درسنامه ۲

نقیض یک گزاره و ترکیب گزاره‌ها

نقیض یک گزاره

نقیض گزارهٔ p را به‌صورت $\sim p$ می‌نویسیم و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. به علامت «$\sim$» ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثلاً: «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع 360° است.» یک گزاره است که نقیض آن برابر است با «چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع 360° باشد.» که معادل است با «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع 360° نیست.»

ارزش نقیض یک گزاره

اگر ارزش گزارهٔ p درست باشد، در این صورت ارزش گزارهٔ $\sim p$ نادرست است و وقتی که ارزش گزارهٔ p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

گزاره‌های هم‌ارز منطقی

اگر دو گزارهٔ p و q همواره ارزش یکسان داشته باشند، می‌گوییم این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم « P هم‌ارز است با q ».
با توجه به جدول بالا، دو گزارهٔ p و $\sim(\sim p)$ هم‌ارز منطقی هستند، پس $p \equiv \sim(\sim p)$

مثال

گزارهٔ « $5 < 2$ » را دو بار نقیض کنید.

پاسخ:

$$p:(2<5) \Rightarrow \sim p:(2 \not< 5) \Rightarrow \sim p:(2 \ge 5) \Rightarrow \sim(\sim p):(2 \not\ge 5) \Rightarrow \sim(\sim p):(2<5)$$

در نتیجه p هم‌ارز منطقی با $\sim(\sim p)$ است.

رابط‌های گزاره‌ای

رابط‌های گزاره‌ای عبارتند از «و»، «یا»، «اگر - آن‌گاه»، «اگر و فقط اگر» که گزاره‌های ساده را به هم مربوط می‌کنند.

ترکیب گزاره‌ها

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آید. (دقت کنید که در گزارهٔ مرکب، تعداد گزاره‌ها باید محدود باشد.)
به عنوان مثال جملهٔ «عدد ۳ فرد است و عدد ۱۴ زوج است.» یک گزارهٔ مرکب است و جملهٔ «عدد ۳ فرد است و عدد ۵ فرد است و عدد ۷ فرد است و ...» گزارهٔ مرکب نیست، زیرا تعداد گزاره‌ها محدود نیست.

ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «p یا q» را به‌صورت «$p \vee q$» می‌نویسند و به آن **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی « $\vee$ » **فاصل** گفته می‌شود.

ارزش گزارهٔ مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دوی p و q نادرست باشد و در بقیهٔ حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. یا به عبارتی در ترکیب فصلی اگر حداقل ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش ترکیب فصلی درست است.
جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ به‌صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

توجه: هرگاه گزارهٔ مرکب همواره درست باشد، ارزش منطقی آن «T» و اگر همواره نادرست باشد، ارزش منطقی آن « F » است.

درسنامه ۲

مثال

ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $(-۳ \in \mathbb{Z}) \vee (۲ \in \mathbb{Q})$ ب) $(\frac{۳۶}{۱۸} = ۲) \vee (\frac{۱}{۳} \neq \frac{۲}{۶})$

پ) «۴ یک عدد اول یا ۴ عدد مرکب است.» ت) $(A \not\subseteq A \vee \varnothing \not\subseteq A)$

پاسخ: آ) ارزش گزارهٔ $(۲ \in \mathbb{Q})$ درست و ارزش گزارهٔ $(-۳ \in \mathbb{Z})$ نیز درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی آن‌ها نیز درست است.

ب) ارزش گزارهٔ $(\frac{۳۶}{۱۸} = ۲)$ درست و ارزش گزارهٔ $(\frac{۲}{۶} \neq \frac{۱}{۳})$ نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

پ) ارزش گزارهٔ «۴ یک عدد اول است.» نادرست است و ارزش گزارهٔ «۴ یک عدد مرکب است.» درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

ت) ارزش گزارهٔ «$\varnothing \not\subseteq A$» نادرست است و ارزش گزارهٔ «$A \not\subseteq A$» نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی آن‌ها نادرست است.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p \wedge q$» را که خوانده می‌شود «p و q»، ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی «$\wedge$» **عاطف** گفته می‌شود.

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد و در بقیهٔ حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است، یا به عبارتی در گزارهٔ عطفی اگر حداقل ارزش یک گزاره نادرست باشد، ارزش گزارهٔ عطفی نیز نادرست است.

جدول ارزش $p \wedge q$ به‌صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال

ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $\sqrt{۲}$ عددی گویا و $\sqrt{۷}$ عددی گنگ است. ب) $(\frac{۷}{۴} < \frac{۵}{۳}) \wedge (\frac{۱}{۴} = \frac{۴}{۱۶})$

پاسخ: آ) ارزش گزارهٔ « $\sqrt{۲}$ عددی گویا است.» نادرست است و ارزش گزارهٔ « $\sqrt{۷}$ عددی گنگ است.» درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی آن‌ها نادرست است.

ب) ارزش گزارهٔ $(\frac{۷}{۴} < \frac{۵}{۳})$ درست است و ارزش گزارهٔ $(\frac{۱}{۴} = \frac{۴}{۱۶})$ درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی آن‌ها نیز درست است.

مثال

مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم: $|x-۱| + (x+۲y)^۲ = ۰$

پاسخ: چون $(x+۲y)^۲ \geq ۰$ و $|x-۱| \geq ۰$، بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x+۲y)^۲ = ۰) \wedge (|x-۱| = ۰) \Rightarrow \begin{cases} x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ \wedge \\ x+۲y = ۰ \Rightarrow ۱+۲y = ۰ \Rightarrow ۲y = -۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

نتیجه: رابطهٔ بالا وقتی درست است که $y = -\frac{۱}{۲}$ و $x = ۱$ باشد.

تذکر: به دو هم‌ارزی زیر **قانون دمورگان** در منطق ریاضی گفته می‌شود:

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q) \\ \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q) \end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

درسنامه ۲

مثلاً نقیض گزارهٔ $(a = b) \vee (a < b)$ برابر است با $(a \neq b) \wedge (a \not< b)$، به عبارتی نقیض گزارهٔ $(a \leq b)$ برابر $(a > b)$ می‌باشد. یعنی:

$$\sim (a \leq b) \Rightarrow (a \neq b) \wedge (a \not< b) \Rightarrow (a \neq b) \wedge (a \geq b) \Rightarrow a > b$$

هم‌ارزی‌های منطقی بین گزاره‌های مرکب

۱- قوانین جابه‌جایی
$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

۲- قوانین شرکت‌پذیری
$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

۳- قوانین توزیع‌پذیری (پخشی)
$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

مثلاً در ترکیب فصلی «۶ عددی زوج است.» $\vee$ «۶ عددی مرکب است.» اگر دو گزاره را جابه‌جا کنیم، گزاره‌ای هم‌ارز گزارهٔ اول به‌دست می‌آید. یعنی «۶ عددی مرکب است.» $\vee$ «۶ عددی زوج است.» هم‌ارز گزارهٔ اول است.

۱۰. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

آ) $\sqrt{۱۰} < ۱۰$
ب) $۳ \leq \frac{۱۵}{۳}$
پ) $۳ \in \{۱،۲،۵\}$
ت) $۲^۲ + ۲^۳ = ۲^۵$
ث) سعدی شاعر ایرانی است.
ج) ۱۹۷۱ عددی اول است.
چ) ۳ عددی فرد است یا عدد $\sqrt{۲}$ گویا است.
ح) $(۲ < a) \wedge (a < ۵)$

۱۱. جدول زیر را کامل کنید:

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
مهر اولین ماه فصل پاییز است.	تهران پایتخت ایران است.	د			
۵ عددی اول است.			ن		
۲ عددی زوج نیست.			د		
				ن	

۱۲. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

آ) $(-۳)^۲ = ۹ \vee (۵ < ۷)$
ب) ۹۳ عددی فرد یا عددی اول است.
پ) $(۲^۹ = ۵۱۲) \vee (۵^۴ = ۱۲۵)$
ت) $(\sqrt{۳^۲ + ۵^۲} = ۳ + ۵) \vee (۳ + ۵)! = ۳! + ۵!$

۱۳. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

آ) عدد ۱۴۴ بر ۱۲ و ۳۶ بخش‌پذیر است.
ب) مسکو پایتخت روسیه و یکی از شهرهای ایران است.
پ) $(۳ < ۵) \wedge (-۳ < -۵)$
ت) $((۲^۳)^۲ > ۲^{۳^۲}) \wedge (\sqrt{۰/۰۱} > \sqrt{۰/۰۴})$

۱۴. کدام‌یک از جمله‌های زیر گزارهٔ مرکب است؟ ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کنید.

آ) $(۱۱ > ۳ + ۱) \vee (۳^۳ = ۸۱)$
ب) $(-۴ < -۵) \wedge (۴ > ۵)$
پ) مجموع زوایای داخلی هر مثلث، ۱۸۰° است.
ت) $(\mathbb{W} \not\subseteq \mathbb{Z}) \vee (\{۲\} \in \{۲،۳\})$
ث) $((۳^۲)^۲ = ۸۱) \wedge (۲^{۲^۲} = ۱۶)$
ج) $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۱۵$

۱۵. جدول ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید گزاره‌های زیر همواره نادرست هستند.

آ) $p \wedge \sim p \equiv F$
ب) $\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv F$
پ) $p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

۱۶. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید هم‌ارزی‌های منطقی زیر برقرار است.

آ) قوانین جابه‌جایی $p \vee q \equiv q \vee p$
ب) قوانین شرکت‌پذیری $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
پ) قوانین توزیع‌پذیری $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۱۷. با جدول ارزش‌ها نشان دهید که هم‌ارزی قانون دمورگان در منطق ریاضی برقرار است.

آ) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ ب) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۱۸. مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

آ) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$ ب) $|2x-1| + |x+y| = 0$

پ) $x^2 + 2x + 1 + y^2 = 0$

پاسخ‌های تشریحی

۱۰ آ)

$$p:(\sqrt{10} < 10) \Rightarrow \sim p : \sim(\sqrt{10} < 10) \equiv (\sqrt{10} \not< 10) \equiv (\sqrt{10} \geq 10)$$

ب) $p:(\frac{15}{3} \leq 3) \Rightarrow \sim p : \sim(\frac{15}{3} \leq 3) \equiv (\frac{15}{3} \not\leq 3) \equiv (\frac{15}{3} > 3)$

پ) $p:(3 \in \{1,2,5\}) \Rightarrow \sim p : \sim(3 \in \{1,2,5\}) \equiv (3 \notin \{1,2,5\})$

ت) $p:(2^2 + 2^3 = 2^5) \Rightarrow \sim p : \sim(2^2 + 2^3 = 2^5) \equiv (2^2 + 2^3 \neq 2^5)$

یا می‌توانیم آن را به‌صورت $(2^2 + 2^3 < 2^5) \vee (2^2 + 2^3 > 2^5)$ بنویسیم.

ث) نقیض این گزاره را می‌توان به‌صورت «چنین نیست که سعدی شاعر ایرانی باشد.» یا به‌صورت «سعدی شاعر ایرانی نیست.» نوشت.

ج) نقیض این گزاره را می‌توان به‌صورت «چنین نیست که ۱۹۷۱ عددی اول باشد.» یا به‌صورت «۱۹۷۱ عددی اول نیست.» نوشت.

چ) نقیض گزاره: «۳ عددی فرد نیست و عدد $\sqrt{2}$ گویا نیست.»

ح) نقیض گزاره به‌صورت $(2 \not< a) \vee (a \not< 5)$ می‌باشد که معادل $(2 \geq a) \vee (a \geq 5)$ است.

۱۱

گزارۀ p	گزارۀ q
مهر اولین ماه فصل پاییز است.	تهران پایتخت ایران است.
۵ عددی اول است.	۵ عددی اول نیست.
۲ عددی زوج نیست.	۴ مربع کامل است.
۳ عددی زوج است.	$4 + 3 = 8$

ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

---

۱۲ آ) ارزش گزارۀ $(5 < 7)$ درست است و ارزش گزارۀ $(-3)^2 = 9$ نیز درست است، پس ارزش گزارۀ ترکیب فصلی درست است.

ب) ارزش گزارۀ «۹۳ عددی فرد است.» درست و ارزش گزارۀ «۹۳ عددی اول است.» نادرست است. پس ارزش گزارۀ ترکیب فصلی درست است.

پ) ارزش گزارۀ « $5^4 = 125$ » نادرست است و ارزش گزارۀ « $2^9 = 512$ » درست است. پس ارزش گزارۀ ترکیب فصلی درست است.

ت) ارزش گزارۀ « $(3+5)! = 3! + 5!$ » نادرست است، زیرا $8! \neq 6 + 120 \Rightarrow 40320 \neq 126$ و ارزش گزارۀ $\sqrt{9+25} = 3+5 \Rightarrow \sqrt{34} = 8$ نیز نادرست است، پس ارزش گزارۀ ترکیب فصلی نیز نادرست است.

---

۱۳ آ) گزارۀ اول یعنی «۱۴۴ بر ۱۲ بخش‌پذیر است.» درست و گزارۀ دوم یعنی «۱۴۴ بر ۳۶ بخش‌پذیر است.» نیز درست است، در نتیجه ارزش گزارۀ ترکیب عطفی نیز درست است.

ب) گزارۀ اول «مسکو پایتخت روسیه است.» درست و گزارۀ دوم «مسکو یکی از شهرهای ایران است.» نادرست است، پس ارزش گزارۀ ترکیب عطفی نادرست است.

پ) ارزش گزارۀ « $-5 > -3$ » نادرست و ارزش گزارۀ « $5 > 3$ » درست است، پس ارزش گزارۀ ترکیب عطفی نادرست است.

ت) گزارۀ $\sqrt{0/01} > \sqrt{0/04} \Rightarrow 0/1 > 0/2$ دارای ارزش نادرست است و گزارۀ $(2^3)^2 > 2^{3^2} \Rightarrow 8^2 > 2^9 \Rightarrow 64 > 512$ نیز دارای ارزش نادرست است، پس ارزش گزارۀ ترکیب عطفی نادرست است.

۱۴

آ) چون از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزارۀ مرکب است. این جملۀ مرکب به‌صورت ترکیب فصلی است که برای درست بودن باید حداقل یکی از دو گزاره درست باشد و به دلیل آن‌که $4 < 11$ است، ارزش این گزارۀ مرکب درست است.

ب) چون از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزارۀ مرکب است. این گزارۀ مرکب به صورت ترکیب عطفی است که چون ارزش هر دو گزاره نادرست است، پس ارزش این گزارۀ مرکب نیز نادرست است.

پ) چون دارای یک گزاره می‌باشد، بنابراین گزارۀ مرکب نیست.

ت) به دلیل آن‌که از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزارۀ مرکب است. دو گزاره به‌صورت ترکیب فصلی است و ارزش هر دو گزاره نادرست است، پس ارزش گزارۀ مرکب نیز نادرست است.

ث) به دلیل آن که از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزارۀ مرکب است این جملۀ مرکب به صورت ترکیب عطفی است که چون ارزش هر دو گزاره درست است پس ارزش این گزارۀ مرکب نیز درست است.

ج) چون دارای یک گزاره می‌باشد، بنابراین گزارۀ مرکب نیست.

---

۱۵ آ)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

در نتیجه: $p \wedge \sim p \equiv F$

پس ارزش منطقی $p \wedge \sim p$ همواره نادرست است.

ب)

p	q	$\sim p$	$p\wedge q$	$\sim p\wedge(p\wedge q)$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن

در نتیجه: $\sim p\wedge(p\wedge q)\equiv F$

پس ارزش منطقی $\sim p\wedge(p\wedge q)$ همواره نادرست است.

پ)

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$p\wedge\sim(p\vee q)$
د	د	د	ن	ن
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن

در نتیجه: $p\wedge\sim(p\vee q)\equiv F$

پس ارزش منطقی $p\wedge\sim(p\vee q)$ همواره نادرست است.

۱۶

آ)

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $p\vee q$ و $q\vee p$ یکسان است، پس هم‌ارزی $p\vee q\equiv q\vee p$ برقرار است.

ب)

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\vee r$	$q\vee r$	$p\vee(q\vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $(p\vee q)\vee r$ و $p\vee(q\vee r)$ یکسان است پس هم‌ارزی $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$ برقرار است.

پ)

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $p\wedge(q\vee r)$ و $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ یکسان است پس هم‌ارزی $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ برقرار است.

---

۱۷ آ)

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

همهٔ حالت‌های ارزش دو گزارهٔ $(\sim p\wedge\sim q)$ و $\sim(p\vee q)$ یکسان است، پس هم‌ارزی $\sim(p\vee q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)$ برقرار است.

ب)

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

همهٔ حالت‌های ارزش دو گزارهٔ $(\sim p\vee\sim q)$ و $\sim(p\wedge q)$ یکسان است، پس هم‌ارزی $\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p\vee\sim q)$ برقرار است.

---

۱۸ آ) $(x-2)^2+(y+1)^2=0$

چون $(x-2)^2\geq 0$ و $(y+1)^2\geq 0$، پس تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x-2)^2=0)\wedge((y+1)^2=0)\Rightarrow\begin{cases}x-2=0\Rightarrow x=2\\ \wedge\\ y+1=0\Rightarrow y=-1\end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=2$ و $y=-1$ باشد.

ب) چون $|x+y|\geq 0$ و $|2x-1|\geq 0$، پس این تساوی وقتی برقرار است که:

$$(|2x-1|=0)\wedge(|x+y|=0)\Rightarrow\begin{cases}2x-1=0\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ \wedge\\ x+y=0\Rightarrow\frac{1}{2}+y=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$ باشد.

پ) $x^2+2x+1+y^2=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=0$

چون $y^2\geq 0$ و $(x+1)^2\geq 0$، پس تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x+1)^2=0)\wedge(y^2=0)\Rightarrow\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\ \wedge\\ y=0\end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=-1$ و $y=0$ باشد.

درسنامه ۳

ترکیب شرطی و ترکیب دوشرطی

ترکیب شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q)$ را که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q»، ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

ارزش گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» وقتی نادرست است که ارزش p (مقدم) درست باشد و ارزش q (تالی) نادرست باشد. در بقیهٔ حالت‌ها ارزش «$p \Rightarrow q$» درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

به عبارتی می‌توان گفت هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، ارزش گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» درست است، در این حالت می‌گوییم ارزش گزاره $(p \Rightarrow q)$ به انتفای مقدم درست است. هم‌چنین می‌توان گفت هر ترکیب شرطی که ارزش q (تالی) آن درست باشد، مستقل از ارزش مقدم آن همواره درست است.

مثال **کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟**

آ) اگر ۴۰۰ بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه ۴۰۰ بر ۵ نیز بخش‌پذیر است.

ب) $(\frac{۱}{۲})^۲ > (\frac{۱}{۴})^۲ \Rightarrow (\frac{۱}{۲}) < (\frac{۱}{۴})$

پ) $۰/۷ < ۰/۵ \Rightarrow \sqrt{۰/۷} > \sqrt{۰/۵}$

ت) $۲^۶ = ۱۲۸ \Rightarrow ۲^۵ = ۶۴$

پاسخ: آ) در این ترکیب شرطی، مقدم درست است و تالی نیز درست است، لذا گزارهٔ شرطی نیز درست است.

ب) مقدم درست و تالی نادرست است، بنابراین گزارهٔ شرطی نادرست است.

پ) با توجه به این‌که مقدم نادرست و تالی درست است، بنا به انتفای مقدم ترکیب شرطی درست است.

ت) با توجه به این‌که مقدم نادرست و تالی نادرست است، بنا به انتفای مقدم ترکیب شرطی درست است.

صورت‌های مختلف بیان ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$

می‌توانیم گزارهٔ شرطی $(p \Rightarrow q)$ را به‌صورت‌های زیر بیان کنیم:

۱- «اگر p آن‌گاه q»

۲- «p شرط کافی برای q است.» یا «شرط کافی برای q آن است که p.»

۳- «q شرط لازم برای p است.» یا «شرط لازم برای p آن است که q.»

۴- «p نتیجه می‌دهد q را.»

۵- «q اگر p»

مثال **گزارهٔ شرطی «اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه دو قطرش مساویند.» را به دو شکل مختلف دیگر بنویسید.**

پاسخ:

۱- مستطیل بودن یک چهارضلعی شرط کافی برای مساوی بودن قطرهای آن است.

۲- مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.

نکته

۱- گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم‌ارز منطقی هستند.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

۲- گزارهٔ «$q \Rightarrow p$» عکس ترکیب شرطیِ «$p \Rightarrow q$» و گزارهٔ «$\sim q \Rightarrow \sim p$» عکس نقیض ترکیب شرطیِ «$p \Rightarrow q$» است، به طوری‌که «$p \Rightarrow q$» هم‌ارز منطقیِ «$\sim q \Rightarrow \sim p$» است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

درسنامه ۳

۳- قانون ادخال فاصل: $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

یعنی به هر گزاره می‌توانیم با ترکیب فصلی هر تعداد گزاره را اضافه (ترکیب) کنیم.

۴- قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$ یا $(p \wedge q \Rightarrow q) \equiv T$

یعنی از ترکیب عطفی دو یا چند گزاره می‌توانیم هر کدام را به دلخواه نتیجه بگیریم.

(اثبات در تمرین‌ها آمده است.)

مثال

ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $a^۲$ عددی زوج باشد، آن‌گاه a نیز عددی زوج است.

پاسخ: به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

(a عددی فرد است. $\Leftarrow$ $a^۲$ عددی فرد است.) $\equiv$ (a عددی زوج است. $\Leftarrow$ $a^۲$ عددی زوج است.)

اگر a عددی فرد باشد، آن را به‌صورت $(k \in \mathbb{Z})$ ، $a = ۲k + ۱$ در نظر می‌گیریم و سپس طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$a^۲ = (۲k+۱)^۲ = (۴k^۲ + ۴k) + ۱ = ۲(\underbrace{۲k^۲ + ۲k}_{k' \in \mathbb{Z}}) + ۱ = ۲k' + ۱$$

در نتیجه $a^۲$ عددی فرد است. عکس نقیض گزارهٔ خواسته‌شده را ثابت کردیم، بنابراین گزارهٔ اصلی درست است.

ترکیب دوشرطی

هرگاه p و q گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به‌صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را **ترکیب دوشرطی** p و q می‌نامیم. گزارهٔ « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱- «اگر p آن‌گاه q و بر عکس»

۲- « p شرط لازم و کافی برای q است.»

۳- « q شرط لازم و کافی برای p است.»

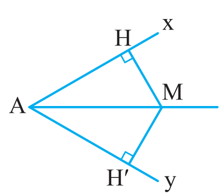
۴- « p اگر و تنها اگر q » یا « q اگر و فقط اگر p »

به عنوان مثال گزاره‌های زیر نمونه‌ای از ترکیب دوشرطی گزاره‌ها هستند:

آ) $(x = ۴ \Rightarrow ۳x = ۱۲) \wedge (۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴) \equiv (x = ۴ \Leftrightarrow ۳x = ۱۲)$

ب) شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای روی نیمساز زاویهٔ A قرار داشته باشد آن است که فاصلهٔ آن تا دو ضلع زاویه برابر باشد.

M روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد. $\Leftrightarrow MH = MH'$



جدول ارزش ترکیب دوشرطی

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

طبق تعریف هم‌ارزی $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ برقرار است زیرا در دو ستون آخر جدول، ارزش آن‌ها یکسان است، بنابراین اگر دو گزارهٔ p و q، هم‌ارزش باشند یعنی هر دو دارای ارزش درست یا هر دو دارای ارزش نادرست باشند، ارزش گزارهٔ دوشرطی درست است. در بقیهٔ حالت‌ها ارزش گزارهٔ دوشرطی نادرست است.

مثلاً ارزش گزارهٔ $(۱ + ۱ > ۱۲ \Leftrightarrow ۳ > ۱۲)$ درست است، زیرا هر دو گزاره نادرست هستند.

درسنامه ۳

نکته

نقیض گزارهٔ شرطی و دوشرطی به‌صورت زیر می‌باشد:

آ) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

ب) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

(اثبات در تمرین‌ها آمده است.)

مثال

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

آ) اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه مربع آن مثبت است.

ب) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

پاسخ: آ) نقیض گزاره برابر است با «a عددی منفی است و مربع a مثبت نیست.»

ب) نقیض گزاره برابر است با: «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع نیست اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.»

یا «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر نباشد.»

۱۹. جاهای خالی را با عبارت‌های «لازم»، «کافی» یا «لازم و کافی» پر کنید.

آ) شرط .... برای آن‌که نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن است که روی عمودمنصف آن پاره‌خط باشد.

ب) شرط .... برای آن‌که $ab = ۰$ باشد آن است که $a = ۰$ و $b = ۰$، $(a, b \in \mathbb{R})$

پ) شرط .... برای آن‌که عددی مثبت باشد آن است که مربع آن عدد مثبت باشد.

ت) شرط .... برای آن‌که $ab = ۰$ باشد آن است که $a = ۰$ یا $b = ۰$، $(a, b \in \mathbb{R})$

ث) شرط .... برای آن‌که عددی زوج باشد آن است که مربع آن زوج باشد.

۲۰. قضیهٔ شرطی «اگر a و b دو عدد گویا باشند، آن‌گاه $a + b$ گویا است.» را در نظر بگیرید. (نهایی- دی ۹۳)

آ) عکس قضیهٔ شرطی را بنویسید.

ب) آیا عکس آن نیز یک قضیهٔ شرطی است؟ چرا؟

۲۱. ارزش گزاره‌های شرطی و دوشرطی زیر را مشخص کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

آ) اگر a عددی فرد باشد، آن‌گاه $a^۲$ فرد است.

ب) π عددی گویا است اگر و تنها اگر $\pi = ۳/۱۴$ باشد.

پ) اگر دو مثلث دارای مساحت‌های برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.

ت) اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن‌گاه دو مثلث دارای مساحت‌های برابر می‌باشند.

ث) اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آن‌گاه قطرهای آن با هم برابرند.

ج) $(۲^۲ = ۴) \Leftrightarrow (۲^۰ = ۲)$

چ) اگر a بر b بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه a^n بر b^n بخش‌پذیر است.

۲۲. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، قانون ادخال فاصل و قانون حذف عاطف را نشان دهید.

۲۳. جدول‌های ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره‌ها همواره درست هستند.

آ) $p \Rightarrow p \equiv T$

ب) $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

پ) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$

۲۴. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید: (تمرین ۸ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) $p \vee F \equiv p$

ب) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

پ) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

ت) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

۲۵. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

آ) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

ب) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

پ) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

ت) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

ث) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

ج) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

۲۶. نشان دهید اگر $n^۲$ عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است. (مشابه نهایی- شهریور ۹۲)

۲۷. ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و $n^۲$ مضرب ۵ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۵ است.

پاسخ‌های تشریحی

۱۹ آ) «هر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله می‌باشد اگر و تنها اگر روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار داشته باشد»، یک ترکیب دوشرطی است (یعنی از هر کدام دیگری را می‌توانیم نتیجه بگیریم). پس عبارت «لازم و کافی» در جای خالی قرار می‌گیرد.

ب) گزارهٔ $(a=0 \wedge b=0) \Rightarrow ab=0$ درست است. بنابراین در جای خالی کلمهٔ «کافی» قرار می‌گیرد.

پ) گزارهٔ «اگر عددی مثبت باشد، آن‌گاه مربع آن مثبت است»، همواره درست است. پس کلمهٔ «لازم» در جای خالی قرار می‌گیرد.

ت) گزارهٔ دوشرطی $(a=0 \vee b=0) \Leftrightarrow ab=0$ درست است (زیرا از هر یک دیگری را می‌توانیم نتیجه بگیریم). لذا در جای خالی عبارت «لازم و کافی» قرار می‌گیرد.

ث) «اگر عددی زوج باشد، مربع عدد نیز زوج است و بر عکس». بنابراین این گزاره یک ترکیب دوشرطی همیشه درست است. پس عبارت «لازم و کافی» در جای خالی قرار می‌گیرد.

---

۲۰ آ) عکس قضیه: اگر $a+b$ گویا باشد، آن‌گاه a و b دو عدد گویا هستند.

ب) خیر، مثال نقض: عدد ۲ گویا است. $a+b = 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 2$

در نتیجه $a+b=2$ گویا است ولی $a=1+\sqrt{2}$ و $b=1-\sqrt{2}$ گنگ هستند.

---

۲۱ آ) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزارهٔ شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره: «a عددی فرد است و a^2 عددی فرد نیست.»

ب) در این گزارهٔ دوشرطی ارزش گزارهٔ «π عددی گویا است.» و گزارهٔ «$\pi = 3/14$» نادرست است، پس ارزش گزارهٔ دوشرطی درست است.

نقیض گزاره: «π عددی گویا نیست، اگر و تنها اگر $\pi = 3/14$ باشد.»

یا «π عددی گویا است، اگر و تنها اگر $\pi \neq 3/14$ باشد.»

پ) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست است. بنابراین ارزش گزارهٔ شرطی نادرست است.

نقیض گزاره: «دو مثلث دارای مساحت‌های برابر می‌باشند و دو مثلث همنهشت نیستند.»

ت) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزارهٔ شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره: «دو مثلث همنهشت هستند و دو مثلث دارای مساحت برابر نیستند.»

ث) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزارهٔ شرطی درست است.

نقیض گزاره: «یک چهارضلعی مربع است و قطرهای آن با هم برابر نیستند.»

ج) در این گزارهٔ دوشرطی ارزش گزارهٔ «$2^2 = 4$» درست و ارزش گزارهٔ «$2^0 = 2$» نادرست است، پس ارزش گزارهٔ دوشرطی نادرست است.

نقیض گزاره: $(2^2 \neq 4) \Leftrightarrow (2^0 = 2)$ یا $(2^2 = 4) \Leftrightarrow (2^0 \neq 2)$

چ) در این گزارهٔ شرطی به دلیل آن‌که مقدم و تالی درست است، ارزش گزارهٔ شرطی درست است.

نقیض گزاره: «a بر b بخش‌پذیر است و a^n بر b^n بخش‌پذیر نیست.»

۲۲ قانون ادخال فاصل: $(p \Rightarrow p \vee q \equiv T)$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow p \equiv T)$ یا $(p \wedge q \Rightarrow q) \equiv T$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p \wedge q \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د

---

۲۳ آ)

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

در نتیجه: $P \Rightarrow P \equiv T$

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$
د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د

در نتیجه: $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

پ)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

در نتیجه: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$

---

۲۴ آ)

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

ارزش دو ستون یکسان است، پس $p \vee F \equiv p$

ب)

p	q	$q\wedge p$	$p\vee(q\wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون یکسان است، پس $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

پ)

p	q	$p\Leftrightarrow q$	$\sim(p\Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p\Leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

ارزش دو ستون یکسان است، پس: $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$

ت)

p	q	r	$q\Rightarrow r$	$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

ارزش دو ستون یکسان است، پس: $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

۲۵ آ)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p\vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

گزاره‌های $p\Rightarrow q$ و $\sim p\vee q$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.
$p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

ب)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q\Rightarrow\sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

گزاره‌های $p\Rightarrow q$ و $\sim q\Rightarrow\sim p$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.
$p\Rightarrow q\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$ (یعنی هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.)

پ)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim(p\Rightarrow q)$	$\sim q$	$p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

گزاره‌های $\sim(p\Rightarrow q)$ و $p\wedge\sim q$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.
$\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

ت)

p	q	$p\Leftrightarrow q$	$\sim(p\Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p\Leftrightarrow q$	$\sim q$	$p\Leftrightarrow\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن

گزاره‌های $\sim(p\Leftrightarrow q)$، $\sim p\Leftrightarrow q$ و $p\Leftrightarrow\sim q$ هم‌ارز منطقی هستند.
زیرا ارزش ستون آن‌ها یکسان است.
$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q\equiv p\Leftrightarrow\sim q$

ث)

p	q	r	$p\Rightarrow r$	$q\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$	$p\vee q$	$(p\vee q)\Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	د	ن
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	ن	د

گزاره‌های $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ و $(p\vee q)\Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی هستند.
زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.
$(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\equiv(p\vee q)\Rightarrow r$

ج)

p	q	r	$q\Rightarrow r$	$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$	$p\Rightarrow r$	$q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

گزاره‌های $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ و $q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است. $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

۲۶ به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:

(n عددی زوج است.) $\equiv$ (n عددی فرد است.) $\Rightarrow$ (n^2 عددی فرد است.)

$\Rightarrow$ (n^2 عددی زوج است.)

اگر n عددی زوج باشد، یعنی $n=2k$ است و داریم:

$$n=2k\Rightarrow n^2=(2k)^2=4k^2=2(\underbrace{2k^2}_{k'\in\mathbb{Z}})=2k'$$

در نتیجه n^2 عددی زوج است.

۲۷ به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

(n مضرب ۵ نیست.) $\equiv$ (n مضرب ۵ است.) $\Rightarrow$ (n^2 مضرب ۵ است.)

$\Rightarrow$ (n^2 مضرب ۵ نیست.)

در این قسمت دو روش برای اثبات داریم:

روش اول: اگر n مضرب ۵ نباشد، یعنی $n\neq 5k$ و خواهیم داشت:

$$n^2\neq(5k)^2\neq 25k^2\neq 5(\underbrace{5k^2}_{k'\in\mathbb{Z}})\neq 5k'$$

در نتیجه n^2 مضرب ۵ نیست.

روش دوم: اگر n مضرب ۵ نباشد، پس به‌صورت زیر است:

$$n=5k+r\ (1\leq r\leq 4)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}} n^2=(5k+r)^2=25k^2+10kr+r^2$$

$$=5(\underbrace{5k^2+2kr}_{k'\in\mathbb{Z}})+r^2=5k'+r^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases} r=1\Rightarrow n^2=5k'+1 & (\text{مضرب ۵ نیست.}\ n^2)\\ r=2\Rightarrow n^2=5k'+4 & (\text{مضرب ۵ نیست.}\ n^2)\\ r=3\Rightarrow n^2=5k'+9 & (\text{مضرب ۵ نیست.}\ n^2)\\ r=4\Rightarrow n^2=5k'+16 & (\text{مضرب ۵ نیست.}\ n^2)\end{cases}$$

در نتیجه در هر ۴ حالت، n^2 مضرب ۵ نیست.

درسنامه ۴

سورها

سور

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به **سور** معروف هستند.

این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$ (از حرف اول کلمه All گرفته شده است.) و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ (از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.) استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ **سور عمومی** و نماد $\exists$ **سور وجودی** نامیده می‌شود.

گزاره‌های با سور عمومی

گزاره‌هایی مانند «هر عدد طبیعی، یک عدد مثبت است.» و «هر مستطیلی یک متوازی‌الاضلاع است.» که خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت می‌دهند، سور عمومی هستند.

اگر $P(x)$ را گزاره‌نمایی فرض کنیم که خاصیتی را برای متغیر x بیان می‌کند، در این صورت گزارهٔ «هر xای خاصیت P را دارا می‌باشد.» را به‌صورت مقابل نشان می‌دهیم: $\forall x: P(x)$

گزاره‌های با سور عمومی وقتی درست می‌باشند که مجموعه جواب آن‌ها با دامنهٔ متغیر آن‌ها یکسان باشد. به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشند.

درسنامه ۴

مثال

گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

آ) مربع هر عدد حقیقی، نامنفی است.

ب) نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچک‌تر است.

پاسخ: آ) این گزاره درست است. $\forall x \in \mathbb{R} : x^{۲} \geq ۰$

زیرا گزاره‌نمایی شامل متغیر x که با سور عمومی بیان می‌شود، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنهٔ متغیر در گزاره‌نما صدق کند و هیچ مثال نقضی نداشته باشد و این عبارت این شرایط را دارد و درست می‌باشد.

ب) $\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{x}{۲} < x$

این گزاره نادرست است، زیرا $x = -۱$ یک مثال نقض برای این گزاره محسوب می‌شود. $(\frac{-۱}{۲} \not< -۱)$

یادآوری: مجموعهٔ اعداد زوج را با E، مجموعهٔ اعداد فرد را با O و مجموعهٔ اعداد اول را با P نمایش می‌دهیم.

مثال

عبارت روبه‌رو را با زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن را مشخص کنید. $\forall a \in O : a = ۲k + ۱ \text{ ، } (k \in \mathbb{Z})$

پاسخ: برای هر عدد صحیح فرد داریم: $a = ۲k + ۱ \text{ ، } (k \in \mathbb{Z})$

ارزش این گزاره درست است، زیرا اگر به جای k اعداد صحیح را قرار دهیم، تمام اعداد فرد به‌دست می‌آیند و هیچ مثال نقضی نیز ندارد.

گزاره‌های با سور وجودی

گزاره‌ای با سور وجودی، گزاره‌ای است که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت دهد.

گزارهٔ «$\exists x : P(x)$» به این معنی است که حداقل یک x وجود دارد که خاصیت P را دارا می‌باشد. به عنوان مثال:

«بعضی از اعداد اول، زوج هستند.» و «بعضی از اعداد با توان زوج، فرد هستند.» گزاره‌هایی با سور وجودی می‌باشند.

گزاره‌های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها تهی نباشد.

مثال

گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

آ) معکوس بعضی از اعداد صحیح، یک عدد صحیح است.

ب) جذر بعضی از اعداد طبیعی از خود عدد طبیعی بزرگ‌تر است.

پاسخ: آ) این گزاره درست است، زیرا به ازای $x = ۱$ گزاره درست است، پس حداقل یک عضو وجود دارد که به ازای آن، این گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزشِ درست تبدیل می‌شود.

$\exists x \in \mathbb{Z} : \frac{۱}{x} \in \mathbb{Z}$

ب) این گزاره نادرست است، زیرا هیچ عضوی از اعداد طبیعی وجود ندارد که به ازای آن، این گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست تبدیل شود.

$\exists x \in \mathbb{N} : \sqrt{x} > x$

نقیض گزاره‌های با سور عمومی

گزارهٔ $\forall x : P(x)$ وقتی درست است که تمام اعضای دامنه، خاصیت $P(x)$ را داشته باشند. بنابراین می‌توان گفت این گزاره وقتی نادرست است که حداقل یک عضو پیدا شود که خاصیت $P(x)$ را نداشته باشد. $\sim(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \sim P(x)$

مثال

ارزش و نقیض گزارهٔ مقابل را به‌دست آورید. $\forall x \in \mathbb{N} : x + ۳ \geq ۴$

پاسخ: ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای تمام اعداد طبیعی نامساوی برقرار است.

$\sim(\forall x \in \mathbb{N} : x + ۳ \geq ۴) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x + ۳ \not\geq ۴) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x + ۳ < ۴)$

درسنامه ۴

نقیض گزاره‌ها با سور وجودی

گزارهٔ $\exists x : P(x)$ وقتی درست است که مجموعه جوابش ناتهی باشد. پس این گزاره وقتی نادرست است که مجموعه جوابش تهی باشد، یعنی هیچ عضوی از دامنه در رابطهٔ $P(x)$ صدق نکند.

$$\sim(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \sim P(x)$$

مثال **نقیض گزارهٔ «بعضی از اعداد اول زوج هستند.» را بیان کنید.**

پاسخ: نقیض این گزاره به‌صورت «هر عدد اولی فرد است.» یا «تمام اعداد اول فردند.» می‌باشد.

مثال **ارزش و نقیض گزارهٔ مقابل را به‌دست آورید.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ + x^۴ = ۰$

پاسخ: ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای $x = ۰$ معادله برقرار است، پس مجموعه جواب معادلهٔ $x^۲ + x^۴ = ۰$ ناتهی است.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ + x^۴ = ۰) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : x^۲ + x^۴ \neq ۰$$

۲۸. با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

آ) در آمار، هر متغیر گسسته یک متغیر کمی است.

ب) در آمار، هر متغیر کمی یک متغیر گسسته است.

پ) در آمار، بعضی از متغیرهای گسسته یک متغیر کیفی هستند.

ت) در آمار، بعضی از متغیرهای کمی یک متغیر گسسته هستند.

۲۹. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

آ) $\forall x \in \mathbb{N} : x(x+۱) = ۲k ,(k \in \mathbb{N})$

ب) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = ۱$

پ) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^۲ + ۳x = ۰$

ت) $\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ + ۴ = ۰$

ث) $\forall x \in P : x = ۲k+۱ , (k \in \mathbb{N})$

ج) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^۵ + ۱ = ۰$

۳۰. هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۲ \leq x < ۲\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. (مشابه تمرین ۱۱ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) $\forall x \in A : x + ۳ \leq ۴$

ب) $\forall x \in A : ۲x + ۱ > -۳$

پ) $\exists x \in A : \sqrt{x^۲ + ۳} = ۲$

ت) $\exists x \in A : \frac{x-۱}{۲} \geq ۱$

۳۱. گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

آ) مربع هر عدد حقیقی، مثبت است.

ب) مجذور هر عدد حقیقی منفی، منفی است.

پ) هر عدد صحیحی، گویا است.

ت) مجذور بعضی از اعداد صحیح با خود آن عدد صحیح مساوی است.

ث) وجود دارد عدد طبیعی مانند a به طوری‌که $-۲a + ۱ > ۰$

ج) بعضی از اعداد حقیقی، گویا نیستند.

۳۲. گزاره‌های زیر را به زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن‌ها را مشخص کنید.

آ) $\forall x \in \mathbb{N} : (x)(x+۱)(x+۳) = ۳k , (k \in \mathbb{N})$

ب) $\forall y \in P : ۲y + ۱ > ۵$

پ) $\exists x \in \mathbb{N} : n^۲ + n < ۳$

۳۳. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و نقیض هر یک را بنویسید.

آ) $\forall x \in \mathbb{N} : \frac{x+۱}{x} \geq ۲$

ب) $\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ - ۱ = (x-۱)(x+۱)$

پ) $\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{۴ - x^۲}{۲ + x} = ۲ - x$

ت) $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}$

ث) $\exists n \in \mathbb{N} : ۲^n > ۱۰۰۰$

پاسخ‌های تشریحی

۲۸ آ) درست است، زیرا تمام متغیرهای گسسته به‌صورت کمّی گسسته می‌باشند.

ب) نادرست است، زیرا متغیرهای کمّی به دو شاخهٔ پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند. پس متغیر می‌تواند کمّی پیوسته باشد، مانند زمان مطالعه.

پ) نادرست است، زیرا هیچ متغیر گسسته‌ای یک متغیر کیفی نیست، پس مجموعه جواب تهی است.

ت) درست است، زیرا حداقل یک متغیر کمّی گسسته مانند تعداد دانش‌آموزان یک کلاس داریم. پس حداقل یک متغیر کمّی گسسته وجود دارد و این گزاره درست می‌باشد.

---

۲۹ آ) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی متوالی زوج است، بنابراین برای هر عضو از دامنهٔ متغیر $(\mathbb{N})$، گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

ب) نادرست است، زیرا به عنوان مثال اگر $x=\frac{\pi}{۴}$ باشد، گزاره‌نما به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌شود.

$$\sin\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۴}\neq ۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\neq ۱\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}\neq ۱\Rightarrow\sqrt{۲}\neq ۱$$

پ) درست است، زیرا دو عدد صحیح $\{۰,-۳\}$ وجود دارند که در معادله صدق می‌کنند، پس مجموعه جواب گزاره‌نما ناتهی است.

$$x^۲+۳x=۰\Rightarrow x(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۳\end{cases}$$

ت) نادرست است، زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعهٔ تهی است.

$x^۲+۴=۰\Rightarrow x^۲=-۴$ معادله جواب حقیقی ندارد.

ث) نادرست است، زیرا $x=۲$ عددی اول است ولی $۲\neq ۲k+۱$

ج) درست است. $x^۵+۱=۰\Rightarrow x^۵=-۱\Rightarrow x=-۱$

زیرا یک عدد صحیح وجود دارد که در معادله صدق می‌کند.

---

۳۰ آ) ارزش این گزارهٔ سوری درست است، زیرا به ازای هر $x\in A$ گزاره‌نما درست می‌باشد.

$$A=\{-۲,-۱,۰,۱\}\Rightarrow\begin{cases}-۲+۳\leq ۴\Rightarrow ۱\leq ۴\\-۱+۳\leq ۴\Rightarrow ۲\leq ۴\\۰+۳\leq ۴\Rightarrow ۳\leq ۴\\۱+۳\leq ۴\Rightarrow ۴\leq ۴\end{cases}$$

ب) ارزش این گزارهٔ سوری نادرست است، زیرا $x=-۲$ از دامنهٔ متغیر وجود دارد که به ازای آن ارزش گزاره‌نما نادرست است.

$$x=-۲\Rightarrow ۲(-۲)+۱\not\leq -۳\Rightarrow -۳\not\leq -۳$$

پ) ارزش این گزارهٔ سوری درست است، زیرا عضوی از دامنهٔ متغیر وجود دارد که به ازای آن ارزش گزاره‌نما درست است. $x=۱\Rightarrow\sqrt{۱^۲+۳}=\sqrt{۴}=۲$

ت) ارزش این گزارهٔ سوری نادرست است، زیرا هیچ عضوی از دامنهٔ متغیر وجود ندارد که ارزش گزاره‌نما به ازای آن درست شود.

$$A=\{-۲,-۱,۰,۱\}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-۲-۱}{۲}=\frac{-۳}{۲}\not\geq ۱\\\frac{-۱-۱}{۲}=\frac{-۲}{۲}\not\geq ۱\\\frac{۰-۱}{۲}=\frac{-۱}{۲}\not\geq ۱\\\frac{۱-۱}{۲}=۰\not\geq ۱\end{cases}$$

---

۳۱ آ) ارزش این گزاره‌نما نادرست است. $\forall x\in\mathbb{R}:x^۲>۰$

زیرا عضوی از اعداد حقیقی وجود دارد که به ازای آن نامساوی برقرار نیست.

$$x=۰\Rightarrow ۰^۲\not>۰\Rightarrow ۰\not>۰$$

ب) ارزش این گزاره‌نما نادرست است. $\forall x\in(-\infty,۰):x^۲<۰$

زیرا هر عدد منفی را به توان ۲ برسانیم، یک عدد مثبت می‌شود.

پ) ارزش آن درست است. $\forall x\in\mathbb{Z}:x\in\mathbb{Q}$

زیرا هر عدد صحیح را می‌توانیم به‌صورت یک عدد گویا بنویسیم.

ت) ارزش این گزاره درست است. $\exists x\in\mathbb{Z}:x^۲=x$

زیرا به ازای $x=۱$ و $x=۰$ تساوی برقرار می‌شود.

ث) ارزش این گزاره نادرست است، $\exists a\in\mathbb{N}:-۲a+۱>۰$

زیرا هیچ عدد طبیعی وجود ندارد که این نامساوی به ازای آن درست باشد.

ج) ارزش این گزاره درست است. $\exists x\in\mathbb{R}:x\notin\mathbb{Q}$

زیرا عضوی از اعداد حقیقی وجود دارد که در اعداد گویا نیست، مانند $x=\sqrt{۲}$

---

۳۲ آ) حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی طبیعی مضرب ۳ است. ارزش این گزاره درست است، زیرا از هر سه عدد طبیعی متوالی، یکی مضرب ۳ است.

ب) به ازای هر عدد اول، دو برابر آن به اضافهٔ یک از ۵ بزرگ‌تر است.

$$y=۲\Rightarrow ۲(۲)+۱=۵\not>۵$$

ارزش این گزاره نادرست است، زیرا به ازای $y=۲$ نامساوی نادرست است.

پ) وجود دارد عددی طبیعی که مجموع آن عدد با مربعش کوچک‌تر از ۳ باشد.

ارزش این گزاره درست است، زیرا $n=۱$ وجود دارد که به ازای آن نامساوی برقرار است.

$$n=۱\Rightarrow ۱^۲+۱=۲<۳$$

---

۳۳ آ) نادرست است، زیرا $x=۲$ یک مثال نقض برای آن است. $(\frac{۳}{۲}\not\geq ۲)$

$$\sim(\forall x\in\mathbb{N}:\frac{x+۱}{x}\geq ۲)\equiv\exists x\in\mathbb{N}:\frac{x+۱}{x}\not\geq ۲\equiv\exists x\in\mathbb{N}:\frac{x+۱}{x}<۲$$

ب) درست است، زیرا اتحاد مزدوج می‌باشد و به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

$$\sim(\forall x\in\mathbb{R}:x^۲-۱=(x-۱)(x+۱))$$
$$\equiv\exists x\in\mathbb{R}:x^۲-۱\neq(x-۱)(x+۱)$$

پ) نادرست است، زیرا به ازای $x=-۲$ مخرج کسر صفر شده و عبارت تعریف نشده است.

$$\sim(\forall x\in\mathbb{Z}:\frac{۴-x^۲}{۲+x}=۲-x)\equiv\exists x\in\mathbb{Z}:\frac{۴-x^۲}{۲+x}\neq ۲-x$$

ت) درست است، زیرا به ازای $x=۰$ زیر رادیکال برابر صفر شده و متعلق به اعداد صحیح است، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\sim(\exists x\in\mathbb{R}:\sqrt{-x}\in\mathbb{Z})\equiv\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{-x}\notin\mathbb{Z}$$

ث) درست است، زیرا به ازای $n\geq ۱۰$ نامساوی برقرار می‌شود.

$$n=۱۰\Rightarrow(۲^{۱۰}=۱۰۲۴>۱۰۰۰)$$

$$\sim(\exists n\in\mathbb{N}:۲^n>۱۰۰۰)\equiv\forall n\in\mathbb{N}:۲^n\not>۱۰۰۰\equiv\forall n\in\mathbb{N}:۲^n\leq ۱۰۰۰$$