

فهرست

۹

فصل اول عبارتهای جبری

۱۰

درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردها

۱۹

درس دوم: عبارتهای گویا

۶۳

فصل دوم معادله درجه دوم

۶۴

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

۶۸

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

۷۹

درس سوم: معادله‌های شامل عبارتهای گویا

۱۱۱

فصل سوم تابع

۱۱۲

درس اول: مفهوم تابع

۱۲۰

درس دوم: ضابطه جبری تابع

۱۲۴

درس سوم: نمودار تابع خطی

۱۲۹

درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲

۱۷۵

فصل چهارم کار با داده‌های آماری

۱۷۶

درس اول: گردآوری داده‌ها

۱۷۹

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز

۱۸۶

درس سوم: معیارهای پراکندگی

۲۱۷

فصل پنجم نمایش داده‌ها

۲۱۸

درس اول: نمودارهای یک متغیره

۲۲۲

درس دوم: نمودارهای چند متغیره



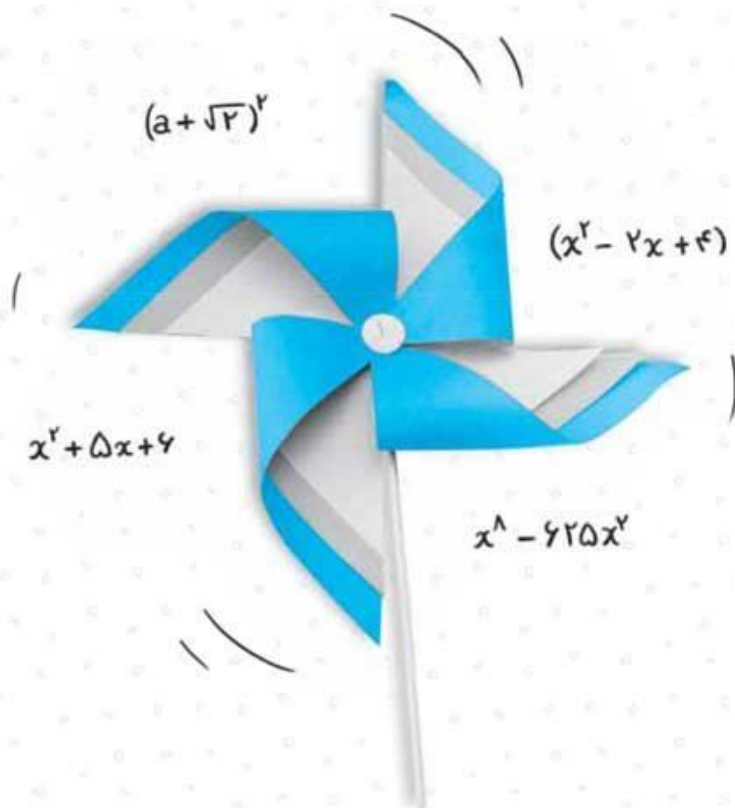
فصل اول

عبارت‌های جبری

تو درس اول این فصل یاد می‌گیری که چطور جمع و تفریق دو تا عبارت رو به توان ۲ یا ۳ برسونی یا این‌که چطوری یه عبارتی رو که ضرب شده‌اش رو داری به حالت قبل از ضرب (تجزیه شده‌اش) برگردونی.

تو درس دوم هم یاد می‌گیری عبارتهای کسری رو با هم جمع و تفریق کنی. بعد از خواندن این فصل دیگه تو عبارتهای جبری همه‌چی تموم می‌شی و دیگه چیزی برای یادگرفتن باقی نمی‌مونه!

- درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردشون
- ۱ عبارت جبری اصن چی هست؟
 - ۲ یک جمله‌ای و چند جمله‌ای
 - ۳ مفهوم اتحاد و آشنایی با انواع اتحادهای
 - ۴ تجزیه عبارتهای جبری
- درس دوم: عبارتهای گویا
- ۱ عبارتهای گویا و شناسایشون
 - ۲ ساده‌سازی عبارتهای گویا
 - ۳ ب.م.م.ک.م.م. به دوروش سنتی و فانتوم
 - ۴ جمع، تفریق و تقسیم عبارتهای جبری



درس ۱: چند اتحاد جبری و کاربردها

عبارت‌های جبری

عبارت جبری ترکیبی از اعداد حقیقی است که به متغیرهای مختلف با توان‌های صحیح غیرمنفی وصل شده‌اند. این اتصال به وسیله ضرب انجام می‌شود. مثل $2 \times (y) \times (x^4)$ که به شکل $2yx^4$ نوشته می‌شود اما عبارتی مثل $4x^2$ یا $12x^{\frac{1}{2}}$ که توان منفی یا کسری

دارند عبارت جبری نمی‌باشند. (رادیکال توان کسری است مثل $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}}$)

عبارت‌های جبری به دو دسته یک‌جمله‌ای و دو جمله‌ای تقسیم می‌شوند:

الف یک‌جمله‌ای: هر عبارت ریاضی که از ضرب عدد در متغیرهایی با توان‌های حسابی ساخته شود یک‌جمله‌ای نام دارد. مثلاً $4x^2, 2zx^4, 5xyzk, 3x^2y^2z$ و عباراتی از این قبیل. بنابراین یک جمله‌ای توان منفی و کسری (رادیکال) ندارد.

انواع یک‌جمله‌ای:

۱ متشابه: متغیرهای آن‌ها کاملاً شبیه یکدیگر است. در اثر جمع و تفریق کردن یک جمله‌ای‌های متشابه فرآیندی مثل حل کردن

شکر در جای رخ داده و یک جمله‌ای جدیدی ساخته می‌شود. مثلاً $10x^2y^2 + 8x^2y^2 = 18x^2y^2$

۲ غیرمتشابه: متغیرهای آن‌ها ظاهر متفاوتی دارند. در اثر جمع و تفریق کردن آن‌ها با هم فرآیندی مثل حل کردن شن در جای رخ داده و دو یا چندجمله‌ای درست می‌شود. مثلاً $4xy + 2x^2 + \sqrt{y}yz + 5x + 4$ که در اثر جمع کردن ۵ یک‌جمله‌ای غیرمتشابه، یک ۵ جمله‌ای (چندجمله‌ای) درست شده است.

ب چندجمله‌ای: از جمع یا تفریق کردن چند یک‌جمله‌ای غیر متشابه ساخته می‌شود.

$$2x^2 + 4xy - 12y^2 + 17k - \sqrt{2}xy^2$$

دقت کن:

۱ اعداد حقیقی، یک‌جمله‌ای هستند. زیرا می‌توان مثلاً عدد ۱۴ را به شکل $14x^0$ نوشت و این اشکالی ندارد.

۲ اگر متغیرها را داخل رادیکال، یا قدرمطلق و یا به شکل توان کسری و منفی دیدید، بدانید که عبارت، چندجمله‌ای نیست.

مثال: به عبارت‌های زیر توجه کنید:

چند جمله‌ای نیست. \Rightarrow توان، عدد حسابی نیست. $x^2 - 4x^{\frac{2}{3}} + 7$

چند جمله‌ای نیست. \Rightarrow توان منفی دارد. $2x^{-2} + 4x$

چند جمله‌ای نیست. \Rightarrow x داخل قدرمطلق است. $|x| + 4x$

چند جمله‌ای نیست. \Rightarrow توان، عدد حسابی نیست. \Rightarrow $x(\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}})$ زیر رادیکال است. $\sqrt{x} - 5$

اتحادها و کاربرد آن‌ها

اتحاد، تساوی دو عبارت جبری است که به ازای هر مقدار دلخواه برقرار و درست است.

این معادله اتحاد نیست. \Rightarrow این معادله تنها به ازای یک مقدار، درست و برقرار است. $2x - 1 = 7 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$

این رابطه، اتحاد است. \Rightarrow تساوی روبه‌رو به ازای هر مقدار دلخواه درست و برقرار است. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$a = 1, b = 4 \Rightarrow \frac{(1+4)(1-4)}{(5)(-3)} = 1^2 - 4^2 = 1 - 16 = -15$$



اتحادهای مهم و پرکاربرد

| | | |
|---|---|--------------------------|
| 1 | $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | اتحادهای مربع دوجمله‌ای |
| 2 | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | |
| 3 | $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ | اتحاد مزدوج |
| 4 | $(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$ | اتحاد جمله مشترک |
| 5 | $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ | اتحاد مربع سه جمله‌ای |
| 6 | $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | اتحادهای مکعب دو جمله‌ای |
| 7 | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ | |
| 8 | $a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ | اتحاد چاق و لاغر |
| 9 | $a^2 - b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | |

اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(\Delta + \circ)^2 = \Delta^2 + 2\Delta\circ + \circ^2$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال: حاصل هر کدام از اتحادهای زیر را به دست آورید.

الف $(x + 1)^2$

ب $(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

پ $(x + 4)^2 - (x + 5)^2$

پاسخ:

الف $x^2 + 2(x)(1) + (1)^2 = x^2 + 2x + 1$

ب $(\sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{y})(\frac{1}{\sqrt{x}}) + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 = y + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{x}$

پ $x^2 + 8x + 16 - (x^2 + 10x + 25) = x^2 + 8x + 16 - x^2 - 10x - 25 = -2x - 9$

تست: اگر بدانیم که $a + b = 8$ و $ab = 2$ باشند، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

۶۴ (۴)

۶۲ (۳)

۶۰ (۲)

۵۸ (۱)

پاسخ: الف آقا همیشه $(a + b)^2$ یعنی ۶۴، گزینه ۴.

معلم: به بی‌دقتی کردی! $(a + b)^2$ ، $a^2 + b^2$ ، $a^2 + b^2$ اما چیزهای دیگه‌ای هم داره؛ یادت باشه اون‌ها رو حذف کنی.

پاسخ: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 8^2 - 2(2) = 64 - 4 = 60$

پس گزینه «۲» درست است.

اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(\Delta - \circ)^2 = \Delta^2 - 2\Delta\circ + \circ^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



مثال: حاصل هر کدام از اتحادهای زیر را به دست آورید.

الف $(\sqrt{2}-x)^2$

ب $(18)^2$

پ $(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}})^2$

پاسخ:

$$(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})(x) + (x)^2 = 2 - 2\sqrt{2}x + x^2$$

$$(20-2)^2 = (20)^2 - 2(20)(2) + (2)^2 = 400 - 80 + 4 = 320 + 4 = 324$$

$$(\frac{1}{\sqrt{x}})^2 - 2(\frac{1}{\sqrt{x}})(\frac{1}{\sqrt{y}}) + (\frac{1}{\sqrt{y}})^2 = \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{y}$$

الف

ب

پ

تست: اگر بدانیم که $a-b=12$ و $ab=28$ می‌باشند، حاصل a^2+b^2 کدام است؟

۲۴۰ (۴)

۲۱۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۱۹۰ (۱)

پاسخ: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 12^2 = a^2 + b^2 - 2(28) \Rightarrow 144 = a^2 + b^2 - 56 \Rightarrow a^2 + b^2 = 144 + 56 = 200$

پس گزینه «۲» درست است.

دقت کن: $a^2 + b^2$ می‌تواند از حاصل هر دو اتحاد $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$ به دست آید، پس می‌توان گفت:

$$a^2 + b^2 = \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab \\ (a-b)^2 + 2ab \end{cases}$$

تست: حاصل $(m+n)^2 - (m-n)^2$ چند برابر mn است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: $(m+n)^2 - (m-n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 - (m^2 - 2mn + n^2) = m^2 + 2mn + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 = 4mn$

$\frac{4mn}{mn} = 4 \Rightarrow$ Swll mn ololl ۴

پس گزینه «۱» درست است.

تست: اگر $(a-b)^2 = 625$ و $a^2 + b^2 = 857$ باشند، حاصل ab کدام است؟

۱۳۲ (۴)

۱۲۰ (۳)

۱۱۸ (۲)

۱۱۶ (۱)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 625 \Rightarrow 857 - 2ab = 625 \Rightarrow 2ab = 857 - 625 \Rightarrow ab = \frac{857-625}{2} = \frac{232}{2} = 116$

پاسخ:

پس گزینه «۱» درست است.

تست: اگر $a-b=4$ و $a^2 - b^2 = 18$ باشند، حاصل $(a+b)^2$ کدام است؟

۸۱ (۴)

۹ (۳)

$\frac{81}{4}$ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۱)

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \Rightarrow 18 = 4(a+b) \Rightarrow a+b = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

پاسخ:

$(a+b)^2 = (\frac{9}{2})^2 = \frac{81}{4}$

پس گزینه «۲» درست است.

تست: اگر $x+y=12$ و $xy=32$ ، $x^2 - y^2$ چند برابر $x^2 + y^2$ است؟ (x بزرگ‌تر از y است)

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (12)^2 - 2(32) = 144 - 64 = 80$

پاسخ:

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow (x-y)^2 = 80 - 2(32) = 80 - 64 = 16 \\ x-y = \sqrt{16} = \pm 4 \end{cases}$



چون جمع دو عدد ۱۲ و ضرب آنها ۳۲ شده، پس باید هر دو عدد منفی یا مثبت باشند. اما طبق صورت سوال $x+y=12$ ، پس هر دو عدد مثبتاند. بنابراین: $x-y=4$

$$xy=32 \begin{cases} x=8, y=4 \\ \parallel \\ x+y=12 \\ \parallel \\ x=-8, y=-4 \end{cases} \rightarrow x=8, y=4$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 12(4) = 48 \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{48}{80} = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

پس گزینه «۳» درست است.

تست: اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

- ۲۳ (۱) ۲۵ (۲) ۲۷ (۳) ۳۰ (۴)

آقا برای رسیدن از $x + \frac{1}{x}$ به $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کافیست $x + \frac{1}{x}$ رو به توان ۲ برسونیم. پس جواب می‌شه 5^2 یعنی ۲۵.

معلم: راه درستی رو داری میری، ولی دقت کن.

پاسخ:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (5)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

پس گزینه «۱» درست است.

تست: اگر $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$ باشد، حاصل $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴)

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$$

پاسخ:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

پس گزینه «۱» درست است.

اتحاد مزدوج

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(\Delta + \circ)(\Delta - \circ) = \Delta^2 - \circ^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

مثال: عبارت $(2x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{5})$ چقدر از $4x^2 + 10$ کم تر است؟

$$(2x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{5}) = (2x)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4x^2 - 5$$

پاسخ:

$$(4x^2 + 10) - (4x^2 - 5) = 4x^2 + 10 - 4x^2 + 5 = 15$$

مثال: حاصل $(3x+2)(9x^2+4)(3x-2)$ برابر است با $A - 16$ ، A را به دست آورید.

پاسخ:

$$(3x-2)(9x^2+4)(3x+2) = (3x-2)(3x+2)(9x^2+4) = (9x^2-4)(9x^2+4) = (9x^2)^2 - (4)^2 = 81x^4 - 16$$

$$81x^4 - 16 = A - 16 \Rightarrow A = 81x^4$$



اتحاد جمله مشترک

$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$$

$$(a+b)(a+c) = \underbrace{a^2}_{\text{الف}} + \underbrace{a c}_{\text{ب}} + \underbrace{a b}_{\text{پ}} + bc = \underbrace{a^2}_{\text{الف}} + (b+c) \underbrace{a}_{\text{ب}} + bc$$

آقا! اینا رو چه هوری مفظ کنیم؟

معلم: برای حفظ کردن این‌ها، اول قسمت مشترک را به توان ۲ می‌رسونیم (x^2) و از نظر تاریخی جمع از ضرب قدیمی‌تر و مسن‌تره. یعنی اول غیرمشترک‌ها رو جمع می‌کنیم. یادتون باشه چون قسمت دوم مربوط به جمع میشه و جمع مسن‌تره، برای اون صدلی x رو قرار می‌دیم $(a+b)x$ و در نهایت غیرمشترک‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل هر کدام از اتحادهای زیر را به دست آورید.

الف $(x+4)(x-1)$

ب $(\sqrt{x}+7)(\sqrt{x}-2)$

پ $(2\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}+1)$

ت $(-x+2)(x+3)$

پاسخ:

$$x^2 + (4-1)x + (4)(-1) = x^2 + 3x - 4$$

$$(\sqrt{x})^2 + (7-2)\sqrt{x} + (7)(-2) = x + 5\sqrt{x} - 14$$

$$2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) = 2[(\sqrt{x})^2 + (1+2)\sqrt{x} + (2)(1)] = 2x + 6\sqrt{x} + 4$$

$$[-(x-2)](x+3) = -1(x^2 + x - 6) = -x^2 - x + 6$$

تست: اگر $AB = x^2 + 4x + 3$ باشد، حاصل $(A-B)(A+B)$ کدام است؟ ($A < B$)

الف $4x + 8$

ب $-4x - 8$

پ -4

ت 4

پاسخ:

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$$

$$A < B \Rightarrow \begin{cases} x+1 = A \\ x+3 = B \end{cases}$$

$$A - B = x+1 - x - 3 = -2$$

$$A + B = x+1 + x+3 = 2x+4$$

$$(A - B)(A + B) = (-2)(2x+4) = -4x - 8$$

پس گزینه «۳» درست است.

تست: عبارت $(x^2 + 8x + 7)(x^2 - 64)$ فاقد کدام عامل است؟

الف $x^2 + 8$

ب $x + 7$

پ $x - 7$

ت $x + 1$

$$(x^2 + 8x + 7)(x^2 - 64) \Rightarrow (x+1)(x+7)(x^2 - 8)(x^2 + 8)$$

$$(x+1)(x+7)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x^2 + 8)$$

پاسخ:

پس گزینه «۲» درست است.

اتحاد مربع مجموع سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

$$(\Delta + \bigcirc + \square)^2 = \Delta^2 + \bigcirc^2 + \square^2 + 2(\Delta\bigcirc + \Delta\square + \bigcirc\square)$$

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(x+y-z)^2$

ب) $(x-y-z)^2$

پاسخ:

$(x+y+(-z))^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2((xy) + (x(-z)) + (y(-z))) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$

$(x+(-y)+(-z))^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x(-y)) + (x(-z)) + (-z)(-y)$

$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2zy$

الف

ب

آقا! چرا علامت yz مثبت شد؟

معلم: چون هم y منفی داشت و هم z ، پس حاصل ضرب اون‌ها در هم مثبت می‌شه.

مثال: اگر بدانیم که $(a+b+c) = 7$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ ، مقدار $ab+ac+bc$ را به دست آورید.

پاسخ:

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$

$7^2 = 9 + 2(ab+ac+bc) \Rightarrow ab+ac+bc = \frac{49-9}{2} = 20$

مثال: حاصل عبارت $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2$ را به دست آورید.

پاسخ:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$ $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 + 2ac + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4bc$

تست: مجموع ۳ عدد برابر ۱۱، و مجموع حاصل ضرب دو به دوی آن‌ها برابر ۳ می‌باشد، مجموع مجذورات این ۳ عدد کدام است؟

۱۵۰ (۴)

۱۲۱ (۳)

۱۱۵ (۲)

۱۱۰ (۱)

آقا من این‌ها رو قاطی می‌کنم. نمی‌تونم مجموع مجذورات و این‌ها رو بفهمم. فرق مجذور و مجذور رو هم نمی‌دونم. ممکنه کمک کنید؟

معلم: حتماً، خیلی ساده و راحت. عبارت این شکلی رو از چپ به راست بخون. مثلاً $(a+b+c)^2$

$\underbrace{(a+b+c)}_{(1)} \underbrace{(a+b+c)}_{(2)}$

۱ دو به دو در هم ضرب کن: (ab, ac, bc) ۲ حالا با هم جمع کن: $(ab+ac+bc)$.

یادت باشه که مثلاً جذر ۹ یعنی $\sqrt{9}$ و مجذور ۹ یعنی 9^2 .

$a+b+c = 11$

$ab+ac+bc = 3$

$a^2 + b^2 + c^2 = ?$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 11^2 - 2(3) = 121 - 6 = 115$

پس گزینه «۲» درست است.

دقت کن: یادت باشه جذر x یعنی \sqrt{x} و مجذور یعنی x^2 یا همون توان دوم x . (برای کسب اطلاعات بیشتر تر صفحه

اول فصل ۲ را مطالعه کنید.)

اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای

مثال: با توجه به آن چه که آموختید، $(a+b)^3$ را ساده کنید.

آقا کاری نداره. $(a+b)^3$ یعنی $(a+b)(a+b)(a+b)$.





آقا مرتونیم اون رو به شکل $(a+b)^2(a+b)$ هم بنویسیم.

معلم: آفرین به هر دوتون. هر دو درسته ولی دومی سریع تره. پس با اون کار می کنیم.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

کاملاً درسته. پس می تونیم نتیجه بگیریم که:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2$$

$$(\Delta + \circ)^2 = \Delta^2 + 2\Delta^2\circ + 2\Delta\circ^2 + \circ^2$$



مثال: اتحادهای زیر را ساده کنید.

الف $(x+1)^2$

ب $(1+1)^2$

ب $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

پاسخ:

الف $x^2 + 2x + 1$

ب $(1+1)^2 = (2)^2 = 2 \times 2 = 4$

الف

ب

راهنمایی:

1 $(\sqrt{x})^2$ را به صورت $\sqrt{x \times x}$ می توان نوشت.

2 در ضرب و تقسیم وقتی رادیکالها فرجه برابر داشتند، عبارت داخل رادیکالها را در هم ضرب و تقسیم کنید. مثلاً:

$$(\sqrt{x}) \times (\sqrt{y}) = \sqrt{x \times y} = \sqrt{xy}$$

$$(\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x})(\sqrt{y}) + (\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$$

$$= (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x^2y}) + 2(\sqrt{xy^2}) + (\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{x^2y} + 2\sqrt{xy^2} + y$$

ب

تست: اگر $a+b=4$ و $ab=2$ ، حاصل a^2+b^2 کدام است؟

۶۸ (۴)

۶۴ (۳)

۴۸ (۲)

۴۰ (۱)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4^2 - 2(2) = 16 - 4 = 12$$

پاسخ:

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (4)^2 - 2(2) = 16 - 4 = 12$$

پس گزینه «۱» درست است.



آقا اینا خیلی سفته!!

معلم: عجله نکن بهت می گم. فعلاً فقط رابطه رو نگاه کن.

$$\frac{a^2 + b^2}{+} = \frac{(a+b)^2}{+} - \frac{2ab(a+b)}{+}$$

دقت کن: روش حفظ کردنشون به این صورته که برای $a^2 + b^2$ علامت سومی، ساز مخالف می زنه و چون ساز مخالف داره به جای جمع بین a و b از ضرب استفاده می کنیم.

اتحاد مکعب دو تفاضل دو جمله ای

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



مثال: حاصل $(a-b)^2$ را به دست آورید.



برای حل این باید حاصل $(a-b)(a-b)$ رو به دست بیاریم.

معلم: آفرین. ولی راه ساده تری هم هست. $(a-b)$ یعنی $(a+(-b))$ پس برای $(a-b)^2$ کافیه از $(a+(-b))^2$ استفاده کنیم.

$$(a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

دقت کن: علامتها یکی در میان تغییر می کنن.



تست: اگر $a-b=4$ و $ab=3$ باشند، مقدار a^2-b^2 کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۸

پاسخ: $a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2ab(a-b) \Rightarrow a^2 - b^2 = 4^2 + 2(3)(4) = 64 + 24 = 100$

پس گزینه «۳» درست است.

⚠️ وقت کن!

$$\frac{a^2 - b^2}{-} = \frac{(a-b)^2 + 2ab(a-b)}{- \quad + \quad -}$$

مثل قبلی در $a^2 - b^2$ ، تمام علامتها «-» هستند، به جز $2ab$ که ساز مخالف دارد.

جمع‌بندی این دو رابطه مهم

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b) \\ a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2ab(a-b) \end{cases}$$

اتحاد چاق و لاغر

$$a^2 \pm b^2 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(\Delta^2 \pm \circ^2) = (\Delta \pm \circ)(\Delta^2 \mp \Delta \circ + \circ^2)$$

مثال: عبارتهای زیر را ساده کنید.

۱) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ ۲) $(x+y)$

پاسخ:

$$(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2) = (2x)^2 + (3y)^2 = 4x^2 + 9y^2$$

الف

$$(x+y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})$$

ب

جمع‌بندی اتحادها

$$(a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab \\ (a-b)^2 + 2ab \end{cases}$$

$$(a \pm b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab \pm ac \pm bc)$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

این اتحاد یک روش برای تجزیه کردن است. $a^2 \pm b^2 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

۱) $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$

۲) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

۳) $(a+b)^2 = a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2 \Rightarrow (a^2 + b^2) = (a+b)^2 + 2ab(a+b)$

۴) $(a-b)^2 = a^2 - 2a^2b + 2ab^2 - b^2 \Rightarrow (a^2 - b^2) = (a-b)^2 + 2ab(a-b)$



تجزیه یک عبارت جبری

تبدیل عبارت جبری به حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری با ضرایب صحیح را تجزیه می‌گوییم.

انواع روش‌ها

- ۱ فاکتورگیری
- ۲ اتحاد اول و دوم
- ۳ اتحاد مزدوج
- ۴ اتحاد جمله مشترک
- ۵ اتحاد تفاضل یا مجموع مکعبات دوجمله‌ای

مثال: عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف) $fa^2 + 8a^2b - 16a^2c$

ب) $5x^2y^2 + 10x^2y^2$

پ) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

ت) $20x^2 - 100x + 125$

ث) $16x^2 - 625$

ج) $3x^2 - 27y^2$

ح) $x^2 - 7x - 60$

خ) $x^2 - 19x + 48$

د) $(x^2 + 22x + 40)$

ز) $(x^2 + 1)$

ذ) $(x^2 - 1)$

ر) $(x^2 + 8)$

ز) $(x^2 - 27)$

پاسخ:

الف) عبارت a^2 در هر سه جمله مشترک است و هر سه اعداد ۴، ۸ و ۱۶ مضربی از ۴ هستند، بنابراین از fa^2 فاکتور می‌گیریم. دقت کنید که علامت عدد ۱۶ منفی است.

$$fa^2(1 + 2b - 4c)$$

ب) عبارتهای x^2 و y^2 در هر دو جمله، مشترک است و اعداد ۵ و ۱۰ مضربی از عدد ۵ هستند، بنابراین از $5x^2y^2$ فاکتور می‌گیریم.

$$5x^2y^2(y + 2x)$$

پ) این عبارت، حاصل اتحاد مربع دوجمله‌ای را نشان می‌دهد.

$$(2x + 3y)^2$$

ت) هر سه اعداد ۲۰، ۱۰۰ و ۱۲۵ مضربی از عدد ۵ هستند. پس از عدد ۵ فاکتور می‌گیریم. عبارتی که از آن فاکتور گرفته شده، حاصل اتحاد مربع دوجمله‌ای را نشان می‌دهد.

$$5(4x^2 - 20x + 25) = 5(2x - 5)^2$$

ث) هر دو عبارت با جذر گرفتن از رادیکال خارج می‌شوند و به $4x^2$ و 25 تبدیل می‌شوند، اما باید دقت کرد که $4x^2$ هر دو از زیر رادیکال خارج شده و به $2x^2$ و 5 تبدیل می‌شوند. پس می‌توان آن‌ها را به این شکل تجزیه کرد.

$$(4x^2 - 25)(4x^2 + 25) = (2x - 5)(2x + 5)(4x^2 + 25)$$

ج) اعداد ۳ و ۲۷ مضربی از عدد ۳ هستند، پس می‌توان از عدد ۳ در آن‌ها فاکتورگیری کرد. پس از فاکتورگیری، عبارت حاصل شده، اتحاد مزدوج را نشان می‌دهد و می‌توان آن را ساده کرد.

$$3(x^2 - 9y^2) = 3(x - 3y)(x + 3y)$$

ح) این عبارت، اتحاد جمله مشترک را نشان می‌دهد. دو عدد را باید پیدا کرد که حاصل ضرب آن‌ها -60 و جمع آن‌ها -7 شده باشد. اعداد -12 و $+5$ جواب‌های این معادله هستند.

$$(x - 12)(x + 5)$$

د) از روش اتحاد جمله مشترک می‌توان آن را حل کرد. باید دو عدد را پیدا کرد که حاصل ضرب آن‌ها 48 و جمع آن‌ها -19 شود. اعداد -3 و -16 جواب‌های این معادله هستند.

$$(x - 3)(x - 16)$$

ه) می‌توان حدس زد که از اتحاد جمله مشترک می‌توان آن را حل کرد. ضرب دو عدد 40 و جمع آن‌ها 22 شده است. پس دو عدد مورد نظر ما، 2 و 20 می‌باشند.

$$(x + 20)(x + 2)$$

و) عبارت مقابل، اتحاد مکعب دو جمله‌ای را نشان می‌دهد.

$$(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

ز) عبارت مقابل، اتحاد مکعب دوجمله‌ای را نشان می‌دهد.

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)$$



ر جمله x^2 ، x ای را نشان می‌دهد که به توان سه رسیده است و عدد ۸، 2^3 را نشان می‌دهد. علامت عبارت اصلی، مثبت است، پس علامت عبارت باز شده اول نیز مثبت ولی علامت عبارت دومی منفی است.

$$(x+2)(x^2-2x+4)$$

ز عبارت بالا، اتحاد جاقی و لاغر را نشان می‌دهد و مانند پاسخ مثال قبل، آن را حل می‌کنیم. اما حواستان باشد که علامت‌های آن متفاوت است. علامت عبارت اصلی منفی است، پس علامت عبارت باز شده اول منفی و علامت عبارت دوم همیشه مثبت است.

$$(x-3)(x^2+3x+9)$$

درس ۲: عبارتهای گویا

عبارتهای گویا

عبارتهای گویا، کسرهایی هستند که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای است. توجه کنید که متغیرها داخل قدرمطلق و رادیکال نباشند، چون در آن صورت عبارت گویا نداریم. عبارات گویا حتماً حاوی چندجمله‌ای هستند.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مثال: گویا بودن یا نبودن عبارتهای زیر را معین کنید. (با علامت * یا \checkmark)

الف $\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}}$

ب $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$

پ $\frac{x+y}{2\sqrt{z}}$

ت $x^2 + 4x + 1$

ث $\frac{x-2}{2x^2 - 4x + 5}$

ج $\frac{|x|}{x^2 + 2}$

ح $\sqrt{x^2 + 1}$

پاسخ:

الف گویاست. عدد ۱ در صورت، یکجمله‌ای و $\sqrt{2}$ در مخرج عدد حقیقی است.

ب \sqrt{x} در صورت مشکل ساز است. این عبارت گویا نیست.

پ \sqrt{z} در مخرج مشکل ساز است. این عبارت گویا نیست.

ت $x^2 + 4x + 1$ را می‌توان به شکل $\frac{x^2 + 4x + 1}{1}$ نوشت که صورت و مخرج عبارات جبری هستند. پس گویاست.

ث مشکلی ندارد. این عبارت هم گویا است.

ج به دلیل وجود قدرمطلق این عبارت گویا نیست.

ح این عبارت هم گویا نیست.

نکته: عبارات گویا زمانی معنی‌دار یا تعریف شده هستند که مخرج آنها مخالف صفر باشد.

بیشتر، من همه رو فهمیدم. ولی مکه $\sqrt{x^2 + 1}$ نمی‌شه $1 + x$ این‌که مشکلی نداره!!!

معلم: دقت کن. عبارت $\sqrt{x^2 + 1}$ تبدیل به $|x| + 1$ می‌شه که اصلاً چندجمله‌ای نیست.

$$| \sqrt{+0} |^{01} = 0 \rightarrow \sqrt{(+x)^2} = x$$

$$| \sqrt{-0} |^{01} = -0 \rightarrow \sqrt{(-x)^2} = -x$$

$$| \sqrt{0} |^{2p} = |0| \rightarrow \sqrt{x^{18}} = |x|$$

نکته:

مثال: گویا بودن یا نبودن هر کدام را معین کنید و بگویید به ازای چه مقادیری تعریف شده هستند؟

الف $\frac{x\sqrt{x} + 1}{3 - x}$

ب $\frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

پ $\frac{4x^2 + 5x + 1}{\sqrt{x}}$

ت $\frac{x + 9}{\sqrt{x} - 2}$



پاسخ:

$$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$$

الف) گویا نیست.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

ب) گویاست.

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

پ) گویاست.

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

ت) گویا نیست.

ساده‌سازی عبارات گویا

مثال: کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$

ب) $\frac{x^2 - 25}{4x + 20}$

پ) $\frac{x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

پاسخ:

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x+3$$

الف)

آقا یعنی $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ همون $x + 3$ هست؟

معلم: نه اشتباه نکن. درسته که ساده شده $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ برابر $x + 3$ شده، اما این $x + 3$ نیست. بلکه $(x + 3)$ ای که فقط $x = +3$ رو نمی‌تونه قبول کنه چون عبارت اصلی به ازای $x = 3$ تعریف نمی‌شه.

ب) عبارت $(x^2 - 25)$ را می‌توان به صورت اتحاد مزدوج نوشت و از ۴ در عبارت مخرج فاکتور گرفته و حاصل را می‌نویسیم:

$$\frac{(x+5)(x+5)}{4(x+5)} = \frac{x+5}{4}$$

پ) عبارت $x^2 - 8$ در صورت را با اتحاد جاق و لاغر و مخرج را با اتحاد مربع تجزیه می‌کنیم یعنی:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

ب.م.م و ک.م.م به روش فانتوم (روش مهروماهی)

ب.م.م: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

ک.م.م: کوچک‌ترین مضرب مشترک

برای محاسبه ب.م.م و ک.م.م از روش سنتی استفاده می‌شود، ولی ما به شما روش فانتوم رو یاد می‌دهیم.

روش سنتی

یادآوری: در روش سنتی، باید هر عدد را به شمارنده‌های اول آن تجزیه کنیم.

بنا به تعریف داریم:

ب.م.م ← حاصل ضرب عوامل مشترک با کوچکترین توان

ک.م.م ← عوامل مشترک با بزرگترین توان ضرب در عوامل غیرمشترک

مثال: ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۱۲۶ و ۱۵۰ را به دست آورید.

پاسخ:

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

$$3 = \text{ب.م.م}$$

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

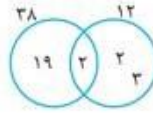
$$3^2 \times 2^2 \times 7 \times 5 = \text{ک.م.م}$$

مث: ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۱۲ و ۳۸ را به دست آورید.

پاسخ:

۱ برای هر عدد یک دایره رسم کنید.

۲ حتماً برای دو دایره، ناحیه مشترک در نظر بگیرید.



$$12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$$

$$38 = 19 \times 2$$

$$\forall o \tau z \text{ } \forall \text{el}^j k o = 2 = 3, 3, j$$

$$\forall o \tau z \text{ } \forall \text{el}^j k o n j \text{ } \forall k \text{ } \forall \text{el}^j k o \text{ } \forall o \tau z = 19 \times 2 \times 2 \times 3 = 3, 3, \forall$$

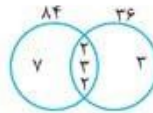
ب: ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۸۴ و ۲۶ را به دست آورید.

پاسخ:

$$84 = 21 \times 4 = 3 \times 7 \times 2 \times 2$$

$$26 = 9 \times 4 = 3 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$k \forall v \forall \text{ } \forall o \tau z \text{ } \forall \text{el}^j n j \text{ } 3 \text{ } ; \text{ } k \forall v \forall \text{ } \forall o \tau z \text{ } \forall \text{el}^j n j \text{ } 2 \text{ } \text{ } j z$$



$$3, 3, j = 2 \times 2 \times 2 = 12$$

$$3, 3, \forall = 7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 252$$

پ: ب.م.م و ک.م.م سه عدد ۱۲، ۲۶ و ۴۸ را به دست آورید.

نکته: وقتی سه عدد یا عبارت داشتن از مثلث استفاده کنیم.

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

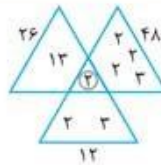
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$26 = 13 \times 2$$

$$3, 3, j = 2 = \forall o \tau z \text{ } \forall \text{el}^j k o$$

$$3, 3, \forall = 13 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$= 2^5 \times 3^2 \times 13$$



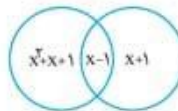
ت: ب.م.م و ک.م.م دو عبارت $x^2 - 1$ و $x^2 - 1$ را به دست آورید.

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$3, 3, j = (x-1)$$

$$3, 3, \forall = (x^2 + x + 1)(x-1)(x+1)$$



تست: عبارت گویای $\frac{x^2 + 4x - 4}{x^4 - 16x^2}$ به ازای مقادیری از x تعریف نمی‌شود. مجموع این مقادیر کدام است؟

$$8 \text{ (۴)}$$

$$-4 \text{ (۳)}$$

$$4 \text{ (۲)}$$

$$0 \text{ (۱)}$$

پاسخ: مخرج را نوشته و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم. این عبارت به ازای ریشه‌های مخرج تعریف نشده است.

$$x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16) = x^2(x-4)(x+4) = x^2(x-2)(x+2)(x^2+4) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

مخرج به ازای $x=0$ ، $x=2$ ، $x=-2$ تعریف نمی‌شود. جمع این مقادیر برابر صفر است.

پس گزینه «۱» درست است.



تست: کسر $\frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x^2-4)}$ به ازای مقادیری از x تعریف نشده است. اختلاف بیشترین و کمترین این مقادیر کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: $x(x+1)(x^2-4) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 2, x = -2$

کولتور = ۲ ، کولتور = -۲

تفاوت = ۲ - (-۲) = ۴

پس گزینه «۴» درست است.



آقا، چرا $(x+1)$ صورت را با $(x+1)$ مخرج ساده نکردیم؟

معلم: بچه‌ها! برای پیدا کردن ریشه‌های مخرج، دقت کنید به وقت عبارت‌های صورت و مخرج رو با هم ساده نکنین، چون این جور بعضی از ریشه‌ها رو از بین می‌برین.

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

۱) مخرج‌ها یکسان هستند.

در این حالت یک مخرج برای تمام عبارت‌ها نوشته و سپس عبارت‌های صورت را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{x-8}{x^2-4} - \frac{x-2}{x^2-4}$

ب) $\frac{x^2+8x+1}{x+4} + \frac{x^2-1}{x+4}$

پاسخ:

الف) $\frac{x-8-(x-2)}{x^2-4} = \frac{x-8-x+2}{x^2-4} = \frac{-6}{x^2-4}$

ب) $\frac{x^2+8x+1+x^2-1}{x+4} = \frac{2x^2+8x}{x+4} = \frac{2x(x+4)}{x+4} = 2x$

دقت کن: قسمت ب مثال به ازای $x = -4$ تعریف نمی‌شه و خدای نکرده گول ساده شده اون رو نخورین.

۲) مخرج‌ها متفاوت‌اند: در این حالت دو وضعیت داریم که با مثال آن‌ها را مطرح خواهیم کرد:

الف) کسر‌ها هیچ عامل مشترکی ندارند:

۱) مخرج‌ها را در هم ضرب می‌کنیم، این مخرج مشترک است.

۲) به مخرج هر کسر نگاه کنید. مخرج مشترک را بر آن تقسیم کنید، و هر آن‌چه را که ماند در صورت ضرب کنید.

۳) حال صورت‌های جدید را با هم جمع و تفریق کنید.

مثال:

$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

$\frac{1 \times (x-1) - 1 \times (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$

پاسخ:

ب) کسر‌ها عامل مشترکی دارند:

در این حالت برای پیدا کردن مخرج مشترک، عوامل مشترک با بیشترین توان را در سایر عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم یعنی

ک.م.م مخرج‌ها را پیدا می‌کنیم و آن را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم. بقیه مراحل مانند قبل است.

مثال:

$\frac{2x}{(x-1)^2} + \frac{4xy}{(x^2-1)}$

$\frac{2x}{(x-1)(x-1)} + \frac{4xy}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x(x+1) + 4xy(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2x^2 + 2x + 4x^2y - 4xy}{(x-1)^2(x+1)}$

پاسخ:



مثال: عبارات زیر را ساده کنید.

الف $\frac{\frac{1}{a}+1}{\frac{1}{a}-1}$

ب $\frac{y}{x^2} + \frac{2x}{2y^2} - 1$

پ $\frac{a-2}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$

ت $\frac{x+1}{x-1} - 1$

ث $\frac{f}{9x} - \frac{\Delta x}{6y^2} + 1$

ج $\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

ح $\frac{\frac{1}{m}+1}{m+1}$

پاسخ:

الف $\frac{\frac{1+a}{a}}{\frac{1-a}{a}} = \frac{a(1+a)}{a(1-a)} = \frac{1+a}{1-a}$

الف

ب $\frac{2xy^2(y) + (2x)x^2 - 2x^2y^2(1)}{2x^2y^2} = \frac{2xy^3 + 2x^3 - 2x^2y^2}{2x^2y^2}$

ب

پ $\frac{a-2-2(a+2)}{a^2-4} = \frac{a-2-2a-4}{a^2-4} = \frac{-a-6}{a^2-4}$

پ

ت $\frac{x+1-1(x-1)}{x-1} = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$

ت

ث $\frac{\frac{xy^2}{f} - \frac{xx}{\Delta x} + \frac{9xx \times xy^2}{1}}{9x \times 6y^2} = \frac{24xy^2 - 4\Delta x^2 + 54x^2y^2}{54xy^2}$

ث

ج $\frac{2x}{(x-y)(x+y)} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{2x + 1(x-y) - 1(x+y)}{(x-y)(x+y)}$

ج

ح $\frac{2x+x-y-x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x-2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x+y}$

ح

ح $\frac{\frac{1+m}{m}}{m+1} \xrightarrow{\text{RozA} \leftarrow \frac{1}{m} \cdot m; \text{Zohf} \leftarrow \frac{1}{m} \cdot (m+1)} \frac{(1+m)(1)}{(m)(m+1)} = \frac{1}{m}$

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

در ضرب و تقسیم نیازی به مخرج مشترک گرفتن نیست.

ضرب: فرم کلی آن به صورت مقابل است:

مثال:

$\frac{\square \times \circ}{\triangle} = \frac{\square \times \circ}{\triangle \times \circ}$

الف $\frac{f}{x} \times \frac{x^2-1}{x^2}$

ب $\frac{fx-2}{x-1} \times \frac{2x+1}{x+1}$

پاسخ:

الف $\frac{f(x^2-1)}{x(x^2)} = \frac{fx^2-f}{x^3}$

الف

ب $\frac{(fx-2)(2x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1xx^2+fx^2-4x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(fx^2-1)}{x^2-1} = \frac{2(2x-1)(2x+1)}{x^2-1}$

ب





پرسش‌های تشریحی



مهرماه

| ردیف | سوالات |
|------|--|
| ۱ | حاصل عبارت $(x+y)^2 - (x-y)^2 + xy$ را به دست آورید. |
| ۲ | اگر بدانیم که $2x + 2y = 16$ و $4x^2 - 4y^2 = 64$ ، مقدار عبارت $x - y$ چند برابر $x + y$ خواهد بود؟ |
| ۳ | اتحادهای زیر را کامل کنید. الف) $(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y})^2$ ب) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2$ پ) $a^2 + b^2 - (a-b)^2 + ab$ |
| ۴ | اگر بدانیم که $x + \frac{1}{x} = 4$ ، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ و $x^2 + \frac{1}{x^2}$ را به دست آورید. |
| ۵ | حاصل عبارت $(a+b+c)^2 - (a+b)^2 - (a+c)^2$ را به دست آورید. |
| ۶ | عبارات زیر را تجزیه کنید. الف) $ab^2 - a^2b + ab$ ب) $(x^2 - 5x + 4)^2$ پ) $(x+y)^2 - (x-y)^2$ ت) $(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2$ ث) $x^2 - 1$ ج) $x^2 + 8$ |
| ۷ | اگر تساوی روبه‌رو یک اتحاد باشد، حاصل $a - b - c$ را به دست آورید. $(3x+7)(3x-2) = ax^2 + bx + c$ |
| ۸ | عبارات گویای زیر را ساده کنید. الف) $\frac{1}{ab^2} + \frac{2}{a^2b} - \frac{4}{a^2b^2} + \frac{1}{ab}$ ب) $\frac{x^2-16}{x-4} + \frac{x^2+5x+4}{x+4}$ پ) $\frac{4x+1}{\frac{1}{x}+4}$ ت) $(1 + \frac{x}{x+2}) + (\frac{x-1}{x^2+2x})$ ث) $(\frac{2}{x-2} + 1) \times \frac{x-2}{2x+4}$ |
| ۹ | ب.م.م. و ک.م.م. دو عدد ۳۶ و ۴۸ را به دست آورید. |
| ۱۰ | ب.م.م. سه عبارت $x^2 - 9$ ، $x^2 - 27$ و $x^2 - 4x + 3$ را به ازای $x = 2$ به دست آورید. |
| ۱۱ | اگر عبارت روبه‌رو مربع کامل باشد، جای خالی را پر کنید. $64x^4y^6 + 16 + \dots$ |
| ۱۲ | عبارت $x^2 - 81$ را تجزیه کنید. |
| ۱۳ | اگر $4 = 5x - \frac{3}{2x}$ باشد، حاصل $25x^2 + \frac{9}{4x^2}$ را به دست آورید. |
| ۱۴ | با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دو جمله‌ای حاصل می‌شود؟ |
| ۱۵ | حاصل $\frac{2x^2 - 8x + 8}{4 - 2x}$ کدام است؟ |

فصل اول

۲۰

عبارت‌های جبری



پرسش‌های چهار گزینه‌ای



اتحاد مربع دوجمله‌ای

(مشابه تمرین کتاب درسی)

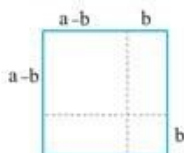
$$2 + b^2 + b \quad (4)$$

$$2 + b^2 - b \quad (3)$$

$$2 + \frac{1}{4}b^2 - 2b \quad (2)$$

$$2 + \frac{1}{4}b^2 + 2b \quad (1)$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)



1. حاصل اتحاد $(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2$ کدام است؟

2. با توجه به شکل زیر چه اتحادی نتیجه می‌شود؟

(1) اتحاد مربع دوجمله‌ای

(2) اتحاد مزدوج

(3) اتحاد مکعب دوجمله‌ای

(4) اتحاد جمله مشترک

3. عبارت $(a+b)^2$ و $a+b^2$ در چه صورت با هم برابرند؟ (a و b صفر نیستند.)

(4) اگر a و b قرینه باشد.

(3) اگر $a+2b=1$ باشد.

(2) اگر $a=2b+1$ باشد.

4. عبارت $4x^2 + Ax + \frac{9}{4}$ مربع کامل است. A کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

5. اگر $x=2+\sqrt{3}$ حاصل $x^2 - 4x$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

6. عبارت $4x^2 - 10x + 9$ کدام جمله افزوده شود تا حاصل به صورت مربع کامل دوجمله‌ای باشد؟

$$-2x \quad (4)$$

$$-4x \quad (3)$$

$$4x \quad (2)$$

$$2x \quad (1)$$

(انسائی 89)

7. با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟

$$12 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$\frac{15}{4} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

8. با افزودن کدام عدد بر سه جمله‌ای $4x^2 + 6x + 2$ حاصل به صورت مجذور دوجمله‌ای نوشته می‌شود؟

$$7 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

9. با افزودن کدام مقادیر زیر به حاصل ضرب دو عدد a و $a-1$ یک مربع کامل دوجمله‌ای ایجاد می‌شود؟

$$a+2 \quad (4)$$

$$a-1 \quad (3)$$

$$1+a \quad (2)$$

$$1-a \quad (1)$$

10. اگر $a^2 + 4b^2 = 4ab$ باشد، حاصل $a^2 - 4b^2$ کدام است؟

$$1 \quad (4)$$

$$\text{صفر} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

11. اگر $x + \frac{1}{x} = 7$ باشد، حاصل $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

12. اگر $(x + \frac{1}{x})^2 = 5$ باشد، حاصل $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کدام است؟

$$23 \quad (4)$$

$$25 \quad (3)$$

$$9 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

(انسائی 95)

13. اگر $(5x - \frac{3}{2x}) = 4$ باشد، حاصل $(25x^2 + \frac{9}{4x^2})$ کدام است؟

$$32 \quad (4)$$

$$31 \quad (3)$$

$$29 \quad (2)$$

$$24 \quad (1)$$

(انسائی خارج 95)

14. اگر $(3x + \frac{1}{2x}) = 5$ باشد، حاصل $(9x^2 + \frac{1}{4x^2})$ کدام است؟

$$22 \quad (4)$$

$$21 \quad (3)$$

$$20 \quad (2)$$

$$18 \quad (1)$$

15. اگر $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(a+b+c)$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$



16. حاصل عبارت $-\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \sqrt{\frac{17}{4}} - 3\sqrt{2}$ کدام است؟

- (1) 3 (2) -2 (3) $\sqrt{2}$ (4) $-\sqrt{2}$

اتحاد مزدوج

17. برای محاسبه کدام یک از عبارت‌های زیر از اتحاد مزدوج استفاده نمی‌شود؟

- (1) $(x+1)(x-1)$ (2) $(-t+2)(t+2)$
 (3) $(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (4) $(-a+1)(a-1)$

18. حاصل $99^2 - 101^2$ با استفاده از اتحادها کدام یک از گزینه‌های زیر محاسبه می‌شود؟

- (1) $4^2 \times 5^2$ (2) 8×500 (3) 4×100 (4) 2×200

19. حاصل $(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{81}) + \frac{1}{81 \times 81}$ کدام است؟

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{4}{3}$

20. حاصل عبارت $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)$ برابر است با

- (1) $2^{256} + 1$ (2) $2^{128} + 1$ (3) $2^{128} - 1$ (4) $2^{256} - 1$

21. اگر $A = (1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{81})$ و $B = ((1 - \frac{1}{81}) + (1 + \frac{1}{3}))$ باشد، حاصل $\frac{A}{B}$ کدام است؟

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 1 (4) $\frac{4}{3}$

22. اگر $A^2 - B^2 = 91$ و $A + B = 7$ باشد، حاصل عدد $A \times B$ کدام است؟

- (1) -30 (2) -18 (3) 12 (4) 20

23. اختلاف مربعات دو عدد مثبت برابر با 40 و مجموعشان 10 است. تفاضل این دو عدد کدام است؟

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7

24. اگر $a^2 - 2b^2 = 9$ و $a + 2b = a^2 + b$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8

25. حاصل عبارت $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20} (\sqrt{5} - \sqrt{2})^{20}$ کدام است؟

- (1) 3^{20} (2) 7^{20} (3) 3^{10} (4) 7^{10}

اتحاد جمله مشترک

26. حاصل عبارت $(1-x)(1+x)(x^2+2)$ کدام است؟

- (1) $-x^4 - 2x^2 + 2$ (2) $-x^4 - x^2 + 2$ (3) $x^4 + 2x^2 - 2$ (4) $x^4 + x^2 - 2$

27. در حاصل عبارت $1 + (x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- (1) $x^2 + 14x + 61$ (2) $x^2 - 7x + 11$ (3) $-x^2 - 14x - 61$ (4) $x^2 + 7x + 11$

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

28. حاصل عبارت $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2$ برابر است با:

- (1) $a^2 + b^2 + c^2$ (2) $ab + bc + ac$ (3) $(a+b+c)^2$ (4) $2(ab+bc+ac)$

29. شرط برقراری $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2$ چیست؟

- (1) $a^2 = 2bc$ (2) $b^2 = 2ac$ (3) $c^2 = 2ab$ (4) $a+b+c = abc$

30. مجموع سه عدد a ، b و c برابر 11 و مجموع حاصل ضرب دوه‌دوی آن‌ها برابر 3 می‌باشد، مجموع مجذورات این سه عدد کدام است؟

(انتقالی شارع 91)

- (1) 90 (2) 105 (3) 110 (4) 115



اتحاد مکعب سه جمله‌ای

31. حاصل $(\sqrt{3} + x)^2$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{3} - 9x + 3x^2 - x^2$

۲) $3\sqrt{3} + 9x + 3\sqrt{3}x^2 + x^2$

32. حاصل 99^2 کدام است؟

۱) 972999

۲) 970299

۳) 972990

۴) 997029

33. اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^2 + y^2$ کدام است؟

۱) 216

۲) 238

۳) 244

۴) 264

34. اگر $x + \frac{1}{x} = 10$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

۱) 970

۲) 1030

۳) 997

۴) 1003

35. اگر $x = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $x^2 - 2x$ کدام است؟

۱) $6 - 7\sqrt{2}$

۲) $2 + 3\sqrt{2}$

۳) $6 + 7\sqrt{2}$

۴) $5 - 3\sqrt{2}$

اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله‌ای (چاق و لاغر)

36. حاصل عبارت $(3x+5)(9x^2-15x+25)$ کدام است؟

۱) $27x^3 + 125$

۲) $9x^3 - 25$

۳) $27x^3 - 125$

۴) $9x^3 + 25$

37. کدام یک از عبارات‌های زیر، نشان‌دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $(7x-2)(49x^2+14x+4)$

۲) $(3x+5)(9x^2-20x+15)$

۳) $(4x+y)(16x^2+4xy+y^2)$

۴) $(x-2)(x^2-2x+4)$

38. حاصل عبارت جبری $(2x+1)(4x^2-2x+1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

۱) 7

۲) 14

۳) 17

۴) 21

39. حاصل عبارت $(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)$ کدام است؟

۱) $(x-1)^2$

۲) $(x-1)^2(x^2+1)$

۳) x^2-1

۴) x^6-1

40. حاصل $(x+1)(-x+x^2+1) - (x-1)(x^2+x+1)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) -2

۳) $2x^2$

۴) 2

41. حاصل عبارت $(x^2-2x+4)(x^6+64)(x^2-8)(x+2)$ کدام است؟

۱) $x^{12} - 2^{12}$

۲) $-x^{12} + 2^{12}$

۳) $x^{12} + 2^{12}$

۴) $-(x^{12} + 2^{12})$

42. حاصل عبارت $(a^2-1)(a^{12}+1)(a^6+1)(a^4+a^2+1)$ برابر است با:

۱) $a^4 - 1$

۲) $a^8 - 1$

۳) $a^{16} - 1$

۴) $a^{24} - 1$

43. اگر داشته باشیم $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$ مقدار x^3+y^3 کدام است؟

۱) 370

۲) 360

۳) 385

۴) 358

تجزیه

44. اگر $x = \sqrt{2} + 1$ باشد، حاصل $A = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$ کدام است؟

۱) $A = 3 - 2\sqrt{2}$

۲) $A = 6 + 2\sqrt{2}$

۳) $A = 3 + 2\sqrt{2}$

۴) $A = 6 - 2\sqrt{2}$

پاسخ‌نامه پرسش‌های تشریحی

۱

$$(x+y)^r - (x-y)^r + xy = (x^r + rxy + y^r) - (x^r - rxy + y^r) + xy = x^r + rxy + y^r - x^r + rxy - y^r + xy = \Delta xy$$

۲

$$2x + 2y = 2(x+y) = 16 \Rightarrow x+y = \frac{16}{2} = 8$$

$$4x^r - 4y^r = 4(x^r - y^r) = 64 \Rightarrow x^r - y^r = \frac{64}{4} = 16$$

$$x^r - y^r = (x-y)(x+y) \Rightarrow (x-y)(x+y) = 16 \Rightarrow (x-y) = \frac{16}{8} = 2$$

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۳

$$1 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\right)^r = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r + r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{y}) + (\sqrt{y})^r = \frac{1}{x} + r\sqrt{\frac{y}{x}} + y$$

$$2 \quad (\sqrt{m} + \sqrt{n})^r = (\sqrt{m})^r + r(\sqrt{m})^r(\sqrt{n}) + r(\sqrt{m})(\sqrt{n})^r + (\sqrt{n})^r = \sqrt{m}^r + r\sqrt{m}\sqrt{n} + r\sqrt{m}\sqrt{n} + \sqrt{n}^r$$

$$3 \quad a^r + b^r - (a^r - rab + b^r) + ab = a^r + b^r - a^r + rab - b^r + ab = rab$$

۴

$$x^r + \frac{1}{x^r} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^r - r(x)\left(\frac{1}{x}\right) = 4^r - r = 16 - r = 14$$

$$x^r + \frac{1}{x^r} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^r - r(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4^r - r(4) = 64 - 12 = 52$$

۵

$$(a+b+c)^r = a^r + b^r + c^r + rab + rac + rbc$$

$$(a+b)^r = a^r + rab + b^r$$

$$(a+c)^r = a^r + rac + c^r \Rightarrow \textcircled{A}le = rbc - a^r$$

۶

$$1 \quad ab(b-a+1)$$

$$2 \quad ((x-1)(x-4))^r = (x-1)^r(x-4)^r$$

$$3 \quad \begin{cases} a = x+y \\ b = x-y \\ a-b = x+y-x+y = 2y \Rightarrow a^r - b^r = (a-b)^r + rab(a-b) \\ ab = (x+y)(x-y) = x^r - y^r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{A}le = (2y)^r + r(x^r - y^r)(2y) = 2^r y^r + 2^r x^r y - 2^r y^r = 2^r x^r y + 2^r y^r$$

$$4 \quad \begin{cases} a^r - b^r = x \\ a^r + b^r = y \\ x-y = a^r - b^r - a^r - b^r = -2b^r \Rightarrow (a^r - b^r)^r - (a^r + b^r)^r = x^r - y^r = (x-y)(x+y) = (-2b^r)(2a^r) = -2a^r b^r \\ x+y = a^r - b^r + a^r + b^r = 2a^r \end{cases}$$

$$5 \quad x^r - 1 = (x-1)(x^r + x + 1)$$

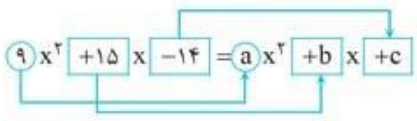
$$6 \quad x^r + 8 = (x+2)(x^r - 2x + 1)$$



ابتدا سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$(3x+7)(2x-2) = (3x)^2 + (7-2)(3x) + (7 \times (-2)) = 9x^2 + 5(3x) - 14 \Rightarrow 9x^2 + 5x - 14 = ax^2 + bx + c$$

برای آن‌که یک تساوی جبری، اتحاد باشد، باید ضرایب عبارت‌های هم‌درجه در دو طرف تساوی با هم برابر باشد.



یعنی:

پس $a=9$ و $b=15$ و $c=-14$ است.

$$a-b-c = 9-15-(-14) \Rightarrow 9-15+14=8$$

در نتیجه:

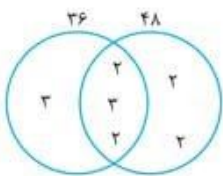
الف) $\frac{a(1)+2(b)-4+1(ab)}{a^2b^2} = \frac{a+2b-4+ab}{a^2b^2}$

ب) $\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} + \frac{(x+1)(x+4)}{(x+4)} = x+4+x+1 = 2x+5$

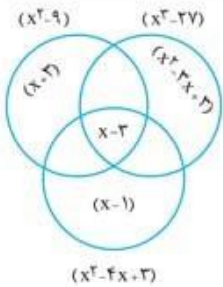
ج) $\frac{4x+1}{1+4x} = \frac{4x+1}{1+4x} = \frac{x(4x+1)}{(1+4x)} = x$

د) $\left(\frac{(x+2)(1)+x}{x+2}\right) \div \left(\frac{x-1}{x(x+2)}\right) = \frac{2x+2}{x+2} = \frac{x(x+2)(2x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x(2x+2)}{x-1}$

ه) $\frac{2+(1)(x-2)}{x-2} \times \frac{x-2}{2(x+2)} = \frac{(x)(x-2)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{x}{2(x+2)}$



$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
 $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
 م.م.ب = $2^2 \times 3$
 م.م.ک = $2^4 \times 3^2$



$x^2-9 = (x-3)(x+3)$
 $x^2-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$
 $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$
 م.م.ب = $(x-3)$
 $x=2 \Rightarrow$ م.م.ب = $2-3 = -1$

صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای باید به شکل $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ باشد. بنابراین a و b را در عبارت زیر مشخص کرده و $2ab$ را از روی آن به دست می‌آوریم.

$$\sqrt{64x^2y^6} = 8x^2y^3 = a$$

$$\sqrt{16} = 4 = b \begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \end{cases} \Rightarrow \dots = \pm 64x^2y^3$$

$$2ab = 2(8x^2y^3)(4) = 64x^2y^3$$

۱۲

$$x^2 - 11 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

۱۳

$$2\Delta x^2 + \frac{9}{4x^2} = (\Delta x - \frac{3}{2x})^2 + 2(\Delta x)(\frac{3}{2x}) = 4^2 + \Delta(3) = 16 + 15 = 31$$

۱۴

صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای باید به شکل $\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$ باشد. بنابراین می‌توان حدس زد:

$$\begin{cases} a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x \\ 2ab = 6x \end{cases}$$

$$(2x)^2 - 2(2x)(y) + \underbrace{\frac{1}{4} + \dots}_{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

عبارت مقابل باید شبیه به مربع کامل شود:

$$\Rightarrow \dots = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

در نتیجه باید دو واحد به عبارت بالا افزود تا مربع کامل شود.

۱۵

$$\frac{2(x^2 - 4x + 4)}{2(2-x)} = \frac{-2(x-2)^2}{-2(2-x)} = \frac{(x-2)(x-2)}{-(x-2)} = -(x-2) = -x+2$$



پاسخ‌نامه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

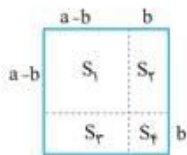
1. 1 2 3 4

با توجه به اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ حاصل اتحاد را به دست می‌آوریم:

$$(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}b) + (\frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = 2 - 2b + \frac{1}{2}b^2$$

2. 1 2 3 4

با توجه به شکل زیر می‌توان فهمید که مساحت شکل اصلی برابر با مجموع مساحت 4 قسمت جدا شده بر روی آن است.



$$S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

حال مساحت هر یک از شکل‌ها را می‌یابیم.

$$S_1 = (a-b) \times (a-b) = (a-b)^2$$

$$S_2 = (a-b) \times b = b(a-b) = ab - b^2$$

$$S_3 = (a-b) \times b = b(a-b) = ab - b^2$$

$$S_4 = b \times b = b^2$$

$$S_{\text{کل}} = a \times a = a^2$$

$$a - b + b = -a$$

اضلاع این مربع برابرست با:

زیرا مجموع b و $a-b$ همان a است.

با جای‌گذاری در رابطه مساحت‌ها به اتحاد مورد نظر می‌رسیم.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow a^2 = (a-b)^2 + ab - b^2 + ab - b^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$$

$(a-b)^2$ را در طرف راست تساوی قرار می‌دهیم بقیه را به طرف دیگر می‌بریم عبارت به دست آمده اتحاد مربع دو جمله‌ای است.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

3. 1 2 3 4

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

1 دو عبارت را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

2 عبارت سمت چپ اتحاد مربع می‌باشد:

$$a^2 + 2ab = a$$

3 b^2 را از طرفین ساده می‌کنیم:

4. 1 2 3 4

وقتی عبارت $4x^2 + Ax + \frac{9}{4}$ مربع کامل باشد، یعنی به صورت $a^2 \pm 2ab + b^2$ می‌باشد، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 + Ax + \frac{9}{4} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = (2x)^2 \Rightarrow a = 2x \\ b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = (\frac{3}{2})^2 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ 2ab = Ax \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2ab = Ax \xrightarrow{a=2x, b=\frac{3}{2}} 2(2x)(\frac{3}{2}) = Ax \Rightarrow 6x = Ax \Rightarrow A = 6$$

با جای‌گذاری a و b مقدار A به دست می‌آید.

5.

به جای x در عبارت $x^2 - 4x$ مقدار آن را جای گذاری می کنیم.

$$x^2 - 4x = (2 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3}) = 2^2 + 2(2)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 - 8 - 4\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} = -1$$

6.

عبارت $4x^2 - 10x + 9$ شبیه به اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای است (چیزی را کم دارد که بعداً به آن اضافه می کنیم).

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 - 10x + 9 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} [مبتدا] |a|^2 : a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x \\ [مبتدا] |b|^2 : b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \\ [مبتدا] |2ab| : -2ab = -2(2x)3 = -12x \end{cases}$$

در عبارت $-10x$ داریم که با اضافه کردن $-2x$ دیگر، تبدیل به مربع کامل می شود.

7.

در واقع عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ باید شبیه به $a^2 - 2ab + b^2$ باشد (البته چیزی کم دارد که باید به آن اضافه کنیم).

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 - 6x + \frac{1}{4} + 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = 2x \\ 2ab = 6x \xrightarrow{a=2x} 2(2x)b = 6x \Rightarrow 4b = 6 \Rightarrow b = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + 0 \Rightarrow 0 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

8.

برای این که عبارت $4x^2 + 6x + 2$ به صورت مجذور دوجمله‌ای باشد، باید مشابه اتحاد مربع شود:

$$4x^2 + 6x + 2 + 0 \xrightarrow{مبتدا} a^2 + 2ab + b^2$$

a^2 و $2ab$ را داریم اما طبق متن سؤال b^2 هنوز تشکیل نشده و باید با اضافه کردن عددی به 2 ساخته شود. حال از طریق a^2 و $2ab$ مقادیر a و b را می یابیم و b^2 را به دست می آوریم.

$$2ab = 6x \xrightarrow{a=2x} 2(2x)b = 6x \Rightarrow 4xb = 6x \Rightarrow b = \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$$

$$b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b^2 = 2 + 0 = \frac{9}{4}$$

$$0 = \frac{9}{4} - \frac{2 \times 4}{1 \times 4} = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4}$$

9.

ابتدا حاصل ضرب a در $a-1$ را به دست می آوریم.

$a^2 - a$ را به گزینه‌ها اضافه می کنیم هر کدام تبدیل به اتحاد مربع شد، مربع کامل است.

بررسی گزینه‌ها:

$$a^2 - a + 1 - a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

گزینه 1: مربع کامل است.

$$a^2 - a + 1 + a = a^2 + 1$$

گزینه 2: مربع کامل نیست.

$$a^2 - a + a - 1 = a^2 - 1$$

گزینه 3: مربع کامل نیست.

$$a^2 - a + a + 2 = a^2 + 2$$

گزینه 4: مربع کامل نیست.

10.

اگر در تساوی $a^2 + 4b^2 = 4ab$ عبارت $4ab$ را به طرف چپ تساوی ببریم، طرف چپ تبدیل به اتحاد مربع دوجمله‌ای می شود.

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Rightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = 0 \Rightarrow (a-2b)^2 = 0$$

$$a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$$

اگر مجذور عبارتی برابر صفر باشد، آن عبارت را مساوی صفر قرار می دهیم. بنابراین:

حال با جای گذاری $a = 2b$ در $a^2 - 4b^2$ حاصل آن را به دست می آوریم:

$$a^2 - 4b^2 \xrightarrow{a=2b} (2b)^2 - 4b^2 = 4b^2 - 4b^2 = 0$$

