فهرست

فصل اوّل

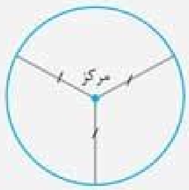
دایـــره

پرکاربردترین شکل در طبیعت، معماری، صنعت و ... می‌باشد. به‌عنوان یک مسأله ریاضی می‌توان ثابت کرد، در بین تمام شکل‌های هندسی با محیط ثابت، دایره دارای بیشـترین مساحت است و شاید همین خاصیت، از دیرباز تاکنون، مورد توجه بشر بوده است که در طراحی و ساخت محیط اطراف خود از دایره استفاده شده است. در این فصل دایره به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

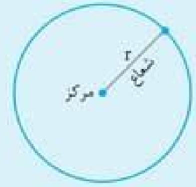
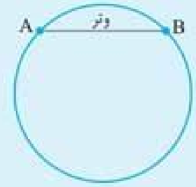
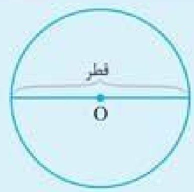
تعاریف اولیهٔ دایره

تعریف:

◄ مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از نقطه‌ای ثابت به نام مرکز به فاصلهٔ یکسان می‌باشند.



◄ **شعاع، وتر و قطر**

		
شعاع: فاصلهٔ مرکز دایره تا نقاط روی دایره را می‌گویند. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O, r)$ نشان می‌دهند.	**وتر:** پاره‌خطی که دو نقطهٔ روی دایره را به هم وصل می‌کند.	**قطر:** وتری که از مرکز دایره می‌گذرد. قطر دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. (در واقع قطر بزرگ‌ترین وتر دایره است.)

◄ **کمان**

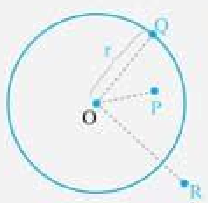
بخشی از منحنی دایره که توسط وتری از دایره جدا شده است. هر کمانِ روی دایره، منحنی دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند که اگر اندازهٔ آن از نیم‌دایره کمتر باشد، با دو سرِ کمان و اگر بزرگ‌تر باشد، معمولاً با سه حرف نشان داده می‌شود. در شکل مقابل، دو کمان $\widehat{EF}$ و $\widehat{EMF}$ دیده می‌شوند.

اندازهٔ هر کمان برحسب درجه بیان می‌شود. (می‌دانیم که منحنی یک دایره، به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم می‌شود و هر قسمت برابر ۱ درجه است.)

◄ **وضعیت نقطه و دایره**

هر نقطه نسبت به دایره، سه وضعیت «داخل، روی و بیرون» دایره را دارد. تشخیص این موضوع، به فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره وابسته است.

طرز تشخیص	وضعیت	نقطه
$OP < r$	درون دایره	P
$OQ = r$	روی دایره	Q
$OR > r$	بیرون دایره	R



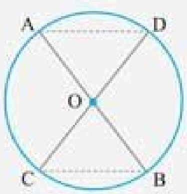
مثال۱: **در دایره‌ای شعاع‌های OA و OB به ترتیب برابر $۳n - ۱۰$ و $n + ۲$ هستند. قطر این دایره را بیابید.**

■ **پاسخ:** می‌دانیم $OA = OB$ (شعاع‌های دایره با هم برابرند). پس:

$$۳n - ۱۰ = n + ۲ \Rightarrow n = ۶ \Rightarrow r = OA = OB = ۸$$

پس قطر دایره، که دو برابر شعاع می‌باشد، برابر با $۱۶ = ۸ \times ۲$ است.

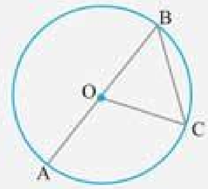
مثال۲: **در دایره‌ای به مرکز O، اگر AB و CD قطرها باشند، ثابت کنید $AD = BC$.**



■ **پاسخ:** به اثبات زیر توجه کنید:

دلیل		مرحله
شعاع‌های دایره	$OA = OB$	۱
شعاع‌های دایره	$OC = OD$	۲
متقابل به رأس	$A\hat{O}D = B\hat{O}C$	۳
ض‌زض	$\overset{\triangle}{AOD} \cong \overset{\triangle}{BOC}$	۴
اجزای نظیر	$AD = BC$	۵

الگویابی کنید



در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز دایره می‌باشد. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $B\hat{O}C = ۶۰^\circ$ و $OB = ۶$، محیط مثلث OBC چقدر است؟

ب) اگر $B\hat{O}C = ۹۰^\circ$ و $BC = ۱۵$ باشد، اندازه‌های OB و OC را بیابید.

پ) اگر $B\hat{O}C = ۹۰^\circ$ و $OC = ۶$، اندازهٔ وتر BC چقدر است؟

ت) در هر یک از شرایط زیر نقطهٔ X نسبت به دایره چه وضعیتی دارد؟

۱) $OX = ۴$ و $AB = ۵$ ‏ ۲) $OX = ۵$ و $OA = ۶$ ‏ ۳) $OX = ۷$ و $AB = ۱۴$

▪ پاسخ:

الف: می‌دانیم $OA = OB = r$، پس مثلث OBC متساوی‌الساقین است و از آن‌جایی که زاویهٔ رأس آن برابر ۶۰° است، پس مثلث OBC متساوی‌الاضلاع می‌باشد و در نتیجه محیط آن $۱۸ = ۶ \times ۳$ است.

ب: در این حالت، مثلث BOC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با وتر ۱۵ می‌باشد و در نتیجه هر یک از اضلاع قائمهٔ آن برابر $OB = OC = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱۵ = ۷/۵\sqrt{۲}$ است.

پ: مثلث BOC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به ضلع قائمهٔ ۶ می‌باشد و در نتیجه وتر این مثلث برابر با $BC = ۶\sqrt{۲}$ است.

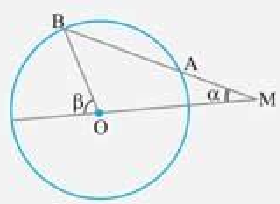
ت:

۱) قطر دایره $AB = ۵$ است و لذا شعاع دایره، $r = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$ می‌باشد. از آن‌جایی که $OX > r$، پس نقطهٔ X خارج دایره است.

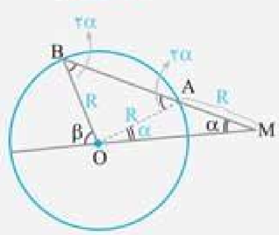
۲) در این حالت $r = OA = ۶$ و لذا $OX < r$ می‌باشد، پس نقطهٔ X داخل دایره است.

۳) قطر دایره $AB = ۱۴$ و در نتیجه شعاع آن، $r = ۷$ است و چون $OX = r$، پس نقطهٔ X روی دایره است.

تمرین



دایرهٔ $C(O , R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره، خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است. اگر $MA = R$ باشد، نشان دهید $\beta = ۳\alpha$.

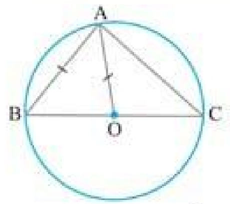


▪ پاسخ: از A به O وصل می‌کنیم. داریم:

مرحله		دلیل
۱	$OA = MA = R$	طبق فرض مسئله
۲	متساوی‌الساقین: $\overset{\triangle}{OAB}$	طبق مرحلهٔ ۱
۳	$A\hat{O}M = A\hat{O}M = \alpha$	طبق مرحلهٔ ۲
۴	$O\hat{A}B = ۲\alpha$	زاویهٔ خارجی برای $\overset{\triangle}{AOM}$
۵	$OA = OB = R$	شعاع‌های دایره
۶	$\hat{B} = \hat{A} = ۲\alpha$	$\overset{\triangle}{OAB}$ متساوی‌الساقین است.
۷	$\beta = \hat{B} + \hat{M} = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$	β زاویهٔ خارجی برای $\overset{\triangle}{OBM}$ است.

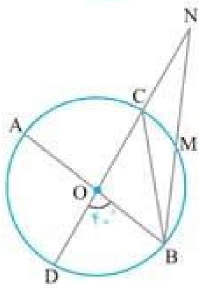
تست‌های موضوعی

۱. در شکل مقابل، اگر O مرکز دایره باشد، زاویهٔ ACO چند درجه است؟



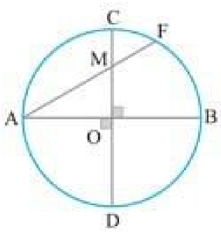
۱) °۶۰
۲) °۴۵
۳) °۳۰
۴) °۷۵

۲. در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز دایره است. اگر BC = CN باشد، اندازهٔ زاویهٔ MAB کدام است؟



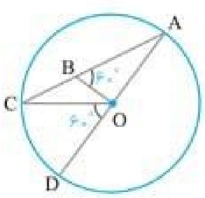
۱) °۳۰
۲) °۵۰
۳) °۴۰
۴) °۶۰

۳. در شکل مقابل، اگر O مرکز دایره و OM = MF باشد، اندازهٔ زاویهٔ FAO کدام است؟



۱) °۷۵
۲) °۴۵
۳) °۶۰
۴) °۳۰

۴. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره است. اگر ۵ = BO باشد، اندازهٔ BC کدام است؟

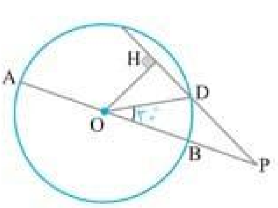


۱) ۳
۲) $۳+\sqrt{۳}$
۳) ۵
۴) $۵-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵. در دایره‌ای به شعاع R، دو قطر عمود بر هم مفروض‌اند. از نقطهٔ A روی دایره، عمودهایی بر این دو قطر رسم می‌کنیم. فاصلهٔ بین پای عمودها کدام است؟

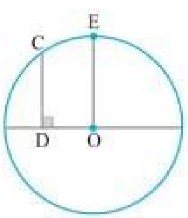
۱) $\frac{R}{۲}$
۲) R
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}R$

۶. در شکل مقابل، AB قطر دایره، زاویهٔ $D\hat{O}B = ۳۰^\circ$ و طول PD برابر شعاع دایره است. اندازهٔ OH چه مضربی از شعاع دایره است؟



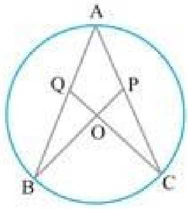
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۷. در شکل مقابل، نسبت مجموع مربعات CD و ED به مربع شعاع دایره کدام است؟ (نقطهٔ E وسط نیم‌دایره است.)



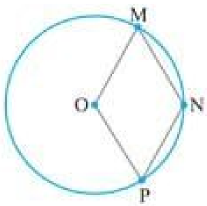
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $B\hat{P}C + B\hat{Q}C = ۶۰^\circ$ باشد، زاویهٔ BAC کدام است؟



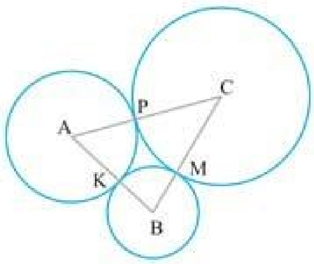
۱) °۵
۲) °۱۰
۳) °۱۵
۴) °۲۰

۹. چهارضلعی OMNP متوازی‌الاضلاع است. اختلاف زاویهٔ حاده و منفرجهٔ آن کدام است؟



۱) °۶۰
۲) °۳۰
۳) °۷۵
۴) °۴۵

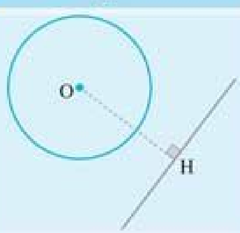
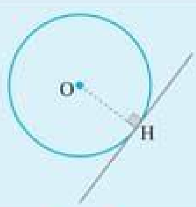
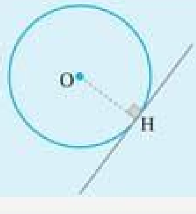
۱۰. در شکل مقابل سه دایره به مراکز A و B و C مماس خارجی‌اند. اگر $A\hat{B}C = ۹۰^\circ$ و نقاط K و P و M نقاط مماس باشند، $K\hat{P}M$ کدام است؟



۱) °۹۰
۲) °۶۰
۳) °۴۵
۴) °۲۲/۵

اوضاع نسبی خط و دایره

◄ یک خط با یک دایره سه وضعیت «متخارج، مماس و متقاطع» را دارد، که از روی فاصلهٔ مرکز دایره تا خط (طول عمودی که از مرکز دایره بر خط رسم می‌شود) قابل تشخیص است. برای تشخیص وضعیت خط Δ و دایرهٔ $C(O, r)$ به جدول زیر توجه کنید:

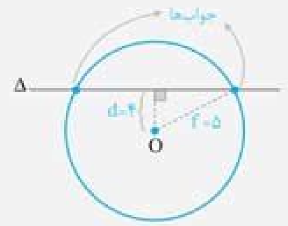
وضعیت	طرز تشخیص	تعداد نقاط اشتراک خط و دایره	شکل
متخارج	$OH > r$	صفر	
مماس	$OH = r$	یک	
متقاطع	$OH < r$	دو	

◄ شعاع دایره، در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است.

◄ خط متقاطع با دایره را، **قاطع** می‌نامیم که وتری از دایره جدا می‌کند.

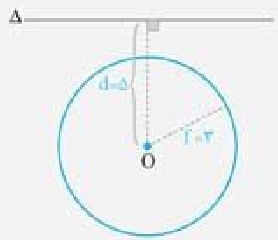
مثال: نقطهٔ O و خط Δ در صفحه مفروض‌اند. اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط Δ برابر d فرض شود، در هر یک از حالت‌های زیر چند نقطه روی خط Δ به فاصلهٔ f از نقطهٔ O وجود دارد؟

الف) ۴ = d و ۵ = f ب) ۵ = d و ۳ = f پ) ۲ = d و ۲ = f

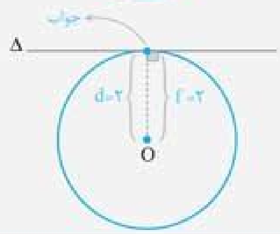


پاسخ: می‌دانیم مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ معلوم f می‌باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع f است. پس در هر حالت این دایره را رسم می‌کنیم و وضعیت خط Δ و دایرهٔ رسم‌شده را بررسی می‌نماییم. تعداد نقاط اشتراک خط و دایره، جواب مسئله است.

الف: خط و دایره متقاطع‌اند (۲ جواب)



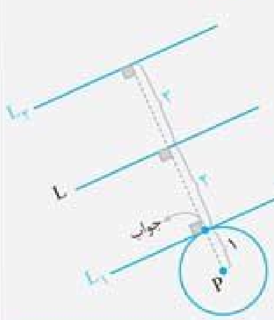
ب: خط و دایره متخارج‌اند (صفر جواب)



پ: خط و دایره مماس‌اند (یک جواب)

الگویابی‌کنید

در شکل مقابل، نقطهٔ P به فاصلهٔ ۳ واحد از خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط L و نقطهٔ P به ترتیب به فاصلهٔ ۲ و ۱ واحد باشد؟



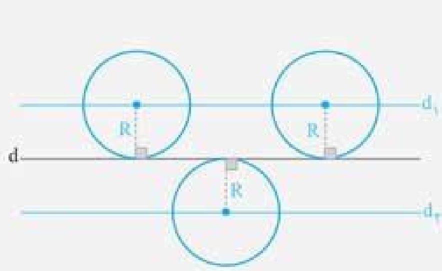
پاسخ: مجموعه نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ ۲ واحد می‌باشند، دو خط L_1 و L_2 موازی با خط L و به فاصلهٔ ۲ واحد از خط L هستند.

از طرفی مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ واحد می‌باشند، دایره‌ای به مرکز P و به شعاع ۱ است.

از آن‌جایی که ۲+۱=۳، پس دایرهٔ مذکور فقط بر یکی از خطوط L_1 یا L_2 (در شکل روبه‌رو خط L_1)، در یک نقطه مماس است که همین نقطهٔ تماس، جواب مسئله است.

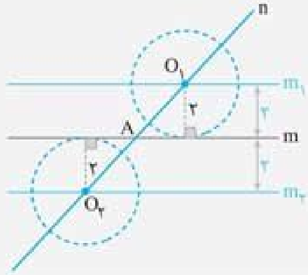
تمرین

۱ خط d مفروض است. مرکز همهٔ دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی هستند؟ این شکل چه وضعیتی نسبت به خط d دارد؟



پاسخ: مرکز هر دایره‌ای به شعاع ثابت R، که بر خط d مماس است، نقطه‌ای به فاصلهٔ ثابت R از خط d می‌باشد. از طرفی می‌دانیم مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ثابت R از خط d هستند، دو خط d_1 و d_2 موازی با خط d و به فاصلهٔ R از خط d می‌باشند. پس مرکز همهٔ دایره‌های به شعاع ثابت R و مماس بر خط d، روی دو خط d_1 و d_2 قرار دارد که هر دو با خط d موازی‌اند.

۲ دو خط m و n در نقطهٔ A متقاطع‌اند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی خط n و شعاع آن ۲ واحد بوده و بر خط m مماس باشد. (از نتیجهٔ تمرین قبل استفاده کنید.)



■ پاسخ: با توجه به تمرین قبل، مرکز دایره‌ای به شعاع ۲ واحد و مماس بر خط m، بر روی دو خط m_1 و m_2 قرار دارد که هر دو با خط m موازی و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن رسم می‌شوند. اما چون باید مرکز دایرهٔ مورد نظر روی خط n نیز باشد، پس نقطهٔ تلاقی خطوط m_1 و m_2 با خط n، مرکز دایرهٔ مورد نظر می‌باشند و مسئله دو جواب دارد.

تست‌های موضوعی

۱۱. کمترین و بیشترین فاصلهٔ نقطه‌ای از دایره‌ای به ترتیب a و b است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\frac{b-a}{۲}$　۲) $\frac{b-a}{۴}$　۳) $\frac{b+a}{۲}$　۴) $\frac{b+a}{۴}$

۱۲. دایرهٔ C و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. چند نقطه روی دایرهٔ C می‌توان پیدا کرد، از خط Δ به فاصلهٔ معلوم L باشند؟

۱) فقط دو نقطه　۲) حداکثر دو نقطه　۳) فقط چهار نقطه　۴) حداکثر چهار نقطه

۱۳. نقطهٔ P در صفحهٔ دایرهٔ C و در خارج آن واقع است. حداکثر تعداد نقطه‌های دایرهٔ C، به فاصلهٔ ۲ واحد از P کدام است؟

۱) فقط در نقطه　۲) حداکثر دو نقطه　۳) فقط چهار نقطه　۴) حداکثر چهار نقطه

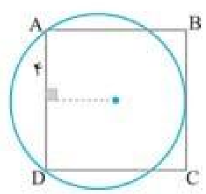
۱۴. تعداد نقطه‌هایی که از یک دایره و از دو خط موازی مماس بر آن دایره به یک فاصله‌اند، کدام است؟

۱) صفر　۲) ۲　۳) ۴　۴) بی‌شمار

۱۵. در دایره‌ای، دو وتر موازی و مساوی، به فاصله‌ای برابر با شعاع دایره رسم شده‌اند. زاویهٔ بین خطوط واصل انتهای دو وتر کدام است؟

۱) ۱۲۰°　۲) ۳۰°　۳) ۹۰°　۴) ۴۵°

۱۶. در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD مربعی به ضلع ۸ می‌باشد. دایره‌ای از رأس‌های A و D گذشته و بر ضلع BC مماس است. شعاع این دایره کدام است؟



۱) ۴　۲) ۸　۳) ۳　۴) ۵

۱۷. اگر دو دایرهٔ متمایز و سه خط متمایز، یکدیگر را قطع کنند، بیشترین تعداد نقاط تقاطع کدام است؟

۱) ۱۱ نقطه　۲) ۱۰ نقطه　۳) ۱۸ نقطه　۴) ۱۷ نقطه

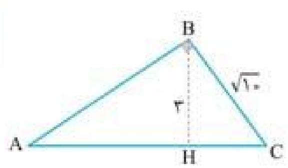
۱۸. دایره‌ای به شعاع ۴ درون یک مربع رسم شده است، به‌طوری که مرکز دایره، نقطهٔ تلاقی دو قطر مربع می‌باشد. اگر فاصلهٔ هر رأس مربع از محیط دایره برابر ۲ باشد، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۳۶　۲) ۷۲　۳) ۱۴۴　۴) ۲۴

۱۹. خطوط موازی L_1 و L_2 از دایرهٔ C(O,۲) به فاصلهٔ ۳ و ۵ مفروض‌اند. اگر فاصلهٔ خطوط L_1 و L_2 برابر ۱۱ باشد، چند نقطه روی یک دایره قرار دارد که از هر دو خط به یک فاصله باشد؟

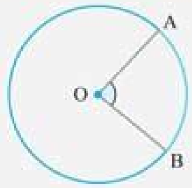
۱) ۱　۲) ۲　۳) صفر　۴) ۳

۲۰. درشکل مقابل چند نقطه می‌توان یافت که از A و C به یک فاصله باشد از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۵ باشد؟



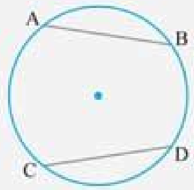
۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) صفر

زاویهٔ مرکزی و نتایج آن



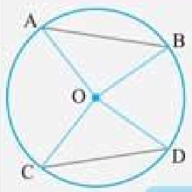
تعریف: زاویهٔ مرکزی، زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و دو ضلع آن شعاع‌های دایره می‌باشند و اندازهٔ این زاویه برابر با کمان روبه‌روی آن است.

$\hat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$ مرکزی



◄ کمان‌های روبه‌رو به وترهای مساوی، با هم برابرند و برعکس وترهای روبه‌رو به کمان‌های مساوی با هم برابرند.

$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



اثبات: فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$، نشان می‌دهیم $AB = CD$. برای این منظور از مرکز دایره به چهار نقطهٔ A، B، C و D وصل می‌کنیم. داریم:

دلیل		مرحله
شعاع‌های دایره	$OA = OD$	۱
شعاع‌های دایره	$OC = OB$	۲
زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به کمان‌های برابرند	$\hat{AOB} = \hat{COD}$	۳
(ض‌زض)	$\overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$	۴
اجزای نظیر	$AB = CD$	۵

(اثبات حالت عکس به همین ترتیب می‌باشد.)

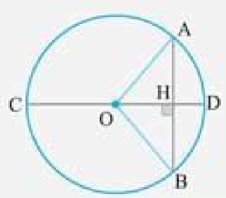
مثال: وتر AB و قطر CD از دایره‌ای مفروض‌اند. نشان دهید:

الف) اگر قطر CD بر وتر AB عمود باشد، آن‌گاه قطر CD، وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

ب) اگر قطر CD، وتر AB را نصف کرده باشد، آن‌گاه قطر CD بر وتر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

پ) اگر قطر CD، کمان AB را نصف کرده باشد،آن‌گاه قطر CD بر وتر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

■ پاسخ:



الف: طبق فرض قطر CD بر وتر AB عمود است. داریم:

دلیل		مرحله
شعاع‌های دایره	$OA = OB$	۱
ضلع مشترک	$OH = OH$	۲
وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه	$\overset{\triangle}{OHA} \cong \overset{\triangle}{OHB}$	۳
اجزای نظیر	$AH = BH$	۴
اجزای نظیر	$\hat{AOH} = \hat{BOH}$	۵
کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های مرکزی برابر، مساوی‌اند	$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$	۶

پس چون ثابت کردیم $AH = BH$، پس قطر CD، وتر AB را نصف کرده است و چون نشان دادیم که $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$، یعنی قطر CD، کمان AB را نیز نصف کرده است.

ب: مطابق فرض، قطر CD، وتر AB را نصف کرده است، پس $AH = BH$. داریم:

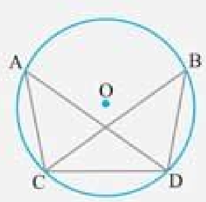
دلیل		مرحله
شعاع‌های دایره	$OA = OB$	۱
ضلع مشترک	$OH = OH$	۲
فرض مسئله	$AH = BH$	۳
(ض‌ض‌ض)	$\overset{\triangle}{OHA} \cong \overset{\triangle}{OHB}$	۴
اجزای نظیر	$O\hat{H}A = O\hat{H}B = ۹۰^\circ$	۵
اجزای نظیر	$A\hat{O}H = B\hat{O}H$	۶
کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های مرکزی برابر، مساوی‌اند	$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$	۷

چون ثابت کردیم $O\hat{H}A = O\hat{H}B = ۹۰^\circ$، پس نشان داده‌ایم که قطر CD بر وتر AB عمود است و نیز همانند قسمت (الف) ثابت شده است که کمان AB توسط قطر CD نصف شده است.

پ: همانند قسمت‌های (الف) و (ب) عمل کنید.

الگویابی کنید

۱ در شکل مقابل، اگر $AC = BD$ باشد، ثابت کنید $C\hat{A}D = C\hat{B}D$.



■ **پاسخ:** با توجه به فرض، چون $AC = BD$، پس $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. اکنون به دو طرف این تساوی، $\overset{\frown}{CD}$ را اضافه می‌کنیم. داریم:

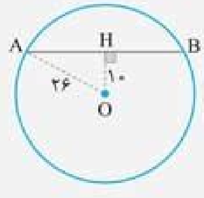
$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{BDC} \Rightarrow AD = BC$$

(وترهای روبه‌رو به کمان‌های برابر، مساوی‌اند.)

اکنون داریم:

دلیل		مرحله
فرض مسئله	$AC = BD$	۱
در بالا ثابت کردیم	$AD = BC$	۲
ضلع مشترک	$CD = CD$	۳
(ض‌ض‌ض)	$\overset{\triangle}{ACD} \cong \overset{\triangle}{BCD}$	۴
اجزای نظیر	$C\hat{A}D = C\hat{B}D$	۵

۲ دایرهٔ $C(O, ۲۶)$ و وتر AB به فاصلهٔ ۱۰ از مرکز دایره مفروض‌اند. طول وتر AB را به دست آورید.

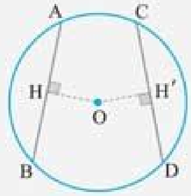


■ **پاسخ:** در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۲۶^۲ - ۱۰^۲ = ۵۷۶ \xrightarrow{\text{جذر}} AH = ۲۴$$

از طرفی می‌دانیم قطرِ عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $AH = BH = ۲۴$ و در نتیجه:

$$AB = ۲ \times ۲۴ = ۴۸$$

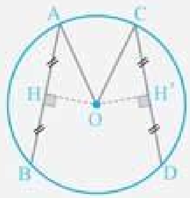


۳ ثابت کنید در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.

$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

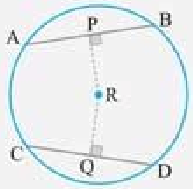
پاسخ: فرض می‌کنیم $AB = CD$، نشان می‌دهیم $OH = OH'$. برای این منظور از A و C به O وصل می‌کنیم. در ضمن چون قطرِ عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $AH = BH$ و $CH' = DH'$ می‌باشند و چون $AB = CD$ می‌باشد، پس $AH = BH = CH' = DH'$.

حال داریم:



دلیل		مرحله
مطابق مطلب بالا	$AH = CH'$	۱
شعاع‌های دایره	$OA = OC$	۲
وتر و یک ضلع	$\overset{\triangle}{OHA} \cong \overset{\triangle}{OH'C}$	۳
اجزای نظیر	$OH = OH'$	۴

اثبات حالت عکس را به همین ترتیب انجام دهید.



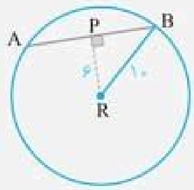
۴ با توجه به شکل مقابل،

(R مرکز دایره)

الف) اگر طول شعاع دایره ۱۰ و ۶ = PR، آن‌گاه طول پاره‌خط‌های AP و AB را بیابید.

ب) اگر $RC = \sqrt{2}$ و $CQ = RQ$، آن‌گاه طول پاره‌خط‌های CQ، DQ و CD را بیابید.

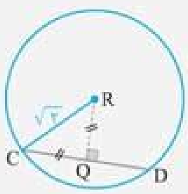
پاسخ:



الف: در مثلث قائم‌الزاویهٔ PRB، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

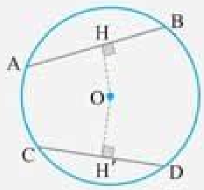
$$PB^2 = RB^2 - RP^2 = (10)^2 - 6^2 = 64 \xrightarrow{\text{جذر}} PB = 8$$

از طرفی می‌دانیم $AP = PB = 8$ (چرا؟) و در نتیجه $AB = 16$.



ب: در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین RCQ، طبق رابطهٔ فیثاغورس $CQ = RQ = 1$ به دست می‌آید و چون قطر عمودِ بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $CQ = DQ = 1$ و در نتیجه $CD = 2$.

تمرین

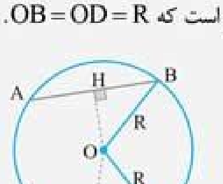


۱ در دایرهٔ $C(O, R)$، نشان دهید $AB > CD$، اگر و تنها اگر $OH < OH'$. (OH و OH' به ترتیب فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.) به عبارت دیگر از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$$

پاسخ: فرض می‌کنیم $AB > CD$ و نشان می‌دهیم $OH < OH'$. از B و D به O وصل می‌کنیم و واضح است که $OB = OD = R$.

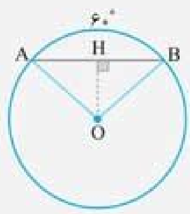
در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB و $OH'D$، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$\begin{cases} OB^2 = OH^2 + BH^2 = OH^2 + (\frac{AB}{2})^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4} \\ OD^2 = OH'^2 + DH'^2 = OH'^2 + (\frac{CD}{2})^2 = OH'^2 + \frac{CD^2}{4} \end{cases}$$

پس: $OH^۲ + \frac{AB^۲}{۴} = OH'^۲ + \frac{CD^۲}{۴}$ و در نتیجه: $\frac{AB^۲}{۴} - \frac{CD^۲}{۴} = OH'^۲ - OH^۲$. اما چون $AB > CD$، پس $AB^۲ > CD^۲$ و لذا $\frac{AB^۲}{۴} > \frac{CD^۲}{۴}$ و در نتیجه $۰ < \frac{AB^۲}{۴} - \frac{CD^۲}{۴}$ پس $OH'^۲ - OH^۲ > ۰$ و می‌توان نتیجه گرفت $OH^۲ < OH'^۲$ و یا $OH' > OH$. اثبات حالت عکس به عهده شما .

۲ در دایرهٔ $C(O, R)$، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$. فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.



پاسخ: مطابق شکل روبه‌رو، $OA = OB = R$، پس مثلث OAB متساوی‌الساقین است. از طرفی چون $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$، طبق آن‌چه که در مورد زاویهٔ مرکزی می‌دانیم، $A\hat{O}B = ۶۰^\circ$ و لذا مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است. پس $AB = OA = OB = ۱۰$. از طرفی OH ارتفاع این مثلث است که عبارت است از: $OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱۰ = ۵\sqrt{۳}$

تست‌های موضوعی

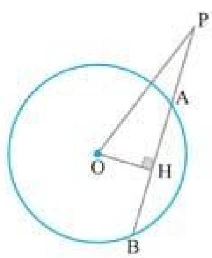
۲۱. نقاط وسط وترهای به طول ۴ درون دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۶، بر کدام شکل واقع‌اند؟

۱) خطوطی به فاصلهٔ ۲ از مرکز دایره
۲) دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $۴\sqrt{۲}$
۳) دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۴
۴) دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲

۲۲. نقاط A و B مفروض هستند. مجموعهٔ نقاطی که قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خطوط گذرنده از نقطهٔ B می‌باشند، کدام است؟

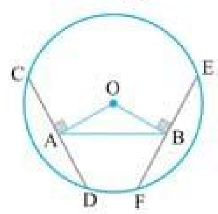
۱) دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BA
۲) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع BA
۳) خطی عمود بر AB
۴) خطی موازی AB

۲۳. در شکل مقابل، $PA = \frac{AB}{۲} = ۲$، $OH = ۱$ و $O\hat{H}A = ۹۰^\circ$. شعاع دایره چقدر است؟



۱) $\sqrt{۱۳}$
۲) $\sqrt{۱۲}$
۳) $\sqrt{۱۱}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

۲۴. در شکل مقابل، اگر $CD = EF$ و $A\hat{O}B = ۱۰۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ OAB چقدر است؟

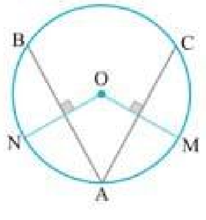


۱) ۴۰°
۲) ۵۰°
۳) ۳۵°
۴) ۶۰°

۲۵. فرض می‌کنیم C نقطهٔ متغیری از دایره به شعاع R و AB وتر ثابتی از آن به فاصلهٔ $\frac{R}{۲}$ از مرکز دایره باشد. اگر مساحت مثلث ABC ماکزیمم باشد، آن‌گاه زاویهٔ B کدام است؟

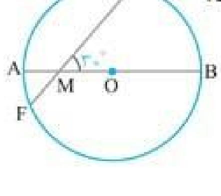
۱) $\frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi}{۳}$
۴) $\frac{\pi}{۲}$

۲۶. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و $\widehat{MC} = ۲۷^\circ$ و $\widehat{BN} = ۲۳^\circ$ است. اندازهٔ $M\hat{O}N$ کدام است؟



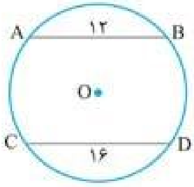
۱) ۵۰°
۲) ۴۵°
۳) ۳۰°
۴) ۲۵°

۲۷. در شکل مقابل، AB قطر دایره است. اگر $AM = ۲$ و $MB = ۶$ باشند، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر EF کدام است؟



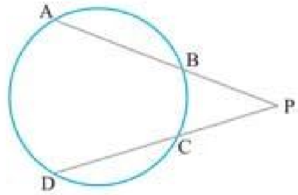
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) ۱
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۸. در دایرهٔ مقابل، وترهای AB و CD با هم موازی هستند. اگر فاصلهٔ آن‌ها برابر ۱۴ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) ۶
۲) ۱۰
۳) ۸
۴) ۱۵

۲۹. در شکل مقابل وترهای AB و CD باهم برابرند. اگر $\hat{APD}=۴۰^\circ$ باشد، زاویهٔ ABC کدام است؟



۱) ۵۵°
۲) ۷۰°
۳) ۱۱۰°
۴) ۸۰°

۳۰. اگر فاصلهٔ O (مرکز دایره) از وتر AB برابر نصف AB باشد، زاویهٔ بین شعاع‌های OA و OB کدام است؟

۱) ۳۰°
۲) ۶۰°
۳) ۴۵°
۴) ۹۰°

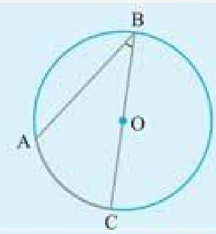
زاویهٔ محاطی

تعریف: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن دو وتر از دایره است.

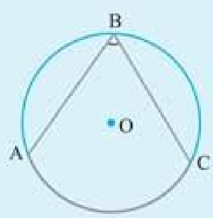
قضیه: اندازهٔ زاویهٔ محاطی، نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه است.

$$\boxed{\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}}$$

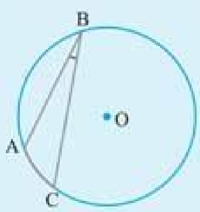
زاویهٔ محاطی در سه حالت زیر بررسی می‌گردد و ثابت می‌شود که در هر سه حالت همواره داریم:



حالت اول: یک ضلع زاویهٔ محاطی از مرکز دایره می‌گذرد.

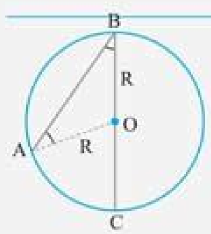


حالت دوم: دو ضلع زاویهٔ محاطی در دو طرف مرکز دایره‌اند.



حالت سوم: دو ضلع زاویهٔ محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع‌اند.

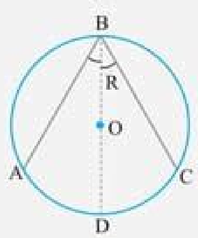
اثبات



حالت اول: از O به A وصل می‌کنیم. در این صورت $\hat{AOC}$ زاویهٔ خارجی برای مثلث متساوی‌الساقین AOB است. (توجه کنید که $OA=OB=R$). پس:

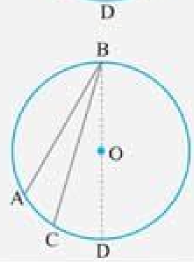
$$\hat{AOC}=\hat{A}+\hat{B}\xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}}\hat{AOC}=۲\hat{B}\Rightarrow\hat{B}=\frac{\hat{AOC}}{۲}$$

از طرفی $\hat{AOC}$، یک زاویهٔ مرکزی است و با کمان روبه‌رویش، یعنی $\overset{\frown}{AC}$ برابر است. پس: $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$



حالت دوم: قطر BD را رسم می‌کنیم. طبق حالت اول، در مورد دو زاویهٔ ABD و DBC داریم:

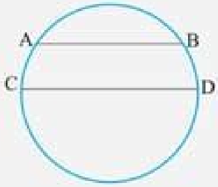
$$\hat{B}=A\hat{B}D+D\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$



حالت سوم: قطر BD را رسم می‌کنیم. طبق حالت اول، داریم:

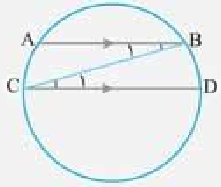
$$\hat{B}=A\hat{B}D-C\hat{B}D=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

مثال: **ثابت کنید در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساوی‌اند و برعکس.**



$AB\parallel CD \Leftrightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}$

پاسخ: فرض می‌کنیم $AB\parallel CD$، نشان می‌دهیم $\widehat{AC}=\widehat{BD}$. برای این منظور از B به C وصل می‌کنیم. با توجه به توازی $AB\parallel CD$ و مورب بودن BC، نتیجه می‌گیریم $\hat{B}_1=\hat{C}_1$. از طرفی زاویه‌های B_1 و C_1 محاطی‌اند و هر کدام برابر با نصف کمان روبه‌رو می‌باشند. پس:



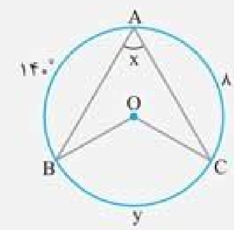
$$\hat{B}_1=\hat{C}_1 \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{۲}=\frac{\widehat{BD}}{۲}\xrightarrow{\times ۲}\widehat{AC}=\widehat{BD}$$

اثبات حالت عکس به عهدهٔ خودتان است. کافی است مراحل بالا را برعکس انجام دهید.

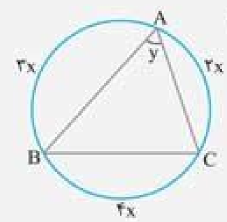
الگویابی کنید

۱ در هر یک از موارد زیر x و y را بیابید. (نقطهٔ O مرکز دایره است.)

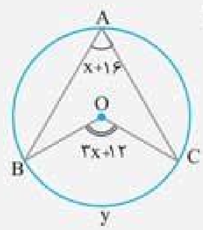
الف)



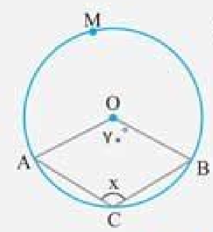
ب)



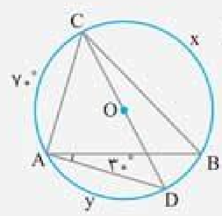
پ)



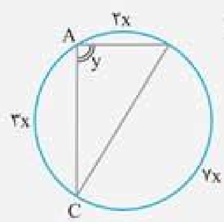
ت)



ث)



ج)



پاسخ:

الف: می‌دانیم $y+۸۰^\circ+۱۴۰^\circ=۳۶۰^\circ$، پس $\hat{y}=۱۴۰^\circ$ است. اما چون $B\hat{A}C$ محاطی است، پس داریم:

$x=B\hat{A}C=\frac{\widehat{BC}}{۲}=\frac{۱۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$

ب: می‌دانیم $۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ$، پس $۹x=۳۶۰^\circ$ و لذا $x=۴۰^\circ$. از طرفی y یک زاویهٔ محاطی است و روبه‌رو به کمان ۴x است، پس $y=۲x=۸۰^\circ$.

پ: می‌دانیم $B\hat{O}C$ و $B\hat{A}C$ به ترتیب زاویه‌های مرکزی و محاطی‌اند. پس $B\hat{O}C=y$ و $B\hat{A}C=\frac{y}{۲}$. بنابراین $B\hat{O}C=۲B\hat{A}C$.

اکنون داریم: $۳x+۱۲=۲(x+۱۶)\Rightarrow x=۲۰^\circ\Rightarrow y=۳x+۱۲=۳(۲۰)+۱۲=۷۲^\circ$

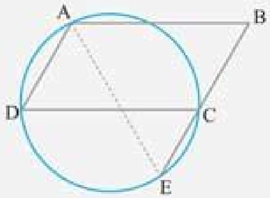
ت: می‌دانیم $A\hat{O}B$ یک زاویهٔ مرکزی است، پس $\widehat{ACB}=۷۰^\circ$ و لذا: $\widehat{AMB}=۳۶۰^\circ-۷۰^\circ=۲۹۰^\circ$

از طرفی $A\hat{C}B$ محاطی است و برابر با نصف $\widehat{AMB}$ است. یعنی: $x=\frac{۲۹۰^\circ}{۲}=۱۴۵^\circ$

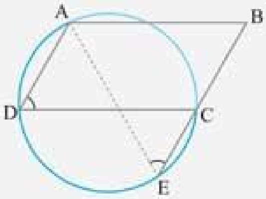
ث: می‌دانیم $B\hat{A}D$ زاویهٔ محاطی است و نصف کمان روبه‌رویش است. پس $\frac{\widehat{DB}}{۲}=۳۰^\circ$ و در نتیجه $\widehat{DB}=۶۰^\circ$. از طرفی CD قطر است، پس:

$\widehat{CB}+\widehat{BD}=۱۸۰^\circ\Rightarrow x+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۱۲۰^\circ\Rightarrow y=۳۶۰^\circ-(۷۰^\circ+۱۲۰^\circ+۶۰^\circ)=۱۱۰^\circ$

ج: $۲x+۳x+۷x=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۱۲x=۳۶۰^\circ\Rightarrow x=\frac{۳۶۰^\circ}{۱۲}=۳۰^\circ\xrightarrow{\text{محاطی}}y=\frac{۷x}{۲}=\frac{۲۱۰^\circ}{۲}=۱۰۵^\circ$



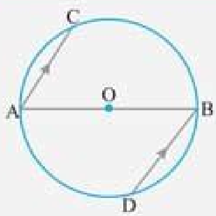
۲ در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. نوع مثلث ABE را تعیین کنید.



پاسخ: واضح است که دو زاویهٔ D و E محاطی روبه‌رو به کمان AC می‌باشند، پس با هم برابرند. یعنی:

$$\hat{D}=\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\xrightarrow[\text{(خاصیت متوازی‌الاضلاع)}]{\hat{D}=\hat{B}}\hat{B}=\hat{E}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABE}:\ \text{متساوی‌الساقین}$$

تمرین



۱ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید AC = BD .

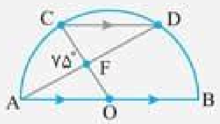
پاسخ: می‌دانیم در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساویند. پس:

$$AC\parallel BD\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}\quad (*)$$

از طرفی، AB قطر دایره است، پس:

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{(*)}\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}\Rightarrow AC=DB$$

(وترهای مقابل به کمان‌های برابر، مساوی‌اند.)



۲ در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و AB ∥ CD است. اندازهٔ کمان CD را به دست آورید.

پاسخ: چون $AB\parallel CD$، پس $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. از طرفی $A\hat{F}C=۷۵^\circ$، که برای مثلث AOF یک زاویهٔ خارجی است و لذا:

$$A\hat{F}C=F\hat{O}A+F\hat{A}O$$

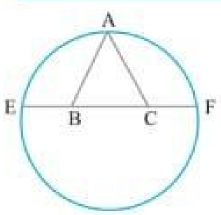
اما دو زاویهٔ $F\hat{O}A$ و $F\hat{A}O$ به ترتیب مرکزی و محاطی می‌باشند. در صورتی که $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=x$ فرض شود، داریم:

$$A\hat{F}C=\overset{\frown}{AC}+\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=x+\frac{x}{۲}=\frac{۳x}{۲}\Rightarrow ۷۵^\circ=\frac{۳x}{۲}\Rightarrow x=۵۰^\circ$$

اکنون با توجه به این‌که AB قطر است، پس:

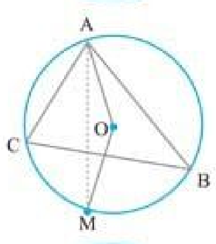
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow x+\overset{\frown}{CD}+x=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ-۲x=۱۸۰^\circ-۲(۵۰^\circ)=۸۰^\circ$$

تست‌های موضوعی



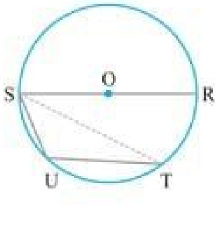
۳۱. در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر رأس‌های B و C از این مثلث، وتر EF را به سه قسمت برابر تقسیم کرده باشند، اندازهٔ کمان EAF کدام است؟

۱) ۱۲۰° ۲) ۱۵۰°
۳) ۹۰° ۴) ۱۸۰°



۳۲. در شکل مقابل، نقطهٔ M وسط کمان BC است. اگر زاویهٔ B به اندازهٔ ۲۰° کمتر از زاویهٔ C باشد، زاویهٔ OMA کدام است؟

۱) ۶۰°
۲) ۴۰°
۳) ۲۰°
۴) ۱۰°



۳۳. در شکل زیر، $U\hat{S}T=۲۵^\circ$ است. اگر UT = TR باشد، کمان UTR کدام است؟

۱) ۷۵° ۲) ۲۵°
۳) ۵۰° ۴) ۱۰۰°

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

۱.	۳	۲۸.	۲	۵۵.	۱	۸۲.	۳	۱۰۹.	۱
۲.	۴	۲۹.	۳	۵۶.	۳	۸۳.	۳	۱۱۰.	۲
۳.	۴	۳۰.	۴	۵۷.	۳	۸۴.	۲	۱۱۱.	۱
۴.	۳	۳۱.	۱	۵۸.	۳	۸۵.	۲	۱۱۲.	۱
۵.	۲	۳۲.	۴	۵۹.	۴	۸۶.	۴	۱۱۳.	۳
۶.	۲	۳۳.	۴	۶۰.	۳	۸۷.	۱	۱۱۴.	۳
۷.	۲	۳۴.	۲	۶۱.	۴	۸۸.	۴	۱۱۵.	۱
۸.	۴	۳۵.	۳	۶۲.	۱	۸۹.	۲	۱۱۶.	۴
۹.	۱	۳۶.	۴	۶۳.	۲	۹۰.	۳	۱۱۷.	۳
۱۰.	۳	۳۷.	۱	۶۴.	۳	۹۱.	۱	۱۱۸.	۲
۱۱.	۱	۳۸.	۴	۶۵.	۱	۹۲.	۱	۱۱۹.	۱
۱۲.	۱	۳۹.	۱	۶۶.	۲	۹۳.	۱	۱۲۰.	۱
۱۳.	۲	۴۰.	۳	۶۷.	۳	۹۴.	۲	۱۲۱.	۳
۱۴.	۲	۴۱.	۱	۶۸.	۲	۹۵.	۱	۱۲۲.	۴
۱۵.	۱	۴۲.	۲	۶۹.	۴	۹۶.	۴	۱۲۳.	۱
۱۶.	۴	۴۳.	۳	۷۰.	۳	۹۷.	۲	۱۲۴.	۱
۱۷.	۴	۴۴.	۴	۷۱.	۴	۹۸.	۲	۱۲۵.	۲
۱۸.	۲	۴۵.	۴	۷۲.	۳	۹۹.	۳	۱۲۶.	۲
۱۹.	۳	۴۶.	۲	۷۳.	۴	۱۰۰.	۴	۱۲۷.	۱
۲۰.	۲	۴۷.	۱	۷۴.	۳	۱۰۱.	۳	۱۲۸.	۳
۲۱.	۲	۴۸.	۳	۷۵.	۳	۱۰۲.	۴	۱۲۹.	۴
۲۲.	۱	۴۹.	۲	۷۶.	۱	۱۰۳.	۳	۱۳۰.	۲
۲۳.	۴	۵۰.	۳	۷۷.	۳	۱۰۴.	۴	۱۳۱.	۴
۲۴.	۱	۵۱.	۲	۷۸.	۴	۱۰۵.	۱	۱۳۲.	۳
۲۵.	۳	۵۲.	۳	۷۹.	۲	۱۰۶.	۴	۱۳۳.	۳
۲۶.	۱	۵۳.	۲	۸۰.	۱	۱۰۷.	۳	۱۳۴.	۴
۲۷.	۳	۵۴.	۴	۸۱.	۳	۱۰۸.	۴	۱۳۵.	۲