi}{2})=2\Rightarrow 3a=2\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

از طرفی طبق شکل ۱/۵ برابر دوره‌ی تناوب تابع برابر ۹ واحد است، پس داریم:

$$1/5T=9\Rightarrow\frac{3}{2}T=9\Rightarrow T=6\Rightarrow\frac{2\pi}{|b\pi|}=6$$
$$\Rightarrow\frac{2}{|b|}=6\Rightarrow|b|=\frac{1}{3}\Rightarrow|b|=\pm\frac{1}{3}$$

چون بعد از $x=0$، مقدار y کم‌تر از ۲ شده است باید $b=-\frac{1}{3}$ باشد تا ضابطه‌ی تابع به صورت زیر باشد:

$$f(x)=3a+2\cos(b\pi x-\frac{5\pi}{2})=2+2\cos(-\frac{\pi x}{3}-\frac{5\pi}{2})$$
$$\overset{\cos(-\alpha)=\cos\alpha}{=}2+2\cos(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi x}{3})=2-2\sin(\frac{\pi x}{3})$$
$$\Rightarrow f(x)=2-2\sin(\frac{\pi x}{3})\Rightarrow f(\frac{11}{2})=2-2\sin(\frac{11\pi}{6})$$
$$\Rightarrow f(\frac{11}{2})=2-2\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=2+2\sin\frac{\pi}{6}=2+2(\frac{1}{2})=3$$

توجه شود که اگر $b=\frac{1}{3}$ را در نظر بگیریم، ضابطه‌ی تابع در نهایت به صورت $f(x)=2+2\sin(\frac{\pi}{3}x)$ خواهد شد که غیر قابل قبول است زیرا در این صورت بعد از $x=0$، مقدار y بیش از ۲ خواهد شد.

۳۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این‌که ماکزیمم نمودار تابع برابر صفر است پس $a=2$ یا $a=-2$ است. از طرفی $f(0)<0$ است، پس $a=-2$ می‌شود.

$$f(x)=-2-2\sin b\pi x$$

از طرفی اولین می‌نیمم تابع در نقطه‌ی $x=1/5$ رخ داده است. می‌دانیم

کم‌ترین مقدار وقتی است که $\sin x = 1$ یعنی $b\pi x = \frac{\pi}{2}$ باشد، چرا که اولین جواب مثبت $\sin x = 1$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است. پس باید $b\pi x$ در $x = 1/5$، برابر $\frac{\pi}{2}$ شود.

$$b\pi(1/5) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow a+b = -2+\frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

۳۱۲. ۱ **۲** ۳ ۴

حداکثر مقدار تابع $|3a|+1$ است که طبق شکل برابر ۷ است بنابراین خواهیم داشت: $|3a|+1=7 \Rightarrow |3a|=6 \Rightarrow |a|=2 \Rightarrow a=\pm 2$

با توجه به نمودار داده شده و نمودار تابع کسینوس، مشخص می‌شود که $a=2$ قابل قبول است.

از طرفی با توجه به طول نقطه‌ی داده شده، مشخص می‌شود که نصف دوره‌ی تناوب تابع برابر $\frac{5\pi}{3}$ است یعنی دوره‌ی تناوب تابع $T=\frac{10\pi}{3}$ است. از این رو خواهیم داشت:

$$T=\frac{10\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{10} \Rightarrow b=\pm\frac{3}{10}$$

چون حداکثر مقدار $2a-3b$ مورد نظر است، پس خواهیم داشت:

$$\max(2a-3b) = 2(2)-3(-\frac{3}{10}) = 4+\frac{9}{10} = 4/9$$

۳۱۳. ۱ ۲ **۳** ۴

این تابع در نقاطی محور xها را قطع می‌کند که $y=0$ یعنی $\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$ باشد، پس طول اولین نقطه $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$ و طول دومین نقطه هم $x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{3}$ است، یعنی داریم:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{3} = \frac{23\pi}{12}$$

۳۱۴. ۱ ۲ ۳ **۴**

نقاطی به طول a و b، نقاطی هستند که در آن‌ها $y=0$ است، بنابراین کافی است معادله‌ی $y=0$ را حل کنیم و طول نقاطی مثبت (یعنی نقاطی بعد از $x=0$) را بیابیم که در آن‌ها $y=0$ می‌شود.

$$f(x)=0 \Rightarrow 2\sin(x-\frac{\pi}{6})+1=0 \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi \\ x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

k	۰	۱
x	۰	2π

k	۰	۱
x	$\frac{4\pi}{3}$	$2\pi+\frac{4\pi}{3}$

اولین دو نقطه‌ای با طول مثبت که مورد نظر هستند $a=\frac{4\pi}{3}$ و $b=2\pi$ هستند، پس $b-a=\frac{2\pi}{3}$ است.

۳۱۵. ۱ ۲ **۳** ۴

نقطه‌ی $x=a$ اولین نقطه‌ای با طول مثبت است که مقدار تابع در آن ماکزیمم می‌شود، یعنی اولین نقطه‌ای با طول مثبت که در آن $\sin(x+\frac{\pi}{3})=1$ است و نقطه‌ی $x=b$ اولین نقطه‌ای با طول مثبت است که مقدار تابع در آن برابر صفر می‌شود. یعنی اولین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $f(x)=0$ مورد نظر است.

$$\sin(x+\frac{\pi}{3})=1 \Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{k=0} x=\frac{\pi}{6} \to a=\frac{\pi}{6}$$

$$2\sin(x+\frac{\pi}{3})+1=0 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{6} \quad , \quad x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \Rightarrow$$

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \quad , \quad x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \xrightarrow{\text{کوچکترین ریشه ی مثبت}}$$

$$x=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow b=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{\frac{5\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}=5$$

۳۱۶. ۱ ۲ ۳ **۴**

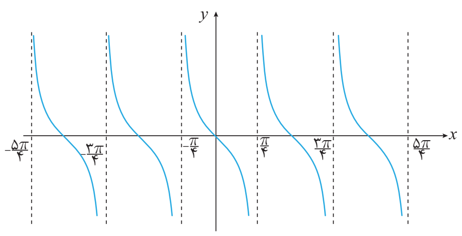
ضابطه‌ی تابع f را می‌توان ساده‌تر کرد زیرا طبق فرمول‌های مثلثاتی می‌دانیم $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ بنابراین ضابطه‌ی تابع f برابر است با:

$f(x)=\frac{1}{2}\sin 6\pi x$ که دوره‌ی تناوب آن برابر $T=\frac{2\pi}{6\pi}=\frac{1}{3}$ است.

همچنین دوره‌ی تناوب تابع $g(x)$ برابر است با: $T=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$.

۳۱۷. **۱** ۲ ۳ ۴

طبق شکل، تابع در بازه‌ی $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ اکیداً نزولی است، ولی در سایر بازه‌های داده شده وضعیت اکیداً یکنوایی ندارد.



به‌طور کلی تابع فوق ما بین دو خط متوالی از خطوط $x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۴}$ اکیداً نزولی است. (این خطوط را اصطلاحاً مجانب قائم تابع می‌نامند.)

۳۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴

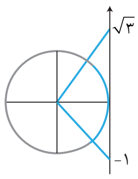
$$-۴ \le x \le ۳ \Rightarrow -\frac{۴\pi}{۱۲} \le \frac{\pi x}{۱۲} \le \frac{۳\pi}{۱۲} \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} \le \frac{\pi x}{۱۲}+\frac{\pi}{۱۲} \le \frac{\pi}{۳}$$

با توجه به نمودار، می‌توان تشخیص داد:

$$-۱ \le \tan(\frac{\pi x}{۱۲}+\frac{\pi}{۱۲}) \le \sqrt{۳}$$

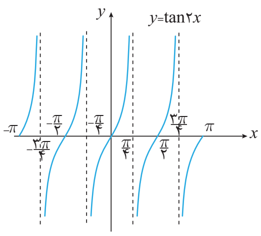
$$\Rightarrow ۰ \le \tan^{۲}(\frac{\pi x}{۱۲}+\frac{\pi}{۱۲}) \le ۳$$

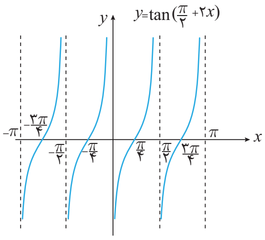
$$\Rightarrow ۰ \le y \le ۳ \Rightarrow R_f=[۰\,,۳]$$



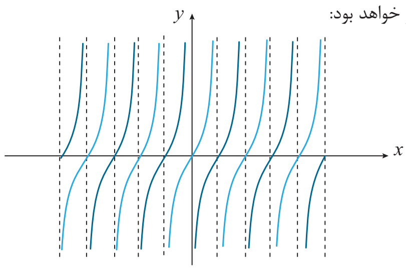
۳۱۹. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: می‌توانیم نمودارهای توابع f و g را از طریق انتقال رسم کنیم. با رسم نمودارهای آن‌ها در یک دستگاه محورهای مختصات، می‌توانیم تعداد نقاط تلاقی آن‌ها را بیابیم.





اگر نمودارهای این دو تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم، به صورت زیر خواهد بود:



همان‌طور که مشخص است، این دو تابع هیچ نقطه‌ی تلاقی با یکدیگر ندارند. یعنی تعداد نقاط تلاقی برابر صفر است.

راه‌حل دوم: برای این‌که تعداد نقاط تلاقی دو تابع را بیابیم، می‌توانیم معادلات آن‌ها را با هم قطع دهیم. در این صورت داریم:

$$f(x)=\tan ۲x \qquad g(x)=\tan(۲x+\frac{\pi}{۲})$$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \tan ۲x=\tan(۲x+\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \tan ۲x=-\cot ۲x$$

$$\Rightarrow \tan ۲x=\frac{-۱}{\tan ۲x} \Rightarrow \tan^{۲} ۲x=-۱ \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

زیرا توان دوم یک عبارت نمی‌تواند منفی باشد.

پس معادله‌ی حاصل از تقاطع آن‌ها فاقد ریشه است و در نتیجه نمودارهای این توابع با یکدیگر تلاقی ندارند.

۳۲۰. ۱ ۲ ۳ ۴

دوره‌ی تناوب تابع برابر $T=\frac{\pi}{|-\pi a|}$ است. از طرفی با توجه به نمودار، دوره‌ی تناوب تابع برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ است، پس خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{|-a\pi|}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow |a|=\frac{۳}{۴\pi} \Rightarrow a=\pm\frac{۳}{۴\pi}$$

حال چون ضابطه‌ی تابع f، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x)=\tan(\frac{\pi}{۲}-\pi ax)=\cot \pi ax$$

اگر به نمودار تابع دقت شود بعد از $x=۰$، مقادیر y منفی هستند پس باید طبق ضابطه‌ی $f(x)=\cot(\pi ax)$ مقدار a منفی باشد یعنی $a=-\frac{۳}{۴\pi}$ قابل قبول است.

۳۲۱. ۱ ۲ ۳ ۴

به‌طور کلی انتقال نمودار یک تابع در راستای محور xها و محور yها، تأثیری در دوره‌ی تناوب یک تابع ندارد. یعنی اگر دوره‌ی تناوب تابع $y=f(x)$ برابر T باشد، دوره‌ی تناوب توابع $f(x)\pm k$ و $f(x\pm a)$ نیز برابر T خواهد بود. همچنین دوره‌ی تناوب تابع $kf(x)$ نیز برابر T خواهد بود. اما اعمالی مانند به توان زوج رساندن یا قدرمطلق گرفتن یا تبدیل x به $g(x)$ می‌تواند دوره‌ی تناوب یک تابع را تغییر دهد.

به عنوان مثال اگر تابع $y=\sin x$ را در نظر بگیریم، گزاره‌های «الف» و «ب» و «ج» و «د» به ترتیب به صورت $y=۴\sin(\frac{x}{۲}+۱)$ و $y=|\sin x|$ و $y=۲\sin^{۲} x+۵$ و $y=۳\sin(x^{۲})+۴$ خواهند بود که دوره‌ی تناوب هیچ یک از آن‌ها با دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin x$ برابر نیست.

در تابع $y=۴\sin(\frac{x}{۲}+۱)$ دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$ و در تابع $y=|\sin x|$ دوره‌ی تناوب برابر $T=\pi$ و در تابع $y=۲\sin^{۲} x+۵$ نیز دوره‌ی تناوب برابر π است و تابع $y=۳\sin(x^{۲})+۴$ متناوب نیست زیرا کمان آن خطی نیست.

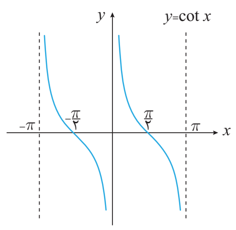
بنابراین تمام موارد داده شده دارای مثال نقض هستند و در هیچ یک از آن‌ها نمی‌توان ادعا کرد که دوره‌ی تناوب تابع f تغییری نخواهد کرد.

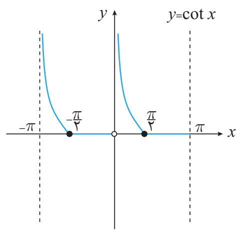
۳۲۲. ۱ ۲ ۳ **۴**

در نواحی اول و سوم، $\cot x$، مثبت و در نواحی دوم و چهارم، $\cot x$، منفی است بنابراین داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cot x-\cot x}{۲}=۰ & -\frac{\pi}{۲}<x<۰ \text{ یا } \frac{\pi}{۲}<x<\pi\\ \frac{\cot x+\cot x}{۲}=\cot x & -\pi<x\le -\frac{\pi}{۲} \text{ یا } ۰<x\le\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع $y=\cot x$ که به صورت زیر است، خواهیم داشت:





۳۲۳. ۱ **۲** ۳ ۴

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشند تا تابع f تعریف شده باشد و علاوه بر آن عبارت زیر رادیکال در مخرج کسر، باید مخالف صفر هم باشد، پس داریم:

$$\sin(\pi x-\frac{\pi}{۸})-۱\ge ۰ \Rightarrow \sin(\pi x-\frac{\pi}{۸})\ge ۱$$

$$\xrightarrow[\text{کمان نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱ باشد}]{\text{چون حاصل سینوس یک}} \sin(\pi x-\frac{\pi}{۸})=۱$$

$$\Rightarrow \pi x-\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \pi x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۸}$$

$$\Rightarrow x=۲k+\frac{۵}{۸}\ (k\in\mathbb{Z})$$

از طرفی باید داشته باشیم:

$$۹x-x^۲>۰\Rightarrow x(۹-x)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰<x<۹$$

چون محدوده‌ی مشترک x مورد نظر است، پس در دسته جواب $x=۲k+\frac{۵}{۸}$ فقط مقادیر $k=۰$، $k=۱$، $k=۲$، $k=۳$ و $k=۴$ قابل قبول هستند زیرا در این صورت $۰<x<۹$ خواهد بود.

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{۵}{۸}$	$\frac{۲۱}{۸}$	$\frac{۳۷}{۸}$	$\frac{۵۳}{۸}$	$\frac{۶۹}{۸}$

یعنی دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ای ۵ عضوی است.

۳۲۴. **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x)=-۲\cos^۲\frac{\pi x}{۲}+۳\sin\frac{\pi x}{۲}+۴$$

$$=-۲(۱-\sin^۲\frac{\pi x}{۲})+۳\sin\frac{\pi x}{۲}+۴$$

$$f(x)=۲\sin^۲\frac{\pi x}{۲}+۳\sin\frac{\pi x}{۲}+۲$$

اگر $\sin\frac{\pi x}{۲}=t$ در نظر بگیریم، داریم: $f(t)=۲t^۲+۳t+۲$. برای به‌دست آوردن کم‌ترین مقدار آن ابتدا و انتهای بازه و $t=-\frac{b}{۲a}$ را امتحان می‌کنیم.

$$\sin\frac{\pi x}{۲}=۱ \Rightarrow f(x)=۷$$

$$\sin\frac{\pi x}{۲}=-۱\Rightarrow f(x)=۱$$

$$\sin\frac{\pi x}{۲}=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow f(x)=۲(-\frac{۳}{۴})^۲+۳(-\frac{۳}{۴})+۲$$

$$=\frac{۹}{۸}-\frac{۹}{۴}+۲=-\frac{۹}{۸}+۲=\frac{۷}{۸}$$

چون کم‌ترین مقدار تابع f برابر $\frac{۷}{۸}$ و بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۷ است، پس خواهیم داشت:

$$\max(f(x))+\min(f(x))=۷+\frac{۷}{۸}=\frac{۶۳}{۸}$$

۳۲۵. ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(x)=۴\cos^۲ x-۴\cos x=۴\cos^۲ x-۴\cos x+۱-۱$$

$$=(۲\cos x-۱)^۲-۱$$

می‌دانیم: $-۱\le\cos x\le ۱ \Rightarrow -۲\le ۲\cos x\le ۲$

$$\Rightarrow -۳\le ۲\cos x-۱\le ۱ \Rightarrow ۰\le (۲\cos x-۱)^۲\le ۹$$

$$\Rightarrow -۱\le (۲\cos x-۱)^۲-۱\le ۸ \Rightarrow -۱\le f(x)\le ۸ \Rightarrow R_f=[-۱,۸]$$

۳۲۶. ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(x)=\sin^۶\frac{x}{۲}+\cos^۶\frac{x}{۲}=۱-۳\sin^۲\frac{x}{۲}\cos^۲\frac{x}{۲}$$

$$=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ x\Rightarrow T_۱=\frac{\pi}{۱}=\pi$$

$$g(x)=۲\cos^۳(۶x+\frac{\pi}{۳})+۱ \Rightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{T_۱}{T_۲}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{۳}}=۳$$

یادآوری می‌شود که دوره‌ی تناوب توابعی به شکل کلی $f(x)=a\cos^{۲n}(bx+c)+d$ یا $f(x)=a\sin^{۲n}(bx+c)+d$ برابر است با: $T=\frac{\pi}{|b|}$

۳۲۷. **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x)=۱+۴\cos^۲(b\pi-\frac{۲a}{۳}x)\Rightarrow T=\frac{\pi}{|-\frac{۲a}{۳}|}=\frac{۳\pi}{۲|a|}$$

$$\Rightarrow \frac{۳\pi}{۲|a|}=\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow |a|=\frac{۱۸}{۱۰}=\frac{۹}{۵}$$

چون نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند، پس داریم:

$$f(0)=2 \Rightarrow 1+4\cos^2(b\pi)=2 \Rightarrow \cos^2(b\pi)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos b\pi=\pm\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} b\pi=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow b=2k\pm\frac{1}{3} \Rightarrow \min|b|=\frac{1}{3} \\ b\pi=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Rightarrow b=2k\pm\frac{2}{3} \Rightarrow \min|b|=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min(|a|+|b|)=\frac{9}{5}+\frac{1}{3}=\frac{32}{15}$$

.۳۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

باید ضابطه‌ی هریک از توابع را تا حد امکان ساده کنیم، سپس دوره‌ی تناوب تابع را تعیین کنیم.

$$f(x)=4\cos 2x-6\cos^2 x+5=4\cos 2x-6\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+5$$

$$=4\cos 2x-3-3\cos 2x+5$$

$$f(x)=\cos 2x+2 \Rightarrow T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$g(x)=\cos^4 2x-\cos^2 2x=\cos^2 2x(\cos^2 2x-1)$$

$$=\cos^2 2x(-\sin^2 2x)=-\frac{1}{4}\sin^2 4x$$

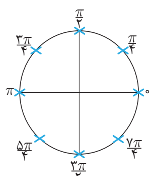
$$g(x)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 8x}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 8x$$

$$\Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=4$$

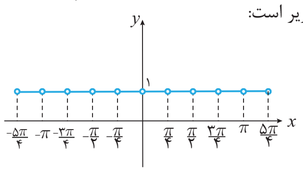
.۳۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

تابع $f(x)=\tan 2x.\cot 2x$ تابعی ثابت با دامنه‌ی زیر است:

$$\begin{cases} 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\dots \\ 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2} \Rightarrow x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi,\dots \end{cases}$$

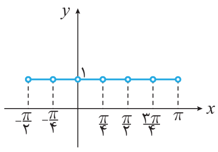


با توجه به نقاط به‌دست آمده، مشخص می‌شود که دامنه‌ی تابع به صورت $D_f=\mathbb{R}-\{x|x=\frac{k\pi}{4}\}$ است. بنابراین نمودار تابع f که دارای ضابطه‌ی ساده شده‌ی $f(x)=1$ است به صورت زیر است:



دوره‌ی تناوب تابع $T=\frac{\pi}{4}$ است زیرا در فواصلی به طول $\frac{\pi}{4}$ عیناً تکرار می‌شود.

.۳۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴



در تابع $f(x)=\frac{\tan 2x}{\tan 2x}$ دامنه‌ی تابع f به صورت زیر است:

نقاطی که $\tan 2x$ تعریف نشده است:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

ریشه‌های مخرج $\tan 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$

یعنی تابع f در نقاط $x=\frac{k\pi}{4}$ تعریف نشده است بنابراین ضابطه‌ی f به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\neq\frac{k\pi}{4} \\ \text{تعریف نشده} & x=\frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

پس نمودار آن به صورت بالا خواهد بود و دوره‌ی تناوب آن $T=\frac{\pi}{4}$ است.

(زیرا نمودار تابع در فواصلی به طول $\frac{\pi}{4}$ تکرار می‌شود.)

.۳۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر تابعی از جمع و تفریق و یا ضرب و تقسیم چند تابع متناوب تشکیل شده باشد ولی به شکل ساده‌تری قابل تبدیل نباشد، در این صورت دوره‌ی تناوب کل تابع از ک. م. م دوره‌ی تناوب‌های هر یک از اجزای آن به‌دست می‌آید. یعنی داریم:

$$y=\tan\frac{2x}{3} \Rightarrow T_1=\frac{\pi}{\frac{2}{3}}=\frac{3\pi}{2}$$

$$y=2\cos 5x \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{5}$$

$$y=3\sin\frac{7x}{2} \Rightarrow T_3=\frac{2\pi}{\frac{7}{2}}=\frac{4\pi}{7}$$

$$T_1=\frac{3\pi}{2}=\frac{7\times5\times3\pi}{70}$$

$$\xrightarrow[\text{به دست آمده ک.م.م می‌گیریم}]{\text{از دوره‌های تناوب}} T_2=\frac{2^2\pi}{5}=\frac{2^2\times7\times\pi}{70}$$

$$T_3=\frac{4\pi}{7}=\frac{2^3\times5\times\pi}{70}$$

$$T_{\text{کل}}=[7\times5\times3\,,\,2^2\times7\,,\,2^3\times5]\times\frac{\pi}{70}$$

$$=\frac{2^3\times3\times5\times7\pi}{70}=12\pi$$

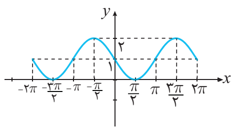
۳۳۲. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر توابع f و g توابعی متناوب بوده و دوره‌ی تناوب آن‌ها T_1 و T_2 باشند به طوری‌که $\frac{T_1}{T_2}\in Q$ در این صورت توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ نیز متناوبند و دوره‌ی تناوب آن‌ها برابر ک.م.م T_1 و T_2 است. (البته نه دوره تناوب اصلی)

در تابع داده شده، چون دوره‌ی تناوب $y=\sin^2 2x$ برابر $T_1=\frac{\pi}{2}$ و دوره‌ی تناوب $y=2x-[2x]$ برابر $T_2=\frac{1}{2}$ است و $\frac{T_1}{T_2}\notin Q$، پس تابع f متناوب نخواهد بود.

۳۳۳. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: با دقت در ضابطه‌ی تابع مشخص می‌شود که باید $f(0)=1$ و $f(\frac{\pi}{2})=0$ و $f(\pi)=1$ باشد.



در گزینه‌ی ۱ مقدار $f(0)$ برابر ۱- است، پس مردود است.

در گزینه‌ی ۲ مقدار $f(\pi)$ برابر ۱- است، پس این گزینه نیز مردود می‌شود.

در گزینه‌ی ۳، مقدار $f(\frac{\pi}{2})$ برابر ۲ است، پس مردود است.

اما در گزینه‌ی ۴، مقدار $f(0)=1$ و $f(\frac{\pi}{2})=0$ و $f(\pi)=1$ است.

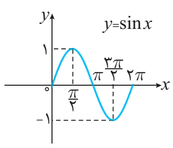
راه‌حل دوم: اگر ضابطه‌های داده شده را ساده کنیم، خواهیم داشت:

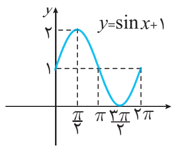
گزینه ۱: $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})=-\sin(\frac{\pi}{2}-x)=-\cos x$

گزینه ۲: $y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$

گزینه ۳: $y=-\sin(x-\pi)+1=\sin(\pi-x)+1=\sin x+1$

در گزینه‌های ۱ و ۲ باید برد تابع در بازه‌ی $[-1,1]$ باشد زیرا $-1\le\cos x\le 1$ و $-1\le -\cos x\le 1$ است. اما در شکل، برد تابع بازه‌ی $[0,2]$ است. در گزینه‌ی ۳ باید نمودار تابع $y=\sin x$ را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، که در این صورت خواهیم داشت:





این نمودار با نمودار داده شده تطبیق ندارد، پس گزینه‌ی ۳ نیز مردود است.
بنابراین گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۳۳۴. ۱ ۲ ۳ ۴

$y=\sin(-x-\pi)=-\sin(x+\pi)=-(-\sin x)=\sin x$

پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که ضابطه‌ی آن همان $y=\sin x$ باشد.

۱) $y=\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$

۲) $y=\cos(-\frac{5\pi}{2}-x)=\cos(\frac{5\pi}{2}+x)=\cos(2\pi+\frac{\pi}{2}+x)$
$=\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$

۳) $y=\cos(\frac{7\pi}{2}+x)=\cos(2\pi+\frac{3\pi}{2}+x)=\cos(\frac{3\pi}{2}+x)=\sin x$

۴) $y=\sin(-x-2\pi)=-\sin(x+2\pi)=-\sin x$

۳۳۵. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم در توابعی به شکل کلی $f(x)=a\sin^{2n+1}(bx+c)+d$ یا $f(x)=a\cos^{2n+1}(bx+c)+d$ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم به ترتیب $|a|+d$ و $-|a|+d$ و دوره‌ی تناوب تابع به صورت $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

همچنین در توابعی به شکل کلی $f(x)=a\sin^{2n}(bx+c)+d$ یا $f(x)=a\cos^{2n}(bx+c)+d$ با فرض $a>0$ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم به ترتیب $a+d$ و d و دوره‌ی تناوب تابع به صورت $T=\frac{\pi}{|b|}$ است و اگر $a<0$ باشد مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم به ترتیب d و $a+d$ و دوره‌ی تناوب به صورت $T=\frac{\pi}{|b|}$ است. بنابراین در تابع $f(x)=-6\cos(\frac{\pi x}{3})+4$ داریم:

$$T_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6\ ,\quad m_1=-2\ ,\quad M_1=10$$

و در تابع $g(x)=2\sin^2(\frac{\pi}{7}-2x)-3$ داریم:

$$T_2=\frac{\pi}{2}\ ,\quad m_2=-3\ ,\quad M_2=-1$$

بنابراین داریم:
$$\frac{m_1M_1T_1}{m_2M_2T_2}=\frac{10\times(-2)\times 6}{-3\times(-1)\times\frac{\pi}{2}}=-\frac{80}{\pi}$$

۳۳۶. ۱ ۲ ۳ ۴

$$-\pi<x<-\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{\sin(-x)-\sin x}{2}=-\sin x$$

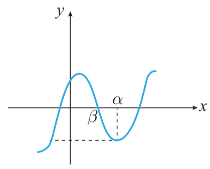
$$-\frac{\pi}{2}<x<0\Rightarrow f(x)=\frac{\sin(-x)-\sin x}{2}=-\sin x$$

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{\sin x+\sin x}{2}=\sin x$$

$$\frac{\pi}{2}<x<\pi\Rightarrow f(x)=\frac{\sin x+\sin x}{2}=\sin x$$

بنابراین برای رسم نمودار تابع f باید در بازه‌ی $[0,\pi]$ نمودار تابع $y=\sin x$ و در بازه‌ی $[-\pi,0]$ قرینه‌ی نمودار $y=\sin x$ را نسبت به محور xها رسم کنیم، که در این صورت نمودار گزینه‌ی ۲ به‌دست می‌آید.

۳۳۷. ۱ ۲ ۳ ۴



با توجه به شکل β اولین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $f(x)=0$ است و α اولین نقطه‌ای با طول مثبت است که در آن $f(x)$ می‌نیمم می‌شود. می‌نیمم تابع $f(x)$ زمانی رخ می‌دهد که $\cos(x-\frac{\pi}{3})=-1$ شود بنابراین خواهیم داشت:

$$\cos(x-\frac{\pi}{3})=-1 \Rightarrow x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi \Rightarrow x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$$

$$\xrightarrow[k=0\ \text{به ازای}]{\text{اولین ریشه ی مثبت}} x=\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \alpha=\frac{4\pi}{3}$$

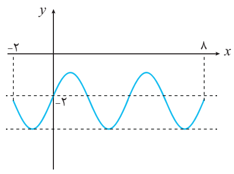
$$f(x)=0 \Rightarrow 2\cos(x-\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{3})=0$$

$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

$$\xrightarrow[k=0\ \text{به ازای}]{\text{اولین ریشه ی مثبت}} x=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \beta=\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{4\pi}{3}}{\frac{5\pi}{6}}=\frac{8}{5}=1/6$$

۳۳۸. ۱ ۲ ۳ ۴



با توجه به نمودار تابع، مقدار تابع به ازای $x=0$ برابر $y=-2$ است، پس داریم:

$$f(0)=-2 \Rightarrow 3a+\sin(0)=-2 \Rightarrow 3a=-2 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

از طرفی طبق نمودار، ۲/۵ برابر دوره‌ی تناوب تابع برابر ۱۰ واحد شده است. پس داریم:

$$2/5T=10 \Rightarrow \frac{5}{2}T=10 \Rightarrow T=4$$

$$T=\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|} \Rightarrow \frac{2}{|b|}=4 \Rightarrow |b|=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

توجه شود که چون بعد از $x=0$ ، مقدار y بیش از ۲- شده است، پس $b>0$ است. یعنی $b=\frac{1}{2}$ قابل قبول است. از این رو خواهیم داشت:

$$ab=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$$

۳۳۹. ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: می‌توانیم ابتدا از روش تبدیل به مربع کامل، از عبارت داده شده، یک عبارت مربع کامل بسازیم. در این صورت می‌توانیم با ساختن ضابطه‌ی تابع، برد آن را تعیین کنیم.

$$f(x)=2\cos^2x-\cos x+1=2(\cos^2x-\frac{1}{2}\cos x)+1$$

$$=2(\cos^2x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16})+1$$

$$=2((\cos x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16})+1=2(\cos x-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}$$

حال خواهیم داشت:

$$-1\le\cos x\le1 \Rightarrow -\frac{5}{4}\le\cos x-\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0\le(\cos x-\frac{1}{4})^2\le\frac{25}{16} \Rightarrow$$

$$0\le2(\cos x-\frac{1}{4})^2\le\frac{25}{8} \Rightarrow \frac{7}{8}\le2(\cos x-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}\le4$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8}\le y\le4 \Rightarrow R_f=[\frac{7}{8},4]$$

راه‌حل دوم: در تعیین برد توابعی به شکل کلی $f(x)=a\sin^2x+b\sin x+c$ یا $f(x)=a\cos^2x+b\cos x+c$ می‌توانیم به‌جای $\sin x$ یا $\cos x$ مقادیر ۱ و ۱- و $\frac{-b}{2a}$ (با شرط $-1<-\frac{b}{2a}<1$) را قرار دهیم. یعنی داریم:

$$\cos x=1 \Rightarrow f(x)=2-1+1=2$$

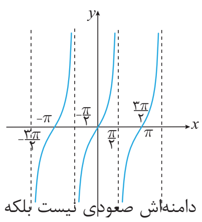
$$\cos x=-1 \Rightarrow f(x)=2+1+1=4$$

$$\cos x=\frac{1}{4} \Rightarrow f(x)=2(\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4}+1=\frac{1}{8}-\frac{2}{8}+1$$

$$=-\frac{1}{8}+1=\frac{7}{8}$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۴ و می‌نیمم مطلق تابع برابر $\frac{7}{8}$ است و برد تابع به صورت $R_f=[\frac{7}{8},4]$ خواهد بود.

۳۴۰. ۱ ۲ ۳ ۴



گزاره‌های «الف» و «ب» نادرست هستند. زیرا تابع تانژانت در بازه‌هایی که در آن تعریف شده یعنی بازه‌هایی مانند $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ یا $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ یا ... صعودی است. ولی در کل دامنه‌اش صعودی نیست بلکه به دلیل رفتار تابع، در طرفین نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ تابعی غیریکنوا محسوب می‌شود. همچنین نمی‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. ولی در بازه‌هایی مانند $(0,\pi)$ یا $(\pi,2\pi)$ غیرصعودی است پس گزاره‌های «ج» و «د» صحیح هستند.

از طرفی گزاره‌های «هـ» و «و» نیز صحیح هستند زیرا در ناحیه‌ی اول $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مثبت هستند و $0<\cos\alpha<1$ است پس داریم: زیرا $0<\cos\alpha<1$ است $\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>\frac{\sin\alpha}{1}$

یعنی $\tan\alpha > \sin\alpha$ است.

در ناحیه‌ی چهارم هم با توجه به علامت منفی برای $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ می‌توان نتیجه گرفت که $\tan\alpha < \sin\alpha$ (زیرا $|\tan\alpha| > |\sin\alpha|$)

بنابراین ۴ گزاره از ۶ گزاره‌ی داده شده صحیح هستند.

۳۴۱. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{۳\pi-\pi x}{۶}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \frac{\pi}{۲}-\frac{\pi x}{۶}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi x}{۶}\neq k\pi \Rightarrow -\pi x\neq ۶k\pi \Rightarrow x\neq -۶k \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

یعنی اعداد صحیح مضرب ۶ نباید در دامنه‌ی تابع قرار داشته باشند.

از طرفی به دلیل عبارت زیر رادیکال باید داشته باشیم.

$$۱۲۰-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow x^{۲}\leq ۱۲۰ \Rightarrow -\sqrt{۱۲۰}\leq x\leq \sqrt{۱۲۰}$$

$$\Rightarrow -۱۰/\dots\leq x\leq ۱۰/\dots \xrightarrow[\text{موجود در بازه}]{\text{اعداد صحیح}}$$

$$x=-۱۰,-۹,-۸,\dots,۸,۹,۱۰$$

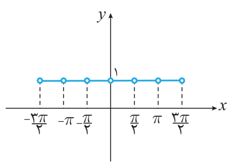
چون باید مضارب ۶ را از این مجموعه اعداد، حذف کنیم، اعداد ۰ و ۶ و ۶- از این مجموعه حذف می‌شوند و تعداد اعداد باقی‌مانده برابر $۲۱-۳=۱۸$ خواهد بود. یعنی دامنه‌ی تابع مجموعه‌ای ۱۸ عضوی است.

۳۴۲. ۱ ۲ ۳ ۴

برای تعیین دوره‌ی تناوب تابع f باید دقت شود که ضابطه‌ی تابع f به صورت مقابل است:

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\neq \frac{k\pi}{۲} \\ \text{تعریف نشده} & x=\frac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f مطابق شکل است و دوره‌ی تناوب آن برابر $T_{۱}=\frac{\pi}{۲}$ است. (زیرا نمودار آن در فواصلی به طول $\frac{\pi}{۲}$ تکرار می‌شود.)



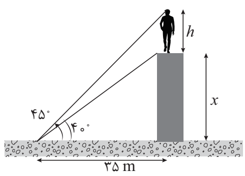
برای تعیین دوره‌ی تناوب تابع g باید ابتدا ضابطه‌ی تابع را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسیم، سپس دوره‌ی تناوب آن را تعیین کنیم.

$$g(x)=\tan ۲x-\frac{۱}{\tan ۲x}=\tan ۲x-\cot ۲x=-۲\cot ۴x$$

$$\Rightarrow T_{۲}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow T_{۱}+T_{۲}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$$

۳۴۳. ۱ ۲ ۳ ۴

ارتفاع مجسمه را h و ارتفاع پایه‌ی آن را x در نظر می‌گیریم:



$$\frac{x}{۳۵}=\tan ۴۰^{\circ}$$

$$\frac{h+x}{۳۵}=\tan ۴۵^{\circ} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow x=۳۵\times ۰/۸=۲۸\xrightarrow{(*)}\frac{h+۲۸}{۳۵}=۱\Rightarrow h=۷m$$

۳۴۴. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=\sin\theta \qquad , \qquad \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta \qquad , \qquad \sin(۳\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\frac{\sin\theta-(-\cos\theta)}{\sin\theta-(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cot\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\tan\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۰/۴}=۳$$

۳۴۵. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos(۲۸۵^{\circ})=\cos(۲۷۰^{\circ}+۱۵^{\circ})=\sin ۱۵^{\circ}$$

$$\sin(۲۵۵^{\circ})=\sin(۲۷۰^{\circ}-۱۵^{\circ})=-\cos ۱۵^{\circ}$$

$$\sin(۵۲۵^{\circ})=\sin(۵۴۰^{\circ}-۱۵^{\circ})=\sin ۱۵^{\circ}$$

$$\sin(۱۰۵^{\circ})=\sin(۹۰^{\circ}+۱۵^{\circ})=\cos ۱۵^{\circ}$$

$$\frac{\sin ۱۵^{\circ}-(-\cos ۱۵^{\circ})}{\sin ۱۵^{\circ}-\cos ۱۵^{\circ}}=\frac{\sin ۱۵^{\circ}+\cos ۱۵^{\circ}}{\sin ۱۵^{\circ}-\cos ۱۵^{\circ}}=\frac{\frac{\sin ۱۵^{\circ}+\cos ۱۵^{\circ}}{\cos ۱۵^{\circ}}}{\frac{\sin ۱۵^{\circ}-\cos ۱۵^{\circ}}{\cos ۱۵^{\circ}}}$$

$$=\frac{\tan ۱۵^{\circ}+۱}{\tan ۱۵^{\circ}-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

۳۴۶. ۱ ۲ ۳ ۴

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \underbrace{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}_{۱}-\underbrace{۲\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin ۲\alpha}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

۳۴۷. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۱+۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-۱}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

$$=\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})=-\cot\frac{\alpha}{۲}=-\frac{۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}}=-\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲$$

۳۴۸. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \alpha=\beta+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۲\alpha=۲\beta+\frac{\pi}{۲}$$

$$\sin(۲\alpha)=\sin(۲\beta+\frac{\pi}{۲})=\cos ۲\beta=\frac{۱-\tan^{۲}\beta}{۱+\tan^{۲}\beta}$$

$$=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۳}{۵}$$

۳۴۹. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\tan\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1\Rightarrow-\sqrt{3}(-\cos x)=1\Rightarrow\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\cos 2x=2\cos^2 x-1=2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

۳۵۰. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\frac{1}{\sin 15^\circ}-\frac{1}{\cos 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$$

$$(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ)^2=\underbrace{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}_{1}-\underbrace{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}_{\sin 30^\circ}$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

۳۵۱. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=-2\cot x=-\frac{2}{\tan x}=-\frac{2}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{2}$$

۳۵۲. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=1\Rightarrow-2\cot x=1\Rightarrow\cot x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\tan x=-2\Rightarrow\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(-2)}{1-4}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

۳۵۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x\quad,\quad\sin 2x=2\sin x\cos x$$

$$2\sin x\cos x+\sin x=0\Rightarrow\sin x(2\cos x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=0,\pi,2\pi\\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب ها}}0+\pi+2\pi+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=5\pi$$

۳۵۴. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3}\Rightarrow\tan 2x=\sqrt{3}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

۳۵۵. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1\Rightarrow 2\cos^2 x-1+2\cos^2 x=0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x=1\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\cos x=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۳۵۶. **۱** ۲ ۳ ۴

$$2\sin^2 x+3\cos x=0\Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\xrightarrow{\Delta=25}\cos x=\frac{3\pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{2},2\xrightarrow{\cos x=2\ \text{قابل قبول نیست}}\cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

۳۵۷. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin(\pi+x)=-\sin x\quad,\quad\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x$$

$$(-\sin x)(-\sin x)-2\sin x+1=0\Rightarrow\sin^2 x-2\sin x+1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x-1)^2=0\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۳۵۸. ۱ ۲ **۳** ۴

$$2\cos 2x=\cot x(4\sin x+\tan x)$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x=\frac{\cos x}{\sin x}(4\sin x+\frac{\sin x}{\cos x})\Rightarrow 2\cos 2x=4\cos x+1$$

$$\Rightarrow 2(2\cos^2 x-1)-4\cos x-1=0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x-4\cos x-3=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=64}\cos x=\frac{4\pm 8}{8}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=1.5 & \text{غ ق ق}\\ \cos x=-0.5\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

۳۵۹. ۱ ۲ ۳ **۴**

برای یافتن تعداد ریشه‌ها (تقاطع با محور xها) معادله $y=0$ را حل می‌کنیم:

$$3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0$$

$$\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\Rightarrow\frac{\pi}{4}-2x=k\pi\Rightarrow 2x=-k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\xrightarrow{x\in[-\pi,\frac{3\pi}{2}]}-\pi\le-\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\le\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow-1\le-\frac{k}{2}+\frac{1}{8}\le\frac{3}{2}\Rightarrow-\frac{9}{8}\le-\frac{k}{2}\le\frac{11}{8}$$

$$\Rightarrow-\frac{11}{4}\le k\le\frac{9}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=-2,-1,0,1,2\to\text{۵ مقدار}$$

۳۶۰. ۱ ۲ **۳** ۴

بیش‌ترین مقدار تابع زمانی اتفاق می‌افتد که $\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)=-1$ باشد:

$$\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)=-1\Rightarrow\frac{\pi}{4}-3\pi x=2k\pi+\pi$$

$$\Rightarrow 3\pi x=-2k\pi-\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=-\frac{2k}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{x\in[-1,1]} -1\le -\frac{2k}{3}-\frac{1}{4}\le 1 \Rightarrow -\frac{3}{4}\le -\frac{2k}{3}\le \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{15}{8}\le k\le \frac{9}{8} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=-1,0,1 \to$$ ۳ مقدار

۳۶۱. **۱** ۲ ۳ ۴

از تغییر متغیر $x+\frac{\pi}{4}=\alpha$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $x-\frac{\pi}{4}=\alpha-\frac{\pi}{2}$ است:

$$\cos\alpha\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}\Rightarrow \cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ \text{یا} \\ 2\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=k\pi+\frac{\pi}{12}\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6} \\ \text{یا} \\ \alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{5\pi}{12}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۳۶۲. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sin 2x(\sin x+\cos x)=\cos 2x(\cos x-\sin x)$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos x-\sin x)$$

$$=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)^2$$

$$\Rightarrow (\cos x+\sin x)((\cos x-\sin x)^2-2\sin x\cos x)=0$$

$$\Rightarrow (\cos x+\sin x)(\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}-\underbrace{4\sin x\cos x}_{2\sin 2x})=0$$

$$\begin{cases} \cos x=-\sin x\Rightarrow \tan x=-1\xrightarrow{x\in[0,\pi]} x=\frac{3\pi}{4} \\ 2\sin 2x=1\Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}\xrightarrow{2x\in[0,2\pi]} 2x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6} \\ \Rightarrow x=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب ها}} \frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

۳۶۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=1\Rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x}=1\xrightarrow{\sin x\neq 0}$$

$$\sin 3x=\sin x\Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+x \\ 3x=2k\pi+\pi-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi\Rightarrow x=k\pi \\ 4x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

با توجه به فرض $\sin x\neq 0$ مجموعه جواب $x=k\pi$ قابل قبول نیست.

۳۶۴. **۱** ۲ ۳ ۴

$$2\cos^2 x+2\sin x\cos x=1\Rightarrow \underbrace{2\cos^2-1}_{\cos 2x}=\underbrace{-2\sin x\cos x}_{-\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \cos 2x=-\sin 2x\Rightarrow \cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x\Rightarrow 2k\pi+\frac{\pi}{2}=0 \quad \text{غ ق ق} \\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x\Rightarrow 4x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

۳۶۵. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{\sin 3x+\sin 2x}{1+\cos x}=0\xrightarrow{1+\cos x\neq 0}\sin 3x+\sin 2x=0$$

$$\Rightarrow \sin 3x=-\sin 2x=\sin(2x+\pi)$$

$$\begin{cases} 3x=2k\pi+2x+\pi\Rightarrow x=2k\pi+\pi \\ \text{یا} \\ 3x=2k\pi+\pi-2x-\pi\Rightarrow 5x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

با توجه به فرض $1+\cos x\neq 0$ یا $\cos x\neq -1$ مجموعه جواب $x=2k\pi+\pi$ قابل قبول نیست.

۳۶۶. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sin 5x+\sin 4x=1+\cos\pi=1+(-1)=0$$

$$\Rightarrow \sin 5x=-\sin 4x=\sin(\pi+4x)$$

$$\begin{cases} 5x=2k\pi+\pi+4x\Rightarrow x=2k\pi+\pi\xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\pi \\ \text{یا} \\ 5x=2k\pi+\pi-(\pi+4x)\Rightarrow 9x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{9} \\ \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} \end{cases}$$

$$x=0,\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{6\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{10\pi}{9},\frac{12\pi}{9},\frac{14\pi}{9},$$
$$\frac{16\pi}{9},\frac{18\pi}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب ها}} \frac{2\pi(1+2+3+\cdots+9)}{9}+\pi$$

$$=\frac{2\pi\times\frac{9\times 10}{2}}{9}+\pi=11\pi$$

۳۶۷. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\cos 3x+\cos x=0\Rightarrow \cos 3x=-\cos x=\cos(\pi+x)$$

$$\begin{cases} 3x=2k\pi+\pi+x\Rightarrow 2x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ 3x=2k\pi-\pi-x\Rightarrow 4x=2k\pi-\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

با توجه به فرض $\cos x \neq ۰$ مجموعه جواب $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ قابل قبول نیست. همچنین دقت کنید که مجموعه جواب‌های $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}$ و $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ یکسان هستند. (وسط ۴ ناحیه)

.۳۶۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲(\frac{۵\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow (\sin^۲ x - \cos^۲ x)\underbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}_{۱} = (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^۲ x - \cos^۲ x}_{-\cos ۲x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

.۳۶۹ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\underbrace{\sin^۲ x - \cos^۲ x}_{-\cos ۲x} = \underbrace{\sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)}_{-\cos x} \Rightarrow \cos ۲x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \\ \text{یا} \\ ۲x = ۲k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

دقت کنید که اجتماع این دو مجموعه همان $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ است.

.۳۷۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \tan ۳x - \cot ۳x = -۲\cot ۶x = ۲\tan(\frac{\pi}{۲} + ۶x)$$

$$\xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}} T = \frac{\pi}{|۶|} = \frac{\pi}{۶}$$

.۳۷۱ **۱** ۲ ۳ ۴

دوره‌ی تناوب تابع $T = ۴\pi$ است:

$$\frac{۲\pi}{|m|} = ۴\pi \Rightarrow |m| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$f(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos(\pm\frac{۸\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳})$$

$$= \frac{۱}{۲} + ۲\cos(\frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

تذکر

دقت کنید که $\cos(x) - \cos(-x)$

.۳۷۲ **۱** ۲ ۳ ۴

حداکثر مقدار تابع $|a|$ است، پس: $|a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$

با توجه به صعودی بودن تابع بلافاصله بعد از صفر $a = ۲$ صحیح است.

ضمناً دوره‌ی تناوب تابع $T = ۶$ است: $\frac{۲\pi}{|\pi b|} = ۶ \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۳}$

با توجه به صعودی بودن تابع بلافاصله بعد از صفر، $b = \frac{۱}{۳}$ صحیح است.

پس $a + b = \frac{۷}{۳}$

تذکر

$a = -۲$ و $b = -\frac{۱}{۳}$ هم صحیح هستند، چون:

$$-۲\sin(-\frac{\pi}{۳}x) - ۲\sin(\frac{\pi}{۳}x)$$

.۳۷۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$f(۰) = ۳$ است، پس: $a + \sin b\pi x = ۳ \xrightarrow{x=۰} a = ۳$

دوره‌ی تناوب تابع $T = ۵ - ۱ = ۴$ است:

$$۴ = \frac{۲\pi}{|\pi b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲}$$

با توجه به نزولی بودن تابع بلافاصله بعد از صفر، $b = -\frac{۱}{۲}$ صحیح است.

$$f(\frac{۲۵}{۳}) = ۳ + \sin(-\frac{\pi}{۲}(\frac{۲۵}{۳})) = ۳ - \sin(\frac{۲۵\pi}{۶})$$

$$= ۳ - \sin(\frac{۲۴\pi}{۶} + \frac{\pi}{۶}) = ۳ - \sin(\frac{\pi}{۶}) = ۳ - \frac{۱}{۲} = ۲/۵$$

.۳۷٤ ۱ ۲ ۳ **۴**

حداکثر مقدار تابع $a + |-۲| = a + ۲$ است، پس:

$$a + ۲ = ۱ \Rightarrow a = -۱$$

دوره‌ی تناوب تابع $T = \frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳}$ است، پس:

$$\frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

با $b = ۳$ حاصل $a + b = ۲$ در گزینه‌ی ۴ آمده است.

.۳۷۵ ۱ ۲ **۳** ۴

حداقل مقدار تابع $|a|+۱$ است. پس:

$$۱ - |a| = -۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

با توجه به دوره‌ی تناوب تابع $(۲T = \frac{۴}{۳})$ داریم:

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow b = \pm ۳$$

با توجه به صعودی بودن تابع بلافاصله بعد از صفر $(a = ۲ , b = ۳)$ یا $(a = -۲ , b = -۳)$ صحیح است. با مقادیر مثبت $a + b = ۵$ در گزینه‌ی ۳ آمده است.

.۳۷٦ **۱** ۲ ۳ ۴

حداکثر مقدار تابع $a + |b|$ است، پس: $a + |b| = ۴$

با توجه به صعودی بودن تابع بلافاصله بعد از صفر، $b < ۰$ است، پس: $a - b = ۴$ است. حداقل مقدار تابع $a - |b|$ است، پس: $a + b = ۰$

$$\begin{cases} a + b = ۰ \\ a - b = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۲ \end{cases}$$

۳۷۷. ۱ **۲** ۳ ۴

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-\tan(\frac{\pi}{۴})=-۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\sin(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(۴\pi-\frac{۳\pi}{۴})=\cos(-\frac{۳\pi}{۴})=\cos(\frac{۳\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

۳۷۸. ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا ضابطه‌ی تابع را به شکل $y=۱+\frac{a}{۲}\sin ۲bx$ می‌نویسیم. حال دقت کنید که حداکثر مقدار تابع $\frac{۳}{۲}$ است:

$$۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow |a|=۱\Rightarrow a=\pm۱$$

ضمناً دوره‌ی تناوب تابع با توجه به نمودار برابر $T=\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi$ است:

$$\frac{۲\pi}{|۲b|}=\pi\Rightarrow |b|=\pm۱$$

با توجه به این که نمودار تابع در عرض از مبدأ، صعودی است، ab مثبت است:

$$\begin{cases}a=۱\\ b=۱\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}a=-۱\\ b=-۱\end{cases}$$

با مقادیر مثبت $a+b=۲$ در بین گزینه‌هاست.

۳۷۹. **۱** ۲ ۳ ۴

$$\sin^{۳}x+\cos^{۳}x=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$\Rightarrow(\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}_{۱}-\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲x})$$

$$=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x\Rightarrow(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)$$

$$=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x\Rightarrow(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)(\sin x+\cos x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۰\Rightarrow\sin ۲x=۲\Rightarrow \text{جواب ندارد}\\ \sin x+\cos x-۱=۰\ (*)\Rightarrow\sin x+\cos x=۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}}\underbrace{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}_{۱}+۲\sin x\cos x=۱$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x=۰\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=۰\,,\,\pi\,,\,۲\pi\\ \cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\,,\,\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

دقت کنید که فقط ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ و ۲π ریشه‌های (*) هستند و بقیه ریشه‌های زائد هستند که به خاطر توان دو رساندن ایجاد شدند. پس مجموع ریشه‌ها برابرند با: $۰+\frac{\pi}{۲}+۲\pi=\frac{۵\pi}{۲}$

۳۸۰. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sqrt{۱+\tan^{۲}x}\,(۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}-\sin^{۲}x)=\sqrt{\frac{۱}{\cos^{۲}x}}\,(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}-\sin^{۲}x)$$

$$=\frac{۱}{|\cos x|}(۱-\sin^{۲}x)=\frac{۱}{|\cos x|}.\cos^{۲}x$$

$$\xrightarrow{x\in(\pi,\frac{۳\pi}{۲})}\frac{-۱}{\cos x}.\cos^{۲}x=-\cos x$$

۳۸۱. ۱ ۲ **۳** ۴

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۳}=\sin(۶\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin(-\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos\frac{۱۷\pi}{۶}=\cos(۲\pi+\frac{۵\pi}{۶})=\cos\frac{۵\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۱۹\pi}{۴}=\tan(۵\pi-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin\frac{۱۱\pi}{۶}=-\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=-\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin\frac{۱۷\pi}{۳}\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$$

$$=(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})-۱(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۳۸۲. ۱ ۲ **۳** ۴

حداکثر مقدار تابع $\sqrt{۳}$ است، پس: $a+|b|=\sqrt{۳}$

اگر تابع سینوس را در نظر بگیرید که $\frac{\pi}{۳}$ به سمت چپ منتقل شده باشد، در عرض از مبدأ صعودی خواهد بود. لذا b عددی مثبت است. پس:

$$a+b=\sqrt{۳}$$

ضمناً تابع از نقطه‌ی $(\pi\,,\,-\frac{۳}{۲})$ عبور می‌کند.

$$-\frac{۳}{۲}=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=-\frac{۳}{۲}$$

از تفاضل دو معادله داریم:

$$b+\frac{\sqrt{۳}}{۲}b=\sqrt{۳}+\frac{۳}{۲}\Rightarrow b(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۳}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})\Rightarrow b=\sqrt{۳}$$

۳۸۳. ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x\Rightarrow ۴\sin x(-\cos x)=۱$$

$$\Rightarrow -۲\sin ۲x=۱\Rightarrow\sin ۲x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\\ ۲x=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}$$

k	۱	۲
x	$\frac{۱۱\pi}{۱۲}$	$\frac{۲۳\pi}{۱۲}$

k	۱	۲
x	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\frac{۱۹\pi}{۱۲}$

پس مجموع جواب‌ها برابرند با:

$$\frac{11\pi}{12}+\frac{23\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}+\frac{19\pi}{12}=\frac{60\pi}{12}=5\pi$$

۳۸۴. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\tan\frac{17\pi}{6}=\tan(3\pi-\frac{\pi}{6})=\tan(-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{11\pi}{3}=\sin(4\pi-\frac{\pi}{3})=\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos(4\pi-\frac{2\pi}{3})=\cos(-\frac{2\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{17\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{3}+\cos\frac{10\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

۳۸۵. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\tan x-\cot x=-2\cot 2x$، پس:

$$\tan\pi x-\cot\pi x=-2\cot 2\pi x$$

دوره تناوب این تابع برابر است با: $T=\frac{\pi}{|2\pi|}=\frac{1}{2}$

۳۸۶. ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$، پس:

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin^2 2x=1\Rightarrow \sin 2x=\pm 1$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}$$

$x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $=4\pi$

۳۸۷. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}(\frac{1}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}\times\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$

$$=\frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}}\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

می‌دانیم در ناحیه‌ی دوم $(\frac{\pi}{2}<x<\pi)$ مقدار کسینوس منفی است:

$$=-\frac{\tan x.\cos^3 x}{\sin x}=-\frac{\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^3 x}{\sin x}=-\cos^2 x$$

۳۸۸. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)=\sin(4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)=\cos(4\pi-\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$=\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{3\pi}{2})=-\cot\alpha$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{3\pi}{2})$$

$$=\cos\alpha(-\sin\alpha)-(-\cot\alpha)=-\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\cot\alpha$$

می‌دانیم $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$، پس:

$$-\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\cot\alpha=-\frac{1}{2}\times\frac{2(\frac{4}{3})}{1+(\frac{4}{3})^2}+\frac{1}{\frac{4}{3}}=-\frac{12}{25}+\frac{3}{4}$$

$$=-0.48+0.75=0.27$$

۳۸۹. ۱ ۲ ۳ ۴

ضابطه‌ی تابع را به شکل $y=a+b\sin x$ می‌نویسیم. حداکثر مقدار تابع ۳ است، پس: $a+|b|=3$

با توجه به این که تابع در عرض از مبدأ صعودی است، $b>0$ است، پس:

$$a+b=3\quad(*)$$

ضمناً $-\frac{5\pi}{6}$ ریشه‌ی تابع است:

$$a+b\sin(-\frac{5\pi}{6})=0\Rightarrow a-\frac{b}{2}=0\Rightarrow b=2a$$

$$\xrightarrow{(*)} 3a=3\Rightarrow a=1\Rightarrow b=2$$

مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{6}$ برابر است با: $a+b\sin\frac{\pi}{6}=a+\frac{b}{2}=2$

۳۹۰. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos 3x=-\cos x\Rightarrow \cos 3x=\cos(x-\pi)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+x-\pi\Rightarrow 2x=2k\pi-\pi\\3x=2k\pi-x+\pi\Rightarrow 4x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{2}\\x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

با توجه به فرض $\cos x\neq 0$ جواب $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ مورد قبول نیست.

پس $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ صحیح است.