

# پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سوالات و مسائل مسابقات ریاضی هفتم

از مجموعه مرشد

- ۲۰۰۰ تست (شامل: تیزهوشان، آزمون‌های ورودی مدارس برتر کشور، آزمون‌های پیشرفت تحصیلی سمپاد، مسابقات جهانی ریاضی، المپیادها و مسابقات علمی داخلی و خارجی و...)
- ۳۰۰ نکته‌ی کلیدی درس ریاضی اول دبیرستان که دانش‌آموزان ممتاز باید فراگیرند.
- پاسخ‌نامه‌ی تشریحی و نکات مهم کتاب مرشد

## و حیداسی کیا

مرشد: مرجع رشد و شکوفایی دانش‌آموزان

ویژه دانش‌آموزان ممتاز و داوطلبان شرکت در مسابقات  
و آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و برتر



---

# تاریخ

---

## به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «**مسابقات ریاضی هفتم**» از مجموعه‌ی «مرشد» را منتشر می‌کنیم. این کتاب که توسط آقای وحید اسدی کیا زیر نظر آقای هادی عزیززاده تألیف شده است، دانش‌آموزان کلاس اول دبیرستان (دوره‌ی اول متوسطه) را برای شرکت در مسابقات ریاضی و امتحانات و آزمون‌های ورودی مدارس خاص آماده می‌کند.

در تألیف این کتاب از منابع متعددی استفاده شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه‌ی تهران و مرکز استان‌های کشور
- آزمون‌های پیشرفت تحصیلی سمپاد (سازمان ملی پرورش استعداد‌های درخشان) ❁
- آزمون‌های ورودی روبوکاپ
- مسابقات علمی کشوری و بین مدرسه‌ای و المپیادهای داخلی و خارجی
- مسایل مسابقات جهانی ریاضی IMC، کانگورو و آزمون جهانی تیمز
- مسایل مسابقات خارجی (کشورهای آمریکا، انگلیس، استرالیا، مجارستان، بلژیک، آفریقای جنوبی و...)
- مسایل المپیادهای مبتکران و آزمون‌های نشانه‌ی مبتکران
- آزمون‌های چهارگزینه‌ای داخلی مدارس تیزهوشان تهران

مسائل این آزمون‌ها، براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی هفتم (اول دبیرستان دوره‌ی متوسطه) طبقه‌بندی شده و از آسان به سخت مرتب گردیده‌اند. برخی از آن‌ها بدون راهنمایی و اشاره به نکته کلیدی قابل حل نیستند که با علامت  $\square$  مشخص شده‌اند تا دانش‌آموزان قبل از اقدام به حل آن‌ها، ابتدا نکته‌ی مورد نظر را مطالعه کنند. (تعداد پاکت‌ها نشان دهنده‌ی تعداد نکته‌های آن سؤال می‌باشد)

گفتنی است کتاب مرشد هفتم در دو جلد تألیف شده است:

- **جلد اول:** شامل سؤالات همراه با پاسخ‌نامه‌ی کلیدی آن‌ها
- **جلد دوم:** شامل پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سؤالات و نکات مهم مربوط به آن‌ها

امیدواریم کتاب ریاضی مرشد هفتم، مورد توجه خانواده‌ها، دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر افتد.

در پایان، وظیفه‌ی خود می‌دانیم از مؤلف کتاب آقای وحید اسدی‌کیا و دبیر مجموعه‌ی مرشد آقای هادی عزیززاده و از آقایان فتح‌اله پرباز، اباصلت نوراللهی، ناصر کاهه، پدram کاشانی، پوریا فیاض‌نکو و علی وحدانی‌نژاد و خانم‌ها مهندس ندا قدسی و مهندس لیلا عباس‌زاد، عطیه وحدانی‌نژاد، فاطمه ستاری مرجانی، مریم مقصودی، فاطمه زرین‌گل، مهدیه مهدی‌زاده، پونه سپاهی که بنا به گزارش مؤلف با وی همکاری علمی داشته‌اند و بخش‌هایی از کتاب را ویرایش کرده‌اند، تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها لیلا مهرعلی‌پور (که زحمت حروف‌چینی، ترسیم شکل‌ها و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند) و بهاره خدای (گرافیکست) بسیار ممنونیم و برای همه‌ی این عزیزان آرزوی موفقیت داریم.

**انتشارات مبتکران**



۱۵۳



۷



۱۷۱



۳۵



۲۰۱



۵۱



۲۱۹



۸۵



۱۲۷

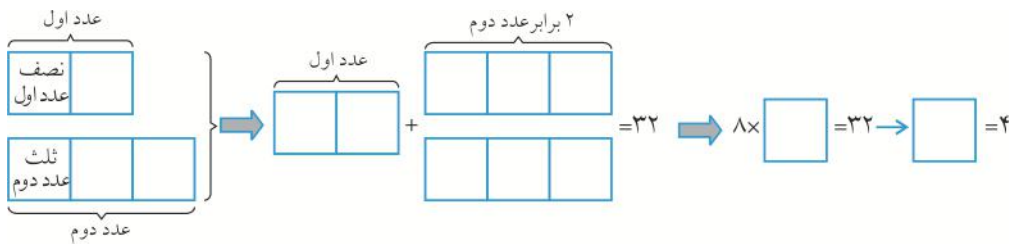


# فصل ۱

راهبردهای حل مسئله

راهبرد رسم شکل

۱. گزینه د



در نتیجه عدد اولی  $2 \times 4 = 8$  و عدد دومی  $3 \times 4 = 12$  و اختلاف آن‌ها  $12 - 8 = 4$  است.

۲. گزینه ب

جرم ۴ پرتقال با جرم ۴۵ آلو برابر است.

پرتقال	پرتقال	
سیب	سیب	سیب
آلو ۱۵	آلو ۱۵	آلو ۱۵

۳. گزینه الف

با توجه به این که:

داریم:

والیبال

فوتبال	بوکس	بوکس
والیبال	کشتی	
	کاراته	۹ نفر

$$\frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$$

$$9 \div 3 = 3 \text{ نفر}$$

$$30 \times 3 = 90 \text{ نفر}$$

۴. گزینه ج

می‌دانیم:  $\frac{1}{4} = 25\%$  است. طبق شکل رسم شده، کل پول، ۳۲ برابر باقی‌مانده است و ارتباطی به قیمت دفترها ندارد.

کتاب علمی	کیف	دفترها	باقی مانده
-----------	-----	--------	------------

۵. گزینه ب

می‌دانیم  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  است. با راهبرد رسم شکل داریم:

$$\Rightarrow \frac{1}{12} \text{ از پول می‌شود } 1100 = 600 + 100 + 400$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1100}{13200}$$

کتاب	کیف
۶۰۰	دفتر
۱۰۰	
۴۰۰	

۶. گزینه الف

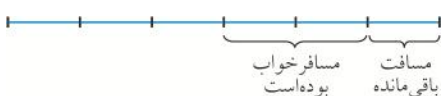
کسر باقی‌مانده از حافظه:  $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

روز چهارم ویروسی شد	روز سوم ویروسی شد	روز دوم ویروسی شد	روز اول ویروسی شد
---------------------	-------------------	-------------------	-------------------



۷. گزینه ب با رسم شکل حل می‌کنیم. کل مسیر را یک خط راست در نظر می‌گیریم و طبق مسأله پیش می‌روییم: از شکل

مشخص است  $\frac{2}{6}$  مسیر یعنی  $\frac{1}{3}$  مسیر مسافر خواب بوده است.



۸. گزینه د

۹. گزینه ب

ورزشی نفر  $50 - 2 = 48$

نفر  $25 + 29 = 54$

مشترک نفر  $54 - 48 = 6$

۱۹ نفر فقط عضو فوتبال و ۲۳ نفر فقط عضو والیبال هستند. پس:

نفر  $19 + 23 = 42$

فقط عضو یک رشته‌ی ورزشی هستند

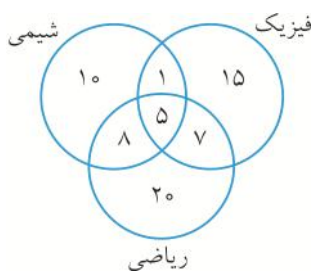
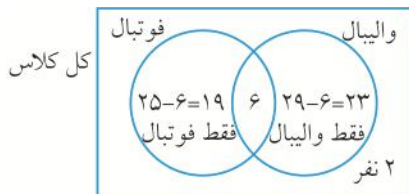
۱۰. گزینه د راهبرد رسم شکل: ابتدا ۴ نفر را از ۷۰ نفر کم می‌کنیم و ۵

نفر را وسط گذاشته سپس نفراتی که مشترک هستند را مشخص می‌کنیم.

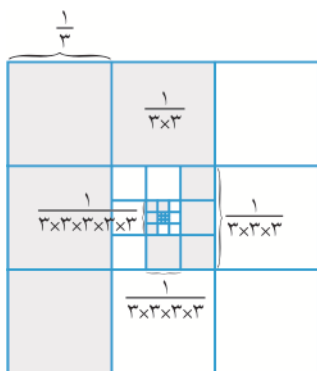
با توجه به تعداد نفرات هر درس، شکل را کامل می‌کنیم. داریم:

$\Rightarrow 10 + 15 + 20 = 45$

۴۵ نفر فقط در یک درس ثبت نام کرده‌اند.



۱۱. گزینه ب طبق شکل زیر مشخص می‌شود که نزدیک به  $\frac{1}{3}$  شکل رنگ شده است.

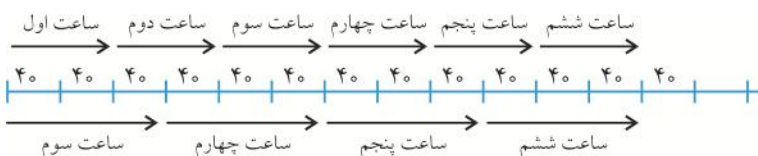


توجه: این الگوی رنگ زدن، همواره ادامه دارد.

۱۲. گزینه د

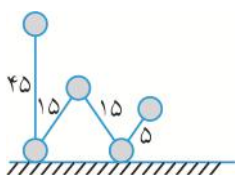
اتومبیل پس از  $4 = 6 - 2$  ساعت از شروع

حرکت به اتوبوس می‌سد.



۱۳. گزینه ب با راهبرد رسم شکل داریم:

$\rightarrow 45 + 15 + 15 + 5 = 80$

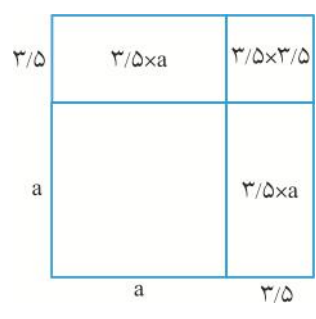


۱۴. گزینه ب فرض می‌کنیم جریمه‌ی اولین خطا  تومان باشد. داریم:

$\square + \square + \square + \square + \square + \square = 15 \times \square = 22500 \Rightarrow \square = 1500$  تومان

راهبرد رسم شکل:

۱۵. گزینه ج



$$3/5 \times 3/5 = 12/25$$

$$82/25 - 12/25 = 70$$

$$70 \div 2 = 35 \rightarrow 3/5 \times a = 35 \rightarrow a = 10 \text{ متر}$$

در ۱۵ شبانه روز اول، ۱۵ متر بالا می آید و در روز شانزدهم، ۵ متر بالا می آید و به بالای گودال می رسد و نجات پیدا می کند.

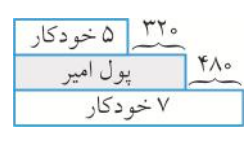
۱۶. گزینه ج



۱۷. گزینه د  
طبق شکل در گوشه های استخر کمانی به شعاع ۱ متر زده می شود. ۴ کمان با هم یک دایره به شعاع ۱ متر می سازند و طول بقیه ی نرده با محیط استخر برابر است. پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{متر } 6/28 = 2 \times 3/14 = \text{محیط دایره به شعاع } 1 \\ \text{متر } 60 = (18 + 12) \times 2 = \text{محیط استخر} \end{array} \right\} \Rightarrow 60 + 6/28 = 66/28 \text{ متر}$$

۱۸. گزینه د

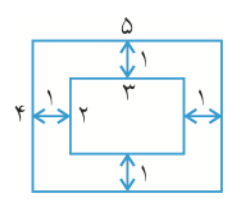


خودکار  $7 - 5 = 2$

قیمت ۲ خودکار  $320 + 480 = 800$

پول امیر  $800 \div 2 = 400 \Rightarrow 5 \times 400 + 320 = 2320$

۱۹. گزینه ب

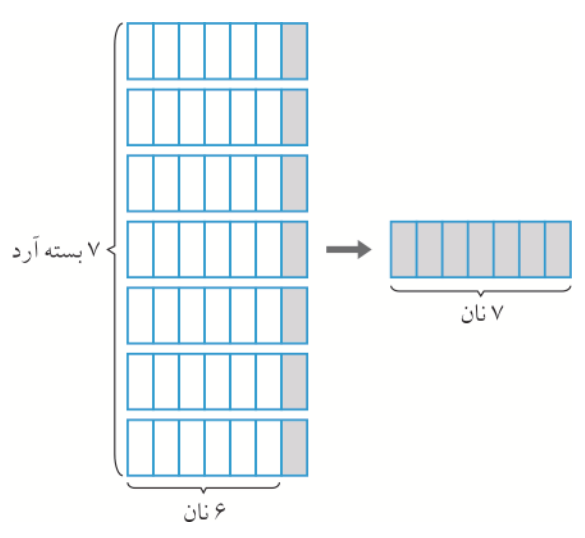


طول اتاق  $3 + 2 = 5$  و عرض اتاق  $2 + 2 = 4$

مساحت اتاق  $4 \times 5 = 20$  مترمربع  $\Rightarrow$

۲۰. گزینه ج  
با توجه به شکل زیر درمی یابیم که از هر بسته آرد، ۷ نان می توان درست کرد، پس با ۶۲ بسته آرد، ۴۳۴ نان می توان درست کرد.

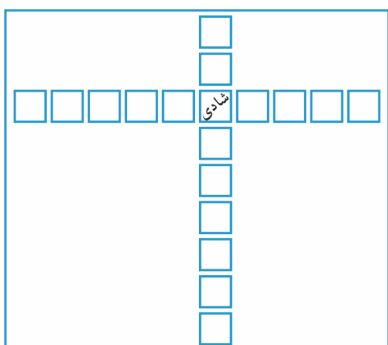
۲۰. گزینه ج



۲۱. گزینه ه

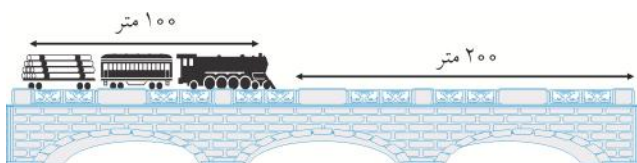
با توجه به شکل، در این سالن، ۹ ردیف صندلی و در هر ردیف، ۱۰ صندلی وجود دارد.  
پس:

$$9 \times 10 = 90 \text{ صندلی}$$



۲۲. گزینه ج

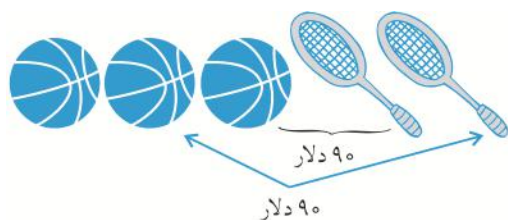
با توجه به شکل، برای آن که قطار به طور کامل از روی پل بگذرد، باید مسافتی برابر با مجموع طول پل و طول قطار را طی کند. یعنی ۳۰۰ متر. پس داریم:



$$300 \div 10 = 30 \text{ ثانیه}$$

۲۳. گزینه ب

با رسم شکل داریم:

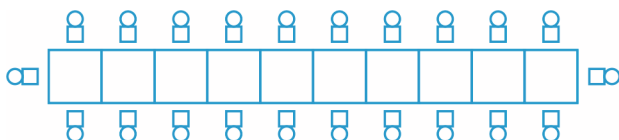


$$\Rightarrow 90 + 90 + 90 = 270$$

$$\Rightarrow 270 - 180 = 90 \text{ دلار}$$

۲۴. گزینه د

با توجه به شکل رسم شده، در مجموع، ۲۲ صندلی دور این میز قرار می‌گیرد.



۲۵. گزینه الف

تعداد دانش‌آموزان دختر	
تعداد دانش‌آموزان پسر	۱۴ نفر

$$\Rightarrow 86 - 14 = 72$$

$$\Rightarrow 72 \div 2 = 36 \text{ تعداد پسرها}$$

۴۵۰ لیتر	خالی

۲۶. گزینه د

می‌دانیم ۲۵ درصد یعنی  $\frac{1}{4}$ . اگر بین ۳ و ۴، مخرج مشترک

۱۲ را در نظر بگیریم، داریم:  $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$  و  $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ . بنابراین، داریم:

$$\rightarrow 12 \times 450 = 5400 \text{ لیتر}$$

$$\rightarrow 5400 \div 1000 = 5.4 \text{ مترمکعب}$$

۲۷. گزینه ب

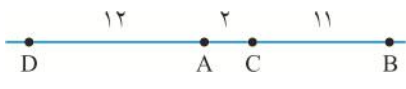
طبق شکل مشخص است که جرم ۵ جعبه تخم‌مرغ با جرم

$$3 \times 15 = 45 \text{ طالبی برابر است. پس جرم هر جعبه تخم‌مرغ با } 45 \div 5 = 9 \text{ طالبی}$$

برابر است. مجدداً با رسم شکل داریم:

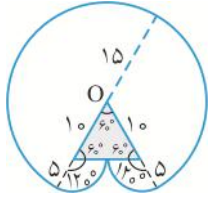
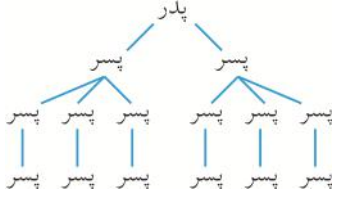
۵ جعبه تخم‌مرغ		
۴ هندوانه	۴ هندوانه	۴ هندوانه
۱۵ طالبی	۱۵ طالبی	۱۵ طالبی
۱ جعبه تخم‌مرغ		
۹ طالبی		

$$\text{جرم } 3 \text{ جعبه تخم‌مرغ با جرم } 3 \times 9 = 27 \text{ طالبی برابر است.}$$



۲۸. گزینه الف با رسم شکل داریم:

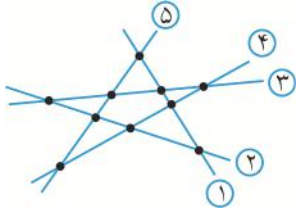
دورترین دو نقطه نسبت به یکدیگر، B و D هستند که فاصله‌ی آن‌ها ۲۵ می‌باشد.  
۲۹. گزینه ب ۱۵. به شکل زیر توجه کنید:



۳۰. گزینه ج در دایره‌ی بزرگ  $\frac{300}{360} = \frac{5}{6}$  و در دایره‌ی کوچک:  $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$  با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{5}{6} \times 15 \times 15 \times \pi\right) + \left(2 \times \frac{1}{3} \times 5 \times 5 \times \pi\right) = \frac{1125 \times \pi}{6} + \frac{50 \times \pi}{3} = \frac{1225 \times \pi}{6} \approx 204 \times \pi$$

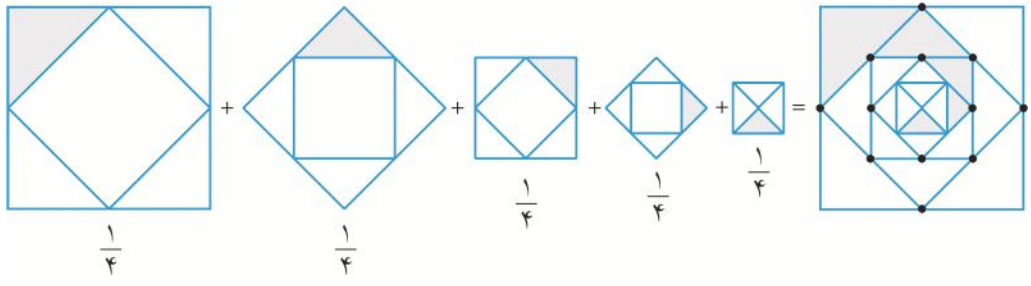
۳۱. گزینه ب با راهبرد رسم شکل، حداقل، ۱۰ شاخه گل لازم داریم.



$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5}\right) = \frac{58}{120} = \frac{29}{60}$$

۳۲. گزینه ب اگر در شکل دقت کنید، می‌بینید که از هر ۳ قسمت مساوی، یک قسمت رنگ شده است. پس  $\frac{1}{3}$  از کل شکل رنگ شده است.  
۳۳. گزینه ب رنگ شده است.

۳۴. گزینه ج از هر شکل  $\frac{1}{4}$  رنگ شده است، پس  $\frac{1}{4}$  از کل شکل رنگی است. مربع داخلی هر شکل را در نظر نگیرید.



راهبرد تفکر نظام‌دار یا الگوسازی (جدول نظام‌دار)

تعداد اسب	تعداد سوارکار	مجموع پاها
۱۱	۱۱	$44 + 22 = 66$
۱۲	۱۰	$48 + 20 = 68$
۱۳	۹	۷۰
→ جواب	۱۴	۷۲

۳۵. گزینه د البته بهتر بود در مسئله عنوان می‌کرد که سوارکارها بر روی اسب‌ها سوار نشده‌اند.

۳۶. گزینه ب

عدد طبیعی اولی	۱	۲	۴	۶	۱۲
عدد طبیعی دومی	۱۳۲	۶۶	۳۳	۲۲	۱۱
مجموع	۱۳۳	۶۸	۳۷	۲۸	۲۳

جواب

$$۱۳۲ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۱۱$$

همه‌ی حالت‌هایی که حاصل ضرب دو عدد طبیعی، ۱۳۲ می‌شود را می‌نویسیم. با توجه به این‌که:

۳۷. گزینه د

عدد طبیعی اول	۱	۲	۳	۴	۶
عدد طبیعی دوم	۳۶	۱۸	۱۲	۹	۶
حاصل جمع	۳۷	۲۰	۱۵	۱۳	۱۲

جواب

غیرقابل قبول

توجه: دو عدد باید متمایز باشند.

۳۸. گزینه ج

عدد طبیعی اول	۱	۲	۳	...	۱۱	۱۲
عدد طبیعی دوم	۲۳	۲۲	۲۱	...	۱۳	۱۲
حاصل ضرب	۲۳	۴۴	۶۳	...	۱۴۳	۱۴۴

جواب

**نکته ۱:** اگر مجموع دو مقدار، عددی ثابت باشد، حاصل ضربشان وقتی بیش‌ترین مقدار را خواهد داشت که

دو عدد با هم برابر باشند یا اختلاف آن دو عدد، کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

۳۹. گزینه الف

عدد اولی	۱	۲	...	۱۳	۱۴	۱۵
عدد دومی	۳۰	۲۹	...	۱۸	۱۷	۱۶
حاصل ضرب	۳۰	۵۸	...	۲۳۴	۲۳۸	۲۴۰

جواب

۴۰. گزینه ب

حالت مشابه پیش می‌آید. پس داریم:

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۲	۳,۵	۷	۹
۲	۳,۷	۵	۹
۲	۵,۷	۳	۹
۲	۳,۵	۹	۷
۲	۳,۵	۹	۷
۲	۳,۵	۹	۷
۲	۳,۵	۹	۷

عدد  $۶ \times ۴ = ۲۴ \Rightarrow$  عدد ۶

با استفاده از جدول نظام‌دار و حالت‌بندی مناسب برای تعداد اسکناس‌های ۲۰۰ تومانی داریم:

۴۱. گزینه د

تعداد حالات	تعداد اسکناس‌های ۲۰۰ تومانی
۱	۵
۳	۴
۵	۳
۷	۲
۹	۱
۱۱	۰

$$\Rightarrow ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ = ۳۶ \text{ تعداد کل حالات}$$

۱۰ حالت:

۴۲. گزینه د

تعداد سکه‌های ۵ تومانی	۰	۱	۳	۵	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰
تعداد سکه‌های ۱۰ تومانی	۰	۲	۱	۰	۵	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد سکه‌های ۲۵ تومانی	۲	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰

راهبرد جدول نظام‌دار:

۴۳. گزینه ج

صدگان	دهگان	یکان	
۱	۲	۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹	→ عدد ۷
۱	۳	۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹	→ عدد ۶
۱	۴	از ۵ تا ۹	→ عدد ۵
۱	۵	از ۶ تا ۹	→ عدد ۴
۱	۶	از ۷ تا ۹	→ عدد ۳
۱	۷	۸ و ۹	→ عدد ۲
۱	۸	۹	→ عدد ۱
۲	۳	از ۴ تا ۹	→ عدد ۶
۲	۴	از ۵ تا ۹	→ عدد ۵
۲	۵	از ۶ تا ۹	→ عدد ۴
۲	۶	از ۷ تا ۹	→ عدد ۳
۲	۷	۸ و ۹	→ عدد ۲
۲	۸	۹	→ عدد ۱
۳	۴	از ۵ تا ۹	→ عدد ۵
⋮	⋮	⋮	

$$\begin{aligned}
 & (7+6+5+\dots+1) + (6+5+4+\dots+1) \\
 & + (5+4+\dots+1) + (4+3+2+1) \\
 & + (3+2+1) + (2+1) + 1 \\
 & = \frac{7 \times 8}{2} + \frac{6 \times 7}{2} + \frac{5 \times 6}{2} \\
 & + \frac{4 \times 5}{2} + \frac{3 \times 4}{2} + 3 + 1 = 84
 \end{aligned}$$

روش اول: انگشتان دو دست را از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری می‌کنیم. داریم:

۴۴. گزینه ج

شماره‌ی انگشت	تعداد حالات
۱	۸
۲	۷
۳	۶
۴	۵
۵	۴
۶	۳
۷	۲
۸	۱
۹	۱
۱۰	۱
تعداد کل حالات	$1+2+\dots+8=36$

و

شماره‌ی انگشت	تعداد حالات
۲	۷
۳	۶
۴	۵
۵	۴
۶	۳
۷	۲
۸	۱
۹	۱
تعداد کل حالات	$1+2+\dots+7=28$

و ... و

تعداد حالات	شماره‌ی انگشت
۱	۱۰, ۹, ۸
۱	تعداد حالات

$$\Rightarrow (1+2+3+\dots+8) + (1+2+3+\dots+7) + (1+2+3+\dots+6) + \dots + (1+2) + (1) = 36+28+21+15+10+6+3+1=120$$

روش دوم: برای حل این گونه سؤال‌ها می‌توان از نکته‌ی زیر استفاده کرد:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$$

نکته ۲: تعریف فاکتوریل:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

مثال:

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$1! = 0! = 1$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

انتخاب r شیء از بین n شیء از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

**مثال:** به چند طریق می‌توان از بین ۵ شیء، ۲ شیء را انتخاب کرد؟

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

جواب:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times (10-3)!} = \frac{10!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

با توجه به نکته (۲) داریم:

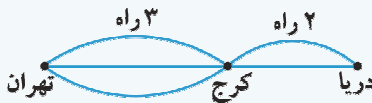
### راهبرد اصل ضرب

۴۵. گزینه ب

**نکته ۳:** اصل ضرب: هرگاه برای انجام عمل اول، a انتخاب و برای انجام عمل دوم، b انتخاب و برای انجام عمل سوم، c انتخاب و... داشته باشیم، آن‌گاه: برای انجام عمل کل،  $a \times b \times c \times \dots$  انتخاب خواهیم داشت.

**مثال:** در شکل زیر برای رفتن از تهران به دریا، چند مسیر مختلف داریم؟ (به شرط گذر از کرج)

$$3 \times 2 = 6$$



توجه کنید؛ رقمی که برای دهگان انتخاب می‌کنید، نباید برای یکان انتخاب کنید زیرا باید رقم‌ها مختلف باشند. به طور مثال اگر در دهگان رقم ۷ را گذاشتید، در یکان نباید رقم ۷ قرار دهید.

یکان دهگان

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \boxed{5} \times \boxed{4} = 20$$

۱	۱
۳	۳
۵	۵
۷	۹
۹	

یکان دهگان

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \boxed{4} \times \boxed{5} = 20$$

۲	۱
۴	۳
۶	۵
۸	۷
	۹

اگر بخواهیم اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ بنویسیم، پس دهگان حداقل باید از ۵ شروع شود. داریم:

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \boxed{2} \times \boxed{5} = 10$$

۵	۱
۷	۲
	۳
	۵
	۷

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \boxed{9} \times \boxed{9} \times \boxed{8} = 648$$

دقت کنید که رقم صفر را نمی‌توان در صدگان عدد قرار داد. در ضمن رقمی را که برای صدگان انتخاب کردیم، نباید در دهگان استفاده کنیم و رقمی که در دهگان یا صدگان انتخاب کردیم، نباید در یکان به کار ببریم.

۴۹. گزینه د برای رفتن از A به C،  $3 \times 5 = 15$  راه و در برگشت،  $(5-1) \times (3-1) = 8$  راه وجود دارد که در کل

$15 \times 8 = 120$  حالت امکان‌پذیر است.

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

۵۰. گزینه ج

۵۱. گزینه ب

**نکته ۴:** اگر عددی را از راست به چپ بخوانیم و از چپ به راست بنویسیم، به عدد به دست آمده، مقلوب آن عدد می‌گوییم.

**مثال:**  
 $۲۰۰۱ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۱۰۰۲$  ,  $۷۲۳ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۳۲۷$

بعضی اعداد مقلوبشان با خودشان برابر است.

**مثال:**  
 $۲۵۳۵۲ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۲۵۳۵۲$  ,  $۱۸۱ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۱۸۱$

توجه کنید؛ برای این که مقلوب عدد ۵ رقمی با خودش برابر باشد، هر چه در دهگان هزار قرار دهیم، همان رقم را باید در یکان و هر چه در یکان هزار قرار دهیم، همان رقم را باید در دهگان قرار دهیم. پس داریم:

یکان دهگان صدگان یکان هزار دهگان هزار  
 $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱ \times ۱ = ۹۰۰$

$۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$

$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

آن دو کتاب مشخص را به هم می‌چسبانیم، یک کتاب می‌شود که در این صورت مانند این است که بگوییم، ۳

$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

۵۲. گزینه ج

۵۳. گزینه الف

۵۴. گزینه الف

کتاب داریم. پس:

اما همان دو کتاب را که به هم چسبانده‌ایم، می‌توانند جایشان را با هم عوض کنند. یعنی ۲ حالت دارد.

حالت  $۶ \times ۲ = ۱۲$

پس داریم:

در این سؤال، در یکان باید رقم‌های زوج را به کار برد. پس داریم:

۵۵. گزینه د

یکان دهگان صدگان

$۱ \times ۵ \times ۵ = ۲۵$

**روش اول:** اعداد را بنویسید. **روش دوم:** از رابطه‌ی زیر می‌توان تعداد را به دست آورد. (! علامت فاکتوریل

۵۶. گزینه ب

است. به طور مثال  $۳! = ۳ \times ۲ \times ۱$  و  $۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$  تا است که ۳ بار رقم ۲ و ۲ بار رقم ۷

$\frac{۵!}{۲! \times ۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۲ \times ۱ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۰$

تکرار شده است. داریم:

۱۹۹۱, ۱۹۱۹, ۹۱۹۱, ۹۹۱۱, ۱۱۹۹, ۹۱۱۹

۵۷. گزینه ه

۵۸. گزینه الف

**نکته ۵:** اگر عددی، دو رقم سمت راستش، ۰۰ یا ۲۵ یا ۵۰ یا ۷۵ باشد، بر ۲۵ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{cccccccccccc} \boxed{۴} \times \boxed{۱} \times \boxed{۱} & + & \boxed{۴} \times \boxed{۱} \times \boxed{۱} & + & \boxed{۴} \times \boxed{۱} \times \boxed{۱} & + & \boxed{۴} \times \boxed{۱} \times \boxed{۱} & = & ۴ & + & ۴ & + & ۴ & + & ۴ & = & ۱۶ \\ ۲ & ۲ & ۵ & ۲ & ۵ & ۰ & ۲ & ۷ & ۵ & ۲ & ۰ & ۰ & & & & & \\ ۳ & & & ۳ & & & ۳ & & & ۳ & & & & & & & \\ ۵ & & & ۵ & & & ۵ & & & ۵ & & & & & & & \\ ۷ & & & ۷ & & & ۷ & & & ۷ & & & & & & & \end{array}$$

۵۹. گزینه ه

$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۴۵$

۱۰	۲۰	۳۰	۹۰
	۲۱	۳۱	۹۱
		۳۲	:
			۹۸

→ به همین ترتیب ←



۶۰. گزینه ج

حالت‌ها را بنویسید، داریم:

۹۳۳, ۳۹۳, ۳۳۹

۶۱. گزینه د

هر یک از ۵ نقطه‌ی بالایی را می‌توان به هر یک از ۶ نقطه‌ی پایینی وصل کرد.

تعداد پاره‌خط‌ها  $5 \times 6 = 30$

۶۲. گزینه الف

$$\begin{array}{c} \boxed{3} \times \boxed{6} \times \boxed{6} = 108 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

۶۳. گزینه ه

سطر اول را به  $3 \times 2 \times 1$  حالت یعنی ۶ حالت می‌توان رنگ زد. در سطر دوم اگر رنگ یکی از خانه‌ها معلوم باشد، رنگ دو خانه‌ی دیگر اجباراً معلوم می‌شود. یعنی سطر دوم را فقط به ۲ حالت می‌توانیم رنگ بزنیم. سطر سوم اجباراً معلوم می‌شود. به این ترتیب تعداد حالت‌ها برابر است با:  $6 \times 2 \times 1 = 12$  است.

۶۴. گزینه ج

عدد  $123456789$ ، عددی ۹ رقمی است که تمام رقم‌های آن به صورت صعودی قرار گرفته‌اند. حال با حذف هر رقم، عددی ۸ رقمی باقی می‌ماند که باز هم رقم‌های آن به صورت صعودی قرار دارد. در ضمن به هیچ عنوان در این عدد صفر به کار نمی‌رود!

۶۵. گزینه ب

فرض می‌کنیم عارف و فاطمه کنار هم باشند، تعداد حالات را حساب کرده و از تعداد کل حالات کم می‌کنیم. عارف و فاطمه را یک نفر حساب می‌کنیم. داریم:  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ . از طرفی عارف و فاطمه می‌توانند به ۲ حالت کنار هم قرار گیرند. پس تعداد کل حالاتی که عارف و فاطمه می‌توانند کنار هم باشند:  $24 \times 2 = 48$  است.

از طرفی تعداد کل حالات (چه در کنار هم باشند و چه نباشند)،  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  است. بنابراین تعداد حالاتی که عارف و فاطمه کنار هم نباشند، می‌شود:

$$120 - 48 = 72 \text{ حالت}$$

۶۶. گزینه ج

در هر حالت، حجم باید ۲۴ شود. همه‌ی حالت‌ها را می‌نویسیم. پس داریم:

$$(1 \times 1 \times 24), (1 \times 2 \times 12), (1 \times 3 \times 8), (1 \times 4 \times 6), (2 \times 3 \times 4), (2 \times 6 \times 2)$$

۶۷. گزینه ب

عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در این سؤال مجموع رقم‌های  $(7, 5, 3)$ ، ۱۵ می‌شود که با آن‌ها می‌شود  $3 \times 2 \times 1 = 6$  عدد مختلف ساخت از طرفی مجموع رقم‌های  $(5, 7, 5, 5)$  نیز ۱۲ می‌شود که بر ۳ بخش‌پذیر است و با آن‌ها ۴ عدد می‌توان ساخت. پس در مجموع  $6 + 4 = 10$  عدد می‌توان ساخت.

۶۸. گزینه الف

طبق اصل ضرب، تعداد رمزهای ۴ رقمی،  $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$  است.

$$10000 \times 5 = 50000 \text{ ثانیه} \rightarrow 50000 \div 3600 = 13 \frac{8}{9} \approx 14 \text{ ساعت}$$

در نتیجه:

۶۹. گزینه ج

**نکته ۶:** تعداد دست دادن‌ها در یک گروه، مانند تعداد پاره‌خط‌ها با چند نقطه می‌باشد. یعنی اگر  $n$  نفر با هم

$$\frac{n \times (n-1)}{2}$$

دست داده باشند، تعداد عمل دادن از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

برعکس عمل می‌کنیم:

$$28 \times 2 = 56 \xrightarrow{\text{می‌دانیم}} 8 \times 7 = 56 \rightarrow \boxed{n = 8}$$

۷۰. گزینه د

یکان باید عددی زوج باشد (۵ حالت)، دو رقم دیگر یا باید هر دو فرد باشند (۲۵ حالت) یا باید هر دو زوج باشند (۲۰ حالت) بنابراین عدد ۲ رقمی سمت چپ را می‌توان به ۴۵ حالت نوشت و یکان را به ۵ حالت. طبق اصل ضرب:

$$45 \times 5 = 225 \text{ کل حالات}$$

## راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

۷۱. **گزینه الف** ابتدا به کمک جدول نظام‌دار، همه‌ی حالت‌هایی که مجموع سن دو نفر ۲۰ می‌شود را نوشته و حالت‌های نامطلوب را حذف می‌کنیم تا به جواب برسیم:

عدد اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
عدد دوم	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰
حاصل ضرب	۱۹	۳۶	۵۱	۶۴	۷۵	۸۴	۹۱	۹۶	۹۹	۱۰۰

در نتیجه اختلاف آن‌ها:  $12 - 8 = 4$  سال می‌شود.

۷۲. **گزینه ب** ابتدا به کمک جدول نظام‌دار، همه‌ی حالت‌هایی که ضرب دو عدد طبیعی، ۳۰ می‌شود را نوشته و حالت‌های نامطلوب را حذف می‌کنیم تا به جواب برسیم:

عدد اول	۱	۲	۳	۵
عدد دوم	۳۰	۱۵	۱۰	۶
تفاضل	۲۹	۱۳	۷	۱

$\rightarrow 3 + 10 = 13$

۷۳. **گزینه د**

عدد اول	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۴	۱	۱	۱
عدد دوم	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۷	۳	۴	۶
عدد سوم	۱۰	۸	۷	۶	۵	۷	۲	۹	۸	۶
حاصل ضرب	۲۰	۴۸	۶۳	۷۲	۸۰	۳۵	۵۶	۲۷	۳۲	۳۲

$\rightarrow 6 - 3 = 3$

**توجه:** غیر از حالات نوشته شده، حالت‌های دیگری هم وجود دارد.

۷۴. **گزینه ج** ابتدا همه‌ی حالت‌های ممکن را با جدول نظام‌دار می‌نویسیم و سپس جواب را پیدا می‌کنیم:

طول	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹
عرض	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

$\Rightarrow 12 \times 6 = 72$  سانتی متر مربع

مساحت مستطیل

۷۵. **گزینه ب**

**نکته ۷:** اگر  $a$  تعداد سکه‌های اولیه باشد، آن‌گاه حداقل با  $n$  بار وزن کردن توسط ترازوی دو کفه‌ای

می‌توان سکه‌ی تقلبی را یافت که  $n$  از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{3 \times 3 \times \dots \times 3}{\text{بار } n-1} < a < \frac{3 \times 3 \times \dots \times 3}{\text{بار } n}$$

۸۰ سکه را بار اول به دو دسته‌ی ۲۷ تایی و یک دسته‌ی ۲۶ تایی تقسیم می‌کنیم. با یک‌بار وزن کردن می‌توان دسته‌ای را که شامل سکه‌ی تقلبی است مشخص کرد. بار اول دو دسته‌ی ۲۷ تایی را روی دو کفه می‌گذاریم. اگر با هم مساوی شوند، سکه‌ی تقلبی در دسته‌ی ۲۶ تایی است که در این صورت ۲۶ تا را به دو دسته‌ی ۹ تایی و یک دسته‌ی ۸ تایی تقسیم می‌کنیم. اگر ۲ دسته‌ی ۹ تایی با هم مساوی شوند، سکه‌ی تقلبی در دسته‌ی ۸ تایی است که آن را به دو دسته‌ی ۳ تایی و یک دسته‌ی ۲ تایی تقسیم می‌کنیم. اگر دو دسته‌ی ۳ تایی با هم برابر شدند، سکه‌ی تقلبی در دسته‌ی ۲ تایی است که به راحتی با وزن کردن مشخص می‌شود و اگر سکه‌ی تقلبی در یکی از دسته‌های ۳ تایی باشد، با یک‌بار وزن کردن می‌توان سکه‌ی تقلبی را پیدا کرد. در نتیجه در کل با حداقل ۴ بار وزن کردن می‌توان سکه‌ی تقلبی را یافت.

$$27 = 3 \times 3 \times 3 < 80 \leq \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{\text{بار } 4} = 81$$

۷۶. گزینه الف

طبق نکته‌ی (۷) داریم:

$$729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 < 1386 \leq \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{7 \text{ بار}} = 2187$$

۷۷. گزینه ج

**نکته ۸:** اگر تعداد کل اعداد مورد بحث را  $a$  در نظر بگیریم، با جواب بله یا خیر، با طرح  $n$  سؤال می‌توان عدد مفروض (فرض شده) را به دست آورد که  $n$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{2 \times 2 \times \dots \times 2}{\text{تا } n-1} < a \leq \frac{2 \times 2 \times \dots \times 2}{\text{تا } n}$$

**روش اول:** هر رمز سه رقمی را، یک عدد فرض می‌کنیم. به طور مثال  $4 = (004)$  یا  $67 = (067)$  بنابراین دنبال عددی سه رقمی از صفر  $(000)$  تا  $999$  می‌گردیم. به طور مثال در بداهال‌ترین شرایط داریم:

**سؤال ۱:** آیا رمز مورد نظر فرد است؟ خیر **سؤال ۲:** از  $500$  بیش‌تر است؟ خیر

**سؤال ۳:** از  $250$  بیش‌تر است؟ خیر **سؤال ۴:** از  $125$  بیش‌تر است؟ خیر

**سؤال ۵:** از  $62$  بیش‌تر است؟ خیر **سؤال ۶:** از  $31$  بیش‌تر است؟ خیر

**سؤال ۷:** از  $15$  بیش‌تر است؟ خیر **سؤال ۸:** از  $7$  بیش‌تر است؟ خیر

**سؤال ۹:** از  $3$  بیش‌تر است؟ خیر یعنی یا عدد مورد نظر  $002$  یا  $000$  است.

**سؤال ۱۰:** رمز  $002$  است؟ خیر

پس نتیجه می‌گیریم رمز  $(000)$  است.

**روش دوم:** استفاده از نکته‌ی (۸):

$$512 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}{\text{تا } 9} < 1000 \leq \frac{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}{\text{تا } 10} = 1024$$

تعداد رمزهای ۳ رقمی

۷۸. گزینه ب

**نکته ۹:** سری حسابی یا تصاعد عددی: هرگاه اعدادی داشته باشیم که با اضافه شدن مقداری ثابت به عدد قبلی به دست آیند، برای محاسبه‌ی تعداد و مجموع آن‌ها، از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$1 + \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله‌ی دو عدد پشت سر هم}} = \text{تعداد}$$

$$\frac{905 - 5}{5} + 1 = 198 + 1 = 199$$

به طور مثال تعداد اعداد  $5, 10, 15, 20, \dots, 995$  برابر است با:

$$\text{مجموع} = \frac{(\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}) \times \text{تعداد}}{2}$$

**نکته ۱۰:** تعداد مضرب‌های طبیعی عدد  $a$  از عدد  $1$  تا عدد  $n$ ، برابر است با خارج قسمت طبیعی تقسیم عدد

$n$  بر  $a$ .

ابتدا تعداد مضرب‌های طبیعی عدد  $5$  کم‌تر از  $1000$  یا کم‌تر یا مساوی  $999$  را پیدا می‌کنیم:  $\frac{999}{5} = 199$  تعداد مضرب‌ها

$$128 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{\text{تا } 7} < 199 \leq \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{\text{تا } 8} = 256$$

طبق نکته‌ی (۸) داریم:

بنابراین، حداقل  $8$  سؤال لازم است.

۷۹. گزینه ب عدد روی هر تاس با ۳ سؤال مشخص می‌شود، بنابراین  $3+3+3=9$  سؤال لازم است.

۸۰. گزینه د عدد روی تاس با ۳ سؤال مشخص می‌شود و اگر ۳۲ حرف الفبای فارسی را به دو دسته‌ی ۱۶ تایی تقسیم کنیم،

می‌توان با سؤال‌هایی از قبیل: «آیا حرف مورد نظر عضو ۱۶ تایی اول است؟» ...

با طرح ۵ سؤال آن را مشخص کرد. بنابراین در مجموع با  $5+3=8$  سؤال می‌توان آن‌ها را مشخص کرد.

۸۱. گزینه د روش اول: اگر درون دایره، به ترتیب گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) را قرار دهید، تساوی برقرار نمی‌شود،

بنابراین جواب، عدد ۲۱۶ خواهد بود.

روش دوم: در بین گزینه‌ها، فقط عدد ۲۱۶ به همگی مخرج‌ها تقسیم می‌شود.

### راهبرد الگوبابی

$$\begin{array}{ccccccc} & +0,5 & & +0,25 & & +0,125 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ 1 & , & 1,5 & , & 1,75 & , & 1,875 \end{array}$$

دو جمله‌ی قبل با هم جمع می‌شوند تا جمله‌ی بعدی به دست آید. (دنباله‌ی فیبوناتچی)

$$\begin{array}{ccccccc} & -2 & & -4 & & -6 & & -8 \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 30 & , & 28 & , & 24 & , & 18 & , & 10 \end{array}$$

$$(3 \times 3) - 1 = 8$$

از عدد دوم به بعد، هر عدد برابر است با سه برابر عدد قبل منهای یک.

$$(3 \times 8) - 1 = 23, (3 \times 23) - 1 = 68, (3 \times 68) - 1 = \boxed{203}$$

$$1 \div 2 = 0,5 \rightarrow 1 + 0,5 = 1,5, 1,5 \div 2 = 0,75 \rightarrow 1,5 + 0,75 = 2,25$$

$$\rightarrow 2,25 \div 2 = 1,125 \rightarrow 2,25 + 1,125 = 3,375 \rightarrow 3,375 \div 2 = 1,6875 \rightarrow 3,375 + 1,6875 = 5,0625$$

$$77 \rightarrow 7 \times 7 = 49 \rightarrow 4 \times 9 = 36 \rightarrow 3 \times 6 = 18 \rightarrow 1 \times 8 = 8$$

اختلاف دو عدد را نصف کرده و از عدد کوچک‌تر کم می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccccccc} & -24 \div 2 = -12 & & -12 & & -6 & & -3 \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 64 & , & 40 & , & 28 & , & 22 & , & 19, \dots \end{array}$$

$$1 \times 1 \times 1 = 1, 2 \times 2 \times 2 = 8, 3 \times 3 \times 3 = 27, \dots, 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

اگر جمع اعداد ۱ تا ۹ را به دست آوریم، ۴۵ می‌شود. یعنی تعداد ۴۵ عدد نوشته‌ایم تا به عدد ۱۰ برسیم. حال

۱۰ تا ۱۰ می‌نویسیم، یعنی از جمله‌ی چهل و ششم تا جمله‌ی پنجاه و پنجم، عدد ۱۰ را نوشته‌ایم. بنابراین جمله‌ی پنجاه و ششم، عدد ۱۱ است.

$$1 \times 2 = 2, 2 \times 3 = 6, 3 \times 4 = 12, 4 \times 5 = 20, 5 \times 6 = 30, 6 \times 7 = 42, 7 \times 8 = 56$$

$$\rightarrow 56 - 30 = 26$$

$$(1 \times 1 \times 1) - 1 = 0, (2 \times 2 \times 2) - 1 = 7, (3 \times 3 \times 3) - 1 = 26$$

$$\rightarrow (10 \times 10 \times 10) - 1 = 1000 - 1 = 999$$

$$3, 4, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 3, 4, \dots$$

با نوشتن چند جمله از این دنباله، می‌بینیم اعداد، ۶ تا ۶ تا تکرار می‌شوند:

$$\begin{array}{r} 32 \quad | \quad 6 \\ - 30 \quad | \quad 5 \\ \hline 2 \end{array} \rightarrow 4$$

دومین رقم

$$\begin{array}{r} 72 \quad | \quad 6 \\ - 72 \quad | \quad 12 \\ \hline 0 \end{array} \rightarrow \frac{3}{4}$$

ششمین رقم

$$\Rightarrow 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

اختلاف