مجموعه، الگو و دنباله

پاسخ تشریحی: فرهاد حامی - فرزانه دانایی

راهبرد حل تیپ (۱)

[۱] هر عدد اعشاری متناوب، عددی گویاست؛ مانند: $۰/\overline{۲}$ ، $۰/۲\overline{۵}$.

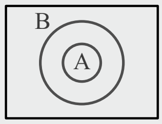
[۲] نماد $\in$ برای عضویت و نماد $\notin$ برای عدم عضویت اعضای یک مجموعه استفاده می‌شود. همچنین نماد $\subseteq$ برای زیرمجموعه بودن یک مجموعه استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال:

$A=\{a\,,b\,,c\}$

$a\in A$ ، $d\notin A$

$\{a\}\subseteq A$ ، $\{a\,,c\}\subseteq A$

[۳] اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه:



$A\bigcap B=A$

$A\bigcup B=B$

$A-B=\varnothing$

بنابراین برای مجموعه‌های $N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$، برای اشتراک، مجموعه‌ی سمت چپ و برای اجتماع، مجموعه‌ی سمت راست خواهد بود، یعنی:

$N\subseteq W\Rightarrow N\bigcap W=N$ ، $N\bigcup W=W$

$Z\subseteq Q\Rightarrow Z\bigcap Q=Z$ ، $Z\bigcup Q=Q$

✵ تذکر: در اعمال بر روی مجموعه‌ها، حتماً به پرانتزها توجه کنید. ابتدا باید عملیات داخل پرانتزها را انجام دهید.

۱. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): درست است، زیرا π یک عدد گنگ است که مجموع آن با یک عدد گویا، همچنان گنگ است و عضو اعداد گویا (Q) نیست.

گزینه‌ی (۲): درست است، زیرا حاصل عبارت برابر با $-۰/۴+۱\frac{۲}{۵}=-۰/۴+۱/۴=۱$ است که عددی طبیعی است.

گزینه‌ی (۳): درست است، زیرا حاصل عبارت برابر با $\sqrt{۸}-۲\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}=۰$ است که عددی حسابی است.

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا $\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۹}=۰/۳۳۳...$ عددی گویاست.

۲. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا $\sqrt{۳}+۵$ عددی گنگ است و همچنین داریم: $R-Q=Q'$، بنابراین: $\sqrt{۳}+۵\in(R-Q)$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا $-\frac{۳}{۴}$ عددی گویاست و عضو مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) یا مجموعه‌ی اعداد گنگ (Q') نیست، بنابراین: $-\frac{۳}{۴}\notin(Z\bigcup Q')$

گزینه‌ی (۳): درست است، زیرا $۰/\overline{۶}$ یک عدد اعشاری متناوب است که عضو مجموعه‌ی اعداد گویاست و مجموع آن با عدد گویای $\frac{۲}{۳}$ نیز همچنان گویاست، همچنین داریم: $Q\bigcap R=Q$، بنابراین:

$$۰/\overline{۶}+\frac{۲}{۳}\in(Q\bigcap R)$$

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا دو عضو $\sqrt{۱}=۱$ و $\sqrt{۴}=۲$ از مجموعه‌ی $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}$ اعداد طبیعی هستند، پس مجموعه‌ی $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}$ نمی‌تواند زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی اعداد گنگ باشد، بنابراین:

$$\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}\not\subset Q'$$

۳. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): $R\bigcap Z=Z$

$Q\not\subset Z$، پس گزینه‌ی (۱) نادرست است.

گزینه‌ی (۲): $Z\subset Q\Rightarrow Z\bigcup Q=Q$

$Q\not\subset W$، پس گزینه‌ی (۲) نادرست است.

گزینه‌ی (۳): $W\subset Q\Rightarrow Q\bigcap W=W$

که $W\subset Z$، پس رابطه درست است.

گزینه‌ی (۴): $Q\subset R\Rightarrow R\bigcap Q=Q$

اما Q و Q' اشتراکی ندارند، پس $Q\not\subset Q'$.

۴. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): $W-N=\{۰\}$

بنابراین:

$W-(W-N)=W-\{۰\}=\{۱\,,۲\,,۳\,,...\}=N$

گزینه‌ی (۲): Q' مجموعه‌ی اعداد گنگ است. از آنجایی که N و Q' با هم اشتراکی ندارند، پس:

$N-Q'=N$

گزینه‌ی (۳): $W\subset Z\Rightarrow W\bigcap Z=W$

$\Rightarrow(W\bigcap Z)-\{۰\}=W-\{۰\}=N$

گزینه‌ی (۴): $N\subset W\Rightarrow W\bigcup N=W$

۵. گزینه‌ی ۲

گزینه‌ی (۱): $(Z-N)\bigcup W$

$=\{۰,-۱,-۲,-۳,...\}\bigcup\{۰,۱,۲,...\}=Z$

گزینه‌ی (۲): $(Z-N)\bigcap W$
$=\{۰,-۱,-۲,-۳,...\}\bigcap\{۰,۱,۲,...\}=\{۰\}$

گزینه‌ی (۳): $N\bigcap(Q'-R)=N\bigcap\varnothing=\varnothing$

گزینه‌ی (۴): $(Q'-N)\bigcup Q=Q'\bigcup Q=R$

۶. گزینه‌ی ۱

از آنجا که $C-A=\varnothing$ است، می‌توان نتیجه گرفت:

$$C\subseteq A$$

در بین مجموعه‌های W ، Z و Q'، مجموعه‌ی W زیرمجموعه‌ی Z است، بنابراین:

$$A=Z\,,\,C=W$$

لذا:

$$B=Q'$$

بنابراین داریم:

$$A-(B\bigcup C)=Z-(Q'\bigcup W)=\{-۱,-۲,...\}$$

راهبرد حل تیپ (۲)

[۱] همواره به باز یا بسته بودن ابتدا و انتهای بازه توجه کنید.
[۲] اگر عدد k متعلق به بازه‌ی $(a\,,\,b)$ باشد، آنگاه:

$$a<k<b$$

۷. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): درست است، زیرا هریک از بازه‌های باز و نیم‌باز a و b، زیرمجموعه‌ی بازه‌ی بسته‌ی a و b هستند، یعنی:

$$(a\,,\,b)\subset[a\,,\,b)\subset[a\,,\,b]$$

گزینه‌ی (۲): درست است، زیرا تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.

گزینه‌ی (۳): نادرست است، زیرا عضو یک از مجموعه‌ی $\{-۲\,,\,۱\}$، متعلق به بازه‌ی $[-۳\,,\,۰)$ نیست، پس $\{-۲\,,\,۱\}\not\subset[-۳\,,\,۰)$.

گزینه‌ی (۴): درست است، زیرا دو بازه‌ی $(a\,,\,b]$ و $[a\,,\,b)$ با هم برابر نیستند.

۸. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): $۰\in(-۳\,,\,۰]$ (درست است)

گزینه‌ی (۲): $\frac{-۵}{۲}\notin\left(\frac{-۵}{۲}\,,\,۲\right]$ (درست است)

گزینه‌ی (۳): $R-(۲\,,\,۳]=(-\infty\,,\,۲]\bigcup(۳\,,+\infty)$

پس: $۲\notin(-\infty\,,\,۲]\bigcup(۳\,,+\infty)$

نادرست است.

گزینه‌ی (۴): $R-(۲\,,\,۳)=(-\infty\,,\,۲]\bigcup[۳\,,+\infty)$

$۳\in(-\infty\,,\,۲]\bigcup[۳\,,+\infty)$ (درست است)

۹. گزینه‌ی ۳

بازه‌ی $[۲n-۱\,,\,۳n+۱۴]$ شامل عدد ۵ است، بنابراین:

$$۲n-۱<۵\le ۳n+۱۴$$

نامساوی فوق را به دو نامساوی زیر، تبدیل کرده و اشتراک جواب‌هایشان را می‌یابیم:

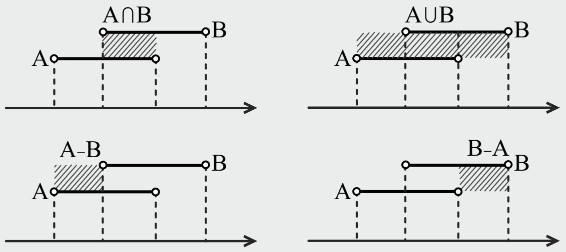
$$\Rightarrow\begin{cases}۲n-۱<۵\Rightarrow ۲n<۶\Rightarrow n<۳ & (I)\\ ۵\le ۳n+۱۴\Rightarrow -۹\le ۳n\Rightarrow -۳\le n & (II)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)\bigcap(II)}-۳\le n<۳$$

بنابراین حداقل مقدار n برابر با ۳- است.

راهبرد حل تیپ (۳)

[۱] برای انجام اعمال روی بازه‌ها، ابتدا بازه‌ها را روی محور اعداد مشخص کنید و سپس عملیات را انجام دهید.
[۲] اجتماع، اشتراک و تفاضل دو بازه در محورهای زیر، هاشور زده شده است.

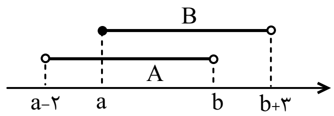


[۳] توجه کنید اگر $a<b$ باشد، آنگاه:

(۱) $(-\infty\,,\,a]\bigcup[b\,,+\infty)=R-(a\,,\,b)$
(۲) $(-\infty\,,\,a)\bigcup(b\,,+\infty)=R-[a\,,\,b]$
(۳) $(-\infty\,,\,a)\bigcup[b\,,+\infty)=R-[a\,,\,b)$
(۴) $(-\infty\,,\,a]\bigcup(b\,,+\infty)=R-(a\,,\,b]$

۱۰. گزینه‌ی ۲

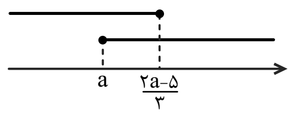
از آنجا که $a<b$ است، نمایش بازه‌های A و B روی محور اعداد به صورت زیر است:



بنابراین داریم: $A\bigcap B=[a,b)$

۱۱. گزینه‌ی ۴

نمایش هندسی دو بازه می‌تواند به صورت زیر باشد:

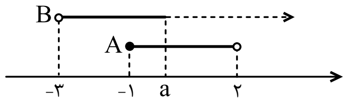


برای اینکه اشتراک دو بازه، یک مجموعه‌ی تک عضوی باشد، دو بازه فقط باید در یک نقطه اشتراک داشته باشند، بنابراین:

$$a=\frac{۲a-۵}{۳}\Rightarrow ۳a=۲a-۵\Rightarrow a=-۵$$

۱۲. گزینه‌ی ۱

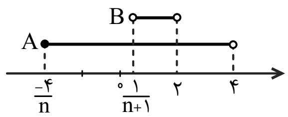
نمایش هندسی دو بازه را رسم می‌کنیم.



چون اشتراک دو مجموعه غیر تهی است، پس a باید عددی بزرگتر یا مساوی -۱ باشد؛ لذا $a \geq -۱$.

۱۳. گزینه‌ی ۱

اگر n عددی طبیعی باشد، $\frac{-۴}{n}$ عددی منفی و $\frac{۱}{n+۱}$ عددی مثبت خواهد بود، بنابراین نمایش هندسی دو بازه به صورت زیر است:



بنابراین اشتراک دو بازه برابر است با:

$$A \cap B = (\frac{۱}{n+۱}, ۲)$$

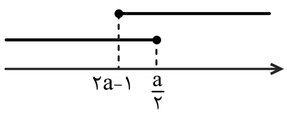
از طرفی $\frac{۱}{n+۱}$ همواره مثبت و کوچکتر یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ است، زیرا:

$$n \in N \Rightarrow n \geq ۱ \Rightarrow n+۱ \geq ۲ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{n+۱} \leq \frac{۱}{۲}$$

بنابراین در بازه‌ی $(\frac{۱}{n+۱}, ۲)$ فقط عدد صحیح یک وجود دارد.

۱۴. گزینه‌ی ۱

نمایش هندسی بازه‌ها می‌تواند به صورت زیر باشد:



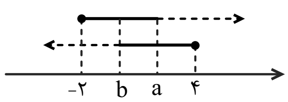
برای اینکه اجتماع دو بازه‌ی فوق برابر با مجموعه‌ی اعداد حقیقی (R) شود، باید:

$$۲a-۱ \leq \frac{a}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲a - \frac{a}{۲} \leq ۱ \Rightarrow \frac{۳a}{۲} \leq ۱ \Rightarrow a \leq \frac{۲}{۳}$$

۱۵. گزینه‌ی ۴

نمایش هندسی دو بازه را رسم می‌کنیم:

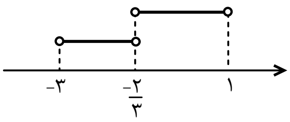


بنابراین:

$$(b,۴] \cap [-۲,a) = (\frac{-۲}{۳},۱) \Rightarrow b = \frac{-۲}{۳}, a = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b,a) = (\frac{-۲}{۳},۱) \\ (-۲a-۱,b) = (-۲\times۱-۱,\frac{-۲}{۳}) = (-۳,\frac{-۲}{۳}) \end{cases}$$

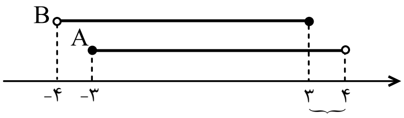
اجتماع دو بازه‌ی فوق برابر است با:



$$(-۳,\frac{-۲}{۳}) \cup (\frac{-۲}{۳},۱) = (-۳,۱) - \{\frac{-۲}{۳}\}$$

۱۶. گزینه‌ی ۱

$$A = [-۳, ۴)$$
$$B = \{x \in R \mid (-x) \in A\}$$
$$-۳ \leq -x < ۴ \Rightarrow -۴ < x \leq ۳$$
$$\Rightarrow B = (-۴, ۳]$$



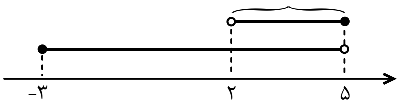
$$A - B = [-۳, ۴) - (-۴, ۳] = (۳, ۴)$$

۱۷. گزینه‌ی ۴

با مشخص کردن بازه‌ها روی محور اعداد، حاصل هر یک از عبارت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

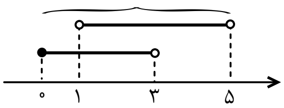
گزینه‌ی (۱):

$$[-۳,۵) \cap (۲,۵] = (۲,۵) \xrightarrow{\in N} ۳,۴$$



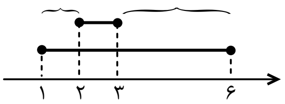
گزینه‌ی (۲):

$$[۰,۳) \cup (۱,۵) = [۰,۵) \xrightarrow{\in N} ۱,۲,۳,۴$$



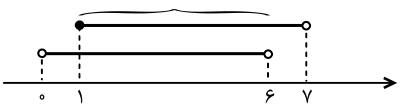
گزینه‌ی (۳):

$$[۱,۶] - [۲,۳] = [۱,۲) \cup (۳,۶] \xrightarrow{\in N} ۱,۴,۵,۶$$



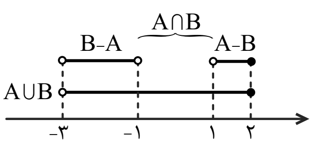
گزینه‌ی (۴):

$$(۰,۶) \cap [۱,۷) = [۱,۶) \xrightarrow{\in N} ۱,۲,۳,۴,۵$$



۱۸. گزینه‌ی ۴

ابتدا نمایش هندسی مجموعه‌های داده شده را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، مشخص است که:

$$A\cap B=[-1,1]$$

از طرفی داریم: $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

بنابراین:

$$A=(A-B)\cup(A\cap B)=(1,2]\cup[-1,1]=[-1,2]$$

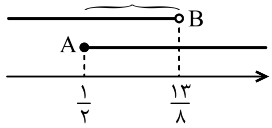
پس مجموعه‌ی A، شامل چهار عدد صحیح ۲، ۱، ۰، ۱- است.

۱۹. گزینه‌ی ۱

$$A: 3x-1\geq\frac{1}{2}\Rightarrow 3x\geq\frac{3}{2}\Rightarrow x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow A=[\frac{1}{2},+\infty)$$

$$B: 4x-\frac{3}{2}<5\Rightarrow 4x<\frac{13}{2}\Rightarrow x<\frac{13}{8}\Rightarrow B=(-\infty,\frac{13}{8})$$

$$C: x-4\leq 0\xrightarrow{x\in W}C=\{0,1,2,3,4\}$$

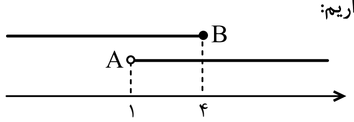


$$\Rightarrow (A\cap B)-C=[\frac{1}{2},\frac{13}{8})-\{0,1,2,3,4\}=[\frac{1}{2},\frac{13}{8})-\{1\}$$

۲۰. گزینه‌ی ۱

$A=(1,+\infty)$ و $B=(-\infty,4]$

با رسم نمودار هندسی داریم:



لذا: $A-B=(1,+\infty)-(-\infty,4]=(4,+\infty)$

$B-A=(-\infty,4]-(1,+\infty)=(-\infty,1]$

پس: $(A-B)\cup(B-A)=(4,+\infty)\cup(-\infty,1]$

$=(-\infty,1]\cup(4,+\infty)=R-(1,4]$

راهبرد حل تیپ (۴)

اگر تعداد اعضای یک مجموعه قابل شمارش باشد (هر چقدر هم که آن مجموعه بزرگ باشد)، آنگاه مجموعه متناهی است.
توجه کنید که بازه‌ی $[a,b]$ یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

۲۱. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی اعداد صحیح نابیشتر از ۱-، نامتناهی است، این مجموعه برابر است با: $\{...,-3,-2,-1\}$

همچنین مجموعه‌ی اعداد اعشاری بین ۰/۴ و ۰/۷ نامتناهی است.

مجموعه‌ی اعداد صحیح ۱۷ رقمی، مجموعه‌ای متناهی است.

مجموعه‌ی اعداد صحیح و مکعب کامل کوچکتر از ۱۰۰۰ نامتناهی است زیرا: $\{...,7^3,8^3,9^3\}$

۲۲. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): مجموعه‌ی اعداد اول زوج برابر $\{2\}$ است؛ پس متناهی است.

گزینه‌ی (۲): متناهی است.

گزینه‌ی (۳): نامتناهی است؛ زیرا بی‌شمار خط وجود دارد که از مبدأ عبور می‌کند.

گزینه‌ی (۴): متناهی است.

۲۳. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): نامتناهی است، زیرا بر یک دایره، بی‌شمار خط مماس، قابل رسم است.

گزینه‌ی (۲): بین هر دو عدد گویای دلخواه می‌توان بی‌شمار عدد گویا قرار داد، پس این مجموعه نامتناهی است.

توجه کنید که اگر a و b دو عدد گویا باشند، آنگاه $\frac{a+b}{2}$ بین a و b است.

گزینه‌ی (۳): بازه‌ی (a,b) نامتناهی است. $(b>a)$

گزینه‌ی (۴): در میان اعداد حقیقی مثبت، عددی که با معکوس خود برابر است تنها عدد ۱ است، پس این مجموعه متناهی است.

۲۴. گزینه‌ی ۱

الف- درست است. وقتی مجموعه متناهی و ناتهی است، دارای بزرگترین و کوچکترین عضو است، به عنوان مثال در مجموعه‌ی $\{-1,2,4\}$ بزرگترین عضو ۴ و کوچکترین عضو ۱- است.

ب- درست نیست. به عنوان مثال مجموعه‌ی $A=[0,2]$ نامتناهی است ولی دارای عضو ماکزیمم ۲ و عضو می‌نیمم صفر است.

۲۵. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱):

نامتناهی: $A_1=\{x\,|\,x\in N, x^2>25\}=\{6,7,8,...\}$

گزینه‌ی (۲): $A_2=\{x\,|\,$ عدد اول بزرگتر از ۱۰۰۰ $x\}$

نامتناهی: $=\{1009,1013,...\}$

گزینه‌ی (۳): $A_3=\{x\,|\,x\in N, x>9, x<100\}$

متناهی: $=\{10,11,12,...,99\}$

گزینه‌ی (۴): $A_4=\{x\,|\,$ عدد حقیقی کوچکتر از ۱۰۰ $x\}$

نامتناهی: $=(-\infty,100)$

۲۶. گزینه‌ی ۱

گزینه‌ی (۱):

متناهی: $\{x\,|\,x\in N$ و $x^2<1000\}=\{1,2,3,...,31\}$

گزینه‌ی (۲): مجموعه‌ی اعداد گویا در هر بازه‌ای نامتناهی است.

گزینه‌ی (۳): نامتناهی: $\{x\,|\,x\in N, x>53\}=\{54,55,...\}$

گزینه‌ی (۴):

نامتناهی: $\{x\,|\,x\in Z, -x\in N\}=\{...,-3,-2,-1\}$

۲۷. گزینه‌ی ۳

$$C=\{x^3\,|\,x\in N, x\leq 10\}=\{1,8,27,64,...,10^3\}$$

سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): این مجموعه نامتناهی است، چون بی‌نهایت عدد حقیقی کوچک‌تر از ۵ وجود دارد.

گزینه‌ی (۲): این مجموعه نامتناهی است، زیرا:

$$۱-x<۳\Rightarrow x>۱-۳\Rightarrow x>-۲$$
$$\Rightarrow B=\{۲,۴,۶,۸,...\}$$

گزینه‌ی (۴): این مجموعه نامتناهی است، زیرا:

$$D=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$$

۲۸. گزینه‌ی ۱

هر یک از مجموعه‌ها را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم:

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مضرب ۴ باشند ولی مضرب ۲ نباشند، برابر با تهی است، زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد، حتماً مضرب ۲ نیز خواهد بود. مجموعه‌ی تهی، متناهی است.

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبتی که در تقسیم بر ۳، باقیمانده‌ی ۱ دارند، برابر است با:

$$\{۳k+۱\,|\,k\in W\}=\{۱,۴,۷,۱۰,...\}$$

بنابراین این مجموعه نامتناهی است.

پ) مجموعه‌ی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از ۱- برابر است با: $\{۰\}$ که متناهی است.

ت) مجموعه اعداد گویایی که مربعشان با خودشان برابر است:

$$\{a\in Q\,|\,a^۲=a\}$$
$$a^۲=a\Rightarrow a^۲-a=۰\Rightarrow a(a-۱)=۰\Rightarrow a=۰,۱$$

بنابراین مجموعه‌ی فوق برابر با $\{۰,۱\}$ است که متناهی است.

۲۹. گزینه‌ی ۱

ابتدا اعضای هر یک از مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$A=\left\{n\in Z\,\middle|\,\frac{۴}{n}\in Z\right\}=\{\pm۴,\pm۲,\pm۱\}\rightarrow \text{متناهی}$$

$$B=\left\{n\in Z\,\middle|\,\frac{(-۱)^n}{n}\in Z\right\}=\{-۱,۱\}\rightarrow \text{متناهی}$$

$$C=\left\{n\in W\,\middle|\,\frac{۱}{n}<۱\right\}=\{۲,۳,۴,...\}\rightarrow \text{نامتناهی}$$

راهبرد حل تیپ (۵)

[۱] در موارد زیر، می‌توان در مورد متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ی حاصل، اظهار نظر قطعی کرد:

$\{\text{نامتناهی}\}=\{\text{هر مجموعه‌ای}\}\bigcup\{\text{نامتناهی}\}$

$\{\text{متناهی}\}=\{\text{هر مجموعه‌ای}\}\bigcap\{\text{متناهی}\}$

$\{\text{متناهی}\}=\{\text{هر مجموعه‌ای}\}-\{\text{متناهی}\}$

$\{\text{نامتناهی}\}=\{\text{متناهی}\}-\{\text{نامتناهی}\}$

$\{\text{متناهی}\}=\{\text{متناهی}\}\ \text{هر عملیاتی}\ \{\text{متناهی}\}$

در بقیه‌ی موارد نمی‌توان در حالت کلی اظهار نظر قطعی کرد.

[۲] کافی است مجموعه‌ی A، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ی A نامتناهی است.

$\{\text{نامتناهی}\}\subseteq A\Rightarrow$ A نامتناهی است.

اگر A، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی باشد، آنگاه A متناهی است.

$A\subseteq\{\text{متناهی}\}\Rightarrow$ A متناهی است.

۳۰. گزینه‌ی ۳

ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A=\left\{\frac{۱}{x}\,\middle|\,x\in N\right\}=\left\{\frac{۱}{۱},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},...\right\}$$

$$B=\left\{\frac{x}{۸}\,\middle|\,x\in N\right\}=\left\{\frac{۱}{۸},\frac{۲}{۸},\frac{۳}{۸},\frac{۴}{۸},...\right\}$$

گزینه‌ی (۱): نامتناهی: $A-B=\left\{\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۷},\frac{۱}{۹},...\right\}$

گزینه‌ی (۲): نامتناهی: $B-A=\left\{\frac{۳}{۸},\frac{۵}{۸},\frac{۶}{۸},\frac{۷}{۸},\frac{۹}{۸},\frac{۱۰}{۸},...\right\}$

گزینه‌ی (۳): متناهی: $A\bigcap B=\left\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸}\right\}$

گزینه‌ی (۴): مجموعه‌های A و B نامتناهی هستند و اجتماع هر دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

۳۱. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): نامتناهی: $W\bigcap Z=W$

گزینه‌ی (۲): نامتناهی: $R-Q'=Q$

گزینه‌ی (۳): مجموعه‌ی $Q-N$ مجموعه‌ای از اعداد گویاست که شامل اعداد طبیعی نیست و همچنان نامتناهی است.

گزینه‌ی (۴): متناهی: $N-W=\{\ \}$

۳۲. گزینه‌ی ۴

مجموعه‌ی اعداد اول: $A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد: $B=\{۱,۳,۵,۷,۹,...\}$

گزینه‌ی (۱): نامتناهی: $A\bigcup B=\{۱,۲,۳,۵,...\}$

گزینه‌ی (۲): نامتناهی: $A\bigcap B=\{۳,۵,۷,۱۱,...\}$

گزینه‌ی (۳): نامتناهی: $B-A=\{۱,۹,۱۵,۲۱,...\}$

گزینه‌ی (۴): متناهی: $A-B=\{۲\}$

۳۳. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): درست است، به‌عنوان مثال:

$$\begin{cases}A=Z\\ B=N\end{cases}\Rightarrow A\bigcap B=N\rightarrow \text{نامتناهی}$$

گزینه‌ی (۲): درست است، چون مجموعه‌های A و B نامتناهی هستند و اجتماع آن‌ها که تمام اعضای A و تمام اعضای B را شامل می‌شود، مجموعه‌ای نامتناهی است.

گزینه‌ی (۳): درست است، به عنوان مثال:

$$\begin{cases}A=\{...,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}\\ B=\{۴,۵,۶,...\}\end{cases}\rightarrow A\bigcap B=\{۴\}\rightarrow \text{متناهی}$$

گزینه‌ی (۴): نادرست است، به عنوان مثال:

$$\begin{cases} A=\{۳,۴,۵,...\} \\ B=\{۴,۵,۶,...\} \end{cases} \to A-B=\{۳\} \to \text{متناهی}$$

۳۴. گزینه‌ی ۴

می‌دانیم مجموعه‌ی اعداد اول و مجموعه‌ی اعداد زوج نامتناهی هستند و تنها عدد زوج اول عدد ۲ است که در مجموعه‌های A و B وجود ندارد. بنابراین:

$A \cap B = \varnothing$ ، $B - A = B$ و $A - B = A$

پس $A \cap B$ متناهی و $A - B$ و $B - A$ هر دو نامتناهی است.

پس گزینه‌ی «۴» نادرست است.

۳۵. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی و متناهی، همواره متناهی است، پس $A \cap B$ متناهی است.

گزینه‌ی (۲): تفاضل هر مجموعه‌ای از یک مجموعه‌ی متناهی، همواره متناهی است، پس $B - A$ متناهی است.

گزینه‌ی (۳): تفاضل یک مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره نامتناهی است، پس $A - B$ نامتناهی است.

گزینه‌ی (۴): به کمک نمودار ون می‌توان نشان داد که $(A-B)-A=\varnothing$ است که مجموعه‌ی تهی، متناهی است.

۳۶. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی A متناهی است و اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای، متناهی خواهد بود؛ بنابراین مجموعه‌ی $A \cap (B \cup C)$ متناهی است.

از آنجا که مجموعه‌ی A متناهی است، بنابراین مجموعه‌ی $A \cap C$ نیز متناهی است. مجموعه‌ی B نامتناهی است و تفاضل مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره نامتناهی خواهد بود، بنابراین مجموعه‌ی $B-(A \cap C)$ نامتناهی است.

۳۷. گزینه‌ی ۳

اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی همواره مجموعه‌ای نامتناهی نیست. به مثال زیر توجه کنید.

$A=\{x \in R | x \le ۰\}$ و $B=\{x \in R \mid x \ge ۰\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{۰\}$

۳۸. گزینه‌ی ۴

فرض کنید B مجموعه‌ی اعداد طبیعی و A مجموعه‌ی زیر باشد:

$B=\{۱,۲,۳,...\}$

$A=\{۲,۳,۴,...\}$

$\Rightarrow B-A=\{۱\}$ مجموعه‌ای متناهی است.

حال فرض کنید $B=(-۱,۲)$ و $A=(۰,۲)$ ، آنگاه:

$A \subset B$

$B-A=(-۱,۰]$

که مجموعه‌ای نامتناهی است. پس $B-A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

۳۹. گزینه‌ی ۲

مجموعه‌ی $\{x \in Z \mid x < -۲\}$ برابر است با: $\{-۳,-۴,...\}$ که یک مجموعه‌ی نامتناهی است. بنابراین مجموعه‌ی A یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی دارد، در نتیجه خود مجموعه‌ی A نیز نامتناهی است.

مجموعه‌ی $\{x \in W \mid ۱ < x < ۱۵۸\}$ برابر است با:

$\{۲,۳,...,۱۵۷\}$

که یک مجموعه‌ی متناهی است، بنابراین مجموعه‌ی B، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی است، در نتیجه خود مجموعه‌ی B نیز متناهی است.

۴۰. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، می‌تواند متناهی باشد.

$$\begin{matrix} A=\{۱,۳,۵,...\} \\ B=\{۲,۴,۶,...\} \end{matrix} \to A \cap B = \varnothing : \text{متناهی}$$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی، می‌تواند متناهی باشد. $W-N=\{۰\}$: متناهی

گزینه‌ی (۳): نادرست است، زیرا اگر $A \subset B$ و B نامتناهی باشد، A می‌تواند متناهی باشد.

$$\begin{matrix} A=\{۱,۲\} & \text{متناهی:} \\ B=\{۱,۲,۳,۴,...\} & \text{نامتناهی:} \end{matrix} \Rightarrow A \subset B \text{ و } A \text{ متناهی است.}$$

گزینه‌ی (۴): درست است، زیرا اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، الزاماً هر یک از مجموعه‌های A و B نامتناهی‌اند.

راهبرد حل تیپ (۶)

[۱] اگر U مجموعه‌ی مرجع و $A \subset U$ باشد، متمم مجموعه‌ی A برابر است با:

$A' = U - A$

[۲] برای ساده کردن عبارت‌ها، می‌توان از خواص متمم مجموعه‌ها استفاده کرد:

$(A')' = A$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

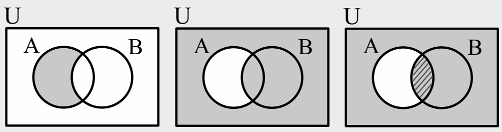
$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$A - B = A \cap B'$

[۳] اگر $A \subset B$ ، آنگاه $B' \subset A'$.

[۴] در بعضی موارد بهتر است برای به دست آوردن حاصل عبارت‌ها، از نمودار ون استفاده کرد و عملیات هر مرحله را روی آن نشان داد. به عنوان مثال:

$(A \cap B')' \cap A = (A-B)' \cap A$



$A-B$ $\quad$ $(A-B)'$ $\quad$ $(A-B)' \cap A = A \cap B$

توجه کنید که برای رسم نمودار ون دو مجموعه، آنها را در حالت کلی باید رسم کنید، یعنی دو مجموعه که در قسمتی با هم اشتراک دارند.

۴۱. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت:

$N' = Z - N = \{... , -۲ , -۱ , ۰\}$

۴۲. گزینه‌ی ۲

$W' = Z - W = \{-۱, -۲, -۳, ...\} = \{-k \mid k \in N\}$

۴۳. گزینه‌ی ۲

گزینه‌ی (۱): $-۲/۱ \notin N \Rightarrow -۲/۱ \in N'$

گزینه‌ی (۲): $۲\sqrt{۵}$ عددی گنگ است و $R - Q' = Q$. پس:

$۲\sqrt{۵} \notin (R - Q')$

گزینه‌ی (۳): $-\frac{۰/۱}{۳} = -\frac{۱}{۳۰} \in Q$

گزینه‌ی (۴): $\sqrt{۲} \notin Z \Rightarrow \sqrt{۲} \in Z'$

۴۴. گزینه‌ی ۴

$A = \{x \in N \mid x^۲ < ۱۰۰\} = \{۱,۲,۳,...,۹\}$

$A' = N - A = \{۱۰,۱۱,۱۲,...\} = \{x \in N \mid x > ۹\}$

۴۵. گزینه‌ی ۳

$A = \{x \in R \mid x > ۱\} = (۱, +\infty)$

$\rightarrow A' = R - (۱ , +\infty) = (-\infty, ۱]$

$B = \{x \in R \mid x \le -۱\} = (-\infty, -۱]$

$\rightarrow B' = R - (-\infty, -۱] = (-۱, +\infty)$

$\Rightarrow A' \cap B' = (-\infty, ۱] \cap (-۱, +\infty) = (-۱, ۱]$

۴۶. گزینه‌ی ۱

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$= \{۵ , ۶ , ۷ , ۸\} \cap \{۷ , ۸ , ۹ , ۱۰\} = \{۷ , ۸\}$

۴۷. گزینه‌ی ۳

$A = \{۸ , ۹ , ۱۰ , ...\} \Rightarrow A' = \{۱ , ۲ , ۳ , ... , ۷\}$

$B = \{۵ , ۶ , ۸\}$

$\Rightarrow A' \cup B = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸\}$

پس مجموعه‌ی $A' \cup B$، ۸ عضوی است.

۴۸. گزینه‌ی ۱

$A = \{\underline{۴} , ۵ , ۶\}$ و $B' = \{۱ , ۲ , ۳ , \underline{۴}\}$

$A - B = A \cap B' = \{۴\}$

۴۹. گزینه‌ی ۴

$A = \{۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ... , ۹۶\}$

$B = \{۴, ۱۶, ۳۶, ۶۴, ۱۰۰\}$

$A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = \{۳۶\}$

$\Rightarrow n(A - B') = ۱$

۵۰. گزینه‌ی ۲

هر چه تعداد عضوهای یک مجموعه کمتر باشد، تعداد عضوهای متمم آن مجموعه بیشتر خواهد بود. بنابراین کافی است تعداد عضوهای هر یک از مجموعه‌ها را مشخص کنیم. توجه کنید که هر یک از مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع داده شده هستند.

گزینه‌ی (۱):

اعداد فرد $= \{۱ , ۳ , ۵ , ... , ۱۹\} \rightarrow$ تعداد عضوها $= ۱۰$

گزینه‌ی (۲):

مقسوم‌علیه‌های عدد ۳ $= \{۱ , ۳\} \rightarrow$ تعداد عضوها $= ۲$

گزینه‌ی (۳):

اعداد اول $= \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\} \rightarrow$ تعداد عضوها $= ۸$

گزینه‌ی (۴): مربع کامل $= \{۱ , ۴ , ۹ , ۱۶\} \rightarrow$ تعداد اعضا $= ۴$

بنابراین تعداد عضوهای مجموعه‌ی گزینه‌ی (۲) از بقیه کمتر است، در نتیجه تعداد عضوهای مجموعه‌ی متمم آن از بقیه بیشتر خواهد بود.

۵۱. گزینه‌ی ۳

$A = \{x \in R \mid -۱ < ۲ - x \le ۵\}$

$-۱ < ۲ - x \le ۵ \xrightarrow{\times(-۱)} -۵ \le x - ۲ < ۱ \xrightarrow{+۲} -۳ \le x < ۳$

$\Rightarrow A = [-۳ , ۳)$

$B = \left\{x \in Z \,\middle|\, \frac{۲x + ۳}{x} \in W\right\}$

برای آنکه عبارت $\frac{۲x + ۳}{x} = ۲ + \frac{۳}{x}$ عضو مجموعه‌ی اعداد حسابی باشد، باید x عضوی از مجموعه‌ی زیر باشد:

$B = \{۱ , \pm ۳\}$

بنابراین: $A \cap B' = A - B$

$= [-۳ , ۳) - \{۱ , \pm ۳\} = (-۳ , ۳) - \{۱\}$

مجموعه‌ی فوق فقط شامل عدد طبیعی ۲ است.

۵۲. گزینه‌ی ۴

گزینه‌های (۱) و (۲): مجموعه‌ی نامتناهی A را اعداد طبیعی زوج فرض می‌کنیم و متمم آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد است که نامتناهی است.
حال اگر مجموعه‌ی نامتناهی A را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$A = \{۴ , ۵ , ۶ , ...\} \rightarrow A' = \{۱ , ۲ , ۳\}$

پس A' مجموعه‌ای متناهی است. بنابراین اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، ممکن است مجموعه‌ی A' متناهی یا نامتناهی باشد.
بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) در حالت کلی، درست نیستند.

گزینه‌های (۳) و (۴): اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، A' همواره نامتناهی است، زیرا مجموعه‌ی مرجع N، نامتناهی است.
در حالت کلی:

$$\underset{\text{متناهی}}{\underset{\downarrow}{A}} \subset N \;\Rightarrow\; \underset{\text{متناهی}}{\underset{\downarrow}{A}} \cup \underset{\text{نامتناهی}}{\underset{\downarrow}{A'}} = \underset{\text{نامتناهی}}{\underset{\downarrow}{N}}$$

پس گزینه‌ی (۳) نادرست و گزینه‌ی (۴) درست است.

۵۳. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱):

$$A'\cup \overbrace{\varnothing'}^{U} = A'\cup U = U$$

گزینه‌ی (۲):

$$(A\cup \underbrace{U'}_{\varnothing})\cup U = (\underbrace{A\cup\varnothing}_{A})\cup U = A\cup U = U$$

گزینه‌ی (۳):

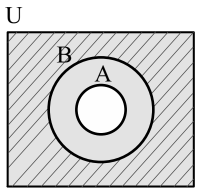
$$(\underbrace{A\cap\varnothing}_{\varnothing})\cup A' = \varnothing\cup A' = A'$$

گزینه‌ی (۴):

$$(\underbrace{A'\cap\varnothing}_{\varnothing})\cup A = \varnothing\cup A = A$$

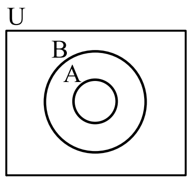
۵۴. گزینه‌ی ۴

با توجه به نمودار ون دیده می‌شود که $B'\subset A'$ است.
قسمت سایه زده شده مجموعه‌ی A' و قسمت هاشورخورده مجموعه‌ی B' را نمایش می‌دهد.



۵۵. گزینه‌ی ۳

با توجه به نمودار ون داریم:



گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا:

$$A\subset B \Rightarrow B'\subset A' \Rightarrow A'\cup B' = A'$$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا:

$$A\subset B \Rightarrow A\cup B = B$$

گزینه‌ی (۳): درست است.

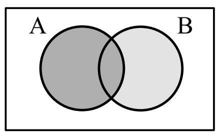
با توجه به نمودار ون، $A'\cup B = U$ است (نمودار بالا را هاشور بزنید).

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا:

$$A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$$

۵۶. گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار ون زیر، داریم:



$$A\cup(B-A) = A\cup B$$

در نتیجه متمم $A\cup(B-A)$ برابر است با:

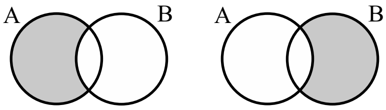
$$(A\cup B)' = A'\cap B' = A'-B$$

۵۷. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): $A\cap B' = A-B$

$A-B$ در صورتی برابر با تهی می‌شود که $A\subseteq B$ باشد که از $A\cup B = U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A\subseteq B$ است.

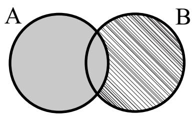
گزینه‌ی (۲):



$$A-B \neq B-A$$

در هیچ حالتی $A-B = B-A$ نیست مگر اینکه $A=B$ باشد که از $A\cup B = U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A=B$ است.

گزینه‌ی (۳): با توجه به نمودار ون زیر، داریم:



$$A' = U - A = (A\cup B) - A = B - A$$

گزینه‌ی (۴): $A'\cup B' = (A\cap B)' = U - (A\cap B)$

عبارت بالا در صورتی برابر با U می‌شود که $A\cap B = \varnothing$ باشد که از $A\cup B = U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A\cap B = \varnothing$ است.

۵۸. گزینه‌ی ۲

$$A = \{\text{شمارنده‌های اول عدد ۳۰}\} = \{۲,۳,۵\}$$

$$B = \{۲k-۱ \mid k\in A\} = \{۲\times۲-۱, ۲\times۳-۱, ۲\times۵-۱\} = \{۳,۵,۹\}$$

بنابراین:

$$A-(A\cap B') = A-(A-B)$$
$$= \{۲,۳,۵\} - (\{۲,۳,۵\} - \{۳,۵,۹\})$$
$$= \{۲,۳,۵\} - \{۲\} = \{۳,۵\} \rightarrow \text{تعداد اعضا} = ۲$$

نکته

با استفاده از نمودار ون می‌توان نشان داد:

$$A-(A-B) = A\cap B$$

۵۹. گزینه‌ی ۱

ابتدا عبارت را با استفاده از خواص متمم ساده می‌کنیم:

$$(A-B)'\cap(A\cup B)' = ((A-B)\cup(A\cup B))'$$

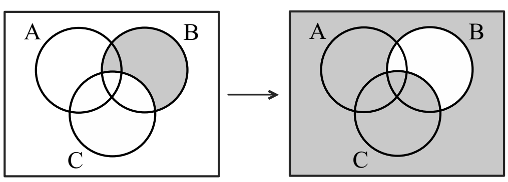
از طرفی $A-B\subset A$ و همچنین $A\subset A\cup B$ بنابراین:

$$(A-B)\subset(A\cup B)$$
$$\Rightarrow ((A-B)\cup(A\cup B))' = (A\cup B)' = M-(A\cup B)$$
$$= \{۱,۲,\ldots,۱۰\} - \{۱,۲,۳,۴,۵\} = \{۶,۷,۸,۹,۱۰\}$$

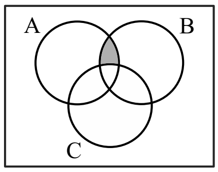
بنابراین عدد ۵ عضو مجموعه‌ی فوق نیست.

۶۰. گزینه‌ی ۲

نمودار ون را رسم می‌کنیم:



B-C (B-C)′



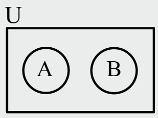
$A-(B-C)'$

بنابراین برای یافتن اعضای ناحیه‌ی سایه زده شده، کافی است مجموعه‌ی $A\cap C$ را از مجموعه‌ی $A\cap B$ کم کنیم.

$$(A\cap B)-(A\cap C)=\{a,b,c,d\}-\{b,c,e,f\}$$
$$=\{a,d\}$$

راهبرد حل تیپ (۷)

[۱] اگر اشتراک دو مجموعه، تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم (مجزا) می‌گویند و نمودار ون آنها به صورت زیر است:



[۲] برای دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B، همواره داریم:

$$\begin{cases}A-B=A\\B-A=B\end{cases}\qquad\begin{cases}A\subseteq B'\\B\subseteq A'\end{cases}$$

۶۱. گزینه‌ی ۴

$E-F=E$ است، یعنی در مجموعه‌ی E هیچ عضوی وجود ندارد که در مجموعه‌ی F نیز موجود باشد، بنابراین داریم:

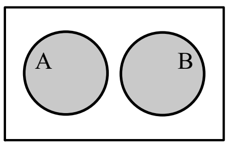
$$E\cap F=\varnothing$$

لذا، دو مجموعه‌ی مذکور هیچ اشتراکی با هم ندارند و دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

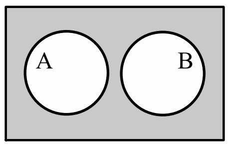
۶۲. گزینه‌ی ۴

A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، یعنی اشتراک آن‌ها تهی است. با توجه به نمودار ون زیر، $A-B=A$ و $B-A=B$ می‌شود. پس داریم:

$$((A-B)\cup(B-A))'=(A\cup B)'=A'\cap B'$$



$A\cup B$



$(A\cup B)'=A'\cap B'$

۶۳. گزینه‌ی ۱

A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، بنابراین: $A\cap B=\varnothing$

گزینه‌ی (۱): $(A\cap B)'=(\varnothing)'=U$

گزینه‌ی (۲): $A\cup B\subseteq U$

$A\cup B$ زیرمجموعه‌ی U است و لزوماً با آن برابر نیست.

گزینه‌ی (۳): $A-B=A-(A\cap B)=A-\varnothing=A$

گزینه‌ی (۴): $(A\cup B)'=U-(A\cup B)$

چون لزوماً $A\cup B=U$ نیست، بنابراین $(A\cup B)'$ لزوماً برابر با مجموعه‌ی تهی نیست.

راهبرد حل تیپ (۸)

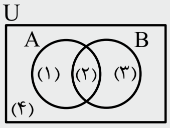
[۱] تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B برابر است با:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

همچنین رابطه‌ی زیر نیز برقرار است:

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$

[۲] از نمودار ون نیز می‌توان برای به دست آوردن تعداد اعضا استفاده کرد. به نمودار مقابل توجه کنید.



برای کامل کردن نمودار، معمولاً از اشتراک مجموعه‌ها شروع می‌کنیم.

$(۱)\rightarrow n(A-B)$ $\qquad(۲)\rightarrow n(A\cap B)$

$(۳)\rightarrow n(B-A)$ $\qquad(۴)\rightarrow n(U-(A\cup B))$

[۳] به کلمات کلیدی زیر و معادل آنها توجه کنید:

$A\cup B$	A یا B حداقل عضو یک مجموعه
$A\cap B$	A و B عضو هر دو مجموعه
$A-B$	فقط A
$(A-B)\cup(B-A)$	دقیقاً عضو یک مجموعه
$U-(A\cap B)$	حداکثر عضو یک مجموعه

۶۴. گزینه‌ی ۱

A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، پس $A\cap B=\varnothing$ و $n(A\cap B)=۰$، لذا:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\underbrace{n(A\cap B)}_{۰}$$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=۴+۹=۱۳$$

۶۵. گزینه‌ی ۴

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$n(A\cup B)\downarrow$ ۲۵، $n(A)\downarrow$ ۱۴، $n(A\cap B)\downarrow$ مخالف صفر

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B تهی نیست و اجتماع دو مجموعه ۲۵ عضو دارد، لذا مجموعه‌ی B حداکثر ۲۵ عضو می‌تواند داشته باشد و در نتیجه اشتراک A و B، حداکثر ۱۴ عضو می‌تواند داشته باشد.

۶۶. گزینه‌ی ۱

می‌دانیم A و A'، دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و $A\cup A'=U$، پس:

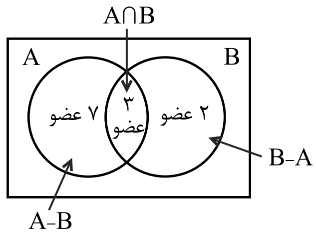
$$n(A\cup A')=n(A)+n(A')=n(U)$$
$$\Rightarrow n(U)=۱۴+۱۰=۲۴$$

از طرفی B و B' دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و $B\cup B'=U$، پس:

$$n(B\cup B')=n(B)+n(B')=n(U)$$
$$\Rightarrow n(U)=n(B)+۸=۲۴\Rightarrow n(B)=۱۶$$

۶۷. گزینه‌ی ۲

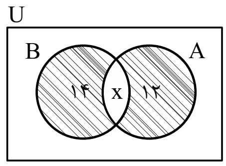
از آنجا که $A-(A\cap B)=A-B$ است، با توجه به نمودار ون زیر، خواهیم داشت:



$n(A\cup B)=۷+۳+۲=۱۲$

۶۸. گزینه‌ی ۱

نمودار ون را رسم می‌کنیم. در نمودار فرض می‌کنیم $n(A\cap B)=x$، بنابراین داریم:



$n(A-B)=$ اعضایی که در A هستند و در B نیستند

$=$ اعضایی که فقط در A هستند $=n(A)-n(A\cap B)$

به طریق مشابه:

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

با توجه به نمودار:

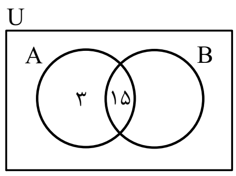
$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$

$\Rightarrow ۳۱=۱۲+۱۴+x\Rightarrow x=۵\Rightarrow n(A\cap B)=۵$

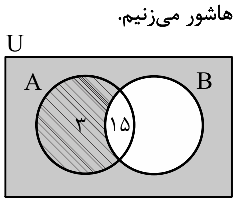
$\Rightarrow n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=۱۲+۵=۱۷$

۶۹. گزینه‌ی ۱

نمودار ون را رسم می‌کنیم. چون اشتراک A و B، ۱۵ عضو دارد، پس ۳ عضو فقط در A هستند ولی در B نیستند.



حال مجموعه‌ی $A\cap B'=A-B$ را هاشور می‌زنیم.



با توجه به نمودار $n(A\cap B')=۳$ است.

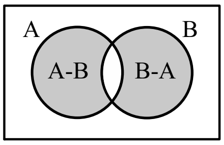
۷۰. گزینه‌ی ۱

$$n(A)=۲m, n(B)=n, n(A\cap B)=\frac{m+n}{۲}$$

$(A-B)$ و $(B-A)$ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و اشتراک آن‌ها تهی است. پس اشتراک آن‌ها عضوی ندارد.

$\Rightarrow n[(A-B)\cup(B-A)]=n(A-B)+n(B-A)$

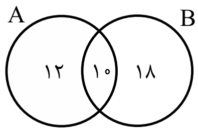
با توجه به نمودار ون زیر داریم:



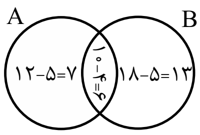
$$\begin{aligned}
&n[(A-B)\cup(B-A)]\\
&=n(A)-n(A\cap B)+n(B)-n(A\cap B)\\
&=n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)\\
&=۲m+n-۲(\frac{m+n}{۲})\\
&=۲m+n-m-n=m
\end{aligned}$$

۷۱. گزینه‌ی ۴

چون مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به‌ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند و $(A\cup B)$ دارای ۴۰ عضو است. پس $(A\cap B)$ دارای $(۴۰-۱۲-۱۸=)۱۰$ عضو است.



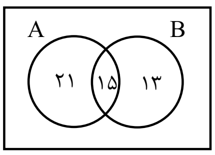
حال اگر از هر کدام از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو کم شود چون از $(A\cap B)$، ۴ عضو کم شده، پس از هر یک از مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ باید ۵ عضو کم شود.



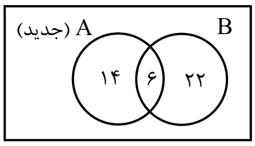
$\Rightarrow n(A\cup B)=۷+۶+۱۳=۲۶$

۷۲. گزینه‌ی ۳

نمودار ون زیر را داریم:



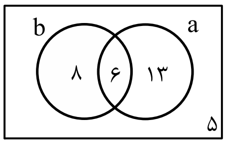
اگر ۱۶ عضو از A کم کنیم، ۹ عضو از اشتراک کم می‌شود (طبق صورت سؤال) و $(۱۶-۹=)۷$ عضو از $(A-B)$ کم می‌شود و نمودار به صورت زیر درمی‌آید.



$n(A\cup B)=۱۴+۶+۲۲=۴۲$

دقت کنید که چون B دارای ۲۸ عضو است وقتی تعداد اعضای اشتراک برابر ۶ باشد، در نتیجه، تعداد اعضای $(B-A)$ هم $۲۸-۶=۲۲$ است.

۷۳. گزینه‌ی ۲



a: درس تاریخ

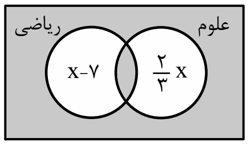
b: درس جغرافی

با توجه به نمودار، تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر است با:

$۸+۱۳+۶+۵=۳۲=$ تعداد دانش‌آموزان کلاس

۷۴. گزینه‌ی ۲

در نمودار ون زیر، کسانی که یا در هر دو درس نمره‌ی بالای ۱۵ گرفته‌اند یا در هیچ‌کدام نمره‌ی بالای ۱۵ نگرفته‌اند، در ناحیه‌ی سایه زده قرار دارند و تعداد آنها برابر با ۱۲ است، بنابراین:



$$x-۷+\frac{۲}{۳}x+۱۲=۲x$$

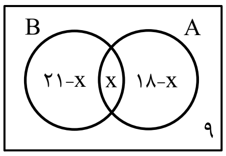
$$\Rightarrow \frac{x}{۳}=۵$$

$$\Rightarrow x=۱۵ \Rightarrow ۲x=۳۰$$

۷۵. گزینه‌ی ۴

اگر مجموعه‌ی **A** افرادی باشند که در فوق برنامه‌ی هنری و مجموعه‌ی **B** افرادی باشند که در فوق برنامه‌ی علمی شرکت کرده‌اند و تعداد کل افرادی که در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند را **x** در نظر بگیریم، داریم:

۴۰ نفر

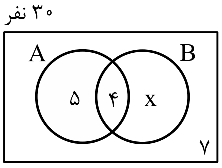


$$۴۰=(۲۱-x)+x+(۱۸-x)+۹ \Rightarrow x=۴۸-۴۰=۸$$

۷۶. گزینه‌ی ۱

اگر **A** را مجموعه‌ی افراد شرکت‌کننده در برنامه‌های پژوهشی و **B** را مجموعه‌ی افراد شرکت‌کننده در برنامه‌های پرورشی در نظر بگیریم، با توجه به نمودار ون زیر خواهیم داشت:

۳۰ نفر



$$۳۰=۵+۴+x+۷$$

$$\Rightarrow x=۳۰-۱۶=۱۴$$

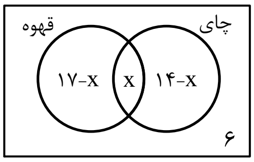
افرادی که فقط در برنامه‌های پرورشی شرکت کرده‌اند برابر با $B-A$ است، لذا:

$$n(B-A)=x=۱۴$$

۷۷. گزینه‌ی ۳

اگر **x** تعداد نفراتی باشد که هم چای نوشیده‌اند و هم قهوه، با توجه به نمودار ون زیر، خواهیم داشت:

۲۵ نفر



$$۲۵=۱۷-x+x+۱۴-x+۶ \Rightarrow ۲۵=۳۷-x$$

$$\Rightarrow x=۱۲$$

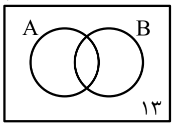
$$n_{\text{(حداکثر یک نوع نوشیدنی نوشیده‌اند)}}=n(U)-n_{\text{(هر دو نوع نوشیدنی را نوشیده‌اند)}}$$

$$=۲۵-x=۲۵-۱۲=۱۳$$

۷۸. گزینه‌ی ۴

اگر مجموعه‌ی **A** را مجموعه‌ی افراد فوتبالیست و مجموعه‌ی **B** را مجموعه‌ی افرادی والیبالیست در نظر بگیریم، داریم:

۴۰



$$n(A)=۱۳$$

$$n(B)=۱۷$$

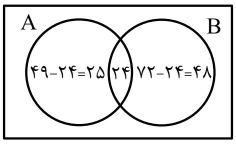
مجموعه افرادی که حداقل یکی از دو رشته را بازی می‌کنند، یعنی فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند برابر با $A\cup B$ است. بنابراین با توجه به نمودار ون بالا خواهیم داشت:

$$۴۰=n(A\cup B)+۱۳ \Rightarrow n(A\cup B)=۴۰-۱۳=۲۷$$

۷۹. گزینه‌ی ۳

نمودار ون به صورت مقابل خواهد بود:

۱۲۰

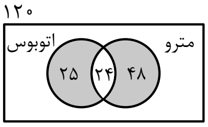


A: اتوبوس

B: مترو

مجموعه‌ی افرادی که دقیقاً از یکی از دو وسیله استفاده کرده‌اند، معادل است با مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ یعنی فقط اتوبوس یا فقط مترو که در نمودار زیر سایه زده شده است:

۱۲۰



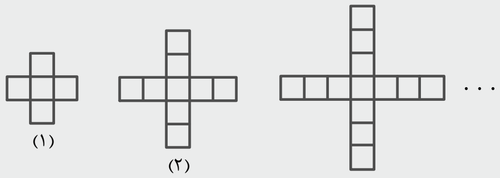
$۲۵+۴۸=۷۳=$ تعداد نفراتی که دقیقاً از یکی از دو وسیله استفاده کرده‌اند.

۸۰. گزینه‌ی ۲

۱۰ نفر تنیس روی میز، ۱۰ نفر بیلیارد و ۳ نفر مشترک بین آن‌ها هستند، پس $۱۰+۱۰-۳$ یعنی ۱۷ نفر، تنیس روی میز یا بیلیارد بازی می‌کنند.

راهبرد حل تیپ (۹)

ساده‌ترین الگو، الگوی خطی است که در هر مرحله، مقدار ثابتی به شکل‌ها اضافه می‌شود. برای یافتن الگوی خطی از روی شکل‌ها، باید تشخیص دهیم در هر مرحله، چه مقداری تغییر می‌کند و چه مقداری ثابت می‌ماند. یکی از راه‌هایی که به تشخیص این موضوع کمک می‌کند این است که سعی کنیم شکل بعدی الگو را رسم کنیم. برای مثال در الگوی زیر، برای رسم شکل چهارم، باید به هر یک از چهار طرف شکل، یک مربع اضافه کنیم.



(۱) (۲) (۳)

با توجه به شکل‌ها، مربع وسط ثابت است و در هر مرحله، به هر یک از چهار طرف شکل، یک مربع اضافه می‌شود، بنابراین جمله‌ی عمومی به صورت $t_n = ۴n+۱$ است.

۸۱. گزینه‌ی ۳

اختلاف جملات متوالی هر الگو را می‌یابیم، اگر این مقدار ثابت باشد، الگو خطی است.

گزینه‌ی (۱): $۱ , -۲ , ۱ , -۲ , \ldots$

$-۳ \quad +۳ \quad -۳$: الگو خطی نیست.

گزینه‌ی (۲): $۷ , ۱۱ , ۱۷ , ۲۵ , \ldots$

$+۴ \quad +۶ \quad +۸$: الگو خطی نیست.

گزینه‌ی (۳): $\frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۲} , \frac{۵}{۲} , \frac{۷}{۲} , \ldots$

$+۱ \quad +۱ \quad +۱$: الگو خطی است.

گزینه‌ی (۴): $۲ , ۴ , ۸ , ۱۶ , \ldots$

$+۲ \quad +۴ \quad +۸$: الگو خطی نیست.

۸۲. گزینه‌ی ۴

جمله‌ی عمومی الگوی خطی را به‌صورت $t_n = an+b$ در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} t_۳ = ۷ \\ t_۷ = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+b=۷ \\ ۷a+b=۱۵ \end{cases} \Rightarrow ۴a = ۸ \Rightarrow a=۲ , b=۱$$

در نتیجه جمله‌ی عمومی الگو به‌صورت $t_n = ۲n+۱$ است.

۸۳. گزینه‌ی ۳

فرض کنید جمله‌ی عمومی الگو $a_n = an+b$ باشد. حاصل عبارت هر یک از گزینه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

گزینه‌ی (۱): $۵a_۵ - ۴a_۳ = ۵(۵a+b) - ۴(۳a+b)$
$= ۲۵a+۵b-۱۲a-۴b = ۱۳a+b = a_{۱۳}$

گزینه‌ی (۲): $\frac{a_۸ + a_{۱۸}}{۲} = \frac{۸a+b+۱۸a+b}{۲} = \frac{۲۶a+۲b}{۲}$
$= ۱۳a+b = a_{۱۳}$

گزینه‌ی (۳): $\frac{۵a_{۲۰} - a_{۲۴}}{۴} = \frac{۵(۲۰a+b)-(۲۴a+b)}{۴}$
$= \frac{۱۰۰a+۵b-۲۴a-b}{۴} = \frac{۷۶a+۴b}{۴}$
$= ۱۹a+b = a_{۱۹} \neq a_{۱۳}$

گزینه‌ی (۴): $\frac{۵a_۸ + a_{۳۸}}{۶} = \frac{۵(۸a+b)+(۳۸a+b)}{۶}$
$= \frac{۴۰a+۵b+۳۸a+b}{۶} = \frac{۷۸a+۶b}{۶} = ۱۳a+b = a_{۱۳}$

۸۴. گزینه‌ی ۱

در هر طرح، ۴ مثلث ثابت است و سه قطعه به قطعات وسط اضافه می‌شود:

$$\begin{array}{cccccc} a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & \ldots & a_{۱۰} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ۴ & ۴+۱\times۳ & ۴+۲\times۳ & ۴+۳\times۳ & \ldots & ۴+۹\times۳=۳۱ \end{array}$$

۸۵. گزینه‌ی ۳

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	...
تعداد مربع‌ها	۵	۹	۱۳	...

$+۴ \quad +۴$

بنابراین در مرحله‌ی اول ۵ مربع داریم و با توجه به جدول در هر مرحله ۴ مربع اضافه می‌شود، پس در مرحله‌ی دهم $۴\times۱۰+۱$ یعنی ۴۱ مربع داریم.

۸۶. گزینه‌ی ۲

در طرح (۱)، ۱۰ چوب‌کبریت و در طرح (۲)، ۱۵ چوب‌کبریت و در طرح (۳)، ۲۰ چوب‌کبریت داریم، بنابراین در هر مرحله ۵ چوب کبریت اضافه می‌شود، پس فرمول کلی برای تعداد چوب‌کبریت‌ها در هر مرحله به صورت $a_n = ۵n+۵$ است، لذا:

$$۲۴۵ = ۵n+۵ \Rightarrow ۲۴۰ = ۵n \Rightarrow n = ۴۸$$

۸۷. گزینه‌ی ۱

در مرحله‌ی اول ۴ مربع، در مرحله‌ی دوم ۱۰ مربع و در مرحله‌ی سوم ۱۶ مربع داریم، بنابراین در هر مرحله ۶ مربع اضافه می‌شود. یعنی هر مرحله، شماره‌ی مرحله در ۶ ضرب می‌شود و ۲ واحد از آن کسر می‌شود، لذا در مرحله‌ی هفتم داریم:

تعداد مربع‌های کوچک مرحله‌ی هفتم $= ۶\times۷-۲ = ۴۰$

راهبرد حل تیپ (۱۰)

برای یافتن الگوی ریاضی برای شکل‌ها، ابتدا باید تشخیص دهیم الگو خطی است یا غیر خطی. اگر اختلاف شکل‌های متوالی، مقدار ثابتی نباشد، الگو غیر خطی است.

متداول‌ترین الگوی غیر خطی، الگوی درجه‌ی دوم است که معمولاً در هر شکل یک مضرب مربع $(an^۲)$ داریم و یک مقدار خطی که در هر مرحله به شکل اضافه می‌شود $(bn+c)$ که در نهایت جمله‌ی عمومی الگو به صورت $t_n = an^۲+bn+c$ خواهد بود.

یکی از الگوهای درجه‌ی دو معروف، الگوی مثلثی است که در آن تعداد شکل‌های هر مرحله برابر است با مجموع اعداد طبیعی از یک تا شماره‌ی آن مرحله.

۸۸. گزینه‌ی ۳

$$\begin{array}{cccccc} a_{۱} & a_{۲} & a_{۳} & a_{۴} & \dots & a_{۷} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ۱=۱^{۲} & ۴=۲^{۲} & ۹=۳^{۲} & ۱۶=۴^{۲} & \dots & ۷^{۲}=۴۹ \end{array}$$

در هر طرح، تعداد مثلث‌ها، مربع شماره‌ی طرح است. پس در طرح هفتم، ۴۹ مثلث داریم.

۸۹. گزینه‌ی ۲

اگر تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله‌ی nام را با a_n نشان دهیم، داریم:

$a_{۱}=۴=۲^{۲}$

$a_{۲}=۴+۱۲=۱۶=۴^{۲}$

$a_{۳}=۱۶+۲۰=۳۶=۶^{۲}$

$\vdots$

$a_n=(۲n)^{۲}$

$a_n=۱۹۶ \Rightarrow (۲n)^{۲}=۱۴^{۲} \Rightarrow ۲n=۱۴ \Rightarrow n=۷$

۹۰. گزینه‌ی ۳

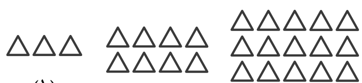
$$\begin{array}{ccc} a_{۱} & a_{۲} & a_{۳} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۲ & ۴ & ۸ \end{array}$$

با کمی دقت می‌بینیم که جمله‌ی عمومی الگو به صورت $a_n=۲^{n}$ است. پس در مرحله‌ی دوازدهم خواهیم داشت:

$a_{۱۲}=۲^{۱۲}=۴۰۹۶$

۹۱. گزینه‌ی ۴

با توجه به شکل، در هر مرحله، یک ردیف اضافه می‌شود و به هر ردیف نیز یک مثلث اضافه می‌شود، بنابراین داریم:



(۱) (۲) (۳) ... (۱۰)

تعداد مثلث‌ها: ۱×۳ $\quad ۲\times۴ \quad ۳\times۵ \quad \dots \quad ۱۰\times۱۲$

بنابراین شکل دهم از $۱۰\times۱۲=۱۲۰$ مثلث تشکیل شده است.

۹۲. گزینه‌ی ۲

در مرکز هر شکل، به تعداد مربع شماره‌ی مرحله، دایره‌ی سیاه وجود دارد و علاوه بر آن، در هر یک از چهار طرف شکل ۲ دایره‌ی سیاه (مجموعاً ۸ دایره‌ی سیاه) وجود دارد، بنابراین:

$t_n=n^{۲}+۴(۲)=n^{۲}+۸$

حال باید مقدار n ی را بیابیم که به ازای آن $t_n=۱۲۹$ شود:

$t_n=۱۲۹ \Rightarrow n^{۲}+۸=۱۲۹ \Rightarrow n^{۲}=۱۲۱ \Rightarrow n=۱۱$

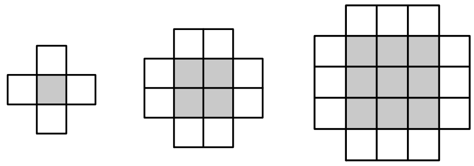
در شکل یازدهم، تعداد دایره‌های سیاه برابر ۱۲۹ می‌شود.

۹۳. گزینه‌ی ۱

در هر مرحله تعداد مربع‌های وسط، مربع شماره‌ی مرحله و تعداد مربع‌های گوشه‌ها، یک واحد بیش‌تر از شماره‌ی شکل است، یعنی جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $a_n=n^{۲}+(n+۱)$ است، پس $a_{۹}=۹^{۲}+۱۰=۹۱$.

۹۴. گزینه‌ی ۲

راه حل اول:

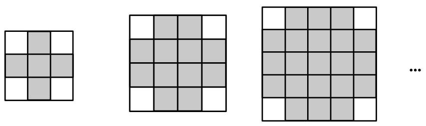


(۱)	(۲)	(۳)
۵	۱۲	۲۱
$۱^{۲}+۴(۱)$	$۲^{۲}+۴(۲)$	$۳^{۲}+۴(۳)$

با توجه به شکل، تعداد مربع‌های وسط، مربع شماره‌ی جمله و تعداد مربع‌های کناری ۴ برابر شماره‌ی جمله است، پس در شکل ششم:

تعداد مربع‌های کوچک شکل ششم $=۶^{۲}+۴(۶)=۳۶+۲۴=۶۰$

راه حل دوم: به شکل‌های زیر توجه کنید.



(۱)	(۲)	(۳)	(۶)
$۳^{۲}-۴$	$۴^{۲}-۴$	$۵^{۲}-۴$	$۸^{۲}-۴$

بنابراین در مرحله‌ی ششم، $۸^{۲}-۴=۶۰$ مربع کوچک داریم.

۹۵. گزینه‌ی ۱

$$\begin{array}{cccccc} a_{۱} & a_{۲} & a_{۳} & a_{۴} & \dots & a_{۸} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ۱ & ۱+۲ & ۱+۲+۳ & ۱+۲+۳+۴ & \dots & ۱+۲+۳+\dots+۸ \end{array}$$

پس در هر مرحله، تعداد نقطه‌ها برابر است با مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا شماره‌ی آن مرحله، بنابراین یک الگوی مثلثی داریم که جمله‌ی عمومی آن برابر است با:

$$a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow a_{۸}=\frac{۸\times۹}{۲}=۳۶$$

۹۶. گزینه‌ی ۲

$$\begin{array}{ccccc} a_{۱} & a_{۲} & a_{۳} & a_{۴} & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۱ & ۱+۲ & ۱+۲+۳ & ۱+۲+۳+۴ & \end{array}$$

تعداد دایره‌ها : ۱ $\quad$ ۱+۲ $\quad$ ۱+۲+۳ $\quad$ ۱+۲+۳+۴

تعداد دایره‌ها در شکل، الگوی مثلثی را تشکیل می‌دهند، لذا:

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}=\frac{11\times 12}{2}=66 \\ a_{12}=\frac{12\times 13}{2}=78 \end{cases} \Rightarrow 66+78=144$$

۹۷. گزینه‌ی ۴

با توجه به شکل:

	a_1	a_2	a_3	...	a_6
	↓	↓	↓		↓
نقطه	3	$3+6$	$3+6+9$		$3+6+...+18$
	↓	↓	↓		↓
	3×1	$3\times(1+2)$	$3\times(1+2+3)$		$3\times(1+2+...+6)$

بنابراین:

$$\text{شکل ششم}: a_6=3(1+2+3+4+5+6)=3\left(\frac{6\times 7}{2}\right)$$
$$=3\times 21=63$$

۹۸. گزینه‌ی ۱

تعداد دایره‌های سیاه و سفید را در هر شکل مشخص می‌کنیم:

تعداد دایره‌های سیاه :	۱	۱	۶	۶	۱۵	۱۵
تعداد دایره‌های سفید :	۰	۳	۳	۱۰	۱۰	۲۱

تعداد دایره‌های سیاه و سفید، یک در میان، جملات متوالی الگوی مثلثی هستند که تعداد دایره‌های سیاه برابر است با جملات فرد الگوی مثلثی و تعداد دایره‌های سفید برابر است با جملات زوج الگوی مثلثی، پس در شکل دهم تعداد دایره‌های سفید برابر است با جمله‌ی دهم الگوی مثلثی.

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_{10}=\frac{10\times 11}{2}=55$$

۹۹. گزینه‌ی ۴

تعداد صفرهای توپر و توخالی را در هر شکل مشخص می‌کنیم:

تعداد صفرهای توپر	۱	۱	۶	۶	۱۵	۱۵
تعداد صفرهای توخالی	۰	۳	۳	۱۰	۱۰	۲۱

تعداد صفرهای توپر و توخالی یک در میان، جملات متوالی الگوی مثلثی هستند؛ که تعداد صفرهای توپر برابر است با جملات فرد الگو و تعداد صفرهای توخالی برابر است با جملات زوج الگو. پس جمله‌ی دوازدهم الگوی مثلثی تعداد صفرهای توخالی شکل دوازدهم را نشان می‌دهد.

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_{12}=\frac{12\times 13}{2}=78$$

۱۰۰. گزینه‌ی ۴

با توجه به حل سؤال قبل، تعداد دایره‌های توپر در شکل دهم برابر با جمله‌ی نهم الگوی مثلثی و تعداد دایره‌های توپر در شکل یازدهم برابر با جمله‌ی یازدهم الگوی مثلثی است.

$$a_{11}-a_9=\frac{11\times 12}{2}-\frac{9\times 10}{2}=66-45=21$$

راهبرد حل تیپ (۱۱)

در دنباله‌ها با دو نوع سؤال مواجهایم:

(۱) چند جمله‌ی اول دنباله داده شده باشد؛ در این حالت معمولاً می‌توان یک جمله‌ی عمومی برای آن نوشت. برای این منظور باید رابطه‌ی بین جملات را بیابیم.

باید توجه داشت که همواره نمی‌توان برای همه‌ی دنباله‌های اعداد، جمله‌ی عمومی نوشت؛ مثلاً دنباله‌ی اعداد اول. از طرفی برای یک دنباله، ممکن است بتوانیم چند جمله‌ی عمومی متفاوت بنویسیم. مثلاً:

$1, 2, 4, 8, ...$

$t_n=2^{n-1}$ یا $t_n=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+2^{n-1}$

(۲) جمله‌ی عمومی دنباله داده شده باشد و ارتباط بین جملات خواسته شود؛ در این حالت، با جایگزین کردن مقادیر مناسب n در جمله‌ی عمومی، می‌توان رابطه‌ی خواسته شده را به دست آورد.

۱۰۱. گزینه‌ی ۲

$$a_n=128 \Rightarrow 2(-2)^{n+1}=128$$
$$\Rightarrow (-2)^{n+1}=64=(-2)^6 \Rightarrow n+1=6 \Rightarrow n=5$$

پس جمله‌ی پنجم برابر ۱۲۸ است.

۱۰۲. گزینه‌ی ۲

باید نامعادله‌ی $3n-13<0$ را برای $n\in N$ حل کنیم.

$$3n-13<0 \to n<\frac{13}{3}\simeq 4/3 \xrightarrow{n\in N} n\in\{1, 2, 3, 4\}$$

پس این دنباله، ۴ جمله‌ی منفی دارد.

۱۰۳. گزینه‌ی ۲

جمله‌های ردیف زوج در این دنباله مثبت‌اند، چند جمله‌ی ابتدایی با شماره‌ی فرد را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n=\frac{n}{81}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} a_1=\frac{1}{81}-\frac{1}{3}=-\frac{26}{81}<0 \\ a_3=\frac{3}{81}-\frac{1}{27}=0 \\ a_5=\frac{5}{81}-\frac{1}{243}=\frac{14}{243}>0 \\ \vdots \end{cases}$$

دیده می‌شود که جملات با ردیف فرد از جمله‌ی پنجم به بعد مثبت‌اند، بنابراین در این دنباله، فقط جمله‌ی اول منفی است.

۱۰۴. گزینه‌ی ۳

$$a_n=bn^2+cn \Rightarrow \begin{cases} a_1=b+c \\ a_2=4b+2c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3=b+c \\ 8=4b+2c \end{cases} \Rightarrow b=1, c=2$$

$$\Rightarrow a_n=n^2+2n \xrightarrow{n=10} a_{10}=(10)^2+2(10)=120$$

۱۰۵. گزینه‌ی ۲

جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{cccccc} a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ & a_۶ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{۱}{۲}, & \frac{-۲}{۳}, & \frac{۳}{۴}, & \frac{-۴}{۵}, & \frac{۵}{۶}, & \frac{-۶}{۷} \end{array}$$

بنابراین:

$$a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times a_۴ \times a_۵ \times a_۶ = \frac{۱}{۲} \times \frac{-۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{-۴}{۵} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{-۶}{۷} = \frac{-۱}{۷}$$

۱۰۶. گزینه‌ی ۲

۲۰۰ جمله‌ی اول این دنباله، ۱۰۰ جفت دوتایی به‌ترتیب زیر پدید می‌آورند. پس مجموع ۲۰۰ جمله‌ی اول این دنباله برابر ۱۰۰− است.

$$\underbrace{۱, -۲}_{-۱}, \underbrace{۳, -۴}_{-۱}, \underbrace{۵, -۶}_{-۱}, \dots, \underbrace{۱۹۹, -۲۰۰}_{-۱}$$

۱۰۷. گزینه‌ی ۴

صورت و مخرج کسرها به ترتیب اعداد طبیعی فرد و زوج متوالی هستند، اعداد طبیعی فرد و زوج متوالی را به‌ترتیب با $۲n-۱$ و $۲n$ نمایش می‌دهیم که در آن $n \in N$، پس جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $a_n = \frac{۲n-۱}{۲n}$ می‌تواند باشد.

۱۰۸. گزینه‌ی ۳

با توجه به جمله‌ی عمومی داده شده در هر گزینه، سه جمله‌ی اول مربوط به دنباله را می‌نویسیم و با سه جمله‌ی اول داده شده مقایسه می‌کنیم.

گزینه‌ی (۱): $a_n = \frac{۲n}{n+۱}$

$$\begin{cases} a_۱ = \frac{۲\times۱}{۱+۱} = \frac{۲}{۲} = ۱ \\ a_۲ = \frac{۲\times۲}{۲+۱} = \frac{۴}{۳} \\ a_۳ = \frac{۲\times۳}{۳+۱} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله}: ۱, \frac{۴}{۳}, \frac{۳}{۲}, \dots \checkmark$$

گزینه‌ی (۲): $a_n = \frac{-۱}{۲} + n$

$$\begin{cases} a_۱ = \frac{-۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲} \\ a_۲ = \frac{-۱}{۲} + ۲ = \frac{۳}{۲} \\ a_۳ = \frac{-۱}{۲} + ۳ = \frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله}: \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}, \dots \checkmark$$

گزینه‌ی (۳): $a_n = (-۳)^n$

$$\begin{cases} a_۱ = (-۳)^۱ = -۳ \\ a_۲ = (-۳)^۲ = ۹ \\ a_۳ = (-۳)^۳ = -۲۷ \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله}: -۳, ۹, -۲۷, \dots \times$$

جملات این دنباله با دنباله‌ی داده شده یکسان نیست.

گزینه‌ی (۴): $a_n = ۲^n - n^۲$

$$\begin{cases} a_۱ = ۲^۱ - ۱^۲ = ۱ \\ a_۲ = ۲^۲ - ۲^۲ = ۰ \\ a_۳ = ۲^۳ - ۳^۲ = -۱ \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله}: ۱, ۰, -۱, \dots \checkmark$$

۱۰۹. گزینه‌ی ۲

در دنباله‌ی داده شده، صورت کسر هر جمله، برابر با شماره‌ی جمله و مخرج آن برابر با مربع شماره‌ی جمله به علاوه‌ی یک است، بنابراین:

$$a_n = \frac{n}{n^۲+۱}$$

$$\Rightarrow a_۷ = \frac{۷}{۷^۲+۱} = \frac{۷}{۵۰} = ۰/۱۴$$

۱۱۰. گزینه‌ی ۱

اختلاف جملات متوالی دنباله، خود یک دنباله‌ی خطی تشکیل می‌دهند:

$$۱ \xrightarrow{+۴} ۵ \xrightarrow{+۷} ۱۲ \xrightarrow{+۱۰} ۲۲ \xrightarrow{+۱۳} ۳۵, \dots$$

$$+۴ \xrightarrow{+۳} +۷ \xrightarrow{+۳} +۱۰ \xrightarrow{+۳} +۱۳$$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی درجه‌ی دو را به‌صورت $a_n = an^۲ + bn + c$ در نظر می‌گیریم. چون اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی خطی برابر با ۳ است، پس $۲a = ۳$ در نتیجه: $a = \frac{۳}{۲}$

برای یافتن b و c، دو جمله‌ی اول دنباله را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_۱ = ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}(۱)^۲ + b(۱) + c = ۱ \Rightarrow b + c = \frac{-۱}{۲} & (۱) \\ a_۲ = ۵ \Rightarrow \frac{۳}{۲}(۲)^۲ + b(۲) + c = ۵ \Rightarrow ۲b + c = -۱ & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۲)-(۱)} b = \frac{-۱}{۲} \xrightarrow{(۱)} c = ۰$$

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله به صورت $a_n = \frac{۳}{۲}n^۲ - \frac{۱}{۲}n$ است.

$$a_{۳۰} = \frac{۳}{۲}(۳۰)^۲ - \frac{۱}{۲}(۳۰) = \frac{۱}{۲}(۳۰)(۳\times۳۰-۱)$$

$$= ۱۵(۹۰-۱) = ۱۳۳۵$$

۱۱۱. گزینه‌ی ۳

دنباله‌ی داده شده، دنباله‌ی مثلثی است و جمله‌ی nام (عمومی) دنباله‌ی مثلثی $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ است.

$$\left.\begin{array}{l} a_۷ = \frac{۷(۷+۱)}{۲} = \frac{۷\times۸}{۲} = ۲۸ \\ a_۸ = \frac{۸(۸+۱)}{۲} = \frac{۸\times۹}{۲} = ۳۶ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۸ + ۳۶ = ۶۴$$

۱۱۲. گزینه‌ی ۱

اگر جملات دنباله‌ی داده شده که دنباله‌ی مثلثی است را با هم جمع کنیم، حاصل یک دنباله‌ی مربعی خواهد بود:

مثلثی ... و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱
جمع
مربعی ۲۵ ۱۶ ۹ ۴

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی جدید $(n+۱)^۲$ است که جمله‌ی بیست و پنجم آن برابر است با $a_{۲۵}=(۲۵+۱)^۲=۲۶^۲=۶۷۶$.

راهبرد حل تیپ (۱۲)

در دنباله‌های بازگشتی، از جمله‌ای به بعد، هر جمله با جمله‌ی قبلی یا دو جمله‌ی قبلی یا ... ارتباط دارد. در دنباله‌های بازگشتی با دو نوع سؤال مواجه‌ایم:

(۱) جملات دنباله داده شده باشد: در این حالت، مهم‌ترین مطلب این است که تشخیص دهیم دنباله بازگشتی است. برای این منظور باید ببینیم آیا مجموع جملات متوالی، تفاضل جملات متوالی یا تقسیم جملات متوالی با جمله‌های بعدی ارتباط دارند یا نه. به عنوان مثال در دنباله‌ی $۱,۳,۴,۷,۱۱,۱۸,...$ از جمله‌ی سوم به بعد، هر جمله، مجموع دو جمله‌ی قبلی است.

(۲) رابطه‌ی بازگشتی داده شده باشد: در این حالت، معمولاً جمله‌ای از دنباله خواسته می‌شود. باید ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را با استفاده از رابطه‌ی داده شده بنویسیم و سپس سعی کنیم با توجه به آنها، یک جمله‌ی عمومی برای دنباله بیابیم. برای مثال:

$a_n=۵a_{n-۱}-۶a_{n-۲}$ ، $a_۱=۱$ ، $a_۲=۲$

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را به دست می‌آوریم:

$a_۳=۵\times ۲-۶\times ۱=۴$ ، $a_۴=۵\times ۴-۶\times ۲=۸$

$a_۵=۵\times ۸-۶\times ۴=۱۶$

بنابراین جملات دنباله به صورت $۱,۲,۴,۸,۱۶,...$ است که جمله‌ی عمومی آن $a_n=۲^{n-۱}$ است.

۱۱۳. گزینه‌ی ۲

در این دنباله، از جمله‌ی سوم به بعد، هر جمله مساوی مجموع دو جمله‌ی قبلی است، پس:

$$a_۷=۵+۸=۱۳$$
$$a_۸=۸+۱۳=۲۱$$
$$a_۹=۱۳+۲۱=۳۴$$
$$\Rightarrow a_۸+a_۹=۲۱+۳۴=۵۵$$

۱۱۴. گزینه‌ی ۲

در این دنباله هر جمله (از جمله‌ی سوم به بعد) برابر است با مجموع دو جمله‌ی ماقبل آن: $U_{n+۲}=U_{n+۱}+U_n \ , \ U_۱=U_۲=۱$

پس جملات دنباله به صورت زیر خواهند بود:

$$۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,۸۹,...$$

که جمله‌ی نهم دنباله $U_۹=۳۴$ است.

۱۱۵. گزینه‌ی ۳

راه حل اول: در این دنباله، جمله‌ی اول برابر با ۳ است و هر جمله، از ضرب جمله‌ی قبلی در عدد ۵ به‌دست می‌آید:

$a_{n+۱}=۵a_n$ و $a_۱=۳$

بنابراین:

$$a_n+a_{n+۱}=۵a_{n-۱}+۵a_n$$
$$=۵a_{n-۱}+۵(۵a_{n-۱})$$
$$=۳۰a_{n-۱}$$

راه حل دوم: با توجه به جملات داده شده، برای جملات اول، دوم و سوم داریم: $a_۲+a_۳=۱۵+۷۵=۹۰=۳۰(۳)=۳۰a_۱$

همچنین برای جملات دوم، سوم و چهارم داریم:

$$a_۳+a_۴=۷۵+۳۷۵=۴۵۰=۳۰(۱۵)=۳۰a_۲$$

بنابراین می‌توان گفت که مجموع جملات nام و $(n+۱)$ام، ۳۰ برابر جمله‌ی $(n-۱)$ام است.

۱۱۶. گزینه‌ی ۱

$a_{n+۱}=a_n+(n+۱)$ و $a_۱=۱$

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را به دست می‌آوریم:

$$n=۱\Rightarrow a_۲=a_۱+۲=۱+۲=۳$$
$$n=۲\Rightarrow a_۳=a_۲+۳=۳+۳=۶$$
$$n=۳\Rightarrow a_۴=a_۳+۴=۶+۴=۱۰$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر است:

$$۱,۳,۶,۱۰,...$$

پس این دنباله، دنباله‌ی مثلثی است که جمله‌ی عمومی آن $a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ است، بنابراین: $a_۸=\frac{۸\times ۹}{۲}=۳۶$

۱۱۷. گزینه‌ی ۴

راه حل اول: ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را به دست می‌آوریم:

$$n=۱\Rightarrow a_۲=۲a_۱+۱=۲(۱)+۱=۳$$
$$n=۲\Rightarrow a_۳=۲a_۲+۱=۲(۳)+۱=۷$$
$$n=۳\Rightarrow a_۴=۲a_۳+۱=۲(۷)+۱=۱۵$$
$$n=۴\Rightarrow a_۵=۲a_۴+۱=۲(۱۵)+۱=۳۱$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر است:

$$۱,۳,۷,۱۵,۳۱,۶۳,۱۲۷,۲۵۵,۵۱۱,۱۰۲۳,...$$
$$+۲\quad +۴\quad +۸\quad +۱۶\quad +۳۲\quad +۶۴\quad +۱۲۸\quad +۲۵۶\quad +۵۱۲$$
$$\Rightarrow a_{۱۰}=۱۰۲۳$$

راه حل دوم: جمله‌ی عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n=۲^n-۱$$
$$\Rightarrow a_{۱۰}=۲^{۱۰}-۱=۱۰۲۴-۱=۱۰۲۳$$

۱۱۸. گزینه‌ی ۳

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را می‌نویسیم:

$a_{n+۱}=a_n+۲n+۱$ و $a_۱=۱$

$$n=۱\Rightarrow a_۲=a_۱+۲(۱)+۱\Rightarrow a_۲=۱+۲+۱=۴$$
$$n=۲\Rightarrow a_۳=a_۲+۲(۲)+۱\Rightarrow a_۳=۴+۴+۱=۹$$
$$n=۳\Rightarrow a_۴=a_۳+۲(۳)+۱\Rightarrow a_۴=۹+۶+۱=۱۶$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر است:

$$۱,۴,۹,۱۶,...$$

لذا جمله‌ی عمومی دنباله برابر با $a_n=n^۲$ است و جمله‌ی بیست و سوم برابر است با: $a_{۲۳}=۲۳^۲=۵۲۹$

۱۱۹. گزینه‌ی ۴

راه حل اول: با در نظرگرفتن عدد یک به عنوان جمله‌ی اول دنباله، از رابطه‌ی $a_n = 2a_{n-1} + 1 ; n \geq 2$ نتیجه می‌شود که از جمله‌ی دوم به بعد، هر جمله برابر با دو برابر جمله‌ی قبلی بعلاوه‌ی یک است. با این توضیح، جمله‌ها را تا جمله‌ی هشتم می‌نویسیم:

$$1 \ , \ 3 \ , \ 7 \ , \ 15 \ , \ 31 \ , \ 63 \ , \ 127 \ , \ 255$$

$$2\times1+1 \quad 2\times3+1 \quad \ldots \quad 2\times127+1$$

راه حل دوم: با کمی دقت در چند جمله‌ی اول، می‌توان حدس زد که جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت $a_n = 2^n - 1$ است که در این‌صورت داریم:

$$a_8 = 2^8 - 1 = 255$$

۱۲۰. گزینه‌ی ۴

راه حل اول: از $a_n = 2a_{n-1} - 2$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - 2$$

پس $a_8 - a_7 = a_7 - 2$.

حال جمله‌ی هفتم دنباله را پیدا کرده و حاصل $a_7 - 2$ را حساب می‌کنیم.

$$a_n = 2a_{n-1} - 2 ; a_1 = 3$$
$$a_2 = 2\times3-2 = 4 \ , \ a_3 = 2\times4-2 = 6$$
$$a_4 = 2\times6-2 = 10 \ , \ a_5 = 2\times10-2 = 18$$
$$a_6 = 2\times18-2 = 34 \ , \ a_7 = 2\times34-2 = 66$$
$$\Rightarrow a_8 - a_7 = 66 - 2 = 64$$

راه حل دوم: با کمی دقت در چند جمله‌ی اول دنباله، داریم:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 4 = a_1 + 2^0$$
$$a_3 = 6 = a_2 + 2^1$$
$$a_4 = 10 = a_3 + 2^2$$

می‌توان حدس زد که $a_n = a_{n-1} + 2^{n-2}$، پس:

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-2} \Rightarrow a_8 - a_7 = 2^{8-2} = 2^6 = 64$$

راهبرد حل تیپ (۱۳)

در دنباله‌ی حسابی، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی (غیر از جمله‌ی اول) برابر با عدد ثابتی است که قدرنسبت نام دارد.

اگر سه عدد a، b و c تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آنگاه:

$$2b = a + c$$

که b را واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c می‌گویند.

می‌توان برای کم کردن حجم محاسبات، سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی را به صورت $a-d \ , a \ , a+d$ یا پنج جمله‌ی متوالی را به صورت $a-2d \ , a-d \ , a \ , a+d \ , a+2d$ در نظر گرفت.

✹ تذکر: در یک دنباله‌ی حسابی با جملات $t_1 \ , t_2 \ , t_3 \ , \ldots$، اگر:

الف- به همه‌ی جملات یک مقدار ثابت k بیفزاییم، قدرنسبت ثابت می‌ماند ولی جمله‌ی اول k واحد افزایش می‌یابد.

ب- همه‌ی جملات را در عدد ثابت k ضرب کنیم، قدر نسبت k برابر و جمله‌ی اول نیز k برابر می‌شود.

پ- همه‌ی جملات را به توان k برسانیم، دیگر دنباله حسابی نخواهد بود $(k \neq 0 , 1)$.

۱۲۱. گزینه‌ی ۴

اگر سه عدد a، b و c تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آنگاه:

$$2b = a + c$$

بنابراین:

$$2(3P+4) = (2P+3) + (5P-1)$$
$$\Rightarrow 6P + 8 = 7P + 2 \Rightarrow P = 6$$

جملات دنباله: $15 , 22 , 29$

$$\Rightarrow d = 22 - 15 \Rightarrow d = 7$$

۱۲۲. گزینه‌ی ۴

اگر a,b,c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$2b = a + c$$

بنابراین:

$$2(2+x) = 1 - x + 1 + 2x \Rightarrow 4 + 2x = 2 + x \Rightarrow x = -2$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$3 , 0 , -3 , \ldots$$
$$\xrightarrow{\times m} 3m , 0 , -3m , \ldots$$

قدر نسبت دنباله‌ی جدید برابر $d = 0 - 3m = -3m$ است.

بنابراین:

$$-3m = 48 \Rightarrow m = -16$$

۱۲۳. گزینه‌ی ۴

اگر x، y و z سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشد، آنگاه:

$$2y = x + z \qquad (*)$$
$$x + y + z = -10 \xrightarrow{(*)} 2y + y = -10$$
$$\Rightarrow y = -\frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow x + z = 2y = 2 \times \frac{-10}{3} = \frac{-20}{3}$$

بنابراین:

$$yx + zy = y(x+z) = -\frac{10}{3} \times \left(-\frac{20}{3}\right) = \frac{200}{9}$$

۱۲۴. گزینه‌ی ۴

اضلاع مثلث را به صورت $x+d$ ، x ، $x-d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$(x+d)^2 = x^2 + (x-d)^2$$
$$\Rightarrow x^2 + 2xd + d^2 = x^2 + x^2 - 2xd + d^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 4xd = 0 \Rightarrow x(x-4d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 4d \end{cases}$$

بنابراین اضلاع مثلث برابر با $5d$ ، $4d$ ، $3d$ است. لذا:

$$\frac{\text{وتر مثلث}}{\text{کوچکترین ضلع مثلث}} = \frac{5d}{3d} = \frac{5}{3}$$

۱۲۵. گزینه‌ی ۴

اگر سه عدد را به صورت $x-d$ ، x و $x+d$ فرض کنیم، داریم:

$$(x-d)+x+(x+d)=۲۱\Rightarrow ۳x=۲۱\Rightarrow x=۷$$
$$(۷-d)^{۲}+۷^{۲}+(۷+d)^{۲}=۱۶۵$$
$$\Rightarrow ۴۹+d^{۲}-۱۴d+۴۹+۴۹+d^{۲}+۱۴d=۱۶۵$$
$$\Rightarrow ۱۴۷+۲d^{۲}=۱۶۵\Rightarrow d^{۲}=۹\Rightarrow d=\pm ۳$$
$$\Rightarrow\begin{cases} d=۳\xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد}}x-d=۷-۳=۴\\ d=-۳\xrightarrow{\text{کوچک‌ترین عدد}}x+d=۷+(-۳)=۴\end{cases}$$

۱۲۶. گزینه‌ی ۱

زوایای داخلی پنج‌ضلعی که به‌ترتیب از کوچک به بزرگ، جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند را به‌صورت $a-۲d\,,a-d\,,a\,,a+d\,,a+۲d$ می‌نویسیم، داریم:

$$(a-۲d)+(a-d)+(a)+(a+d)+(a+۲d)=۵۴۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۵a=۵۴۰^\circ\Rightarrow a=۱۰۸^\circ$$
بزرگ‌ترین زاویه: $a+۲d=۱۳۶^\circ\Rightarrow ۱۰۸^\circ+۲d=۱۳۶^\circ$
$$\Rightarrow ۲d=۱۳۶^\circ-۱۰۸^\circ\Rightarrow ۲d=۲۸^\circ\Rightarrow d=۱۴^\circ$$

راهبرد حل تیپ (۱۴)

از آنجا که اختلاف جملات متوالی دنباله‌ی حسابی مقدار ثابتی (برابر با قدرنسبت) است، پس دنباله‌ی حسابی یک دنباله‌ی خطی است.

اختلاف هر دو جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی، برابر با ضریبی از قدرنسبت (d) است، یعنی:

$$t_m-t_n=(m-n)d$$

همچنین اگر مجموع شماره‌های دو جمله از دنباله‌ی حسابی با مجموع شماره‌های دو جمله‌ی دیگر برابر باشد، آنگاه مجموع جملات آنها نیز با هم برابر است:

$$m+n=k+p\Leftrightarrow t_m+t_n=t_k+t_p$$

توجه کنید که اعداد طبیعی فرد متوالی و اعداد طبیعی زوج متوالی، هر کدام یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۲ هستند.

۱۲۷. گزینه‌ی ۱

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی، یک دوجمله‌ای از درجه‌ی یک است، یعنی یک عبارت خطی است. بنابراین جمله‌ی $t_n=۵n+۳$ عمومی یک دنباله‌ی حسابی است.

۱۲۸. گزینه‌ی ۴

جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول t_1 و قدر نسبت d برابر با $t_n=t_1+(n-۱)d$ است. پس ضریب $n^{۲}$ در جمله‌ی عمومی برابر با صفر است. داریم:

$$k-۲=۰\Rightarrow k=۲\Rightarrow t_n=۳n+۴$$

ضریب n در جمله‌ی عمومی برابر با قدرنسبت دنباله است، بنابراین:

$$t_n=۳n+۴\Rightarrow \text{قدرنسبت}=۳$$
$$t_{۱۰}=۳\times۱۰+۴=۳۴$$

۱۲۹. گزینه‌ی ۱

در یک دنباله‌ی حسابی، تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی، مقدار ثابت d (قدر نسبت) است:

$$\underset{(۱)}{a-۲b}=\underset{(۲)}{\underbrace{۲a-۴-a}_{a-۴}}=\underset{(۳)}{\underbrace{b-a-(۲a-۴)}_{b-۳a+۴}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(۱)=(۲)\Rightarrow a-۲b=a-۴\Rightarrow b=۲\\ (۲)=(۳)\Rightarrow a-۴\overset{b=۲}{=\!=\!=}-۳a+۶\Rightarrow a=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=\frac{۵}{۲}\ \text{و}\ b=۲$$

پس جملات به‌صورت زیر خواهند بود:

$$۴\ ,\ \frac{۵}{۲}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{-۱}{۲}\ ,\ \dots$$
$$-۱/۵\quad -۱/۵\quad -۱/۵$$

پس جمله‌ی اول $t_1=۴$ و قدر نسبت $d=-۱/۵$ است، لذا:

$$t_۸=t_1+۷d=۴+۷(-۱/۵)=-۶/۵=\frac{-۱۳}{۲}$$

۱۳۰. گزینه‌ی ۱

چون نوزدهمین جمله از آخر دنباله خواسته شده، ابتدا جملات دنباله را از آخر به اول می‌نویسیم:

$$۱۷۶,\dots,۸,a,۲$$

نوزدهمین جمله از آخر دنباله‌ی اصلی برابر با نوزدهمین جمله‌ی دنباله‌ی بالا خواهد بود. جمله‌ی اول دنباله برابر با ۱۷۶ و قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$۲d=۲-۸\Rightarrow d=-۳$$

پس جمله‌ی عمومی دنباله برابر است با:

$$t_n=۱۷۶+(n-۱)(-۳)$$
$$t_{۱۹}=۱۷۶+(۱۸)(-۳)=۱۷۶-۵۴=۱۲۲$$

۱۳۱. گزینه‌ی ۳

جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d و جمله‌ی اول t_1 برابر است با: $t_۵=t_1+۴d$

در دنباله‌ی جدید، $d'=d-۲$، پس:

$$t'_۵=t_1+۴d'\xrightarrow{d'=d-۲}t'_۵=t_1+۴(d-۲)$$
$$\to t'_۵=\underbrace{t_1+۴d}_{t_۵}-۸=t_۵-۸$$

پس جمله‌ی پنجم دنباله‌ی جدید، ۸ واحد از جمله‌ی پنجم دنباله‌ی اولیه کمتر است.

۱۳۲. گزینه‌ی ۳

$t_{۱۰}-t_{۴}=۲۴ \Rightarrow (t_{۱}+۹d)-(t_{۱}+۳d)=۲۴$

$\Rightarrow ۶d=۲۴ \Rightarrow d=۴$

بنابراین:

$t_{۳۰}-t_{۱۸}=(t_{۱}+۲۹d)-(t_{۱}+۱۷d)=۱۲d$
$=۱۲\times ۴=۴۸$

۱۳۳. گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} t_{۱۲}-t_{۱۰}=۵ \\ t_{۱۲}+t_{۱۰}=۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t_{۱}+۱۱d)-(t_{۱}+۹d)=۵ \\ (t_{۱}+۱۱d)+(t_{۱}+۹d)=۲۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲d=۵ \Rightarrow d=۲/۵ \\ ۲t_{۱}+۲۰d=۲۵ \xrightarrow{d=۲/۵} ۲t_{۱}+۲۰(۲/۵)=۲۵ \\ \Rightarrow t_{۱}=-۱۲/۵ \end{cases}$$

پس جمله‌ی بیست و یکم برابر است با:

$t_{۲۱}=t_{۱}+۲۰d=-۱۲/۵+۲۰(۲/۵)=۳۷/۵$

۱۳۴. گزینه‌ی ۲

$$\begin{cases} t_{۱}+t_{۲}+t_{۳}+t_{۴}=۱۵ \\ t_{۵}+t_{۶}+t_{۷}+t_{۸}+t_{۹}=۳۰ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} t_{۱}+(t_{۱}+d)+(t_{۱}+۲d)+(t_{۱}+۳d)=۱۵ \\ (t_{۱}+۴d)+(t_{۱}+۵d)+(t_{۱}+۶d)+(t_{۱}+۷d) \\ \qquad +(t_{۱}+۸d)=۳۰ \end{cases}$$

پس:

$$\begin{matrix} -۵\times \\ ۴\times \end{matrix} \begin{cases} ۴t_{۱}+۶d=۱۵ \\ ۵t_{۱}+۳۰d=۳۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۹۰d=۴۵ \Rightarrow d=\frac{۱}{۲}$$

با توجه به $۴t_{۱}+۶d=۱۵$، به ازای $d=\frac{۱}{۲}$، $t_{۱}=۳$ به‌دست می‌آید

لذا، جمله‌ی یازدهم برابر است با:

$t_{۱۱}=t_{۱}+۱۰d \Rightarrow t_{۱۱}=۳+۱۰(\frac{۱}{۲})=۸$

۱۳۵. گزینه‌ی ۲

راه حل اول:

$t_{۱۰}+t_{۲۰}=۱۸۰$

$\Rightarrow (t_{۱}+۹d)+(t_{۱}+۱۹d)=۱۸۰$

$\Rightarrow ۲t_{۱}+۲۸d=۱۸۰ \quad (*)$

از طرفی:

$t_{۱۳}+t_{۱۷}=(t_{۱}+۱۲d)+(t_{۱}+۱۶d)=۲t_{۱}+۲۸d$

بنابراین:

$\xrightarrow{(*)} t_{۱۳}+t_{۱۷}=۱۸۰$

راه حل دوم:

نکته اگر در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی t_n داشته باشیم: $m+n=k+p$، آنگاه:

$t_m+t_n=t_k+t_p$

بنابراین:

$۱۰+۲۰=۱۳+۱۷ \Rightarrow t_{۱۰}+t_{۲۰}=t_{۱۳}+t_{۱۷}$

$\Rightarrow t_{۱۳}+t_{۱۷}=۱۸۰$

۱۳۶. گزینه‌ی ۲

پنج جمله‌ی اول دنباله را به صورت $a+۲d$ ، $a+d$ ، a ، $a-d$ و $a-۲d$ درنظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} (a-۲d)(a+۲d)=۵۷ \Rightarrow a^{۲}-۴d^{۲}=۵۷ \\ (a-d)(a+d)=۱۰۵ \Rightarrow a^{۲}-d^{۲}=۱۰۵ \quad (*) \end{cases}$$

$\Rightarrow ۳d^{۲}=۴۸ \Rightarrow d^{۲}=۱۶$

$\xrightarrow{(*)} a^{۲}-۱۶=۱۰۵ \Rightarrow a^{۲}=۱۲۱$

$\xrightarrow{a>۰} a=۱۱$:جمله‌ی سوم دنباله

۱۳۷. گزینه‌ی ۳

$t_{۳}^{۲}-t_{۵}^{۲}=-۱۶۰$

با استفاده از اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$\Rightarrow (t_{۳}+t_{۵})(t_{۳}-t_{۵})=-۱۶۰$

$\xrightarrow{t_{۳}+t_{۵}=۱۶} ۱۶(t_{۳}-t_{۵})=-۱۶۰$

$\Rightarrow t_{۳}-t_{۵}=-۱۰$

$\Rightarrow t_{۱}+۴d-(t_{۱}+۲d)=۱۰$

$\Rightarrow ۲d=۱۰ \Rightarrow d=۵$

۱۳۸. گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} a_{۱}+a_{۲}+...+a_{۱۰۰}=۱۰۰ & (۱) \\ a_{۱۰۱}+a_{۱۰۲}+...+a_{۲۰۰}=۲۰۰ & (۲) \end{cases}$$

رابطه‌ی (۲) را از رابطه‌ی (۱) کم می‌کنیم:

$(a_{۱۰۱}-a_{۱})+(a_{۱۰۲}-a_{۲})+...+(a_{۲۰۰}-a_{۱۰۰})=۱۰۰$

از طرف $a_{۱۰۱}-a_{۱}=a_{۱۰۲}-a_{۲}=...=۱۰۰d$، بنابراین:

$\underbrace{۱۰۰d+۱۰۰d+...+۱۰۰d}_{\text{۱۰۰ تا}}=۱۰۰$

$\Rightarrow ۱۰۰(۱۰۰d)=۱۰۰ \Rightarrow d=\frac{۱}{۱۰۰}$

بنابراین:

$a_{۲}-a_{۱}=d=۰/۰۱$

۱۳۹. گزینه‌ی ۱

راه حل اول: می‌دانیم:

$a_{۲}-a_{۱}=a_{۳}-a_{۲}=...=a_{۱۵}-a_{۱۴}=d$

پس:

$$\text{عبارت}=\frac{۱}{d}\left(\frac{d}{a_{۱}a_{۲}}+\frac{d}{a_{۲}a_{۳}}+...+\frac{d}{a_{۱۴}a_{۱۵}}\right)$$

$$=\frac{۱}{d}\left(\frac{a_{۲}-a_{۱}}{a_{۱}a_{۲}}+\frac{a_{۳}-a_{۲}}{a_{۲}a_{۳}}+...+\frac{a_{۱۵}-a_{۱۴}}{a_{۱۴}a_{۱۵}}\right)$$

$$=\frac{۱}{d}\left(\left(\frac{۱}{a_{۱}}-\frac{۱}{a_{۲}}\right)+\left(\frac{۱}{a_{۲}}-\frac{۱}{a_{۳}}\right)+...+\left(\frac{۱}{a_{۱۴}}-\frac{۱}{a_{۱۵}}\right)\right)$$