



1391

ویرایش جدید

# آمار و احتمال

پاورتست  
PowerTest

یازدهم

مصطفی دیداری • جواد ترکمن



مهروماه

## مقدمه ویرایش جدید

«سلام علی جان، سلام بابا جان. پسر گلم می‌خوام چند کلمه‌ای باهات صحبت کنم. ببخشید که تو کودکی ولت کردم. اگر ما نمی‌رفتیم به حرم حضرت زینب جسارت می‌شد... علی جان خیلی دلم می‌خواد تو این راه، روسفید بشم. خیلی دلم می‌خواد به بار قبل از ظهور شهید بشم... علی جان بابا پاک بودن داره روز به روز سخت‌تر می‌شه... تو باید خیلی مواظب خودت باشی. مواظب مادر و اطرافیان هم باشی... از همین الآن رو خودت کار کن، رو درس خونندیت. رو شغلت، رو راه و روش زندگیت، تو انتخاب رفیق‌هات، تو انتخاب آیندت. خیلی مواظب خودت باش. من همیشه به یادت هستم... این چند جمله رو گفتم تا اگه به روزی خواستی صدای بابات رو بشنوی، این چند جمله رو داشته باشی. خیلی دوستت دارم هم تو رو، هم مامانت رو. بعضی وقت‌ها دل‌کندن از به سری چیزای خوب باعث می‌شه چیزای بهتری رو به دست بیاری... سعی کن به جوری زندگی کنی که خدا عاشقت بشه...»

این جمله‌ها رو از آخرین فایل صوتی شهید محسن حججی انتخاب کردم. تعجب نکنید، اخلاقم همین است! همیشه با بچه‌ها راجع به موضوعات مختلف صحبت می‌کنم. از بحث‌های اجتماعی و خانوادگی و دینی گرفته تا کل‌کل سر استقلال و پرسپولیس! وسط کلاس برای دانش‌آموز کنکوری، کتاب می‌خوانم. چرا؟ چون از کلیشه‌ها بیزارم. از آدا درآوردن و فیلم بازی کردن متنفرم. از شنیدن حرف‌هایی که می‌خواهند الکی بایمان کنند، گھیر می‌زنم. طرف زن دارد، بچه دوساله دارد که آن‌ها را خیلی خیلی دوست دارد. چه می‌شود که یک دفعه جانش را کف دستش می‌گیرد و می‌رود هزار کیلومتر آن طرف‌تر وسط بیابان. آخرش را هم، همه می‌دانید که قصه چه جوری به سر می‌رسد. این چه چیزی درون فکر و ذهن و قلب اوست که او را می‌کشاند و می‌برد؟ این چه چیزی است که مثل موتور روشن می‌شود و او را حرکت می‌دهد؟ چه می‌شود که طرف حاضر می‌شود این همه سختی را تحمل کرده و میدان را خالی نکند؟ همیشه به بچه‌ها این را می‌گویم:

قدم اول درس خواندن، انتخاب انگیزه‌های خوب است! انگیزه‌هایی که بتواند موتور شما را روشن کند، انگیزه‌هایی که به شما جهت‌های متعالی بدهد. اگر منتظر هستید که من برایتان از این جنس انگیزه‌ها بگویم، سخت در اشتباهید! این دیگر کار خودتان است.

### ویژگی‌های این کتاب

- 1 در سنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی در اون هست و هم مطالب عمیق‌تر.
- 2 طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درس‌نامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو به جا بخونی!
- 3 اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم.
- 4 توی محدوده مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونده.
- 5 پُر از تست‌های دوست‌داشتنی! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن به تست سخت، سخته نکنی 😊 و از ریاضی فراری نشی.
- 6 همه تست‌های کنکورهای جدید تو کتابمون هست، البته فقط تست‌هایی را آوردیم که مربوط به کتاب جدید.
- 7 پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالی! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤال‌ها گیر نمی‌کنی و می‌دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامه این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی مسلح شده!
- 8 مثل کتاب درسی، تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن.
- 9 تعداد تست‌هاش متناسب با اهمیت هر مبحثه! اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی.

## راهنمای استفاده از کتاب

چند کلمه در مورد استفاده بهتر از این کتاب هم بگم. کتاب درسی آمار و احتمال در هر فصل، از چند درس تشکیل می‌شود. این‌جا هم همین است. در هر قسمت درس‌نامه داریم چه درس‌نامه‌ای! به‌علاوه تست‌های آن درس. در آخر هر فصل هم باید خودت را با یک آزمون محک بزنی. حتماً بعد از زدن تست‌ها این آزمون رو حل کن تا بفهمی چقدر از مطالب فصل رو مسلط هستی. اگر درصدت چندان مطلوب نبود، جای نگرانی نیست، فقط باید دوباره تست‌ها را حل کنی. همیشه به بچه‌ها می‌گیم که حل دوباره ۱۰۰ تست، بهتر از حل یک‌بار ۲۰۰ تست است. جواب چرای آن خیلی ساده است، چون با حل یک‌بار، همه نکات در حافظه بلندمدت شما قرار نمی‌گیرد. حواستان باشد این درس‌نامه جای معلم محترم‌تان را نمی‌گیرد! اگر دو تا گوش دارید، دو تا هم قرض کنید و سر کلاس، درس را به خوبی یاد بگیرید. حالا درس‌نامه را بخوانید و شروع به حل تست‌ها کنید. سعی کرده‌ایم که درس‌نامه‌ها شامل همه نکات مهم، به صورت مرتب و دسته‌بندی شده باشد تا بتوانید آن‌ها را بهتر به خاطر بسپارید. نکته‌هایی که در درجه دوم اهمیت قرار دارند درون پاسخ‌های تشریحی، تحت عنوان راهبرد قرار گرفته‌اند. این‌جوری بهتر می‌فهمید که هر نکته، مناسب کدام تیپ تست خواهد بود. به علاوه مجبور می‌شوید نگاهی به پاسخ‌ها هم داشته باشید!!

در تغییر نسل کتب درسی، همیشه تمرین‌های کتاب، پای ثابت آزمون‌ها است. سعی کرده‌ایم همه فعالیت‌ها، کادر کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را که می‌شده است، تبدیل به تست کنیم، بنابراین از هیچ نکته و تستی تا خوب خوب آن را یاد نگرفته‌اید، عبور نکنید. امیدواریم هم‌تون با خواندن این کتاب، آمار و احتمال رو فول بشید.

## و اما قدردانی...

برای به ثمر رسیدن این کتاب افراد زیادی تلاش کردن. وظیفه خودمون می‌دونیم که از اون‌ها قدردانی کنیم.

- اول از همه از جناب آقای احمد اختیاری مدیریت انتشارات که فرصت نگارش این کتاب را در اختیار ما گذاشتن.
- جناب آقای انوشه، مدیر شورای تألیف و جناب آقای اشرفی، مدیر گروه ریاضی که بدون راهنمایی‌های سازنده این دو نفر، کار به نتیجه مطلوب نمی‌رسید.

از همکاران محترم انتشارات به‌طور ویژه تشکر می‌کنیم!

- سرکار خانم آزاده غنی‌فرد، مسئول ویراستاری، که امیدواریم بتونیم روزی زحمات ایشون رو جبران کنیم.
- خانم‌ها نیره جعفری‌گلو، آزاده فلاح‌زاده، زهرا رسولی و مهرنوش رضوی و آقایان مهدی مرادی و امیرحسین عباسی که ویرایش علمی کتاب را برعهده داشتند.

- جناب آقای محسن فرهادی مدیر هنری خلاق انتشارات و تیم هنری ایشان آقایان تایماز کاویانی و حسن شیرمحمدی و حسام طلایی.
- سرکار خانم مریم تاجداری مدیر تولید توانمند انتشارات و سرکار خانم رویا طبسی که با دقت و حوصله صفحه‌آرایی رو انجام دادند.

- دانش‌آموزان خوبمان، مهندسان آینده، رایان رحیمی و مهدی اسدی‌ان که یک بار با حوصله کتاب را خواندند و اشکالات آن را درآوردند.

امیدوارم این کتاب به احتمال‌های مهر و ماهی زندگی شما رنگ تازه‌ای بده.

دوستدار شما

مؤلفین

# فهرست



۹

فصل اول آشنایی با مبانی ریاضیات

۸۵

فصل دوم احتمال

۱۵۵

فصل سوم آمار توصیفی

۱۸۹

فصل چهارم آمار استنباطی

۲۱۱

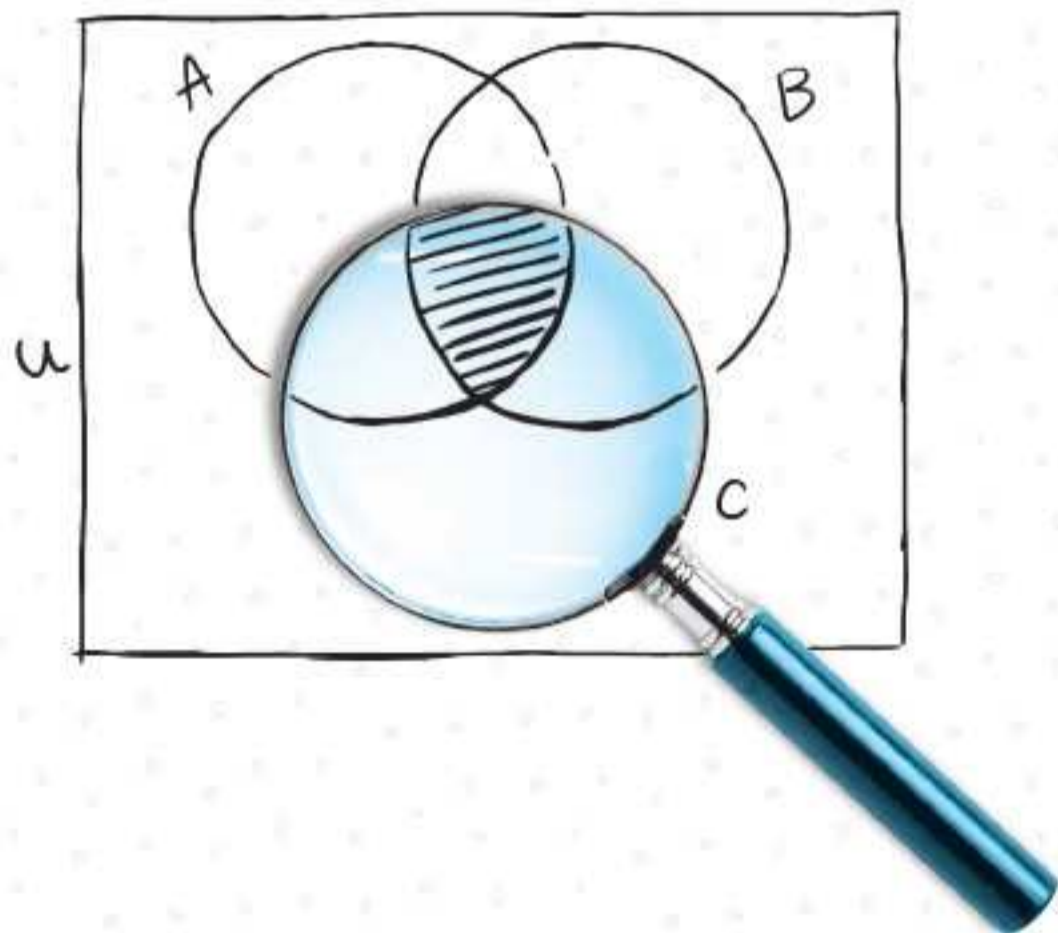
پاسخنامه تشریحی

۲۹۴

پاسخنامه کلیدی

## آشنایی با مبانی ریاضیات

پدری به پسرش می گوید: پسر جان درس بخوان یا آدم باش. پدر آن دیگری! می گوید: پسر جان درس بخوان و آدم باش. پدر سومی هم به پسرش می گوید: اگر آدم باشی درس می خوانی. آیا این جمله ها مثل هم هستند؟ هر پسر چگونه می تواند صحبت پدر را گوش بدهد؟ این ها در چه شرایطی درست و در چه شرایطی نادرست هستند؟ گوش شیطان کر! در چه صورتی خلاف حرف پدر عمل کرده اند؟ جمله آدم نیستی یا درس می خوانی معادل کدام یک از این جمله هاست؟ در بخش اول فصل اول یاد می گیرید کمی منطقی تر فکر کنید، حرف بزنید و استدلال کنید. در بخش دوم این فصل نیز، روابط بین مجموعه ها برایتان کامل می شود و می توانید بدون رسم شکل، حاصل اجتماع، اشتراک و تفاضل آن ها را بیابید.



۲۰. دامنه هر کدام از گزاره‌نماهای زیر اعداد صحیح است. مجموعه جواب کدام گزینه با دامنه یکسان است؟

$\frac{x}{2} \in E$  (۴)       $2x \in E$  (۳)       $x^2 + 1 \in E$  (۲)       $x(x+1) \in E$  (۱)

۲۱. دامنه گزاره‌نمای «مجموعه  $\{1, 2\}$ ، تعداد  $2^{n^2-n}$  زیرمجموعه دارد.» اعداد طبیعی است. مجموعه جواب چند عضو دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴) مجموعه جواب تهی است.

### جدول ارزش گزاره

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است. بنابراین هر گزاره مانند  $p$  فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول زیر می‌گیرد.

p
د
ن

◀ ارزش دو گزاره  $p$  و  $q$ ، طبق جدول زیر دارای  $2^2 = 4$  حالت است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

◀ ارزش سه گزاره  $p$ ،  $q$  و  $r$  طبق جدول زیر دارای  $2^3 = 8$  حالت است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

**نتیجه:** با توجه به این که هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش "د" یا "ن" را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر  $n$  گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش آن گزاره‌ها دارای  $2^n$  حالت است.

### نقیض یک گزاره

- ◀ نقیض یک گزاره عبارت است از ساختن گزاره جدیدی که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اصلی است.
- ◀ نقیض گزاره  $p$  به صورت  $\sim p$  نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم.
- ◀ برای یافتن نقیض یک گزاره کافی است عبارت «چنین نیست که» در ابتدای گزاره قرار داده شود یا فعل جمله منفی شود.
- ◀ به علامت " $\sim$ " ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.
- ◀ جدول ارزش برای نقیض یک گزاره به صورت زیر است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

یعنی اگر ارزش گزاره  $p$ ، درست باشد، ارزش گزاره  $\sim p$ ، نادرست است و اگر ارزش گزاره  $p$ ، نادرست باشد، ارزش گزاره  $\sim p$  درست است.



$$\sigma_x = 0$$



۵۳. گزاره‌ای درست است. کدام گزینه در مورد ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \vee (\sim p \Rightarrow q)$  درست است؟

- (۱) همواره درست (۲) همواره نادرست (۳) مانند ارزش  $p$  (۴) مانند ارزش  $q$

۵۴. ارزش گزاره  $p$  درست است. ارزش کدام گزاره قطعاً درست است؟

- (۱)  $p \Rightarrow q$  (۲)  $\sim p \Rightarrow q$  (۳)  $p \wedge q$  (۴)  $\sim p \vee q$

۵۵. ارزش گزاره  $p$  نادرست است. کدام گزاره هم‌ارز منطقی گزاره  $\sim p$  است؟

- (۱)  $p \vee q$  (۲)  $p \wedge q$  (۳)  $\sim p \wedge q$  (۴)  $q \Rightarrow \sim p$

۵۶. اگر گزاره‌ای درست باشد، ارزش گزاره  $p \Rightarrow q$  کدام است؟

- (۱)  $T$  (۲)  $F$  (۳) مانند  $q$  (۴) مانند  $\sim q$

۵۷. مجموعه جواب گزاره نمای  $|x| = 1 \Rightarrow |x + \frac{1}{x}| > 2$  در مجموعه اعداد حقیقی ناصفر چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

(مشابه کتاب درسی)

۵۸. کدام یک از گزاره‌های زیر را می‌توانیم در جدول زیر به جای  $p$  قرار دهیم؟

(۱) اگر ۳ مربع کامل باشد آن گاه ۲ زوج است.

(۲) اگر  $a \in \{b\}$  باشد آن گاه  $a = b$ .

(۳)  $(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}) \vee (x^2 + 1 = 0)$

(۴) عدد ۱۱ را می‌توان به صورت مجموع ۳ عدد اول نوشت.

۵۹. ارزش کدام گزاره همواره برابر با  $T$  است؟

- (۱)  $p \wedge \sim p \Rightarrow q$  (۲)  $p \vee \sim p \Rightarrow q$  (۳)  $p \vee \sim p \Rightarrow q \wedge \sim q$  (۴)  $p \Rightarrow \sim q \wedge q$

۶۰. ارزش گزاره  $p$  نادرست است. کدام گزینه دارای ارزش  $F$  است؟

- (۱)  $\sim q \vee q \Rightarrow p$  (۲)  $\sim q \wedge q \Rightarrow p$  (۳)  $\sim q \vee q \Rightarrow \sim p$  (۴)  $q \Rightarrow \sim p$

۶۱. یکی از گزاره‌های  $p$  و  $q$  درست و دیگری نادرست است. کدام گزاره قطعاً درست است؟

- (۱)  $p \vee q \Rightarrow q$  (۲)  $p \wedge q \Rightarrow p$  (۳)  $p \vee q \Rightarrow \sim p$  (۴)  $p \Rightarrow p \wedge q$

(مشابه کتاب درسی)

۶۲. آخرین ستون جدول ارزش گزاره  $\sim(p \Rightarrow q)$  به کدام صورت می‌تواند باشد؟

- (۱) د (۲) د (۳) د (۴) د  
 (۱) د (۲) د (۳) د (۴) ن  
 (۱) د (۲) ن (۳) ن (۴) د  
 (۱) د (۲) ن (۳) ن (۴) ن

(مشابه کتاب درسی)

۶۳. آخرین ستون جدول ارزش گزاره  $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$  به کدام صورت می‌تواند باشد؟

- (۱) د (۲) ن (۳) د (۴) د  
 (۱) د (۲) ن (۳) د (۴) ن  
 (۱) د (۲) ن (۳) ن (۴) د  
 (۱) د (۲) ن (۳) ن (۴) ن

۶۴. گزاره‌های «دلار ارزان می‌شود یا نفت گران می‌شود» «دلار ارزان می‌شود و نفت گران می‌شود» و «اگر دلار ارزان شود آن گاه نفت گران می‌شود» به ترتیب درست، نادرست و درست هستند. کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

- (۱) دلار ارزان می‌شود و نفت گران می‌شود. (۲) دلار ارزان نمی‌شود و نفت گران می‌شود.  
 (۳) دلار ارزان نمی‌شود و نفت هم گران نمی‌شود. (۴) دلار ارزان می‌شود ولی نفت گران نمی‌شود.

۶۵. اگر  $p$  درست،  $q$  نادرست و  $r$  درست باشد، ارزش گزاره  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  به کدام صورت است؟

- (۱) درست (۲) نادرست (۳) مانند  $r \Rightarrow q$  (۴) نمی‌توان گفت.

۶۶. اگر  $p$  نادرست،  $q$  درست و  $r$  نادرست باشد، ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$  کدام است؟

- (۱) درست (۲) نادرست (۳) مانند  $p \Rightarrow q$  (۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۶۷. جدول ارزش گزاره  $p \wedge q \Rightarrow r$  به ترتیب چند ردیف و چند ستون دارد؟

- (۱) ۵-۴ (۲) ۴-۴ (۳) ۵-۸ (۴) ۴-۸

(ریاضی ۱۴۰۰)

۶۸. ارزش گزاره  $p \Rightarrow (q \vee r)$  درست است. احتمال این که ارزش گزاره  $r$  نادرست باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{7}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{4}{7}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

پاسخ: از طرف دوم شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r) &\equiv \sim (p \vee q) \vee (p \vee r) && \text{نافد} \\
 &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee r) && \text{دمورگان} \\
 &\equiv [\sim p \vee (p \vee r)] \wedge [\sim q \vee (p \vee r)] \\
 &\equiv [(\underbrace{\sim p \vee p}_T) \vee r] \wedge [(\sim q \vee p) \vee r] && \text{شرکت پذیری} \\
 &\equiv T \wedge [(\underbrace{\sim q \vee p}_T) \vee r] \\
 &\equiv (p \vee \sim q) \vee r && \text{جابه‌جایی} \\
 &\equiv p \vee (\sim q \vee r) && \text{شرکت‌پذیری} \\
 &\equiv p \vee (q \Rightarrow r) && \text{نافد}
 \end{aligned}$$

**مثال:** آیا هم‌ارزی روبه‌رو برای سه گزاره دلخواه  $p$ ،  $q$  و  $r$  همواره برقرار است؟  
 $p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$

**پاسخ:** خیر. زیرا اگر ارزش گزاره  $p$  نادرست باشد، ارزش گزاره  $p \wedge (q \Rightarrow r)$  نادرست است، در صورتی که ارزش گزاره  $(p \wedge r) \Rightarrow (p \wedge q)$  به انتفای مقدم درست است. بنابراین هم‌ارزی مذکور برقرار نیست.

نتیجه: « $\wedge$ » نسبت به « $\Rightarrow$ » توزیع‌پذیر نیست.

**مثال:** نشان دهید « $\Rightarrow$ » از چپ نسبت به « $\vee$ » و « $\wedge$ » توزیع‌پذیر است. به عبارت دیگر برای سه گزاره دلخواه  $p$ ،  $q$  و  $r$  داریم:

$$\begin{aligned}
 1) p \Rightarrow (q \vee r) &\equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \\
 2) p \Rightarrow (q \wedge r) &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)
 \end{aligned}$$

**پاسخ: اثبات (۱):** از طرف دوم شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) &\equiv (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) && \text{نافد} \\
 &\equiv (\underbrace{\sim p \vee \sim p}_{\sim p}) \vee (q \vee r) && \text{شرکت‌پذیری و جابه‌جایی} \\
 &\equiv \sim p \vee (q \vee r) && \text{خودتوانی} \\
 &\equiv p \Rightarrow (q \vee r) && \text{نافد}
 \end{aligned}$$

اثبات (۲): مشابه اثبات اولی است.

### نقیض یک ترکیب شرطی

برای دو گزاره دلخواه  $p$  و  $q$  نقیض ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  عبارت است از  $p \wedge \sim q$ ، یعنی:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

توجه کنید که نقیض یک گزاره شرطی، شرطی نیست و به صورت یک ترکیب عطفی بیان می‌شود.  
**اثبات: روش اول:** به کمک جدول

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

واضح است که ارزش دو گزاره  $\sim (p \Rightarrow q)$  و  $p \wedge \sim q$  یکسان است. پس  $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ .

**روش دوم:** به کمک ویژگی‌ها

$$\begin{aligned}
 \sim (p \Rightarrow q) &\equiv \sim (\sim p \vee q) && \text{نافد} \\
 &\equiv \sim (\sim p) \wedge (\sim q) && \text{دمورگان} \\
 &\equiv p \wedge \sim q
 \end{aligned}$$

**مثال:** نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) اگر «یک چهارضلعی لوزی باشد»، آن‌گاه «قطرهایش بر هم عمودند».

ب) اگر «تهران پایتخت ایران باشد»، آن‌گاه «۱۲ همدی زوج است».

پ) اگر «من دانشجو باشم» یا «در کوی دانشگاه زندگی کنم»، آن‌گاه «حق استفاده از رستوران کوی دانشگاه را دارم».

ت) اگر « $a < b$ » و « $c > .$ »، آن‌گاه « $ac < bc$ » (فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی‌اند).



۱۲۸. عبارت « $\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 = 1$ » به زبان فارسی برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) به ازای هر عدد صحیح  $x$ ، مربع آن برابر ۱ یک است. (۲) به ازای  $x = \pm 1$  داریم:  $x^2 = 1$ .  
 (۳) وجود دارد عدد صحیحی که مربع آن با عدد ۱ برابر است. (۴) حداقل دو عدد صحیح وجود دارد که مربع آن برابر ۱ است.

۱۲۹. عبارت «مربع برخی از اعداد حقیقی از خودش کوچک‌تر است.» با زبان نمادها به کدام صورت نوشته می‌شود؟

- (۱)  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 < x$  (۲)  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > x$  (۳)  $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < x$  (۴)  $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 > x$

۱۳۰. ارزش کدام سور، درست است؟

- (۱)  $\forall x \in \{2, 3\}; x+1 > 2$  (۲)  $\forall x \in \{2, 3\}; x+1 \leq 2$   
 (۳)  $\exists x \in \{2, 3\}; x+1 \geq 4$  (۴)  $\exists x \in \{2, 3\}; x+1 < 2$

۱۳۱. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱)  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$  (۲)  $\forall n \in \mathbb{Z}; n(n+1) = 2k$  (۳)  $\forall x \in \mathbb{R}; x+|x| \geq 0$  (۴)  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 1 = 0$

۱۳۲. کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n + 1 \in \mathbb{P}$  (۲)  $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n + 5 \in \mathbb{E}$  (۳)  $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n \leq n^2$  (۴)  $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n > n!$

۱۳۳. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱)  $\forall x, y \in \mathbb{R}; (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$  (۲)  $\exists x, y \in \mathbb{R}; (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$   
 (۳)  $\forall x, y \in \mathbb{R}; (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$  (۴)  $\exists x, y \in \mathbb{R}; (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$

۱۳۴. ارزش کدام سور نادرست است؟

- (۱)  $\forall x, y \in \mathbb{Q}; x^2 - y^2 = 8q$  (۲)  $\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 - x = 6q$   
 (۳)  $\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$  (۴)  $\forall x, y \in \mathbb{Q}'; x+y \in \mathbb{Q}'$

۱۳۵. کدام گزینه سور «به ازای برخی از اعداد طبیعی  $n$ ، زوج و اول است.» را به زبان نمادها نشان می‌دهد؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\forall n \in \mathbb{N}; (n = 2k) \wedge (n \in \mathbb{P})$  (۲)  $\forall n \in \mathbb{N}; (n = 2k) \vee (n \in \mathbb{P})$   
 (۳)  $\exists n \in \mathbb{N}; (n \in \mathbb{E}) \wedge (n \in \mathbb{P})$  (۴)  $\exists n \in \mathbb{N}; (n \in \mathbb{E}) \vee (n \in \mathbb{P})$

۱۳۶. کدام گزینه سور «همه اعداد حسابی، طبیعی هستند.» را به زبان نمادها نشان می‌دهد؟

- (۱)  $\forall x \in \mathbb{W}; x \in \mathbb{N}$  (۲)  $\forall x \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{W}$  (۳)  $\exists x \in \mathbb{W}; x \in \mathbb{N}$  (۴)  $\exists x \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{W}$

۱۳۷. بیان منطقی گزاره «به ازای هر عدد حقیقی، عدد طبیعی بزرگ‌تر از آن وجود دارد» ارزش آن در کدام گزینه مشخص شده است؟

- (۱)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}; x < n$  - نادرست (۲)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}; x < n$  - درست  
 (۳)  $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}; x < n$  - نادرست (۴)  $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}; x < n$  - درست

۱۳۸. کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; p(x)$  (۲)  $\sim (\exists x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$   
 (۳)  $\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$  (۴)  $\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; p(x)$

۱۳۹. نقیض گزاره «همه دانش‌آموزان مدرسه، روپوش سرمه‌ای پوشیده‌اند.» به کدام صورت است؟

- (۱) همه دانش‌آموزان مدرسه، روپوش غیرسرمه‌ای پوشیده‌اند. (۲) هیچ کدام از دانش‌آموزان مدرسه، روپوش سرمه‌ای پوشیده است.  
 (۳) وجود دارد دانش‌آموزی که روپوش سرمه‌ای پوشیده است. (۴) وجود دارد دانش‌آموزی که روپوش سرمه‌ای پوشیده است.

۱۴۰. نقیض گزاره «وجود دارد عدد حقیقی ناصفر که معکوس آن مثبت است.» به کدام صورت است؟

- (۱) وجود دارد عدد حقیقی ناصفر که معکوس آن منفی یا صفر است.  
 (۲) وجود ندارد عدد حقیقی ناصفر که معکوس آن مثبت نباشد.  
 (۳) به ازای هر عدد حقیقی، معکوس آن برابر صفر می‌شود.  
 (۴) به ازای هر عدد حقیقی ناصفر، معکوس آن کوچک‌تر یا مساوی صفر است.

۱۴۱. نقیض گزاره «مربع هر عدد حقیقی مثبت است.» به کدام صورت است؟

- (۱) مربع هر عدد حقیقی، منفی است. (۲) مربع هر عدد حقیقی، منفی یا صفر است.  
 (۳) مربع برخی از اعداد حقیقی، منفی است. (۴) مربع برخی از اعداد حقیقی، منفی یا صفر است.

۱۴۲. نقیض گزاره  $\exists x \in A; x = 1$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\exists x \in A; x \neq 1$  (۲)  $\exists x \notin A; x = 1$   
 (۳)  $\forall x \in A; (x > 1) \vee (x < 1)$  (۴)  $\forall x \in A; (x > 1) \wedge (x < 1)$

فضای نمونه عبارت است از:  $S = S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \times S_5$ ، که هر برآمد آن یک پنج‌تایی مرتب به‌صورت زیر است:

$$(a, b, c, d, e)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $s_1 \text{ از } s_2 \text{ از } s_3 \text{ از } s_4 \text{ از } s_5$

مثلاً یک برآمد به‌صورت (عدم بارندگی، صاف، باد نمی‌وزد، خشک، گرم) است.

(ب) فضای نمونه دارای  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$  برآمد است.

**مثال:** در آزمایش پرتاب یک تاس و یک سکه با هم، فضای نمونه چند برآمد دارد؟

- الف) ۶      ب) ۱۲      ج) ۲۴      د) ۴۸

**پاسخ:** اگر فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس  $S_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$  و فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه  $S_2 = \{ر, پ\}$  باشد، آن‌گاه فضای نمونه‌ای آزمایش مذکور عبارت است از:

$$S = S_1 \times S_2 \Rightarrow n(S) = n(S_1) \times n(S_2) = 6 \times 2 = 12$$

در ضمن داریم:

$$S = \{(1, ر), (1, پ), (2, ر), (2, پ), (3, ر), (3, پ), (4, ر), (4, پ), (5, ر), (5, پ), (6, ر), (6, پ)\}$$

به عنوان مثال، برآمد (پ، ۳)، ظاهر شدن ۳ در تاس و «پشت» در سکه است.

**مثال:** کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. در هر یک از حالت‌های زیر فضای نمونه دارای چند برآمد است؟ (فرض می‌شود مهره‌ها متمایزند)

الف) دو مهره را با هم (هم‌زمان) بیرون می‌آوریم.

ب) دو مهره را پی‌درپی (متوالی، یکی یکی) بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

پ) دو مهره را پی‌درپی (متوالی، یکی یکی) با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

**پاسخ:** واضح است که کل مهره‌های داخل کیسه  $3 + 5 = 8$  است.

الف) اگر ۲ مهره را به‌صورت «با هم» یا «هم‌زمان» از کیسه خارج کنیم، ترتیب ندارند و عمل انتخاب ۲ مهره از ۸ مهره متمایز صورت می‌پذیرد و در نتیجه داریم:

$$n(S) = \binom{8}{2} = 28$$

ب) خارج کردن مهره‌ها به‌صورت پی‌درپی (متوالی، یکی یکی)، یعنی ترتیب دارند. از طرفی چون این عمل بدون جای‌گذاری صورت می‌پذیرد، پس در بار اول یک مهره از ۸ مهره و در بار دوم یک مهره از ۷ مهره باقی مانده انتخاب می‌شود. پس:

$$n(S) = \binom{8}{1} \times \binom{7}{1} = 56$$

مهره دوم و مهره اول

پ) همانند قسمت (ب)، با این تفاوت که مهره اول پس از مشاهده به کیسه برگردانده می‌شود و مهره دوم باز از ۸ مهره داخل کیسه انتخاب می‌گردد. (امکان تکرار هست.) پس:

$$n(S) = \binom{8}{1} \times \binom{8}{1} = 64$$

**پیشامد**

زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است.

پیشامد بخشی از فضای نمونه است که مطلوب مسئله است.

اگر تنها یک عضو از پیشامدی رخ بدهد، می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.

اگر فضای نمونه حاصل از انجام یک پدیده تصادفی دارای  $n$  برآمد باشد، آن‌گاه  $2^n$  پیشامد می‌توان برای آن پدیده تصادفی مشخص کرد.

هر پیشامد تک‌عضوی را یک پیشامد ساده می‌نامند.

**مثال:** در آزمایش پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد زوج ظاهر شود.      ب) عدد اول ظاهر شود.

**پاسخ:** می‌دانیم در آزمایش پرتاب یک تاس فضای نمونه دارای ۶ برآمد است. اما پیشامدهای موردنظر بخشی از این فضای نمونه می‌باشند.

الف)  $A = \{2, 4, 6\}$       ب)  $B = \{2, 3, 5\}$

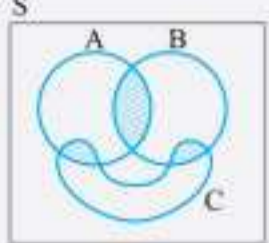
**مثال:** جعبه‌ای شامل ۱۵ عدد لامپ به شماره‌های ۱ تا ۱۵ است. لامپی به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم.

الف) پیشامد A، که در آن «عدد روی لامپ یک عدد اول باشد» را مشخص کنید.

ب) پیشامد B، که در آن «عدد روی لامپ فرد و مضرب ۳ باشد» را مشخص کنید.



**پاسخ:** ابتدا سه پیشامد را تشکیل می‌دهیم:  $A = \{(ر, ر), (ر, پ)\}$  و  $B = \{(ر, ر), (پ, ر)\}$  و  $C = \{(ر, پ), (پ, ر)\}$  واضح است که  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \cap C \neq \emptyset$  و  $B \cap C \neq \emptyset$ ، پس این سه پیشامد دو به دو سازگارند. اما  $A \cap B \cap C = \emptyset$ ، پس رخ دادن هر سه با هم غیرممکن است و لذا هر سه با هم ناسازگارند.



**نتیجه:** ممکن است سه پیشامد دو به دو سازگار باشند، اما هر سه با هم ناسازگار باشند. این موضوع را می‌توان با کمک نمودار ون به صورت روبه‌رو نمایش داد: توجه کنید که سه پیشامد A، B و C دو به دو سازگارند. (دو به دو اشتراک دارند) اما هر سه با هم ناسازگارند. (هر سه با هم اشتراکی ندارند).

**احتمال رخ دادن یک پیشامد زمانی مطرح می‌شود که آن پیشامد هنوز اتفاق نیفتاده است.** به عبارت دیگر احتمال، وضعیت آینده را مورد بررسی قرار می‌دهد. اما اگر پیشامد اتفاق بیافتد، احتمال در مورد آن معنی ندارد و علم آمار مطرح می‌شود. به عبارت دیگر علم آمار، پیشامدهایی که در گذشته رخ داده‌اند را مورد بررسی قرار می‌دهد. بنابراین می‌توان گفت:

**علم احتمال:** بررسی یک نمونه نامعلوم (آینده) از یک جامعه معلوم است.  
**علم آمار:** شناختن جامعه نامعلوم، با استفاده از نمونه‌های جمع آوری شده معلوم است (گذشته).

(برگرفته از کتاب درسی)

**مثال:** هریک از مسئله‌های زیر به کدام علم مربوط می‌شود؟

صورت مسئله	آمار	احتمال
الف) می‌دانیم ۹۰ درصد لامپ‌های موجود در یک جعبه سالم است. چند لامپ از جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک لامپ معیوب برداشته‌ایم؟	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ب) درآمد معلمان آموزش و پرورش چقدر است؟	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
پ) چند نفر از دانش‌آموزان کلاس یازدهم به درس احتمال علاقه دارند؟	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ت) در انتخابات دانش‌آموزی سال گذشته، دبیرستان «الف» با مشارکت بیش از ۹۵ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر دانش‌آموزان این دبیرستان در مورد مشارکت در انتخابات دانش‌آموزی سؤال کنیم، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ث) از ۲۵۰ نفر دانش‌آموزان یک دبیرستان، ۱۴۰ نفر در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. اگر از این دبیرستان ۵۰ دانش‌آموز به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۰ نفر از آن‌ها در رشته ریاضی تحصیل نمایند؟	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**پاسخ: الف)** در این مسئله، جامعه مورد بحث معلوم است (جعبه مورد نظر)، اما نمونه خواسته شده (چند لامپ از جعبه برداریم؟) نامعلوم است، پس این مسأله به علم احتمال مربوط می‌شود.

**ب)** برای بررسی این مسئله باید از تعدادی معلم، درآمدشان را بپرسیم تا بتوانیم با استفاده از نمونه‌های معلوم، این جامعه نامعلوم (حقوق معلمان آموزش و پرورش) را بشناسیم. پس این مسئله به علم آمار مربوط می‌شود.

**پ)** در این مسئله جامعه نامعلوم است. زیرا در حال حاضر نمی‌دانیم میزان علاقه دانش‌آموزان کلاس یازدهم به درس احتمال چقدر است. پس باید با بررسی چند نمونه معلوم (مثلاً پرسش از برخی یا تمام دانش‌آموزان کلاس یازدهم) به شناختن جامعه نامعلوم برسیم، که این مسئله به علم آمار مربوط می‌شود.

**ت)** این مسئله به علم احتمال مربوط می‌شود. زیرا جامعه مورد بحث معلوم است. یعنی در مورد این‌که در این جامعه چند درصد مشارکت در انتخابات داشته‌ایم، اطلاعات داریم. اما در مورد نمونه ۱۰ نفری اطلاعات نداریم.

**ث)** این مسئله به همان دلیلی که در مسئله ۴ آمده است، به علم احتمال مربوط می‌شود.

**پرسش‌های چهار گزینه‌ای**

۳۶۰. کدام سؤال در علم آمار مورد بررسی قرار می‌گیرد؟
- تعداد اقراد جویای کار در کل کشور چقدر است؟
  - ۶۰٪ از بازیکنان یک تیم در سال گذشته گل زده‌اند. با انتخاب حداقل چند نفر مطمئن هستیم بازیکنی وجود دارد که گل زده است؟
  - یک سکه را حداقل چندبار پرتاب کنیم تا تقریباً مطمئن باشیم «رو» در بین پرتاب‌ها ظاهر می‌شود؟
  - پدر و مادر یک فرزند چقدر امیدوار باشند که فرزند آن‌ها پسر می‌شود؟
۳۶۱. کدام سؤال در علم احتمال مورد بررسی قرار می‌گیرد؟
- چند نفر از افرادی که تصادف کرده‌اند از بیمه استفاده کرده‌اند؟
  - ۵٪ ورزشکاران المپیک دوپینگ کرده‌اند. حداقل چند ورزشکار را آزمایش کنیم تا مطمئن باشیم ورزشکار دوپینگی پیدا می‌شود؟
  - چند نفر از بچه‌های مدرسه گروه خونی O<sup>+</sup> دارند؟
  - چند درصد از مسافران یک قطار از خدمات راضی بوده‌اند؟





$C \cup D = C$



**مثال:** کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سبز است. اگر سه مهره به تصادف از این کیسه انتخاب کنیم، با کدام احتمال هر سه مهره هم‌رنگ نیستند؟

**پاسخ:** کل مهره‌های موجود در کیسه  $3 + 4 + 5 = 12$  است. پس  $n(S) = \binom{12}{3} = 220$  است. یافتن کل حالت‌های پیشامد مطلوب وقت‌گیر است. (هر سه مهره ناهم‌رنگ: یکی سفید و یکی سیاه و یکی سبز یا دو تا سفید و یکی سیاه یا دو تا سیاه و یکی سبز یا ...). پس از قضیه متمم کمک می‌گیریم:

هر سه سبز    هر سه سیاه    هر سه سفید

$$P(\text{هر سه مهره ناهم‌رنگ}) = 1 - P(\text{هر سه مهره هم‌رنگ}) = 1 - \frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{41}{44}$$

**مثال:** در پرتاب دو تاس سالم با هم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۱۰ می‌باشد؟

- ۱)  $\frac{1}{6}$    
  ۲)  $\frac{1}{3}$    
  ۳)  $\frac{5}{6}$    
  ۴)  $\frac{2}{3}$

**پاسخ:** واضح است که  $n(S) = 6^2 = 36$ . اما یافتن پیشامد مطلوب وقت‌گیر است. (مجموع دو عدد ظاهر شده ۹، ۸، ۷، ...). پس به کمک قضیه متمم داریم:

$$P(\text{مجموع دو تاس} < 10) = 1 - P(\text{مجموع دو تاس} \geq 10) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

- ۱۰ مجموع  $\rightarrow (4, 6), (5, 5), (6, 4)$   
 ۱۱ مجموع  $\rightarrow (5, 6), (6, 5)$   
 ۱۲ مجموع  $\rightarrow (6, 6)$

**مثال:** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و  $P(A) = \frac{2}{8}$ ،  $P(B) = \frac{1}{4}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ، آن‌گاه  $P(A \cup B)$ ،  $P(A - B)$  و  $P(A' \cap B')$  را بیابید.

**پاسخ:** طبق قضیه‌های گفته شده داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P(A' \cap B') \stackrel{\text{دوگان}}{=} P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

**مثال:** اگر  $P(A) = \frac{2}{5}$ ،  $P(B) = \frac{2}{5}$  و  $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ ، آن‌گاه احتمال‌های زیر را بیابید.

الف)  $P(A - B)$       ب)  $P(A \cup B)$

**پاسخ: الف)**

$$P(A \cup B) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} + (1 - \frac{2}{5}) - P(A \cap B) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A - B) = 0$$

**ب)** می‌دانیم  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ ، پس  $0 = \frac{2}{5} - P(A \cap B)$  و در نتیجه  $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ . اکنون داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

**مثال:** احتمال قبولی در درس آمار و احتمال برابر با  $\frac{1}{8}$  و احتمال قبولی در درس هندسه برابر با  $\frac{1}{7}$  است. اگر احتمال قبولی در هر دو درس برابر  $\frac{1}{65}$  باشد،

- الف) احتمال قبولی در حداقل یکی از دو درس چقدر است؟  
 ب) احتمال قبولی فقط در درس آمار و احتمال چقدر است؟  
 پ) احتمال قبولی فقط در یکی از دو درس چقدر است؟

**پاسخ: الف)** «حداقل یکی» بیان‌گر «اجتماع» است. پس طبق قضیه گفته شده داریم:

$$P(\text{قبولی در هندسه} \cap \text{قبولی در آمار و احتمال}) = P(\text{قبولی در آمار و احتمال}) + P(\text{قبولی در هندسه}) - P(\text{قبولی در آمار و احتمال و هندسه})$$

$$= 0/8 + 0/7 - 0/65 = 0/85$$

## درس سوم: احتمال شرطی

در برخی مسائل اعلام می‌شود پیشامدی مانند  $B$  رخ داده است و از ما می‌خواهند احتمال رخ دادن پیشامد دیگری مانند  $A$  را، با توجه به این‌که پیشامد  $B$  رخ داده است، محاسبه نماییم. به عبارت دیگر، احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  به تنهایی موردنظر نیست. در این صورت می‌گوییم «احتمال رخ دادن  $A$  به شرط رخ داد  $B$ » و می‌نویسیم  $P(A|B)$ ، که به آن **احتمال شرطی** می‌گوییم.

توجه کنید نماد « $|$ » در  $P(A|B)$ ، به صورت «به شرط» خوانده می‌شود.

در احتمال شرطی  $P(A|B)$ ، چون اعلام شده است پیشامد  $B$  رخ داده است، پس همواره  $B \neq \emptyset$  می‌باشد.

**مثال:** در پرتاب یک تاس سالم،

الف) احتمال آن‌که عددی زوج ظاهر شود، چقدر است؟

ب) اگر بدانیم عدد تاس بزرگ‌تر از ۳ آمده است، احتمال این‌که عددی زوج ظاهر شده باشد، چقدر است؟

**پاسخ:**

الف) می‌دانیم در پرتاب یک تاس سالم، فضای نمونه عبارت است از  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و پیشامد مطلوب (ظاهر شدن عدد زوج)

$$\text{به صورت } A = \{2, 4, 6\} \text{ می‌باشد. پس } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب) ابتدا تعریف فضای نمونه را یادآوری می‌کنیم:

«مجموعه تمام نتایج ممکن از انجام یک آزمایش (پدیده) تصادفی»

در این صورت با توجه به اطلاع داده شده (عدد تاس بزرگ‌تر از ۳ آمده است)، مطمئن هستیم که اعداد ۱، ۲ و ۳ ممکن نیستند و تمام حالت‌های ممکن عبارت‌اند از  $\{4, 5, 6\}$ . بنابراین فضای نمونه (تمام نتایج ممکن) در این قسمت، دارای ۳ برآمد است که به آن **فضای نمونه‌ای جدید** می‌گوییم.

از طرفی پیشامد مطلوب (ظاهر شدن عدد زوج) با توجه به فضای نمونه‌ای جدید به صورت  $\{4, 6\}$  است و از آنجایی که احتمال، نسبت تعداد حالت‌های مطلوب به تعداد حالت‌های ممکن است، پس:

$$P(3 < \text{عدد تاس} | \text{عدد زوج ظاهر شود}) = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}} = \frac{2}{3}$$

**نتیجه:** احتمال شرطی یعنی کاهش فضای نمونه

برای محاسبه احتمال شرطی  $P(A|B)$ ، با توجه به اطلاع داده شده (رخ داد پیشامد  $B$ )، فضای نمونه‌ای جدید (تمام نتایج ممکن) را تشکیل می‌دهیم و سپس احتمال مطلوب (احتمال رخ دادن پیشامد  $A$ ) را در این فضای نمونه محاسبه می‌نماییم. این موضوع «کاهش فضای نمونه» نامیده می‌شود.



**مثال:** کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره آبی است. یک مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که سیاه نیست. با کدام احتمال این مهره آبی است؟

**پاسخ:** با توجه به اطلاع داده شده (مهره خارج شده سیاه نیست)، درمی‌یابیم که تمام حالت‌های ممکن عبارت‌اند از ۶ مهره سفید و آبی. پس فضای نمونه‌ای جدید دارای ۶ برآمد است که دوتای آن‌ها مطلوب می‌باشد (دو مهره آبی)، بنابراین:

$$P(\text{مهره آبی} | \text{مهره سیاه نیست}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

**مثال:** سکه‌ای سالم را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر دست‌کم یک بار «رو» آمده باشد، با کدام احتمال هر سه پرتاب «رو» است؟

(برگرفته از کتاب درس)

**پاسخ:** شرط «دست‌کم یک بار رو آمده» بیان می‌کند که «هر سه پرتاب پشت» غیرممکن است. پس فضای نمونه‌ای جدید (تمام نتایج ممکن) عبارت است از:

$$\{(R, R, R), (R, R, P), (R, P, R), (R, P, P), (P, R, R), (P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\}$$

که دارای ۷ برآمد است. از طرفی پیشامد مطلوب، پیشامد تک‌عضوی  $\{(R, R, R)\}$  است، پس احتمال موردنظر  $\frac{1}{7}$  است.

$$P(\text{دست کم یک بار «رو» آمده است} | \text{هر سه پرتاب «رو» بیاید}) = \frac{1}{7}$$

# پاسخ نامہ تشریحی

۷۵۹. ۲ ۳ ۴

حتماً یادتان هست که در متن درس گفتیم داده‌های دورافتاده در بین معیارهای گرایش به مرکز، بیشترین تأثیر را روی میانگین دارند.

۷۶۰. ۱ ۲ ۳

شاخص مناسب برای مقایسه در گزینه «۱»، میانگین است نه مد. در گزینه «۲» نیز شاخص مناسب مد است.

۷۶۱. ۲ ۳ ۴

حذف یا اضافه کردن داده‌های دورافتاده بیشترین تأثیر را روی میانگین دارد.

۷۶۲. ۲ ۳ ۴

اول داده‌ها را مرتب می‌کنیم. دو داده در وسط قرار می‌گیرد که میانگین آن‌ها

همان میانه (یعنی  $Q_2 = 3/5$ ) است:  $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 8, 9, 10$

میانه داده‌های کمتر از میانه یعنی داده‌های ۱، ۱، ۲، ۲، ۳ می‌شود چارک اول. میانه داده‌های بیشتر از میانه یعنی ۴، ۵، ۸، ۹، ۱۰ می‌شود چارک سوم.

پس:  $Q_3 = 8, Q_1 = 2$

۷۶۳. ۱ ۳ ۴

اول داده‌ها را مرتب می‌کنیم. پس داده  $\frac{11+1}{2} = 6$  ام در وسط قرار می‌گیرد که همان میانه است. با در نظر گرفتن داده‌های کمتر از میانه (نه خود میانه)، چارک اول و با داده‌های بیشتر از میانه چارک سوم را به دست می‌آوریم.

$0, 1, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 8, 11, 12$

۷۶۴. ۲ ۳ ۴

مد، داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد، پس مد برابر ۲ است. با حذف ۲، داده‌ها به صورت زیر درمی‌آیند. دو داده وسط قرار می‌گیرند پس میانگین آن‌ها، همان میانه می‌شود.

$1, 1, 3, 4, 7, 11$

۷۶۵. ۱ ۲ ۳

میانگین داده‌های اول:  $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$

میانگین داده‌های دوم:  $\frac{x_1 + \dots + x_n + 1 + 2 + \dots + n}{n}$

$$= \bar{x} + \frac{n(n+1)}{2n} = \bar{x} + \frac{n+1}{2}$$

$$\text{اختلاف} = \frac{n+1}{2} = 10 \Rightarrow n = 19$$

۱۹ داده داریم، پس داده شماره  $\frac{19+1}{2}$  میانه داده‌ها است.

۷۶۶. ۲ ۳ ۴

بیشترین فراوانی برای داده ۱۰ است، پس مد برابر ۱۰ است. داده‌های مرتب شده به صورت مقابل است:

$\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{t_{10}}, \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{t_{15}}, \underbrace{4, 4, \dots, 4}_{t_{25}}, 10, 10, \dots, 10$

۵۰ داده داریم، پس دو داده ۲۵ام (یعنی ۴) و ۲۶ام (یعنی ۱۰) در وسط قرار می‌گیرند که میانگین آن‌ها یعنی ۷، همان میانه است.

۷۶۷. ۱ ۲ ۳

میانگین موزون داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum W_i x_i}{\sum W_i} = \frac{(6 \times 10) + (9 \times 12) + (10 \times 14) + (12 \times 15) + (8 \times 16) + (5 \times 8)}{6 + 9 + 10 + 12 + 8 + 5}$$

درست است که می‌توانیم این را حساب کنیم ولی چون اعداد بزرگ هستند پیشنهاد این است که به جای این کار از راهبرد تست ۶۷۷ استفاده کنیم. ۱۴ واحد از همه داده‌ها (نه فراوانی‌ها!) کم می‌کنیم:

$\Sigma$	-۴	-۲	۰	۱	۲	۴
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

میانگین موزون این‌ها می‌شود:

$$\bar{x}_w = \frac{-24 - 18 + 0 + 12 + 16 + 20}{50} = \frac{6}{50} = 0.12$$

حالا ۱۴ واحد اضافه می‌کنیم. پس میانگین اصلی برابر  $14/12$  است. ۵۰ داده داریم. پس میانه برابر میانگین داده شماره بیست و پنجم و بیست و ششم است. شش عدد ۱۰، نه تا ۱۲، ده تا ۱۴ داریم (۶+۹+۱۰=۲۵) یعنی عدد بیست و پنجم برابر ۱۴ و عدد بیست و ششم برابر ۱۵ است که میانگین این‌ها  $14/5$  می‌شود. حالا:  $Q_2 - \bar{x} = 14/5 - 14/12 = 0.38$

۷۶۸. ۱ ۳ ۴

**راهبرد**

اگر داده‌ها را در  $a$  ضرب و با  $b$  جمع کنیم، مد و میانه هم در  $a$  ضرب و با  $b$  جمع می‌شود.

$$10/5 = \text{میانه قدیم} \Rightarrow 24 + 3 = 27 = \text{میانه قدیم}$$

$$6 = \text{مد قدیم} \Rightarrow 15 + 3 = 18 = \text{مد قدیم}$$

۷۶۹. ۱ ۳ ۴

$Q_1$  چارک اول،  $Q_2$  میانه و  $Q_3$  چارک سوم است. برای به دست آوردن این‌ها باید داده‌ها را مرتب کنیم:

$$Q_2 = 12/1$$

$10/6, 10/6, 11/2, 11/5, 11/9, 12/3, 12/7, 12/8, 13/5, 30/2$

۱۰ عدد داریم میانه برابر میانگین پنجمی و ششمی می‌شود، یعنی:

$$Q_2 = \frac{11/9 + 12/3}{2} = 12/1$$

پنج عدد کمتر از میانه داریم پس چارک اول سومین عدد یعنی  $Q_1 = 11/2$  است، شبیه همین  $Q_3 = 12/8$  حالا:

$$\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{11/2 + 12/8 - 24/2}{12/8 - 11/2} = \frac{-1/2}{1/6} = -3 = -0.125$$

۷۷۰. ۲ ۳ ۴

حدود ۱۱٪ داده‌ها در دسته اول هستند. حدود ۵٪ داده‌ها قبل از میانه و ۵٪ بعد از میانه هستند. پس اضافه کردن ۱۰ داده بزرگ‌تر از میانه، فراوانی دسته اول را تغییر نمی‌دهد و فقط تعداد کل داده‌ها برابر ۹۰ می‌شود.

$$1125 = \frac{x}{80} \Rightarrow x = 9$$

$$9 = \frac{9}{90} = \text{فراوانی نسبی جدید دسته اول}$$

۷۷۱. ۱ ۳ ۴

داده ۱۴، بیشترین فراوانی را دارد، پس مد برابر ۱۴ است. از طرفی:

$$\bar{x}_w = \frac{24 + 42 + 32 + 36 + 20}{10} = 15/4$$

بنابراین اختلاف مد از میانگین می‌شود:  $15/4 - 14 = 1/4$

۷۷۲. ۲ ۳ ۴

هر داده فراوانی مخصوص به خود را دارد پس باید میانگین موزون را به دست آوریم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{(2 \times 2) + (3 \times 1) + (5 \times 2) + (a \times 1)}{2 + 1 + 2 + 1} = \frac{19 + a}{7}$$





$$\bar{x} = \frac{(-4 \times 15) + (-2 \times 9) + (0 \times 5) + (2 \times 11)}{15 + 9 + 5 + 11} = \frac{-56}{40} = \frac{-14}{10} = -1.4$$

(دوباره ۱۱ تا اضافه می‌کنیم) میانگین واقعی  $= -1.4 + 11 = 9.6$

از طرفی  $40 = 15 + 9 + 5 + 11$  عدد داریم، پس دو عدد بیستم و یکم در وسط می‌افتند (هر دو برابر ۹ هستند) که میانگین آنها نیز همان ۹ می‌شود، پس میانه برابر ۹ است.

$$\text{میانگین} - \text{میانه} = 9.6 - 9 = 0.6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷۹

اگر  $x = 6$  باشد، فراوانی همه داده‌ها برابر و در نتیجه جامعه، مد ندارد. حالا:

۵، ۶، ۶، ۷، ۹، ۹

$$Q_1 = 6.5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸۰

چون عدد  $x$  را نمی‌دانیم پس نمی‌توانیم داده‌ها را مرتب کنیم تا میانه به دست آید. بهتر است از گزینه‌ها کمک بگیریم:

اگر  $x = 64$  باشد، مد برابر ۶۴ و داده‌های مرتب شده به صورت زیر می‌شود:

۵۰، ۶۳، ۶۴، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۷۰، ۷۷

میانه در این حالت  $64/5$  خواهد بود، پس با مد برابر نبوده در نتیجه  $x = 64$  نمی‌تواند باشد.

اگر  $x = 65$  باشد مد برابر ۶۵ و داده‌های مرتب شده به صورت مقابل می‌شود:

۵۰، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۵، ۶۶، ۷۰، ۷۷

میانه هم در این حالت برابر ۶۵ می‌شود. پس میانگین را نیز محاسبه می‌کنیم. اعداد بزرگ هستند، بهتر است برای محاسبه میانگین، از همه داده‌ها ۶۵ واحد کم کنیم و در پایان ۶۵ واحد اضافه کنیم:

$$\bar{x} = \frac{-15 - 2 - 1 + 0 + 0 + 1 + 5 + 12}{8} + 65 = 65$$

پس به ازای  $x = 65$  میانگین و میانه و مد برابر می‌شوند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸۱

کسر رنگ شده از دایره برابر با فراوانی نسبی همان داده است. پس:

$x_i$	۱	۲	۳	۴
فراوانی نسبی	$0.2$	$0.1$	$0.4$	$0.3$

با استفاده از فراوانی‌های نسبی، میانگین را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}_w = (0.2 \times 1) + (0.1 \times 2) + (0.4 \times 3) + (0.3 \times 4) = 2.8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸۲

با تقسیم هر زاویه بر  $360^\circ$ ، فراوانی‌های نسبی به دست می‌آید. پس: بنابراین داریم:

داده‌ها	۱	۲	۳	۴
فراوانی نسبی	$0.1$	$0.2$	$\frac{126}{360} = 0.35$	$0.35$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i x_i = 0.1 + 0.2 + 0.35 + 0.35 = 2/95$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸۳

### راهنما

اگر  $n$  عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند، میانگین آن‌ها از رابطه  $\frac{a_1 + a_n}{2}$  به دست می‌آید. یعنی کافی است میانگین اولی و آخری را حساب کنیم.

جمله عمومی دنباله حسابی از رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  به دست می‌آید. پس:

$$a_{20} = 1 + (19 \times 2) = 39$$

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} = \frac{1 + 39}{2} = 20$$

بنابراین:

از طرفی داده ۲ بیشترین فراوانی را دارد پس مد برابر ۲ است. همچنین ۷ عدد (داده) داریم پس داده شماره  $\frac{7+1}{2} = 4$  یعنی چهارمی که برابر ۳ باشد

$$\frac{19+a}{2} = 2+2 \Rightarrow a=16$$

میانه است. پس:

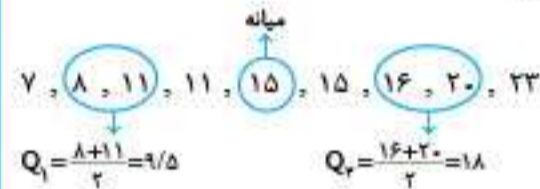
۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷۳

$$\frac{11+8+7+15+20+23}{6} = \frac{84}{6} = 14$$

اگر میانگین ۱۶،  $x$ ، ۱۱ نیز ۱۴ باشد با ترکیب دو گروه میانگین تغییری نمی‌کند، پس:

$$\frac{11+x+16}{3} = 14 \Rightarrow x=15$$

کل داده‌ها را مرتب می‌کنیم:



۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷۴

بیشترین فراوانی مربوط به داده  $a$  است، چون بالاترین ارتفاع را دارد. پس مد برابر  $a$  است. با دو برابر کردن داده‌ها، مد هم دو برابر می‌شود. توجه دارید که طبق تعریف نمودار چندبر،  $a$  مرکز دسته‌ای است که در آن قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷۵

فراوانی داده ۱۱ برابر ۳ است. باید فراوانی یکی از داده‌های دیگر هم برابر ۳ باشد تا جامعه دارای دو مد باشد. پس حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

$$2a+b=a-b=9 \Rightarrow a=6, b=-3$$

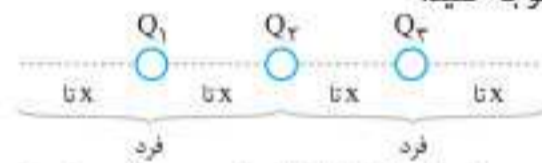
$$2a+b=a-b=15 \Rightarrow a=10, b=-5$$

$$2a+b=a-b=18 \Rightarrow a=12, b=-6$$

پس  $a=6, 10, 12$  می‌تواند باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷۶

به شکل زیر توجه کنید:



تعداد داده‌های بعد از میانه یا قبل از آن باید عددی فرد باشد تا دقیقاً داده‌ای که در وسط قرار می‌گیرد  $Q_1$  و  $Q_3$  شود (در غیر این صورت معدل دو تا وسطی خواهد بود)  $Q_2$  هم داده‌ای است که در وسط قرار می‌گیرد.  $Q_2$  داده شماره بیستم است، پس  $20 = 2x + 2$  و  $x = 9$  خواهد بود. تعداد کل اعداد می‌شود  $2x + 2 = 27$  تا. حالا:

$$\bar{x} = \frac{756}{27} = 28$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷۷

$$\frac{11+8+7+15+20+23}{6} = \frac{84}{6} = 14$$

اگر میانگین داده‌های ۱۶،  $x$ ، ۱۱ نیز ۱۴ باشد، با ترکیب دو گروه، میانگین تغییری نمی‌کند، پس:

$$\frac{11+x+16}{3} = 14 \Rightarrow x=15$$

کل داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۷، ۸، ۱۱، ۱۱، ۱۵، ۱۵، ۱۶، ۲۰، ۲۳

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷۸

داده‌ها	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۱۵	۹	۵	۱۱

از همه داده‌ها ۱۱ واحد کم می‌کنیم:

داده‌ها	-۴	-۲	۰	۲
فراوانی	۱۵	۹	۵	۱۱



# پاسخنامه کلیدی

گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست
۲	۲۸۳	۳	۲۳۶	۳	۱۸۹	۳	۱۴۲	۱	۹۵	۱	۴۸	۲	۱
۴	۲۸۴	۴	۲۳۷	۴	۱۹۰	۳	۱۴۳	۲	۹۶	۲	۴۹	۱	۲
۴	۲۸۵	۱	۲۳۸	۱	۱۹۱	۴	۱۴۴	۳	۹۷	۴	۵۰	۳	۳
۲	۲۸۶	۳	۲۳۹	۲	۱۹۲	۲	۱۴۵	۱	۹۸	۳	۵۱	۲	۴
۳	۲۸۷	۳	۲۴۰	۱	۱۹۳	۴	۱۴۶	۳	۹۹	۱	۵۲	۲	۵
۱	۲۸۸	۲	۲۴۱	۱	۱۹۴	۱	۱۴۷	۴	۱۰۰	۱	۵۳	۱	۶
۱	۲۸۹	۳	۲۴۲	۲	۱۹۵	۲	۱۴۸	۳	۱۰۱	۲	۵۴	۱	۷
۲	۲۹۰	۴	۲۴۳	۴	۱۹۶	۴	۱۴۹	۴	۱۰۲	۴	۵۵	۳	۸
۳	۲۹۱	۳	۲۴۴	۳	۱۹۷	۱	۱۵۰	۱	۱۰۳	۳	۵۶	۲	۹
۱	۲۹۲	۴	۲۴۵	۲	۱۹۸	۳	۱۵۱	۳	۱۰۴	۲	۵۷	۳	۱۰
۱	۲۹۳	۴	۲۴۶	۴	۱۹۹	۱	۱۵۲	۱	۱۰۵	۳	۵۸	۲	۱۱
۳	۲۹۴	۱	۲۴۷	۲	۲۰۰	۲	۱۵۳	۲	۱۰۶	۱	۵۹	۴	۱۲
۱	۲۹۵	۱	۲۴۸	۴	۲۰۱	۳	۱۵۴	۱	۱۰۷	۱	۶۰	۱	۱۳
۲	۲۹۶	۴	۲۴۹	۲	۲۰۲	۴	۱۵۵	۱	۱۰۸	۲	۶۱	۳	۱۴
۲	۲۹۷	۳	۲۵۰	۱	۲۰۳	۱	۱۵۶	۲	۱۰۹	۴	۶۲	۳	۱۵
۱	۲۹۸	۱	۲۵۱	۴	۲۰۴	۳	۱۵۷	۲	۱۱۰	۱	۶۳	۳	۱۶
۱	۲۹۹	۱	۲۵۲	۴	۲۰۵	۲	۱۵۸	۲	۱۱۱	۲	۶۴	۳	۱۷
۱	۳۰۰	۴	۲۵۳	۱	۲۰۶	۲	۱۵۹	۴	۱۱۲	۱	۶۵	۳	۱۸
۳	۳۰۱	۱	۲۵۴	۱	۲۰۷	۴	۱۶۰	۲	۱۱۳	۲	۶۶	۲	۱۹
۳	۳۰۲	۱	۲۵۵	۴	۲۰۸	۲	۱۶۱	۱	۱۱۴	۳	۶۷	۱	۲۰
۴	۳۰۳	۴	۲۵۶	۳	۲۰۹	۲	۱۶۲	۱	۱۱۵	۱	۶۸	۱	۲۱
۲	۳۰۴	۴	۲۵۷	۱	۲۱۰	۲	۱۶۳	۱	۱۱۶	۲	۶۹	۲	۲۲
۴	۳۰۵	۱	۲۵۸	۲	۲۱۱	۲	۱۶۴	۲	۱۱۷	۳	۷۰	۱	۲۳
۲	۳۰۶	۱	۲۵۹	۱	۲۱۲	۲	۱۶۵	۱	۱۱۸	۴	۷۱	۴	۲۴
۳	۳۰۷	۳	۲۶۰	۴	۲۱۳	۱	۱۶۶	۲	۱۱۹	۳	۷۲	۲	۲۵
۱	۳۰۸	۱	۲۶۱	۲	۲۱۴	۴	۱۶۷	۱	۱۲۰	۳	۷۳	۲	۲۶
۲	۳۰۹	۲	۲۶۲	۴	۲۱۵	۴	۱۶۸	۲	۱۲۱	۱	۷۴	۳	۲۷
۲	۳۱۰	۳	۲۶۳	۱	۲۱۶	۲	۱۶۹	۲	۱۲۲	۳	۷۵	۴	۲۸
۴	۳۱۱	۱	۲۶۴	۴	۲۱۷	۱	۱۷۰	۲	۱۲۳	۲	۷۶	۲	۲۹
۲	۳۱۲	۲	۲۶۵	۳	۲۱۸	۳	۱۷۱	۲	۱۲۴	۴	۷۷	۱	۳۰
۱	۳۱۳	۱	۲۶۶	۴	۲۱۹	۱	۱۷۲	۱	۱۲۵	۲	۷۸	۴	۳۱
۱	۳۱۴	۲	۲۶۷	۴	۲۲۰	۲	۱۷۳	۲	۱۲۶	۴	۷۹	۲	۳۲
۱	۳۱۵	۳	۲۶۸	۲	۲۲۱	۲	۱۷۴	۱	۱۲۷	۴	۸۰	۴	۳۳
۴	۳۱۶	۱	۲۶۹	۱	۲۲۲	۴	۱۷۵	۳	۱۲۸	۱	۸۱	۲	۳۴
۱	۳۱۷	۲	۲۷۰	۱	۲۲۳	۴	۱۷۶	۳	۱۲۹	۲	۸۲	۲	۳۵
۱	۳۱۸	۳	۲۷۱	۴	۲۲۴	۲	۱۷۷	۳	۱۳۰	۱	۸۳	۲	۳۶
۳	۳۱۹	۲	۲۷۲	۳	۲۲۵	۲	۱۷۸	۴	۱۳۱	۴	۸۴	۳	۳۷
۳	۳۲۰	۱	۲۷۳	۴	۲۲۶	۴	۱۷۹	۱	۱۳۲	۴	۸۵	۱	۳۸
۲	۳۲۱	۱	۲۷۴	۱	۲۲۷	۳	۱۸۰	۳	۱۳۳	۱	۸۶	۳	۳۹
۳	۳۲۲	۱	۲۷۵	۲	۲۲۸	۴	۱۸۱	۴	۱۳۴	۳	۸۷	۱	۴۰
۳	۳۲۳	۱	۲۷۶	۱	۲۲۹	۴	۱۸۲	۳	۱۳۵	۲	۸۸	۲	۴۱
۱	۳۲۴	۱	۲۷۷	۲	۲۳۰	۲	۱۸۳	۱	۱۳۶	۳	۸۹	۲	۴۲
۲	۳۲۵	۴	۲۷۸	۳	۲۳۱	۳	۱۸۴	۲	۱۳۷	۴	۹۰	۴	۴۳
۱	۳۲۶	۱	۲۷۹	۴	۲۳۲	۳	۱۸۵	۳	۱۳۸	۱	۹۱	۳	۴۴
۳	۳۲۷	۴	۲۸۰	۴	۲۳۳	۴	۱۸۶	۳	۱۳۹	۴	۹۲	۱	۴۵
۳	۳۲۸	۴	۲۸۱	۳	۲۳۴	۴	۱۸۷	۴	۱۴۰	۳	۹۳	۲	۴۶
۲	۳۲۹	۴	۲۸۲	۳	۲۳۵	۴	۱۸۸	۴	۱۴۱	۴	۹۴	۲	۴۷

گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست	گزینه	تست
۳	۱۲	۲	۹۵۶	۴	۹۰۵	۲	۸۵۴	۳	۸۰۳	۲	۷۵۲	۱	۷۰۱
۱	۱۳	۳	۹۵۷	۲	۹۰۶	۱	۸۵۵	۳	۸۰۴	۴	۷۵۳	۳	۷۰۲
۳	۱۴	۲	۹۵۸	۴	۹۰۷	۳	۸۵۶	۲	۸۰۵	۳	۷۵۴	۲	۷۰۳
۴	۱۵	۲	۹۵۹	۱	۹۰۸	۴	۸۵۷	۲	۸۰۶	۳	۷۵۵	۲	۷۰۴
۲	۱۶	۱	۹۶۰	۳	۹۰۹	۴	۸۵۸	۴	۸۰۷	۲	۷۵۶	۳	۷۰۵
۳	۱۷	۴	۹۶۱	۲	۹۱۰	۳	۸۵۹	۴	۸۰۸	۴	۷۵۷	۲	۷۰۶
۴	۱۸	۱	۹۶۲	۳	۹۱۱	۴	۸۶۰	۲	۸۰۹	۳	۷۵۸	۴	۷۰۷
۲	۱۹	۲	۹۶۳	۴	۹۱۲	۳	۸۶۱	۳	۸۱۰	۱	۷۵۹	۱	۷۰۸
۴	۲۰	۳	۹۶۴	۱	۹۱۳	۳	۸۶۲	۴	۸۱۱	۳	۷۶۰	۲	۷۰۹
آزمون ۳		۴	۹۶۵	۴	۹۱۴	۱	۸۶۳	۱	۸۱۲	۱	۷۶۱	۴	۷۱۰
۳	۱	۳	۹۶۶	۴	۹۱۵	۱	۸۶۴	۲	۸۱۳	۱	۷۶۲	۲	۷۱۱
۳	۲	۲	۹۶۷	۳	۹۱۶	۳	۸۶۵	۲	۸۱۴	۲	۷۶۳	۲	۷۱۲
۲	۳	۳	۹۶۸	۴	۹۱۷	۴	۸۶۶	۲	۸۱۵	۱	۷۶۴	۱	۷۱۳
۴	۴	۴	۹۶۹	۲	۹۱۸	۳	۸۶۷	۱	۸۱۶	۴	۷۶۵	۲	۷۱۴
۱	۵	۲	۹۷۰	۱	۹۱۹	۲	۸۶۸	۲	۸۱۷	۱	۷۶۶	۲	۷۱۵
۲	۶	۱	۹۷۱	۳	۹۲۰	۲	۸۶۹	۴	۸۱۸	۴	۷۶۷	۴	۷۱۶
۱	۷	۲	۹۷۲	۱	۹۲۱	۴	۸۷۰	۴	۸۱۹	۲	۷۶۸	۴	۷۱۷
۲	۸	۱	۹۷۳	۳	۹۲۲	۳	۸۷۱	۳	۸۲۰	۲	۷۶۹	۳	۷۱۸
۳	۹	آزمون ۱		۲	۹۲۳	۱	۸۷۲	۱	۸۲۱	۱	۷۷۰	۳	۷۱۹
۱	۱۰	۳	۱	۴	۹۲۴	۱	۸۷۳	۱	۸۲۲	۴	۷۷۱	۱	۷۲۰
۲	۱۱	۴	۲	۴	۹۲۵	۴	۸۷۴	۱	۸۲۳	۱	۷۷۲	۱	۷۲۱
۲	۱۲	۲	۳	۴	۹۲۶	۴	۸۷۵	۴	۸۲۴	۳	۷۷۳	۴	۷۲۲
۱	۱۳	۲	۴	۴	۹۲۷	۲	۸۷۶	۳	۸۲۵	۱	۷۷۴	۳	۷۲۳
۳	۱۴	۳	۵	۳	۹۲۸	۲	۸۷۷	۲	۸۲۶	۳	۷۷۵	۳	۷۲۴
۲	۱۵	۱	۶	۲	۹۲۹	۴	۸۷۸	۲	۸۲۷	۲	۷۷۶	۲	۷۲۵
۱	۱۶	۱	۷	۳	۹۳۰	۴	۸۷۹	۲	۸۲۸	۳	۷۷۷	۲	۷۲۶
۱	۱۷	۲	۸	۱	۹۳۱	۲	۸۸۰	۲	۸۲۹	۴	۷۷۸	۱	۷۲۷
۳	۱۸	۴	۹	۴	۹۳۲	۲	۸۸۱	۱	۸۳۰	۳	۷۷۹	۳	۷۲۸
۴	۱۹	۴	۱۰	۲	۹۳۳	۴	۸۸۲	۱	۸۳۱	۲	۷۸۰	۳	۷۲۹
۲	۲۰	۲	۱۱	۴	۹۳۴	۳	۸۸۳	۲	۸۳۲	۲	۷۸۱	۲	۷۳۰
آزمون ۴		۳	۱۲	۱	۹۳۵	۱	۸۸۴	۳	۸۳۳	۴	۷۸۲	۴	۷۳۱
۲	۱	۲	۱۳	۱	۹۳۶	۳	۸۸۵	۲	۸۳۴	۱	۷۸۳	۳	۷۳۲
۳	۲	۲	۱۴	۲	۹۳۷	۴	۸۸۶	۱	۸۳۵	۲	۷۸۴	۱	۷۳۳
۲	۳	۱	۱۵	۱	۹۳۸	۲	۸۸۷	۳	۸۳۶	۴	۷۸۵	۴	۷۳۴
۴	۴	۱	۱۶	۳	۹۳۹	۲	۸۸۸	۴	۸۳۷	۱	۷۸۶	۳	۷۳۵
۲	۵	۲	۱۷	۱	۹۴۰	۴	۸۸۹	۲	۸۳۸	۴	۷۸۷	۳	۷۳۶
۱	۶	۱	۱۸	۲	۹۴۱	۳	۸۹۰	۳	۸۳۹	۴	۷۸۸	۲	۷۳۷
۳	۷	۲	۱۹	۳	۹۴۲	۲	۸۹۱	۱	۸۴۰	۳	۷۸۹	۲	۷۳۸
۳	۸	۳	۲۰	۳	۹۴۳	۴	۸۹۲	۲	۸۴۱	۳	۷۹۰	۴	۷۳۹
۲	۹	آزمون ۲		۴	۹۴۴	۲	۸۹۳	۳	۸۴۲	۴	۷۹۱	۴	۷۴۰
۳	۱۰	۳	۱	۱	۹۴۵	۱	۸۹۴	۱	۸۴۳	۴	۷۹۲	۱	۷۴۱
۱	۱۱	۳	۲	۲	۹۴۶	۴	۸۹۵	۴	۸۴۴	۱	۷۹۳	۲	۷۴۲
۲	۱۲	۱	۳	۲	۹۴۷	۳	۸۹۶	۱	۸۴۵	۳	۷۹۴	۴	۷۴۳
۴	۱۳	۳	۴	۴	۹۴۸	۳	۸۹۷	۴	۸۴۶	۳	۷۹۵	۱	۷۴۴
۳	۱۴	۲	۵	۴	۹۴۹	۳	۸۹۸	۱	۸۴۷	۴	۷۹۶	۱	۷۴۵
۳	۱۵	۴	۶	۳	۹۵۰	۱	۸۹۹	۲	۸۴۸	۴	۷۹۷	۳	۷۴۶
۱	۱۶	۴	۷	۲	۹۵۱	۴	۹۰۰	۳	۸۴۹	۱	۷۹۸	۲	۷۴۷
		۱	۸	۴	۹۵۲	۳	۹۰۱	۴	۸۵۰	۱	۷۹۹	۱	۷۴۸
		۲	۹	۱	۹۵۳	۱	۹۰۲	۳	۸۵۱	۲	۸۰۰	۲	۷۴۹
		۱	۱۰	۱	۹۵۴	۲	۹۰۳	۴	۸۵۲	۴	۸۰۱	۲	۷۵۰
		۱	۱۱	۳	۹۵۵	۱	۹۰۴	۳	۸۵۳	۳	۸۰۲	۳	۷۵۱