

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سوالات و مسائل مسابقات ریاضی نهم

از مجموعه مرشد

بیش از ۳۰۰۰ سؤال چندگزینه‌ای (شامل: آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و ممتاز تهران و مراکز استان‌های کشور، آزمون‌های پیشرفت تحصیلی، مسابقات جهانی ریاضی، المپیادها و مسابقات علمی داخلی و خارجی، سؤالات کنکورهای سراسری و آزاد و...) بیش از ۶۰۰ نکته‌ی کلیدی درس ریاضی سوم دبیرستان (کلاس نهم) که دانش‌آموزان علاقه‌مند باید فراگیرند. پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

و حیداسی‌کیا

مرشد: مرجع رشد و شکوفایی دانش‌آموزان

ویژه دانش‌آموزان ممتاز و داوطلبان شرکت در مسابقات
و آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و برتر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «مسابقات ریاضی نهم» یا «۳۰۰۰ تست مرشد» را از مجموعه‌ی «مرشد» منتشر می‌کنیم. این کتاب که توسط آقای وحید اسدی کیا تألیف شده است، دانش‌آموزان کلاس نهم (پایه سوم دوره اول متوسطه) را برای شرکت در مسابقات ریاضی و امتحانات و آزمون‌های ورودی مدارس استعدادهای درخشان و خاص آماده می‌کند. در تألیف این کتاب از منابع متعددی استفاده شده است که از جمله‌ی آنها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و ممتاز استان تهران و مرکز استان‌های کشور
 - ۲- آزمون‌های پیشرفت تحصیلی تیزهوشان
 - ۳- مسابقات علمی کشوری و بین‌مدرسه‌ای
 - ۴- المپیادهای ریاضی داخلی و خارجی
 - ۵- مسائل مسابقات جهانی کانگورو و آزمون‌های جهانی ریاضی ABC، TIMSS، JMC و آزمون‌های GRE و GMAT
 - ۶- مسائل مسابقات خارجی (کشورهای آمریکا، انگلیس، مجارستان، بلژیک، آفریقای جنوبی و...)
 - ۷- مسائل المپیادهای کشوری مبتکران و آزمون‌های نشانه‌ی مبتکران
 - ۸- آزمون‌های چهارگزینه‌ای داخلی مدارس تیزهوشان استان تهران و مراکز استان‌های کشور
 - ۹- آزمون‌های ورودی روبروکاپ
- و منابع دیگر

مسائل این آزمون‌ها، براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی ریاضی نهم (سوم دبیرستان دوره اول متوسطه) طبقه‌بندی شده و از آسان به سخت مرتب گردیده‌اند. برخی از آن‌ها بدون راهنمایی و اشاره به نکته کلیدی قابل حل نیستند که با علامت \boxtimes مشخص شده‌اند تا دانش‌آموزان قبل از اقدام به حل آن‌ها، ابتدا نکته‌ی مورد نظر را مطالعه کنند. (تعداد پاکت‌ها نشان دهنده‌ی تعداد نکته‌های آن سؤال می‌باشد)

لازم به ذکر است کتاب ریاضی مرشد نهم در دو جلد تألیف شده است:

● جلد اول: شامل سؤالات همراه با پاسخ‌نامه‌ی کلیدی آن‌ها

● جلد دوم: شامل پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سؤالات و نکات مهم مربوط به آن‌ها

امیدواریم این کتاب، مورد توجه خانواده‌ها، دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر افتد.

در پایان، وظیفه‌ی خود می‌دانیم از مؤلف کتاب آقای وحید اسدی‌کیا و دبیر مجموعه‌ی مرشد آقای هادی عزیززاده و از آقایان یدالله باقری، اباصلت نورالهی، مهندس پرهام اسدی، مهندس پوریا اسدی، فتح‌اله پرباز (دبیر تیزهوشان استان اردبیل) و مهدی قدیری (دبیر تیزهوشان استان اصفهان) و محمدرضا گلزار (دبیر تیزهوشان استان اصفهان) و دارا نیکبخت (استان اصفهان) و مهندس امیرمسعود طهماسبی، علی بدخشان و علیرضا دولتیاری و خانم‌ها: مهندس ندا قدسی و فاطمه ستاری مرجانی و مریم مقصودی و مهندس لیلا عباس‌زاد که بنا به گزارش مؤلف با وی همکاری علمی داشته‌اند و بخش‌هایی از کتاب را ویرایش کرده‌اند، تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها لیلا مهرعلی‌پور (که زحمت حروف‌چینی، ترسیم شکل‌ها و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند) و بهاره خدای (گرافیک) بسیار ممنونیم و برای همه‌ی این عزیزان آرزوی موفقیت داریم.

انتشارات مبتکران



۲۹۱



۷



۳۷۹



۵۹



۴۱۹



۱۰۱



پاسخ سؤالات ریاضی آزمون ورودی ۴۸۴
مدارس تیزهوشان سال تحصیلی ۹۶-۹۵
پاسخ سؤالات ریاضی آزمون ورودی ۴۸۸
مدارس تیزهوشان سال تحصیلی ۹۷-۹۶
پاسخ سؤالات ریاضی آزمون ورودی ۴۹۲
مدارس تیزهوشان سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۱۵۵



۲۲۳



فصل

١

مجموعهها

قسمت اول

معرفی مجموعه‌ها و اعضا

۱. گزینه د

نکته ۱: هر دسته یا گروه از اشیاء، شکل‌ها، اعداد، حروف و... که عضوهای آن قابل تشخیص باشند یا هیچ عضوی نداشته باشند را مجموعه می‌نامیم. در ریاضیات، هر مجموعه را با یکی از حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنند و عضوهای آن را داخل آکولاد قرار داده و بین عضوهای آن «و» و یا «ویرگول (کاما)» می‌گذارند مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد دو رقمی:
 $A = \{11, 13, 15, \dots, 99\}$
 از علامت سه نقطه «...» به معنای «به همین ترتیب» در مجموعه‌هایی که تعداد عضوهای آن زیاد و نوشتن اعضا جاگیر یا زمان‌بر است استفاده می‌کنیم.

در گزینه‌ی (د)، اعضا به طور کامل مشخص نیستند پس طبق نکته‌ی (۱)، تشکیل مجموعه نمی‌دهند. توجه داشته باشید که در گزینه‌ی (ب) کاملاً مشخص است که هیچ عضوی وجود ندارد پس طبق نکته‌ی (۱)، تشکیل مجموعه می‌دهد.

۲. گزینه الف

نکته ۲: یادآوری برخی از مجموعه‌های مهم ریاضی:

- مجموعه‌ی اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد حسابی: \mathbb{I} یا $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\text{اعداد کسری با صورت و مخرج صحیح که مخرج صفر نیست}\}$

در تقسیم مخرج نباید صفر باشد، پس فقط مجموعه‌ی اعداد طبیعی قابل قبول است.

۳. گزینه الف $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ است در نتیجه این مجموعه فقط یک عضو دارد یعنی $\{1\}$ است.

۴. گزینه ب حاصل $13 - \sqrt{13}$ ، نه و خورده‌ای و حاصل $-17 + \sqrt{17}$ ، -12 و خورده‌ای می‌شود که شامل اعداد صحیح از ۹ تا -12 است.

۵. گزینه د

نکته ۳: در مجموعه‌ها، نماد \in به معنای «عضو بودن» و نماد \notin به معنای «عضو نبودن» است. به طور مثال

می‌نویسیم $5 \in \mathbb{N}$ و می‌خوانیم عدد پنج عضو مجموعه‌ی اعداد طبیعی است و یا می‌نویسیم $-6 \notin \mathbb{N}$ و می‌خوانیم عدد -6 عضو مجموعه‌ی اعداد طبیعی نیست.

مجموعه‌ی \mathbb{N} اعداد منفی را شامل نمی‌شود.

۶. گزینه ج

نکته ۴: در هر مجموعه، عضوهای تکراری فقط یک بار شمارش می‌شوند: $A = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2\} = \{1, 2\}$

هم چنین در هر مجموعه جابه‌جایی اعضا تأثیری در مجموعه ندارد و با جابه‌جا کردن اعضا، مجموعه‌ی جدیدی به وجود نمی‌آید. به طور مثال:

$$A = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{2, 3, 1\}$$

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\} \in A$$

مجموعه‌ی A فقط شامل یک عضو است:

۷. گزینه الف

$$A = \{a, \{a\}\}$$

طبق نکته‌ی (۴) مجموعه‌ی A شامل ۲ عضو است:

۸. گزینه ب

$$S = \{\{x\}, \{\{x\}\}, \{\{\{x\}\}\}, x\}$$

مجموعه‌ی S را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

۹. گزینه د

۱۰. گزینه الف

نکته ۵: هر عدد صحیح که در ۲ یا مضرب‌های ۲ ضرب شود، حاصل همواره عددی زوج است. هم چنین

داریم:

$$\text{زوج} = \text{زوج} \pm \text{زوج} \quad \text{فرد} = \text{فرد} \pm \text{زوج} \quad \text{فرد} = \text{زوج} \pm \text{فرد} \quad \text{زوج} = \text{زوج} \pm \text{فرد}$$

$$\underbrace{2K}_{\text{زوج}} - \underbrace{5}_{\text{فرد}} = \underbrace{\quad}_{\text{فرد}}$$

طبق نکته‌ی (۵)، $2K$ عددی زوج است. پس داریم:

۱۱. گزینه د

نکته ۶: به دنباله‌ای از اعداد که هر عدد با اضافه شدن عددی ثابت (یا کم شدن عددی ثابت) به عدد قبلی

خود به دست می‌آید، «تصاعد عددی» یا «دنباله‌ی عددی» می‌گویند. به عبارت دیگر می‌توان گفت اختلاف هر دو عدد متوالی، مقداری ثابت است که به این مقدار ثابت، «قدر نسبت» می‌گویند و آن را با حرف d نمایش می‌دهند. اگر a_1 به معنای اولین عدد تصاعد و a_n ($n \in \mathbb{N}$) به معنای عدد n ام در این سری باشد، همواره

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d$$

داریم:

و هم چنین اگر آخرین عدد دنباله را a_m در نظر بگیریم، برای به دست آوردن تعداد اعداد دنباله داریم:

$$m = \frac{a_m - a_1}{d} + 1$$

عضوهای این مجموعه یکی در میان مثبت و منفی هستند. با در نظر نگرفتن علامت‌ها و با استفاده از نکته‌ی (۶) می‌توان نوشت:

$$a_{31} = 2 + (31-1) \times 5 \Rightarrow a_{31} = 2 + 150 \Rightarrow a_{31} = 152$$

و چون جملات با شماره‌ی فرد مثبت هستند، پس سی و یکمین عضو، عدد ۱۵۲ است.

۱۲. گزینه ب

$$A = \{1, 3, 8, 15, 22, \dots\}$$

$\begin{array}{ccccccc} & +7 & & +7 & & +7 & \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & +7 & & +7 & & +7 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ & & +7 & & +7 & & +7 \end{array}$

اگر اعداد با شماره‌ی زوج را در نظر بگیریم (زیرا $120 \div 2 = 60$) کافی است شصتمین عضو ($120 \div 2 = 60$) را به دست

$$\{3, 10, 17, \dots\} \rightarrow a'_{60} = 3 + (60-1) \times 7 \Rightarrow a'_{60} = 416$$

آوریم. طبق نکته‌ی (۶) داریم:

در نتیجه یکصد و بیستمین عضو یعنی $a_{120} = 416$ است.

۱۳. گزینه ب

نکته ۷: در هر دنباله‌ی عددی با n جمله، مجموع عضوهای دنباله (تصاعد) برابر است با: $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n$

با توجه به نکته‌های (۶) و (۷) می‌توان نوشت:

$$\frac{59-2}{3} + 1 = 20 \quad A \text{ تعداد عضوهای مجموعه‌ی } A$$

$$S_{20} = \frac{2+59}{2} \times 20 \Rightarrow S_{20} = 610$$

۱۴. گزینه ب
مجموعه‌ی A_1 ، تا ۱ و مجموعه‌ی A_2 تا $1+2=3$ و مجموعه‌ی A_3 تا $1+2+3=6$ و مجموعه‌ی A_4 تا $1+2+3+4=10$ نوشته شده است. پس مجموعه‌ی A_9 تا $1+2+3+\dots+9=45$ نوشته می‌شود. در نتیجه اولین عضو مجموعه‌ی A_1 ، $46=45+1$ است.

۱۵. گزینه ب
مانند سؤال قبل، ابتدا عضوهای A_{21} را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن اولین عضو، مانند سؤال قبل عمل می‌کنیم. داریم:

$$1+2+3+\dots+20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210 \quad \text{آخرین عضو } A_{20}$$

در نتیجه اولین عضو A_{21} ، ۲۱۱ است و آخرین عضو A_{21} برابر است با:

$$1+2+3+\dots+21 = \frac{21 \times 22}{2} = 231$$

$$\Rightarrow A_{21} = \{211, 212, 213, \dots, 231\} \quad \text{با توجه به نکته (۷)} \Rightarrow S_{21} = \frac{211+231}{2} \times 21 = 4641$$

مجموعه‌ی تهی

۱۶. گزینه د

نکته ۸: مجموعه‌ای که شامل هیچ عضوی نباشد، مجموعه‌ی تهی می‌نامند و آن را با نمادهای \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهند.

تذکر: $\{\emptyset\}$ یا $\{\{\}\}$ ، مجموعه‌ی تهی نیستند بلکه شامل یک عضو می‌باشند.

بین ۲۴ و ۲۸، عدد اولی وجود ندارد پس گزینه‌ی (د)، مجموعه‌ی تهی است.

۱۷. گزینه د
معادله‌ی $x^2 + 8 = 0$ جواب «صحیح» ندارد پس مجموعه‌ی جواب آن در اعداد صحیح، $\{\}$ است.

باز یا بسته بودن یک مجموعه

۱۸. گزینه د

نکته ۹: می‌گوییم مجموعه‌ی A نسبت به عملی بسته است که به ازای هر عضو یا عضوهایی از مجموعه‌ی A ، حاصل نیز عضوی از مجموعه‌ی A باشد. هم‌چنین مجموعه‌ی A نسبت به عملی باز است که به ازای هر عضو یا عضوهایی از مجموعه‌ی A ، حاصل عضوی از مجموعه‌ی A نباشد. به طور مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته است زیرا مجموع هر دو عدد طبیعی همواره عددی طبیعی است و نسبت به عمل تفریق، باز است زیرا به طور مثال $3, 5 \in \mathbb{N} \Rightarrow (3-5) \notin \mathbb{N}$

مثال نقض:

$$-4, 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-4}{0} \notin \mathbb{Z}$$

$$1, 2 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1-2 = -1 \notin \mathbb{N}$$

مثال نقض:

۱۹. گزینه د
۲۰. گزینه !
پاسخ درست در میان گزینه‌ها نیست! برای هر کدام مثال نقض نوشته شده است:

(الف) $3, 5 \in \mathbb{N} \Rightarrow 3-5 = -2 \notin \mathbb{N}$

(ب) $6, 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{6}{0} \notin \mathbb{Z}$

(ج) $\frac{4}{5}, -\frac{4}{5} \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow \frac{4}{5} + (-\frac{4}{5}) = 0 \notin \mathbb{Q} - \{0\}$

(د) $2, 3 \in \mathbb{W} \Rightarrow 2-3 = -1 \notin \mathbb{W}$

۲۱. گزینه الف

نکته ۱۰: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج را با E و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد را با O نمایش می‌دهند:

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \quad O = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد نسبت به عمل جمع بسته نیست. زیرا:

$$n \in \mathbb{N}, 2n+1 \in O, 2n'+1 \in O$$

روش اول: حالت کلی؛

$$\Rightarrow (2n+1) + (2n'+1) = 2n + 2n' + 2 = 2(n+n'+1) \in E$$

$$5, 7 \in O \Rightarrow 5+7=12 \in E$$

روش دوم: مثال نقض؛

$$1, 1 \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow 1+1=2 \notin \{-1, 0, 1\}$$

۲۲. گزینه ج مثال نقض برای عبارت (الف):

$$5, 7 \in \{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow 5+7=12 \notin \{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

مثال نقض برای عبارت (ب):

عبارت (ج) درست است زیرا در حالت کلی می‌توان نوشت: $2^n, 2^{n'} \in \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow 2^n \times 2^{n'} = 2^{n+n'} = 2^n \in \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

عبارت (د) نادرست است زیرا مجموعه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ نسبت به عمل ضرب بسته است.

۲۳. گزینه ب

نکته ۱۱: به اعدادی که پس از تجزیه به عوامل اول، دارای توان زوج هستند، مربع کامل می‌گویند.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی مربع کامل نسبت به عمل ضرب بسته هستند:

$$a^{2m} \times b^{2n} = (a^m \times b^n)^2$$

اگر a و b و m و n اعداد طبیعی باشند، داریم:

مشخص است که $(a^m \times b^n)^2$ مربع کامل است.

در مورد اعمال جمع، تقسیم و جذر می‌توان مثال نقض نوشت. به طور مثال $\sqrt{25} = 5$ می‌شود که مربع کامل نیست.

نمایش مجموعه‌ها با نمودار ون

۲۴. گزینه د

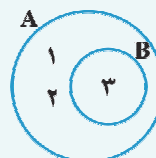
نکته ۱۲: در ریاضیات، مجموعه‌ها را می‌توان به ۳ صورت مختلف نمایش داد که عبارت‌اند از:

(۱) نمایش هندسی (نمودار ون) - (۲) نمایش تفصیلی (نوشتن اعضا) - (۳) نمایش توصیفی (علایم ریاضی)
نمایش عضوهای مجموعه در یک منحنی بسته یا خط شکسته‌ی بسته را نمایش هندسی یا نمودار ون می‌گویند و از شکل‌های هندسی برای نمایش آن استفاده می‌کنند. این نمودار منسوب به دانشمند انگلیسی، آقای «جان ون» است.

تذکر: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3\}$ باشد، نمایش به صورت شکل (۱) نادرست و نمایش به صورت شکل (۲) درست است:



شکل (۱)



شکل (۲)

۲۵. گزینه د طبق نمودار داده شده، در میان گزینه‌ها فقط عدد ۱۶۸ مضرب ۷ و مضرب ۱۲ است ولی مضرب ۹ نیست.

۲۶. گزینه ه

توجه: اگر عددی ۳ رقمی را ۲ بار پشت سر هم بنویسیم، همواره بر اعداد ۷ و ۱۳ بخش پذیر است. عدد ۱۲۷۱۲۷ مضرب ۷ و ۱۳ است ولی مضرب ۵ نیست. بنابراین عدد ۱۲۷۱۲۷ در جای نقطه‌ی «ه» قرار دارد.

۲۷. گزینه د

$$x + w + z + 4 + 9 = x + y + 7 + 8 \Rightarrow w + z = y + 2 \quad (1)$$

$$x + 9 + 4 + z + w + y + 7 + 8 + 6 = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

$$\Rightarrow x + y + z + w = 11 \quad \text{رابطه (۱)} \Rightarrow x + 2y = 9 \Rightarrow x = 5, y = 2$$

نمایش مجموعه‌ها با اعضا و علایم ریاضی: (مقدماتی)

با توجه به این که اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند، $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ است.

۲۸. گزینه د

۲۹. گزینه ب

۳۰. گزینه د

۳۱. گزینه ج

ابتدا عضوهای مجموعه‌ی A را مشخص می‌کنیم و سپس عضوهای B را به دست می‌آوریم:

$$A = \{-(-2)^2 + 1, -(-1)^2 + 1, -(0)^2 + 1, -(1)^2 + 1, -(2)^2 + 1\} = \{-3, 0, 1\}$$

$$B = \{-(-3)^3, -(0)^3, -(1)^3\} \Rightarrow B = \{27, 0, -1\}$$

ابتدا عضوهای مجموعه‌ی A را نوشته و سپس عضوهای مجموعه‌ی B را به دست می‌آوریم:

۳۲. گزینه د

$$A = \{2 \times (-7), 2 \times (-6), 2 \times (-5)\} = \{-14, -12, -10\}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \frac{3}{4} \times (-14), \frac{3}{4} \times (-12), \frac{3}{4} \times (-10) \right\} \Rightarrow B = \{-21, -18, -15\}$$

$$B = \{-495, -490, \dots, 0, 5, 10, \dots, 500\}$$

۳۳. گزینه ب

$$n(B) = \frac{500 - (-495)}{5} + 1 = 200$$

$$A = \{5, 8, 11, 14, \dots, 302\} \Rightarrow A \cap B = \{5, 20, 35, \dots, 290\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = \frac{290 - 5}{15} + 1 = 20 \Rightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

۳۴. گزینه د

۳۵. گزینه ب

یادآوری: $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ و $2^0 = 1$ است.

۳۶. گزینه الف

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 25\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < \sqrt{25}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

۳۷. گزینه د

حاصل جذر اعداد ۱، ۴، ۹ و ۱۶ و ...، اعداد طبیعی هستند.

۳۸. گزینه ب

$$2x - 1 > -7 \Rightarrow 2x > -7 + 1 \Rightarrow 2x > -6 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۳۹. گزینه ب

$$-3 < x + 2 < 4 \Rightarrow -3 - 2 < x + 2 - 2 < 4 - 2 \Rightarrow -5 < x < 2 \Rightarrow B = \{-4, -3, -2, \dots, 1\}$$

۴۰. گزینه الف

اعدادی که زوج بوده و بین ۱ و ۸ می‌باشند را به دست آورده و به توان ۳ می‌رسانیم:

۴۱. گزینه الف

$$A = \{2^3, 4^3, 6^3\} \Rightarrow A = \{8, 64, 216\}$$

۴۲. گزینه الف اعداد زوج از ۱ تا ۴ را به جای m در رابطه‌ی $\frac{2m+1}{3}$ قرار می‌دهیم:

$$\left\{ \frac{2 \times 2 + 1}{3}, \frac{2 \times 4 + 1}{3} \right\} = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{9}{3} \right\} = \left\{ \frac{5}{3}, 3 \right\}$$

$$A = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}, B = \{-1, -2, -3, \dots\} \Rightarrow -1 \in A, B$$

$$A = \{-2, -1, 0, 1, \dots\}, B = \{2, 1, 0, -1, \dots\} \Rightarrow -2 \in B$$

۴۳. گزینه ب
۴۴. گزینه الف
۴۵. گزینه د
۴۶. گزینه د
با توجه به تعداد عضوهایی که در A داده شده است، هر سه توصیف می‌تواند درست باشد و عضوهای پنجم و ششم می‌توانست توصیف دقیق را مشخص کند.

$$A = \{3^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7\} = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 7\}$$

۴۷. گزینه ب
۴۸. گزینه ج
مضرب‌های صحیح عدد ۳ بین ۱۰ و ۱۹، اعداد ۱۲، ۱۵، ۱۸ هستند و اعدادی که اگر آن‌ها را در -3 ضرب کنیم، اعداد ۱۲، ۱۵ و ۱۸ به دست می‌آید عبارت‌اند از: $-4, -5, -6$ و پس $B = \{-4, -5, -6\}$ است.

۴۹. گزینه د مجموعه‌های A, B و C به صورت زیر هستند:

$$A = \{0, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\}, B = \{0\}, C = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

نمایش مجموعه‌ها با اعضا و علایم ریاضی: (پیشرفته)

۵۰. گزینه ب

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

نکته ۱۳:

$$A = \{x \mid x = (-1)^n \times ((n-1)^2)^2, n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = (-1)^n \times (n-1)^4, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow A = \{(-1)^1 \times (1-1)^4, (-1)^2 \times (2-1)^4, (-1)^3 \times (3-1)^4, \dots\} = \{0, 1, -16, \dots\}$$

۵۱. گزینه ب این مجموعه را می‌توان به صورت $\{10^x + 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$ نیز نمایش داد.

۵۲. گزینه د

$$A = \{7 \times 1, 7 \times 11, 7 \times 111, 7 \times 1111, \dots\} = \left\{ 7 \times \frac{10^1 - 1}{9}, 7 \times \frac{10^2 - 1}{9}, 7 \times \frac{10^3 - 1}{9}, \dots \right\} = \left\{ 7 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$$

۵۳. گزینه ب مجموعه‌های A و C به درستی نمایش داده شده‌اند اما مجموعه‌های B و D نادرست‌اند. در مجموعه‌ی D باید شرط $x \geq 2$ یا $x \neq 1$ به کار برده می‌شد.

۵۴. گزینه ج عضوهای مجموعه‌ی A ، شمارنده‌های صحیح عدد ۲۶ هستند. بنابراین اگر عدد ۲۶ را بر این اعداد تقسیم کنیم،

حاصل عددی صحیح می‌شود پس $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{26}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$ است.

۵۵. گزینه ب اگر عضوها بر ۷ بخش‌پذیر باشند (یعنی باقی مانده صفر باشد)، عضوها به صورت $7x$ می‌باشند و چون هر

عضو ۵ واحد باقی مانده دارد پس عضوها به صورت $7x + 5$ هستند که در آن $x \in \mathbb{W}$ (اعداد حسابی) و $7x + 5 < 100 \Rightarrow x < \frac{95}{7}$ است.

۵۶. گزینه د x می‌تواند اعداد منفی نیز باشد:

$$\left\{ x \mid \frac{12}{x-1} \in \mathbb{Z} \right\} = \{-11, -5, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 7, 13\}$$

۵۷. گزینه ج اگر عددی منفی به توان زوج برسد، مثبت می‌شود پس عضوها در گزینه‌ی (ج) باید مثبت باشند.

۵۸. گزینه ب ابتدا x و y های طبیعی را که مجموع آن‌ها ۵ می‌باشد را مشخص می‌کنیم و سپس آن‌ها را در توان جایگذاری

$$\left. \begin{aligned} x=1, y=4 &\rightarrow 2^4 = 16 \\ x=2, y=3 &\rightarrow 2^6 = 64 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \{16, 64\}$$

می‌کنیم:

توجه کنید که در این سؤال $x=1$ و $y=4$ فرقی با $x=4$ و $y=1$ ندارد زیرا ضرب خاصیت جابه‌جایی دارد.

۵۹. گزینه د

نکته ۱۴: اگر عضوهای مجموعه‌ای یکی در میان مثبت و منفی باشند، در توصیف مجموعه با علامت ریاضی،

باید از ضرب $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ که $n \in \mathbb{N}$ یا $n \in \mathbb{W}$ است، استفاده کرد.

$$\{(-2)^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(-1)^x \times 2^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$$

۶۰. گزینه ج

۶۱. گزینه د

نکته ۱۵: در مجموعه‌هایی که عضوهای دو تا در میان مثبت و منفی هستند، ضرب $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ یا

$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ و اگر سه تا در میان باشند، از $(-1)^{\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor}$ که در آن $\lfloor \cdot \rfloor$ علامت جزء صحیح است، استفاده می‌شود.

۶۲. گزینه ج با توجه به نکته‌ی (۱۵) و با امتحان گزینه‌ها، جواب درست مشخص می‌شود.

۶۳. گزینه ب با امتحان گزینه‌ها و به دست آوردن K از طریق معادله برای هر گزینه داریم: گزینه‌ی (الف) می‌تواند عضو

$$\frac{2K-1}{3K+1} = \frac{23}{37} \Rightarrow 74K - 37 = 69K + 23 \Rightarrow 5K = 60 \Rightarrow K = 12 \in \mathbb{Z}$$

مجموعه‌ی داده شده باشد. زیرا:

ولی گزینه‌ی (ب) نمی‌تواند عضو مجموعه‌ی داده شده باشد. زیرا برای K مقدار صحیح حاصل نمی‌شود:

$$\frac{2K-1}{3K+1} = \frac{20}{31} \Rightarrow 62K - 31 = 60K + 20 \Rightarrow 2K = 51 \Rightarrow K \notin \mathbb{Z}$$

۶۴. گزینه ب عدد گویا، عددی است که اولاً بتوان آن را به صورت کسر نوشت. ثانیاً صورت و مخرج عضو اعداد صحیح بوده

و مخرج صفر نباشد.

۶۵. گزینه ب

یادآوری: مجموعه‌ی اعداد گویا را با \mathbb{Q} نمایش می‌دهند.

۶۶. گزینه د $\sqrt{3} \approx 1,73$ و $\sqrt{2} \approx 1,41$ است. در میان اعداد داده شده $\frac{1}{6} = 1,6$ است که بین $1,4$ و $1,7$ قرار دارد.

مشخص است که عدد مخرج، یکی بیش‌تر از صورت کسر است.

$$\frac{a}{b} = \frac{3b}{b} = 3$$

۶۷. گزینه ج طبق توصیف مجموعه‌ی B ، $a = 3b$ است. پس می‌توان نوشت:

$$x-1 = 3y \Rightarrow x-3y = 1 \Rightarrow 2^x - 3^y = 2^1 = 2 \Rightarrow A = \{2\}$$

$$4y - x = 2 \Rightarrow 4y = x + 2$$

۶۸. گزینه ج با توجه به شرط توصیفی مجموعه داریم:

$$\frac{3x+1}{9^2y} = \frac{3x+1}{3^4y} = \frac{3x+1}{3^{x+2}} = 3^{x+1-(x+2)} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

از طرفی با توجه به توصیف مجموعه می‌توان نوشت:

۷۰. گزینه د $x \in \mathbb{N}$ $-2 < x^2 - 1 < 15 \Rightarrow -1 < x^2 < 16 \Rightarrow B = \{1, 2, 3\}$ است. بنابراین مجموعه‌های

A و B فقط دارای ۲ عضو مشترک هستند که عبارت‌اند از: ۲ و ۳

۷۱. گزینه الف

ابتدا x و y های صحیحی به دست می آوریم که حاصل ضربشان -2 است و سپس عضوهای A را به دست

$$x = 1, y = -2 \Rightarrow 3 \times (1)^{-(-2)} - 2 \times (-(-2))^{-1} = 3 - 2 \times \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

می آوریم:

$$x = -1, y = 2 \Rightarrow 3 \times (-1)^{-2} - 2 \times (-2)^{-(-1)} = 3 + 4 = 7$$

$$x = 2, y = -1 \Rightarrow 3 \times 2^{-(-1)} - 2 \times (-(-1))^{-2} = 6 - 2 = 4$$

$$x = -2, y = 1 \Rightarrow 3 \times (-2)^{-1} - 2 \times (-1)^{-(-2)} = \frac{-3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \Rightarrow A = \{2, 4, 7, -\frac{7}{2}\}$$

تعداد عضوهای مجموعه

۷۲. گزینه ج
طبق نکته ی (۶) می توان نوشت:

$$\frac{137-5}{2} + 1 = 67$$

تعداد عضوهای مجموعه A

$$\frac{123-3}{4} + 1 = 31$$

تعداد عضوهای مجموعه B

در نتیجه تعداد عضوهای مجموعه A ، $67 - 31 = 36$ عضو بیش تر از تعداد عضوهای مجموعه B است.

۷۳. گزینه ب

نکته ۱۶: تعداد عضوهای مجموعه A را با نمادهای $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می دهند. همچنین به تعداد عضوهای هر مجموعه، «عدد اصلی» آن مجموعه می گویند.

$$n(A) = \frac{105-3}{3} + 1 \Rightarrow n(A) = 35$$

طبق نکته های (۶) و (۱۶) تعداد عضوهای هر یک از مجموعه ها را به دست می آوریم:

$$n(B) = \frac{+17 - (-35)}{2} + 1 \Rightarrow n(B) = 27$$

$$n(C) = \frac{1000 - (110)}{5} \Rightarrow n(C) = 179$$

در مجموعه C ، ابتدا علامت ها را حذف کرده و سپس تعداد را به دست می آوریم:

$$n(D) = \frac{9 - (-9/25)}{0.25} + 1 \Rightarrow n(D) = 74$$

بنابراین در سؤال، $n(B)$ نادرست نوشته شده است.

$$M = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}\} \rightarrow \text{مجموعه } M, 11 \text{ عضو دارد}$$

۷۴. گزینه ب

$$E = \{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^8\} \rightarrow \text{مجموعه } E, 9 \text{ عضو دارد}$$

در نتیجه اختلاف عضوهای دو مجموعه M و E ، $11 - 9 = 2$ عضو است.

۷۵. گزینه ج

$$-6 \frac{1}{4} < x < 5 \frac{2}{3} \rightarrow \{-6, -5, -4, \dots, 5\} \rightarrow 12 \text{ عضو دارد}$$

۷۶. گزینه ج

$$-6 \leq 3x < 6 \Rightarrow -2 \leq x < 2 \rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$$

۷۷. گزینه الف

$$x \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A = \{\frac{1+1}{1}, \frac{2+1}{2}, \frac{3+1}{3}, \frac{4+1}{4}\} \Rightarrow A = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\} \rightarrow n(A) = 4$$

۷۸. گزینه د

با بررسی گزینه ها می توان دریافت که مجموعه های داده شده در گزینه ی (الف) و (ب) به ترتیب برابر با

۷۹. گزینه د

$\{2, 0\}$ و $\{2, -2\}$ هستند. همچنین مجموعه ی داده شده در گزینه ی (ج) دارای بی شمار عضو است. اما مجموعه ی داده شده در گزینه ی (د) برابر است با $\{1\}$ که فقط یک عضو دارد.

توجه: مجموعه ی اعداد غیر گویا است.

۸۰. گزینه د

نکته ۱۷: بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویای دیگر وجود دارد.

$$N = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(N) = 4$$

۸۱. گزینه ج

مجموعه‌ی A، توصیفِ شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶ است که تعداد آن‌ها برابر است با:

۸۲. گزینه د

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \Rightarrow n(A) = 9$$

۸۳. گزینه الف

نکته ۱۸: برای به دست آوردن شمارنده‌های صحیح هر عدد طبیعی، کافی است تعداد شمارنده‌های طبیعی آن

را ۲ برابر کنیم. برای به دست آوردن شمارنده‌های طبیعی هر عدد طبیعی، ابتدا آن عدد را به شمارنده‌های اول

تجزیه کرده، سپس به هر توان، یک واحد اضافه کرده و توان‌های جدید را در هم ضرب می‌کنیم. به حل سؤال

۸۳ توجه کنید.

طبق نکته‌ی (۱۸)، ابتدا تعداد شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۶۸۰۰ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$16800 = 2^5 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1 \rightarrow (5+1) \times (1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 6 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$$

طبق نکته‌ی (۱۸)، تعداد شمارنده‌های صحیح عدد ۱۶۸۰۰ برابر است با $72 \times 2 = 144$. پس مجموعه‌ی B دارای ۱۴۴ عضو می‌باشد.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} < 1, b < 13, a, b \in \mathbb{N} \right\}$$

۸۴. گزینه ب

- اگر صورت ۱ باشد، ۱۱ کسر شامل: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{12}$

- اگر صورت ۲ باشد، ۵ کسر شامل: $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}$

- اگر صورت ۳ باشد، ۶ کسر شامل: $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{3}{11}$

هم‌چنین اگر صورت ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد به ترتیب ۴، ۶، ۲، ۵، ۲، ۱ و ۱ کسر می‌توان نوشت که تعداد آن‌ها ۴۵ کسر است.

با توجه به این که اعداد منفی جذر ندارند، داریم:

۸۵. گزینه ب

$$E = \{\sqrt{x} \mid x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}\} \Rightarrow E = \{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \Rightarrow n(E) = 4$$

$$B = \left\{ \frac{1}{2^1}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4} \right\} \Rightarrow n(B) = 3$$

۸۶. گزینه الف

اگر x مثبت و بر ۳ بخش‌پذیر باشد، حاصل کسر $\frac{5x}{3}$ عددی طبیعی می‌شود. در نتیجه عضوهای مجموعه‌ی

۸۷. گزینه د

$$A = \left\{ \frac{5 \times 3}{3}, \frac{5 \times 6}{3}, \frac{5 \times 9}{3} \right\} = \{5, 10, 15\} \Rightarrow n(A) = 3$$

A برابرند با:

۸۸. گزینه الف

$$\left. \begin{aligned} x=1, y=6 &\Rightarrow \frac{3 \times 1 + 6}{3 \times 1 - 6} = \frac{9}{-3} = -3 \\ x=6, y=1 &\Rightarrow \frac{3 \times 6 + 1}{3 \times 6 - 1} = \frac{19}{17} \\ x=2, y=3 &\Rightarrow \frac{3 \times 2 + 3}{3 \times 2 - 3} = \frac{9}{3} = 3 \\ x=3, y=2 &\Rightarrow \frac{3 \times 3 + 2}{3 \times 3 - 2} = \frac{11}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow J = \left\{ -3, \frac{19}{17}, \frac{11}{7}, 3 \right\} \Rightarrow n(J) = 4$$

۸۹. گزینه ب

$$x = \frac{K}{K^2} \Rightarrow x = \frac{1}{K}, K \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{-1, 1\} \Rightarrow n(A) = 2$$

۹۰. گزینه ب می‌دانیم اعداد منفی جذر ندارند. پس x عددی نامنفی است. با توجه به شرط $\sqrt{x} \leq 5$ نتیجه می‌گیریم:

$x \in \{0, 23, 24, 25\}$. با توجه به توصیف مجموعه‌ی F ، عضوهای مثبت آن برابر است با:

$$2 \times 2 - 3, 2 \times 3 - 3, 2 \times 4 - 3, \dots, 2 \times 25 - 3 \Rightarrow 24 \text{ عضو مثبت دارد}$$

$$A = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\} \Rightarrow 0, 1, 2 \in \mathbb{Z}$$

$$n \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A = \{2^1 + 1^2, 2^2 + 2^2, 2^3 + 3^2, 2^4 + 4^2\} = \{3, 8, 17, 32\}$$

در نتیجه عضوهای اول مجموعه‌ی A ، ۳ و ۱۷ یعنی ۲ عضو است.

۹۳. گزینه ج اعداد کم‌تر از ۲۰ که پس از کم کردن ۲ واحد از هر یک از آن‌ها، حاصلشان مربع کامل شود، مطلوب هستند.

آن‌ها عبارت‌اند از: $\{2, 3, 6, 11, 18\}$ که تعدادشان ۵ تا است.

۹۴. گزینه ب

نکته ۱۹: اگر n عدد طبیعی زوج و m عدد طبیعی فرد باشد، همواره داریم: $(-1)^n = +1, (-1)^m = -1$

نکته ۲۰: در ضرب اعداد طبیعی زوج و فرد داریم:

$$\text{زوج} \times \text{زوج} = \text{زوج} \quad \text{زوج} \times \text{فرد} = \text{فرد} \quad \text{فرد} \times \text{فرد} = \text{زوج} \quad \text{زوج} \times \text{زوج} = \text{زوج}$$

با توجه به نکته‌ی (۲۰)، چون ۱۰۰۰ عددی زوج است، پس نمی‌تواند حاصل ضرب دو عدد فرد باشد. پس طبق نکته‌ی (۱۹) فقط ۲

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{\text{زوج}} + (-1)^{\text{زوج}} &= 1 + 1 = 2 \\ (-1)^{\text{فرد}} + (-1)^{\text{زوج}} &= -1 + 1 = 0 \\ (-1)^{\text{فرد}} + (-1)^{\text{فرد}} &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \{0, 2\} \Rightarrow n(A) = 2$$

حالت متمایز به وجود می‌آید که عبارت‌اند از:

۹۵. گزینه ب با شرایط مسئله، مجموعه‌ی B فقط ۲ عضو می‌تواند داشته باشد. زیرا:

$$\frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}, \frac{(-\frac{2}{5})^2}{2} = \frac{\frac{4}{25}}{2} = \frac{2}{25} \notin \mathbb{N}, \frac{0^2}{2} = 0 \notin \mathbb{N}, \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \in \mathbb{N}, \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}, \frac{2^2}{2} = 2 \in \mathbb{N}$$

۹۶. گزینه الف

$$\left. \begin{aligned} x = 1, y = 8 &\rightarrow 1^8 = 1 \\ x = 8, y = 1 &\rightarrow 8^1 = 8 \\ x = 2, y = 4 &\rightarrow 2^4 = 16 \\ x = 4, y = 2 &\rightarrow 4^2 = 16 \\ x = -1, y = -8 &\rightarrow (-1)^{-8} = 1 \\ x = -8, y = -1 &\rightarrow (-8)^{-1} = -\frac{1}{8} \\ x = -2, y = -4 &\rightarrow (-2)^{-4} = \frac{1}{16} \\ x = -4, y = -2 &\rightarrow (-4)^{-2} = \frac{1}{16} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \{1, 8, 16, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\} \Rightarrow n(A) = 5$$

۹۷. گزینه ب

تقسیم بر ۳
 $x = 3K \rightarrow -1386 \leq 3K < 2007 \Rightarrow -462 \leq x < 669$

$\Rightarrow K \in \{-462, -461, -460, \dots, 668\} \Rightarrow n(K) = 668 - (-462) + 1 \Rightarrow n(K) = 1131$

بنابراین برای x نیز ۱۱۳۱ عدد مختلف حاصل می شود پس $n(A) = 1131$

۹۸. گزینه ج

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1$

نکته ۲۱: اگر a مثبت باشد، همواره داریم:

توجه: اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، همواره داریم:

کسر $\frac{\sqrt{2880} - \sqrt{2879}}{2}$ ، کسری کوچکتر از واحد است پس مقدار آن بین ۰ و ۱ است. هم چنین کسر $\frac{\sqrt{2251} - \sqrt{2250}}{2}$ نیز

کسری کوچکتر از واحد یعنی بین صفر و ۱ است. پس می توان نوشت:

خوردهای $0 < x < 1$ / خوردهای $0 < x < 7$ / خوردهای $0 < x < 2$

در نتیجه عضوهای این مجموعه عبارتند از: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. پس این مجموعه ۹ عضو دارد.

تعداد عضوهای هر مجموعه را به دست آورده و با هم مقایسه می کنیم:

۹۹. گزینه ج

(الف): $0 \leq x^2 \leq 10 \Rightarrow x = 1, 2, 3 \rightarrow n(\text{الف}) = 3$

(ب): $0 \leq \sqrt{x} \leq 10 \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, \dots, 100 \rightarrow n(\text{ب}) = 100$

(ج): $0 \leq \sqrt{x} \leq 10 \Rightarrow x = 0, 1, 2, \dots, 100 \rightarrow n(\text{ج}) = 101$ بیشترین تعداد عضو را دارد.

(د): $0 \leq x^2 \leq 10 \Rightarrow x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \rightarrow n(\text{د}) = 7$

با توجه به این که $2^{12} = 2 \times 2^{11} = 2^{11} + 2^{11}$ می توان نوشت:

۱۰۰. گزینه ج

$A = \{2^{11} + 2 \times 1, 2^{11} + 2 \times 2, 2^{11} + 2 \times 3, 2^{11} + 2 \times 4, \dots, 2^{11} + 2 \times 2^{10}\}$

پس می توان نتیجه گرفت مجموعه A دارای 2^{10} عضو است.

۱۰۱. گزینه د

نکته ۲۲: مجموعه ای که فقط یک عضو دارد، مجموعه ی یکانی نام دارد.

در گزینه ی (الف)، عدد ۱۰۰۱ بر ۱۱ و عدد ۱۰۰۳ بر ۱۷ بخش پذیر است پس بین ۱۰۰۰ و ۱۰۰۵ عدد اول وجود ندارد. در گزینه ی

(ب)، $n(A) = 2$ است. در گزینه ی (ج) $n(B) = 2$ است. در گزینه ی (د) داریم:

$x^7 + x^5 + x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^6 + x^4 + x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow n(C) = 1$

$(x-2)^{x+3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0, x-2 \neq 0 \Rightarrow x=-3 \\ x-2=1, (x+3) \in \mathbb{R} \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1, (x+3) \text{ زوج} \Rightarrow x=1 \end{cases}$

۱۰۲. گزینه د

$51 = 1 \times 51 = -1 \times -51 = 3 \times 17 = -3 \times -17$

۱۰۳. گزینه د

$\begin{cases} x+y+5=1 \\ x-y+9=51 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=-23 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+5=51 \\ x-y+9=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=27 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+5=3 \\ x-y+9=17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$
 $\begin{cases} x+y+5=17 \\ x-y+9=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+5=-1 \\ x-y+9=-51 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-33 \\ y=27 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+5=-51 \\ x-y+9=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-33 \\ y=-23 \end{cases}$
 $\begin{cases} x+y+5=-3 \\ x-y+9=-17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-17 \\ y=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+5=-17 \\ x-y+9=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-17 \\ y=-5 \end{cases}$

$\Rightarrow A = \left\{ \frac{19}{23}, \frac{19}{27}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{9}, -\frac{33}{27}, -\frac{33}{23}, -\frac{17}{9}, \frac{17}{5} \right\} \rightarrow$

مجموعه A دارای ۸ عضو متمایز است.

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو

در مجموعه‌ی $A = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ بزرگ‌ترین عضو، -1 است.

بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی B ، 3 و کوچک‌ترین عضو، $+1$ است که جمع آن‌ها 4 می‌شود.

عدد 10 غیراول است و $10^2 < 135 < 10^3$ است.

۱۰۴. گزینه ب

۱۰۵. گزینه ب

۱۰۶. گزینه د

اگر $x = 1$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی A به دست می‌آید:

$$-(x-1)^2 + 1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} -\underbrace{(1-1)^2}_0 + 1 = +1$$

۱۰۷. گزینه الف

با توجه به این که $\sqrt{11} \simeq 3,3$ و $3,3 < 2^1$ می‌توان نوشت:

۱۰۸. گزینه الف

$$\{3x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}, 2^x < \sqrt{11}\} = \{3x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 1\} = \{\dots, -11, -8, -5, -2\}$$

در نتیجه بزرگ‌ترین عضو، عدد -2 می‌باشد.

با توجه به این که اگر y عددی منفی باشد، حاصل x^y کوچک می‌شود، در y های مثبت داریم:

۱۰۹. گزینه ب

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1
x^y	12	26	34	43	62	121

بزرگ‌ترین عضو $3^4 - 1 = 81 - 1 = 80 \Rightarrow$

کم‌ترین مقدار برای x^{2y} زمانی حاصل می‌شود که x عددی کوچک و y نیز عددی کوچک باشد پس با

$$8^{2(1)} = 8^2 = 64$$

انتخاب $x = 8$ و $y = 1$ کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی A حاصل می‌شود:

۱۱۰. گزینه د

$$A = \left\{ \frac{12x}{x^2} \mid x \in \mathbb{N}, -7 < \sqrt{x} \leq 4 \right\} = \left\{ \frac{12}{x} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 16 \right\}$$

۱۱۱. گزینه ب

اگر x شمارنده‌ی 12 باشد، حاصل کسر $\frac{12}{x}$ عددی صحیح می‌شود پس از بین اعداد طبیعی از 1 تا 16 شمارنده‌های 12 یعنی $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ را کم می‌کنیم. در نتیجه $10 = 16 - 6 = 10$ عضو از مجموعه‌ی A عدد صحیح نیستند.

$$(140, 224) = 28 \Rightarrow 224x + 140y = 28k, k \in \mathbb{Z}$$

۱۱۲. گزینه د

$$\Rightarrow 224x + 140y - 77 = 28k - 77 > 0 \Rightarrow k > \frac{77}{28} \Rightarrow k > 2 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow 28 \times 3 - 77 = 84 - 77 = 7 \text{ کوچک‌ترین عضو مثبت}$$

زیرمجموعه

۱۱۳. گزینه الف

نکته ۲۳: هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی B ، عضوی از مجموعه‌ی A باشد، یا این که همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی B ، از عضوهای مجموعه‌ی A انتخاب شده باشند، می‌گوییم B زیرمجموعه‌ی A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$ است. اگر عضوی در B باشد که از A انتخاب نشده باشد (یعنی این عضو در A نباشد) می‌گوییم مجموعه‌ی B زیرمجموعه‌ی A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

نکته ۲۴: هر زیرمجموعه، خودش یک مجموعه است. بنابراین علامت \subseteq همواره باید بین دو مجموعه قرار گیرد.

۱۱۴. گزینه ب

۱۱۵. گزینه الف

۱۱۶. گزینه ج

در گزینه‌ی (ب)، مجموعه‌ی A عضوی ندارد.


$$A = \{1, 2, \phi\} = \{1, 2, \{\}\}$$

اما در گزینه‌ی (ج)، تهی عضوی از مجموعه‌ی A است زیرا:

در گزینه‌ی (د)، $A = \{1, 2, \{\phi\}\}$ است و ϕ عضو A محسوب نمی‌شود. بلکه $\{\phi\}$ عضوی از A است.

نکته ۲۵: اگر نمودار داده شده به صورت  باشد، می‌نویسیم: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ زیرا طبق

نمودار $4 \in A$ و $3 \in A$ است. اگر اشتباهاً می‌نوشتیم $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$ در این صورت ۳ و ۴ دیگر نمی‌توانستند عضوی از مجموعه‌ی A باشند. حتی نوشتن به صورت $A = \{1, 2, C\}$ نادرست است زیرا در این

صورت نیز اعداد ۳ و ۴ فقط عضوی از C بودند نه A. پس اگر بخواهیم برای نمودار  مجموعه

بنویسیم، باید نوشت: $A = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{3, 4\}$

۱۱۷. گزینه ب $\{a\}$ زیرمجموعه‌ی A نیست بلکه $\{a\}$ عضوی از A است. یعنی $\{a\} \in A$

۱۱۸. گزینه الف عضو $\{2\}$ در B وجود دارد که از A انتخاب نشده است پس $B \not\subseteq A$.

۱۱۹. گزینه ج در سؤالات قسمت‌های جلوتر در همین فصل می‌خوانید که به این نوع مجموعه‌ها، مجموعه‌ی توانی می‌گویند.

۱۲۰. گزینه د هر چهار مورد داده شده درست هستند.

۱۲۱. گزینه الف مشخص است که همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A از مجموعه‌ی اعداد اول (P) هستند پس $A \subseteq P$ است.

۱۲۲. گزینه د با توجه به توصیف مجموعه‌ی B، همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی B از A انتخاب شده‌اند پس $B \subseteq A$ است.

۱۲۳. گزینه ب مجموعه‌ی B دارای ۷ عضو است: $B = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$

۱۲۴. گزینه الف \mathbb{R} مجموعه‌ی اعداد حقیقی است که در فصل دوم به طور کامل در مورد آن توضیح داده شده است.

۱۲۵. گزینه ب هر عضو دلخواه از مجموعه‌ی A، در $32 = 2^5$ زیرمجموعه به کار رفته است. پس وقتی عضوهای همه‌ی

زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A را با هم جمع کنیم، هر عضو ۳۲ بار تکرار می‌شود. پس حاصل جمع برابر است با: $32 \times 40 = 1280$

نکته ۲۶: اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد به طوری که مجموع عضوهای آن عدد M باشد، مجموع

$$2^{n-1} \times M$$

همه‌ی زیرمجموعه‌های A برابر است با:

$$x^2 + K = 6 \Rightarrow x^2 = 6 - K$$

۱۲۶. گزینه د طبق تعریف مجموعه‌ی A و این که $6 \in A$ و $9 \in A$ است، داریم:

$$x'^2 + K = 9 \Rightarrow x'^2 = 9 - K$$

$6 - K$ و $9 - K$ مربع کامل هستند و ۳ واحد با یکدیگر اختلاف دارند که می‌توان نتیجه گرفت آن دو مربع کامل اعداد ۱ و ۴

هستند که در نتیجه $K = 5$ است. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا مشخص شود ۵ عضو کدام مجموعه است. داریم:

مجموعه‌ی (الف) $\{5x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 1, 6, 11, \dots\} \Rightarrow 5 \notin$ ؛ مجموعه‌ی (ب) $\{4x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 3, 7, 11, \dots\} \Rightarrow 5 \notin$

مجموعه‌ی (ج) $\{2x + 6 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 2, 4, 6, 8, \dots\} \Rightarrow 5 \notin$ ؛ مجموعه‌ی (د) $\{3x - 4 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} \Rightarrow 5 \in$

۱۲۷. گزینه ب

$$A \subseteq B \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}, \forall a + b = 0 \Rightarrow -2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$