دیباچهٔ کتاب

سلام بچه‌ها!

به کتاب ما خوش اومدین ...

با خودمون گفتیم یه کتابی براتون چاپ کنیم که دیگه خیالتون راحت باشه. چرا که ویژگی‌های این کتاب به حدی جذاب و کامله که خیلی از نیازهای شما رو برطرف می‌کنه.

ویژگی ۱ جامع بودن کتاب

تمام کتاب‌های اصلی‌تون رو تو یه کتاب جمع کردیم. این کتاب شامل کتاب‌های ریاضی، شیمی، فیزیک، فارسی، انگلیسی، عربی، دین‌وزندگی، هندسه و زیست است.

ویژگی ۲ درسنامه‌های آموزشی

برای تمام کتاب‌ها و تک‌تک درس‌ها، درسنامه‌های آموزشی گذاشتیم. درسته که درسنامه‌هامون کامله و مو لای درزش نمیره، ولی حتماً قبلش کتاب درسی‌تون رو هم خوب بخونید. ضرر نداره، هیچی، منفعت هم داره. بعدش هم کلاً دوستی با کتاب خوبه، چه برسه که اون کتاب، خودِ کتاب درسی باشه.

ویژگی ۳ بانک سؤالات امتحانی

برای هر درس تعداد قابل توجهی سؤال امتحانی در تیپ‌های مختلف براتون آوردیم تا با انواع و اقسام سؤالات امتحانی آشنا بشین. با مطالعهٔ این سؤالات، دیگه دغدغه‌ای برای امتحان نخواهید داشت، چون بیست تو مشتتونه.

ویژگی ۴ پاسخ‌های کاملاً تشریحی

توصیه می‌کنیم که حتی اگه پاسخ یه سؤال رو می‌دونین، باز پاسخ‌ها رو یه نگاهی بندازین. مطالعهٔ پاسخ‌ها خودش مرور کتابه. تازه ممکنه بعضی از جواباتون غلط باشه و خودتون ندونین، آخه بعضی از سؤالای ما انحرافیه و ممکنه تو تلهٔ سؤال افتاده باشین.

با تشکر از مؤلفان این کتاب

علی‌اکبر طالبی (ریاضی) ـ افشین احمدی ـ امیرحسین کریمی (شیمی) ـ امیرحسن محمدپور (فیزیک)

نعمت‌اله بوالحسنی (فارسی) ـ یداله حیدری (انگلیسی) ـ اسرافیل قربان‌پور (عربی) ـ مرتضی محسنی کبیر (دین و زندگی)

محمدطاهر شعاعی (هندسه) ـ بیتا ساقی (زیست‌شناسی)

دانش‌آموزان عزیز! آزمون‌های این کتاب را می‌توانید با اسکنِ QR کد بر روی جلد، به‌صورت رایگان دریافت نمایید.

بخونین و لذت ببرین.

فهرست مطالب

ریاضی دهم

شیمی دهم

فیزیک دهم

فصل ۱: فیزیک و اندازه‌گیری

فصل ۲: ویژگی‌های فیزیکی مواد

فصل ۳: کار، انرژی و توان

فصل ۴: دما و گرما

فصل ۵: ترمودینامیک (ویژهٔ رشتهٔ ریاضی و فیزیک)

فارسی دهم

انگلیسی دهم

عربی دهم

دین و زندگی دهم

هندسه دهم
(ویژهٔ رشتهٔ ریاضی و فیزیک)

فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل ۲: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل ۳: چندضلعی‌ها

فصل ۴: تجسّم فضایی

زیست دهم
(ویژهٔ رشتهٔ علوم تجربی)

فصل ۱: دنیای زنده

فصل ۲: گوارش و جذب مواد

فصل ۳: تبادلات گازی

فصل ۴: گردش مواد در بدن

فصل ۵: تنظیم اسمزی و دفع مواد زائد

فصل ۶: از یاخته تا گیاه

فصل ۷: جذب و انتقال مواد در گیاهان

ریاضی

۱۰

دهم

www.gajmarket.com

ریاضی دهم

فصل ۱

پرسمان

مجموعه، الگو و دنباله

Mathematics 10

درسنامه ۱

مجموعهٔ اعداد ـ بازه‌ها

مجموعهٔ اعداد: برخی از مجموعه‌های خاص اعداد به‌صورت زیر است:

$\mathbb{W}=\{۰،۱،۲،۳،...\}$: مجموعهٔ اعداد حسابی ، $\mathbb{N}=\{۱،۲،۳،...\}$: مجموعهٔ اعداد طبیعی

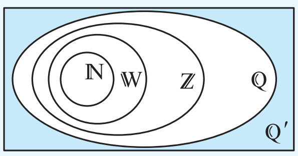
$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m،n\in\mathbb{Z}،n\neq ۰\}$: مجموعهٔ اعداد گویا ، $\mathbb{Z}=\{...،-۲،-۱،۰،۱،۲،...\}$: مجموعهٔ اعداد صحیح

$\mathbb{Q}'=$ مجموعهٔ اعدادی که نتوان عضوهای آن را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. $=\{x \mid x\notin\mathbb{Q}\}$: مجموعهٔ اعداد گنگ

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$: مجموعهٔ اعداد حقیقی

نکته

۱- رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به‌صورت $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ است.

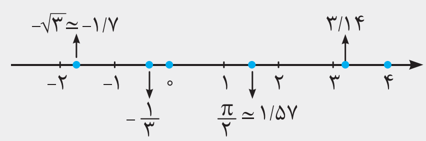


۲- هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و هم‌چنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

مثال کدام‌یک از اعداد زیر گویا و کدام‌یک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هر یک از آن‌ها را روی محور مشخص کنید.

$-\frac{۱}{۳}،۳/۱۴،\frac{\pi}{۲}،-\sqrt{۳}،۴،۰$

پاسخ:



$\frac{\pi}{۲}،-\sqrt{۳}$: اعداد گنگ ، $-\frac{۱}{۳}،۳/۱۴،۴،۰$: اعداد گویا

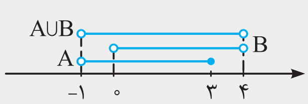
بازه (فاصله): زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ مانند A را که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد، بازه یا فاصله می‌نامیم.

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a<b$ ، آن‌گاه:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	$(a،b)$	باز
	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$	$[a،b]$	بسته
	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$	$[a،b)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$	$(a،b]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)

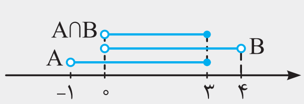
مثال اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -۱<x\leq ۳\}$ و $B=(۰،۴)$ باشند، $A\cup B$ و $A\cap B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. $A\cup B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن یا در A یا در B و یا در هر دو باشند:



$\Rightarrow A\cup B=(-۱،۴)$

اعضای مشترک دو مجموعهٔ A و B، مجموعهٔ $A\cap B$ است:



$\Rightarrow A\cap B=(۰،۳]$

درسنامه ۱

از دو نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌هایی که از یک طرف نامحدود هستند، استفاده می‌کنیم. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد، در این‌صورت داریم:

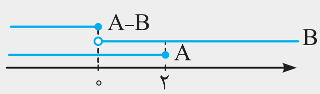
نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty,a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
باز	$(-\infty,a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	

توجه: $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند.

مثال

اگر $A=\{x \in \mathbb{R} \mid ۲x+۱ \leq ۵\}$ و $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x > ۰\}$ باشد، $A-B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $۲x+۱ \leq ۵$، داریم $۲x \leq ۴ \Rightarrow x \leq ۲$. اگر عضوهای مشترک B و A را از مجموعهٔ A حذف کنیم، مجموعهٔ $A-B$ به‌دست می‌آید:



$\Rightarrow A-B=(-\infty,۰]$

نکته

بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر: $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

۱. **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**

آ) $-۱ \in (-۱,۲]$ ب) $۴ \in (۳,۴]$ پ) $۰ \in \{-۱,۱\}$

ت) $\frac{۵}{۶} \in (۰,۱)$ ث) $\sqrt{۳} \in (۱,۲)$ ج) $[-۱,۱)=(-۱,۱]$

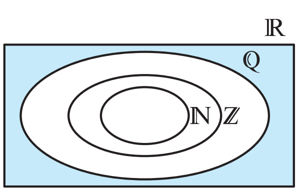
چ) $\varnothing \subseteq [-۱,+\infty)$ ح) $\{-۱,۰,۲\} \subseteq [-۱,۳)$ خ) $(-۱,۱) \subseteq [-۱,۱)$

د) $۰ \in (-۲,۰) \cup (۰,۱)$ ذ) $\{۰\}=\mathbb{W}-\mathbb{N}$ ر) $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

ز) $(۱,۲) \subseteq \mathbb{Q}$ ژ) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$ س) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -۱ \leq x < ۱\}=[-۱,۱)$

ش) $-۶ \times ۱۰^{۲۳} \in (-\infty,۱]$ ص) $۶ \times ۱۰^{-۴} \in [۲,+\infty)$

۲. **اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.**



$$۱۰^{۰} \ , \ -۲ \ , \ -\frac{\pi}{۲} \ , \ \sqrt{۵} \ , \ \frac{۱}{۴} \ , \ ۳/۱۲۱۲۰۰۰\ldots$$

۳. **هر یک از اعداد $-\frac{۲}{۳}$، $\frac{\pi}{۴}$، $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$، $۲/۴$ و $-۲^{۰}$ را روی محور مشخص کنید و بگویید کدام‌یک از آن‌ها گنگ هستند.**

۴. **هر یک از بازه‌های زیر را به‌صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را مشخص کنید.**

آ) $(-۲,۲)$ ب) $[۰,۲)$ پ) $[-۴,-۱]$ ت) $(۱,\sqrt{۵}]$

ث) $(۳,+\infty)$ ج) $(-\infty,-۲)$ چ) $[\sqrt{۲},+\infty)$ ح) $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$

۵. **نمایش هندسی دو بازهٔ $A=[-۱,۵)$ و $B=(-۳,۲)$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.**

آ) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $A-B$ ت) $B-A$

۶. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید.

آ) $(-۲،۵]\cap(-۱،۷)$ ب) $[-۴،۰]\cap[-۱،+\infty)$ پ) $[-۲،۴)\cup(۰،۵]$ ت) $(-\infty،-۱)\cup[-۱،+\infty)$

ث) $(-\infty،۲)-(۰،۳)$ ج) $(۰،۵]-[۲،+\infty)$ چ) $(-۱،۰]\cap[۰،۲)$ ح) $(-\infty،-۱)\cup(-\infty،۳)$

۷. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\le x+۱\le ۲\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۳<x\le ۰\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

آ) A ب) B پ) $A-B$ ت) $A\cup B$

۸. اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}،-۱<x<۳\}$ ، $B=\{x\mid x\in\mathbb{R}،x\le ۱\}$ و $C=\{x\mid x\in\mathbb{R}،x\ge ۰\}$ باشند، حاصل $(A\cap B)\cup C$ و $B-(A\cap C)$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

۹. مجموعه‌های $\mathbb{R}-\{۰\}$ ، $\mathbb{R}-\{-۳،۴\}$ ، $[۳،۷]-\{۴،۶\}$ و $[-۲،۴]-(۰،۱]$ را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به‌صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۱۰. اگر $\frac{m+۱}{۲}\in[-۱،۴)$ باشد، حدود m را مشخص کنید.

پاسخ‌های تشریحی

۱ آ) نادرست است، زیرا بازهٔ $(-۱،۲]$ شامل تمام x هایی است که $-۱<x\le ۲$ باشد، لذا $x=-۱\notin(-۱،۲]$

ب) درست است، زیرا انتهای بازه بسته است و در نتیجه عدد ۴ عضو این بازه است.

پ) نادرست است، زیرا مجموعهٔ $\{-۱،۱\}$ (نه بازهٔ $(-۱،۱)$)، شامل فقط دو عضو -۱ و ۱ می‌باشد، بنابراین $۰\notin\{-۱،۱\}$

ت) درست است، زیرا $۱>\frac{۵}{۶}>۰$ و در نتیجه $\frac{۵}{۶}\in(۰،۱)$

ث) درست است، زیرا مقدار تقریبی $\sqrt{۳}$ برابر ۱/۷ است و در نتیجه $۲>\sqrt{۳}>۱$، پس $\sqrt{۳}\in(۱،۲)$

ج) نادرست است، زیرا مثلاً $-۱\in[-۱،۱)$ ولی $-۱\notin(-۱،۱]$، بنابراین دو بازهٔ $[-۱،۱)$ و $(-۱،۱]$ با هم برابر نمی‌باشند.

چ) درست است، زیرا $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

ح) درست است، زیرا اعداد -۱، ۰ و ۲ عضو بازهٔ $[-۱،۳)$ می‌باشند و در نتیجه مجموعهٔ شامل این ۳ عدد، زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[-۱،۳)$ است.

خ) درست است، زیرا تمام اعضای بازهٔ $(-۱،۱)$ عضوی از بازهٔ $[-۱،۱]$ می‌باشند.

د) نادرست است، زیرا عدد صفر در هیچ یک از دو بازهٔ $(-۲،۰)$ و $(۰،۱)$ قرار ندارد.

ذ) درست است، زیرا: $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰،۱،۲،۳،\ldots\}-\{۱،۲،۳،\ldots\}=\{۰\}$

ر) درست است، زیرا تمام اعداد گنگ (اصم) در مجموعهٔ اعداد حقیقی قرار دارند.

ز) نادرست است، زیرا در بازهٔ $(۱،۲)$ بی‌شمار عدد گنگ مثل $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ وجود دارد که در مجموعهٔ اعداد گویا قرار ندارند.

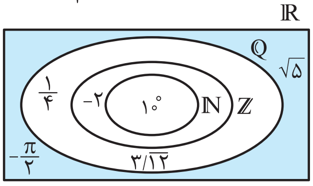
ژ) درست است، زیرا $\mathbb{R}$ از اجتماع $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ تشکیل شده است.

س) نادرست است، زیرا بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی (گویا و گنگ) هستند و فقط شامل اعداد گویای بین دو عدد نمی‌باشد.

ش) درست است، زیرا عدد -۶×۱۰^{۲۳} عددی منفی است و در نتیجه از یک کوچک‌تر است. بنابراین: $-۶\times ۱۰^{۲۳}\in(-\infty،۱]$

ص) نادرست است، زیرا نمایش اعشاری عدد ۶×۱۰^{-۴} به‌صورت ۰/۰۰۰۶ می‌باشد که عددی کوچک‌تر از ۲ می‌باشد، پس: $۶\times ۱۰^{-۴}\notin[۲،+\infty)$

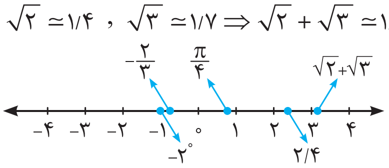
۲ عدد $۱=۱۰^{۰}$ یک عدد طبیعی، عدد -۲ یک عدد صحیح منفی، اعداد $\frac{۱}{۴}$ و $۳/۱۲۱۲۰۰\ldots=۳/\overline{۱۲}$ اعدادی گویا و اعداد $\sqrt{۵}$ و $-\frac{\pi}{۲}$ نیز اعدادی گنگ هستند، بنابراین:



۳ $\frac{\pi}{۴}$ و $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ اعداد گنگ هستند و با توجه به مقدار تقریبی آن‌ها داریم:

$$\pi\simeq ۳/۱۴\Rightarrow\frac{\pi}{۴}\simeq ۰/۷۸۵$$

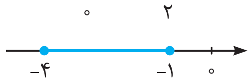
$$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴\ ,\ \sqrt{۳}\simeq ۱/۷\Rightarrow\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\simeq ۱/۴+۱/۷=۳/۱$$



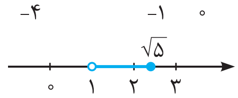
۴ آ) $(-۲،۲)=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲<x<۲\}$

ب) $[۰،۲)=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰\le x<۲\}$

پ) $[-۴،-۱]=\{x\in\mathbb{R}\mid -۴\le x\le -۱\}$



ت) $(۱،\sqrt{۵}]=\{x\in\mathbb{R}\mid ۱<x\le\sqrt{۵}\}$

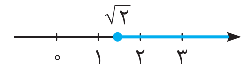


ث) 

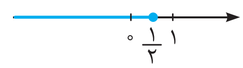
$(۳,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۳\}$

ج) 

$(-\infty,-۲)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-۲\}$

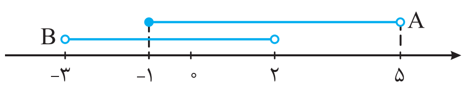
چ) 

$[\sqrt{۲},+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge\sqrt{۲}\}$

ح) 

$(-\infty,\frac{۱}{۲}]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le\frac{۱}{۲}\}$

۵ نمایش هندسی دو بازهٔ A و B به‌صورت زیر است:



آ) قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B، یعنی بازهٔ $[-۱,۲)$ جواب است: $A\cap B=[-۱,۲)$

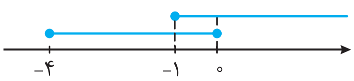
ب) تمام قسمت‌هایی که در A یا در B یا در هر دو وجود دارند، در مجموعهٔ $A\cup B$ قرار می‌گیرند، بنابراین: $A\cup B=(-۳,۵)$

پ) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B را از A حذف کنیم، مجموعهٔ $A-B$ به‌دست می‌آید: $A-B=[۲,۵)$

ت) اگر قسمت‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B را از B حذف کنیم، مجموعهٔ $B-A$ به‌دست می‌آید: $B-A=(-۳,-۱)$

۶ آ) 

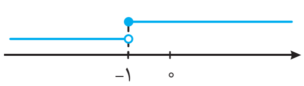
$(-۲,۵]\cap(-۱,۷)=(-۱,۵]$

ب) 

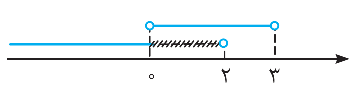
$[-۴,۰]\cap[-۱,+\infty)=[-۱,۰]$

پ) 

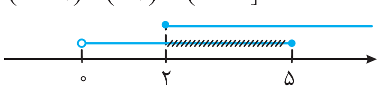
$[-۲,۴)\cup(۰,۵]=[-۲,۵]$

ت) 

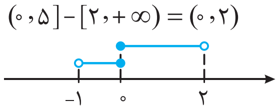
$(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

ث) 

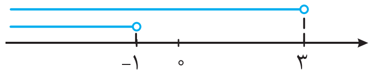
$(-\infty,۲)-(۰,۳)=(-\infty,۰]$

ج) 

$(۰,۵]-[۲,+\infty)=(۰,۲)$

چ) 

$(-۱,۰]\cap[۰,۲)=\{۰\}$

ح) 

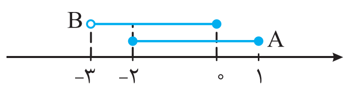
$(-\infty,-۱)\cup(-\infty,۳)=(-\infty,۳)$

۷ آ) با حل نامعادله‌های $-۱\le x+۱\le ۲$، مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$-۱\le x+۱\le ۲\xrightarrow{-۱}-۲\le x\le ۱\Rightarrow A=[-۲,۱]$

ب) $B=(-۳,۰]$

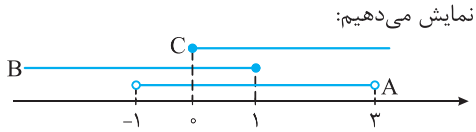
پ و ت) با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور، مجموعه‌های $A-B$ و $A\cup B$ را مشخص می‌کنیم:



$A-B=(۰,۱]$

$A\cup B=(-۳,۱]$

۸ برای مشخص‌کردن هریک از مجموعه‌ها، ابتدا مجموعه‌های A، B و C را روی محور نمایش می‌دهیم:



$A\cap B=(-۱,۳)\cap(-\infty,۱]=(-۱,۱]$

$\Rightarrow (A\cap B)\cup C=(-۱,۱]\cup[۰,+\infty)=(-۱,+\infty)$

$A\cap C=(-۱,۳)\cap[۰,+\infty)=[۰,۳)$

$\Rightarrow B-(A\cap C)=(-\infty,۱]-[۰,۳)=(-\infty,۰)$

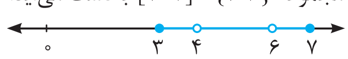
۹ در نمایش هندسی مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ باید عدد صفر را از روی محور حذف کنیم:

$\mathbb{R}-\{۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$

با حذف اعداد ۳- و ۴ از روی محور، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۳,۴\}$ به‌دست می‌آید:

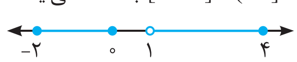
$\mathbb{R}-\{-۳,۴\}=(-\infty,-۳)\cup(-۳,۴)\cup(۴,+\infty)$

با حذف اعداد ۴ و ۶ از بازهٔ $[۳,۷]$، مجموعهٔ $[۳,۷]-\{۴,۶\}$ به‌دست می‌آید:



$[۳,۷]-\{۴,۶\}=[۳,۴)\cup(۴,۶)\cup(۶,۷]$

با حذف بازهٔ $(۰,۱]$ از بازهٔ $[-۲,۴]$، مجموعهٔ $[-۲,۴]-(۰,۱]$ به‌دست می‌آید:



$[-۲,۴]-(۰,۱]=[-۲,۰]\cup(۱,۴]$

۱۰ $\frac{m+۱}{۲}\in[-۱,۴)\Rightarrow -۱\le\frac{m+۱}{۲}<۴$

$\xrightarrow{\times ۲} -۲\le m+۱<۸\xrightarrow{-۱}-۳\le m<۷$

درسنامه ۲

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ـ متمم یک مجموعه

مجموعه‌های متناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.

مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم. در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه‌ی نامتناهی می‌نامیم.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی یک مجموعهٔ متناهی است، زیرا یک مجموعهٔ ۴ عضوی می‌باشد:

$A=\{۲،۳،۵،۷\}$: مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی

توجه: تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و گاهی با بعضی امکانات می‌توان تعداد آن‌ها را به‌دست آورد، مثل تعداد سواری‌های شهر تهران.

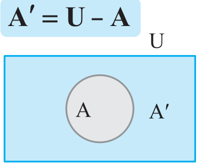
مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند. در واقع:

$$\mathbf{A'=U-A}$$

نمودار وِن مجموعهٔ A با مجموعهٔ مرجع U به‌صورت مقابل است:



مثال فرض کنید $U=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷\}$ مجموعهٔ مرجع، $A=\{۱،۲،۴\}$ و $B=\{۳،۴،۵،۷\}$ باشند. مجموعه‌های $A'-B$ و $A'\bigcup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا هر یک از مجموعه‌های A' و B' را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A'=U-A=\{\cancel{۱},\cancel{۲},۳,\cancel{۴},۵,۶,۷\}-\{۱,۲,۴\}=\{۳,۵,۶,۷\}\ ,\ B'=U-B=\{۱,۲,\cancel{۳},\cancel{۴},\cancel{۵},۶,\cancel{۷}\}-\{۳,۴,۵,۷\}=\{۱,۲,۶\}$$

$$\Rightarrow A'-B=\{\cancel{۳},\cancel{۵},۶,\cancel{۷}\}-\{۳,۴,۵,۷\}=\{۶\}\quad ,\quad A'\bigcup B'=\{۳,۵,۶,۷\}\bigcup\{۱,۲,۶\}=\{۱,۲,۳,۵,۶,۷\}$$

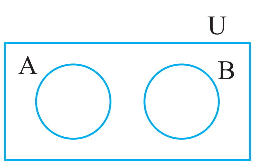
نکته

اگر A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، آن‌گاه:

۱) $(A')'=A$	۲) $A\bigcap A'=\varnothing$	۳) $A\bigcup A'=U$
۴) $\varnothing'=U$	۵) $U'=\varnothing$	۶) $A-B=A\bigcap B'$
۷) $A-B=A-(A\bigcap B)$	۸) $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$	۹) $(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$

تذکر: روابط (۸) و (۹)، **قوانین دمورگان** نام دارند.

دو مجموعهٔ جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم. نمودار وِن دو مجموعهٔ جدا از هم به‌صورت مقابل است:



$$\Rightarrow A\bigcap B=\varnothing$$

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، دو مجموعهٔ جدا از هم هستند:

$O=\{۱،۳،۵،...\}$: مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد

$E=\{۲،۴،۶،...\}$: مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج

$\Rightarrow O\bigcap E=\varnothing \Rightarrow$ O و E دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

قرارداد: تعداد عضوهای مجموعهٔ متناهی A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

نکته

۱- اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\bigcup B$ برابر است با: $\mathbf{n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)}$

۲- اگر U یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه: $\mathbf{n(A')=n(U)-n(A)}$

درسنامه ۲

مثال

در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۷ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۵ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند.

آ) چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟ ب) چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نمی‌باشند؟

پاسخ: مجموعهٔ شامل تمام دانش‌آموزان را با U، مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم فوتبال را با A و مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با B نشان می‌دهیم.

آ) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B$ را به‌دست آوریم:

$$n(A)=۱۷ \ ,\ n(B)=۱۵ \ ,\ n(A\cap B)=۷ \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۷+۱۵-۷=۲۵$$

ب) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $(A\cup B)'$ را به‌دست آوریم:

$$n(U)=۳۰ \ ,\ n(A\cup B)=۲۵ \Rightarrow n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۳۰-۲۵=۵$$

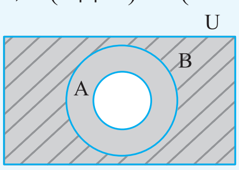
نکته

۱- اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی و U مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه:

۱) $n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ ۲) $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

در فرمول شمارهٔ (۲)، U باید مجموعه‌ای متناهی باشد.

۲- اگر $A\subseteq B\subseteq U$، آن‌گاه $B'\subseteq A'$



۱۱. در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

آ) مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از ۵- یک مجموعهٔ .... است. (متناهی ـ نامتناهی)

ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی چهاررقمی یک مجموعهٔ .... است. (متناهی ـ نامتناهی)

پ) $A\cap A' =$ .... ، $\varnothing' =$ .... ، $A'\cap B' =$ ....

ت) اگر A و B دو مجموعه و $A\cap B=\varnothing$ باشد، دو مجموعهٔ A و B را دو مجموعهٔ .... می‌نامیم.

ث) اگر A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه $A-B$ یک مجموعهٔ .... است.

۱۲. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۲ یک مجموعهٔ متناهی است.

ب) مجموعهٔ اعداد صحیح بین ۲- و ۱- یک مجموعهٔ متناهی است.

پ) اگر A یک مجموعهٔ متناهی و B یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $A\cap B$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

ت) اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعهٔ متناهی است.

ث) اگر همهٔ زیرمجموعه‌های A متناهی باشند، آن‌گاه A یک مجموعهٔ متناهی است.

ج) اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یک مجموعهٔ نامتناهی است.

چ) اگر A و B دو مجموعهٔ نامتناهی باشند، آن‌گاه $A-B$ مجموعه‌ای متناهی است.

ح) اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

خ) متمم مجموعهٔ اعداد طبیعی نسبت به مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ اعداد صحیح منفی است.

۱۳. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

آ) مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و دورقمی

ب) مجموعهٔ اعداد صحیح فرد

پ) مجموعهٔ تمام مربع‌ها

ت) مجموعهٔ خیابان‌های ایران

ث) مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱

ج) مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱

چ) $\{x\in \mathbb{N} \mid x\le ۰\}$

ح) مجموعهٔ مضرب‌های صحیح ۴

خ) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

د) مجموعهٔ کسرهایی با صورت و مخرج عدد طبیعی

ذ) مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۴

ر) $\mathbb{W}-\mathbb{N}$

ز) $\mathbb{N}\cap \mathbb{Q}$

ژ) $\mathbb{Q}\cup \mathbb{Q}'$

۱۴. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آ) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

ب) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

پ) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها نامتناهی باشد.

ت) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که تفاضل آن‌ها متناهی باشد.

۱۵. فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۶ باشد.

آ) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید که $C \subseteq D$

ث) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی و مجزا مانند A و B از U بنویسید که $A \cup B = U$

۱۶. مجموعهٔ اعداد صحیح را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید:

آ) مجموعهٔ نامتناهی A را طوری بنویسید که A' نامتناهی باشد.

ب) مجموعهٔ نامتناهی A را طوری بنویسید که A' متناهی باشد.

پ) مجموعهٔ متناهی A را درنظر بگیرید. A' متناهی است یا نامتناهی؟

ت) مجموعهٔ متناهی A و مجموعهٔ نامتناهی B را طوری بنویسید که A و B مجزا بوده و $\mathbb{Z} = A \cup B$

۱۷. $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید و متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید، سپس آن‌ها را به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

آ) $A = (-۱,۵]$ ب) $\mathbb{Z}$ پ) $B = (۲,+\infty)$

ت) $C = (-\infty,۱]$ ث) $(-\infty,۱) \cap (۰,+\infty)$ ج) $(-۴,۱) \cup (۲,۷)$

۱۸. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی مجموعهٔ مرجع، $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ ، $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۳,۴,۵,۶\}$ باشند، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

آ) A' ب) $(A \cap B)'$ پ) $B \cup C'$

ت) $(A \cup B)'$ ث) $(A \cup B') \cap C$ ج) $(A - B) \cup C'$

۱۹. اگر $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ \leq x \leq ۴\}$ ، $A = \{x \in U \mid x \leq ۰\}$ ، $B = \{x \in U \mid$ مضرب ۴ است. $x\}$ و $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۱ \leq x \leq ۲\}$ باشند، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا بنویسید.

آ) B' ب) $C' \cup B$ پ) $(A \cap C') - B$ ت) $(A' \cup B) \cap C'$

۲۰. اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۵ مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ را با A و مجموعهٔ مضرب‌های کوچک‌تر از ۱۴ عدد ۳ را با B نمایش دهیم، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را نشان دهید.

آ) $(A')' = A$ ب) $A - B = A - (A \cap B)$ پ) $B - A = B \cap A'$

ت) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ث) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ج) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

۲۱. آ) فرض کنیم $U = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}$ (مجموعهٔ مرجع)، $A = \{۲,۶,۱۰\}$ و $B = \{۲,۴,۶,۱۰\}$ باشند. آیا $A \subseteq B$ ؟ آیا $B' \subseteq A'$ ؟

ب) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که درآن U مجموعهٔ مرجع می‌باشد. با استفاده از نمودار وِن نشان دهید $B' \subseteq A'$

۲۲. فرض کنیم U مجموعهٔ مرجع و A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند. عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ) $(A \cap A') \cup B$ ب) $(((A \cup A') \cap A) \cup (A' \cap U)) \cap B$

۲۳. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U هستند، به‌طوری که $n(U) = ۵۰$ ، $n(A) = ۳۵$ ، $n(B) = ۲۰$ و $n(A \cap B) = ۱۲$ مطلوب است:

آ) $n(A')$ ب) $n(A \cup B)$ پ) $n(A \cap B')$

ت) $n(A' \cap B')$ ث) $n(A' \cup B')$ ج) $n(A \cup B')$

۲۴. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ) چند نفر در هر دو رشتهٔ فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند؟

ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند؟

پ) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

۲۵. از ۳۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۱۷ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس در هیچ یک از این دو المپیاد شرکت نکرده باشند:

آ) چند نفر در هر دو المپیاد ریاضی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟

ب) چند نفر در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند ولی در المپیاد فیزیک شرکت نکرده‌اند؟

۲۶. در یک نظرسنجی از ۲۰۰ نفر که از اصفهان دیدن کرده‌اند، معلوم شد ۱۲۰ نفر از عالی‌قاپو و ۱۵۰ نفر از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند. اگر ۴۰ نفر از عالی‌قاپو بازدید کرده باشند ولی از بازار اصفهان بازدید نکرده باشند:

آ) چند نفر از هر دو مکان بازدید کرده‌اند؟

ب) چند نفر دست‌کم از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟

پ) چند نفر از بازار اصفهان و از عالی‌قاپو بازدید نکرده‌اند؟

ت) چند نفر دقیقاً از یکی از این دو مکان بازدید کرده‌اند؟

۲۷. اگر $n(A)+n(B)=5n(A\cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ را به‌دست آورید.

پاسخ‌های تشریحی

۱۱ آ) نامتناهی ـ چون مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از ۵- به‌صورت $\{-6,-7,-8,\dots\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

ب) متناهی ـ چون مجموعهٔ اعداد طبیعی چهاررقمی به‌صورت $\{1000,1001,\dots,9999\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی ۹۰۰۰ عضوی می‌باشد.

پ) $A\cap A'=\varnothing \quad , \quad \varnothing'=U \quad , \quad A'\cap B'=(A\cup B)'$

ت) جدا از هم

ث) نامتناهی ـ چون اگر از یک مجموعه با بی‌شمار عضو، تعداد محدودی عضو حذف کنیم، آن‌گاه بی‌شمار عضو برای آن باقی می‌ماند.

---

۱۲ آ) نادرست است، زیرا بی‌شمار عدد گویا مانند $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{4}$ و ... در بازهٔ $(0,2)$ وجود دارد.

ب) درست است، زیرا مجموعهٔ اعداد صحیح بین ۲- و ۱- ، مجموعهٔ تهی است که یک مجموعهٔ متناهی با صفر عضو می‌باشد.

پ) نادرست است، زیرا $A\cap B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است و چون A یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد، پس هر زیرمجموعهٔ آن نیز یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد، بنابراین $A\cap B$ یک مجموعهٔ متناهی است.

ت) نادرست است، به عنوان مثال، مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{N}$ دارای زیرمجموعهٔ متناهی $\{1,2\}$ است.

ث) درست است، زیرا اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد، چون $A\subseteq A$ و هر زیرمجموعهٔ A متناهی است، بنابراین A متناهی می‌باشد.

ج) درست است، زیرا اگر $B\subseteq A$ و B نامتناهی باشد، آن‌گاه تمام عضوهای مجموعهٔ B در مجموعهٔ A قرار دارند و در نتیجه A نامتناهی است.

چ) نادرست است، $\mathbb{N}$ (مجموعهٔ اعداد طبیعی) و O (مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی) مجموعه‌هایی نامتناهی‌اند و $\mathbb{N}-O=\{2,4,6,\dots\}=E$ نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

ح) درست است، زیرا:

A و B دو مجموعهٔ جدا از هم‌اند. $\Rightarrow A\cap B=\varnothing \Rightarrow n(A\cap B)=0$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\cancel{n(A\cap B)}^{0}=n(A)+n(B)$$

خ) نادرست است، متمم مجموعهٔ $\mathbb{N}$ نسبت به اعداد صحیح شامل تمام اعداد صحیح منفی و عدد صفر می‌باشد.

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} \quad , \quad \mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{N}'=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{\dots,-2,-1,0\}$$

---

۱۳ آ) متناهی، این مجموعه به‌صورت $\{11,13,\dots,97\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد.

ب) نامتناهی، این مجموعه به‌صورت $\{\dots,-3,-1,1,3,\dots\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

پ) نامتناهی، می‌توان هر تعداد دلخواه مربع با طول ضلع‌های مختلف رسم کرد. پس این مجموعه، نامتناهی است.

ت) متناهی، تعداد خیابان‌های ایران ممکن است زیاد باشد، ولی بالاخره می‌توان تعداد آن‌ها را مشخص کرد. بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است.

ث) نامتناهی، بین هر دو عدد می‌توان به هر تعداد دلخواه عدد گویا مشخص کرد: اعداد گویای بین ۰ و ۱ : $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots$

ج) نامتناهی، بین هر دو عدد می‌توان به هر تعداد دلخواه عدد گنگ مشخص کرد: اعداد گنگ بین ۰ و ۱ : $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{4},\dots$

چ) متناهی، هیچ عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی صفر وجود ندارد، لذا مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{N} \mid x \le ۰\} = \varnothing$ یک مجموعهٔ متناهی است.

ح) نامتناهی، مجموعهٔ مضرب‌های صحیح عدد ۴ به‌صورت $\{\dots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\dots\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

خ) نامتناهی، بی‌شمار عدد (گویا و گنگ) بین دو عدد ۱- و $\frac{۱}{۲}$ وجود دارد. بنابراین مجموعهٔ $(-۱,\frac{۱}{۲})$ نامتناهی است.

د) نامتناهی، بی‌شمار عدد کسری با صورت و مخرج عدد طبیعی وجود دارد، بنابراین مجموعهٔ $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۴},\dots$ نامتناهی است.

ذ) متناهی، مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۴ به‌صورت $\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی ۸ عضوی می‌باشد.

ر) متناهی، زیرا: $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰,۱,۲,\cdots\} - \{۱,۲,\cdots\} = \{۰\}$

ز) نامتناهی، زیرا $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

ژ) نامتناهی، زیرا $Q \cup Q' = \mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

---

۱۴ آ) $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$

ب) $A = \{\dots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ ، $B = \{-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{-۱,۰,۱,۲\}$

پ) $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ نیز مجموعه‌ای نامتناهی است.

ت) $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ دو مجموعهٔ نامتناهی‌اند و $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰\}$ یک مجموعهٔ متناهی است.

---

۱۵ آ) $U = \{۶,۱۲,۱۸,۲۴,\dots\}$

ب) U مجموعه‌ای نامتناهی است.

پ) $A = \{۱۲,۱۸,۲۴\} \subseteq U$ مجموعه‌ای متناهی است.

ت) اگر C مجموعهٔ مضرب‌های ۲۴ و D مجموعهٔ مضرب‌های ۱۲ باشد، آن‌گاه $C \subseteq D$

$D = \{۱۲,۲۴,۳۶,۴۸,\dots\}$ ، $C = \{۲۴,۴۸,\dots\}$

ث) A را مضرب‌های فرد ۶ و B را مضرب‌های زوج عدد ۶ در نظر می‌گیریم:

$A = \{۶,۱۸,۳۰,۴۲,\dots\}$ ، $B = \{۱۲,۲۴,۳۶,\dots\} \Rightarrow A \cup B = U$

---

۱۶ آ) $A = \mathbb{N} \Rightarrow A' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots,-۲,-۱,۰\}$ (نامتناهی)

ب) $A = \mathbb{Z} - \{۰\} \Rightarrow A' = \{۰\}$

پ) A' نامتناهی است. اگر تعداد محدودی از عضوهای مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{Z}$ را از مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ حذف کنیم، آن‌گاه مجموعهٔ باقی‌ماندهٔ نیز دارای بی‌شمار عضو است.

ت) $A = \{۰,۱,۲\}$ ، $B = \{\cdots,-۲,-۱,۳,۴,\cdots\}$

$\Rightarrow A \cap B = \varnothing$ ، $A \cup B = \mathbb{Z}$

---

۱۷ آ) $A' = \mathbb{R} - (-۱,۵] = (-\infty,-۱] \cup (۵,+\infty)$

ب) $\mathbb{Z}' = \mathbb{R} - \mathbb{Z} = \dots \cup (-۲,-۱) \cup (-۱,۰) \cup (۰,۱) \cup (۱,۲) \cup \dots$

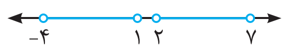
پ) $B' = \mathbb{R} - (۲,+\infty) = (-\infty,۲]$

ت) $C' = \mathbb{R} - (-\infty,۱] = (۱,+\infty)$

ث) $(-\infty,۱) \cap (۰,+\infty) = (۰,۱)$

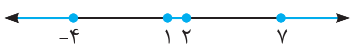
$\Rightarrow (۰,۱)' = \mathbb{R} - (۰,۱) = (-\infty,۰] \cup [۱,+\infty)$

ج) مجموعهٔ $(-۴,۱) \cup (۲,۷)$ روی محور به‌صورت



می‌باشد، بنابراین:

$((-۴,۱) \cup (۲,۷))' = (-\infty,-۴] \cup [۱,۲] \cup [۷,+\infty)$



---

۱۸ مجموعهٔ مرجع $U = \{۱,۲,\dots,۹\}$ می‌باشد.

آ) $A' = U - A = \{\cancel{۱},\cancel{۲},\cancel{۳},\cancel{۴},۵,\dots,۹\} - \{۱,۲,۳,۴\}$

$= \{۵,۶,۷,۸,۹\}$

ب) $A \cap B = \{۱,۲,۳,۴\} \cap \{۲,۴,۶,۸\} = \{۲,۴\}$

$\Rightarrow (A \cap B)' = \{۱,\cancel{۲},۳,\cancel{۴},۵,\dots,۹\} - \{۲,۴\} = \{۱,۳,۵,۶,۷,۸,۹\}$

پ) $C' = U - C = \{۱,۲,۷,۸,۹\}$

$\Rightarrow B \cup C' = \{۲,۴,۶,۸\} \cup \{۱,۲,۷,۸,۹\} = \{۱,۲,۴,۶,۷,۸,۹\}$

ت) $A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۶,۸\}$

$\Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{۵,۷,۹\}$

ث) $B' = U - B = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$

$\Rightarrow A \cup B' = \{۱,۲,۳,۴\} \cup \{۱,۳,۵,۷,۹\} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۹\}$

$\Rightarrow (A \cup B') \cap C = \{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۹\} \cap \{۳,۴,۵,۶\} = \{۳,۴,۵\}$

ج) $A - B = \{۱,۳\} \Rightarrow (A - B) \cup C'$

$= \{۱,۳\} \cup \{۱,۲,۷,۸,۹\} = \{۱,۲,۳,۷,۸,۹\}$

---

۱۹ مجموعه‌های U، A، B و C با اعضا به‌صورت زیر می‌باشند:

$U = \{-۵,-۴,\dots,۳,۴\}$ ، $A = \{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰\}$

$B = \{-۴,۰,۴\}$ ، $C = \{-۱,۰,۱,۲\}$

آ) $B' = U - B = \{-۵,-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳\}$

ب) $C' = \{-۵,-۴,-۳,-۲,۳,۴\}$

$\Rightarrow C' \cup B = \{-۵,-۴,-۳,-۲,۰,۳,۴\}$

پ) $A \cap C' = \{-۵,-۴,-۳,-۲\}$

$\Rightarrow (A \cap C') - B = \{-۵,-۳,-۲\}$

ت) $A' = \{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow A' \cup B = \{-۴,۰,۱,۲,۳,۴\}$

$\Rightarrow (A' \cup B) \cap C' = \{-۴,۳,۴\}$

۲۰ مجموعه‌های U، A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$U=\{۱,۲,۳,...,۱۵\}$, $A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$, $B=\{۳,۶,۹,۱۲\}$

آ) $A'=U-A=\{۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$\Rightarrow (A')'=U-A'=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}=A$

ب) $A-B=\{۱,۲,۴\}$ (۱)

$A\cap B=\{۳,۶,۱۲\}\Rightarrow A-(A\cap B)=\{۱,۲,۴\}$ (۲)

$(۱),(۲)\Rightarrow A-B=A-(A\cap B)$

پ) $B-A=\{۹\}$ (۱)

$B\cap A'=\{۳,۶,۹,۱۲\}\cap\{۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}=\{۹\}$ (۲)

$(۱),(۲)\Rightarrow B-A=B\cap A'$

ت) $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲\}\Rightarrow (A\cup B)'=U-(A\cup B)$

$=\{۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$ (۱)

$A'\cap B'=\{۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$\cap\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$=\{۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$ (۲)

$(۱),(۲)\Rightarrow (A\cup B)'=A'\cap B'$

ث) $A\cap B=\{۳,۶,۱۲\}\Rightarrow (A\cap B)'=U-(A\cap B)$

$=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$ (۱)

$A'\cup B'=\{۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$\cup\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$

$=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵\}$ (۲)

$(۱),(۲)\Rightarrow (A\cap B)'=A'\cup B'$

ج) طبق قسمت (پ)، داریم: $A'\cap B=B\cap A'=\{۹\}$

$\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲\}$ (۱)

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲\}$ (۲)

$(۱),(۲)\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=A\cup B$

---

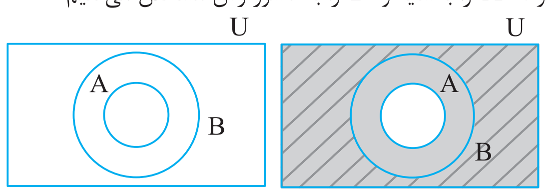
۲۱ آ) تمام اعضای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B قرار دارند، بنابراین:

$A\subseteq B$

$A'=\{۴,۸,۱۲\}$, $B'=\{۸,۱۲\}\Rightarrow B'\subseteq A'$

ب) نمودار وِن $A\subseteq B$ به‌صورت زیر است.

مجموعهٔ A' را با سایه و B' را با هاشور زدن مشخص می‌کنیم:



تمام قسمت‌های B' که به‌صورت هاشورخورده است، در مجموعهٔ A' (سایه‌زده شده) نیز هست، لذا: $B'\subseteq A'$

---

۲۲ آ) $A\cap A'=\varnothing\Rightarrow (A\cap A')\cup B=\varnothing\cup B=B$

ب) $(A\cup A')\cap A=U\cap A=A$, $A'\cap U=A'$

$\Rightarrow (((A\cup A')\cap A)\cup(A'\cap U))\cap B$

$=(A\cup A')\cap B=U\cap B=B$

---

۲۳ آ) $n(A')=n(U)-n(A)=۵۰-۳۵=۱۵$

ب) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۵+۲۰-۱۲=۴۳$

پ) $n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۳۵-۱۲=۲۳$

ت) $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$\overset{(ب)}{=}۵۰-۴۳=۷$

ث) $n(A'\cup B')=n((A\cap B)')=n(U)-n(A\cap B)$

$=۵۰-۱۲=۳۸$

ج) $n(A\cup B')=n(A)+n(B')-n(A\cap B')$

طبق قسمت (پ)، $n(A\cap B')=۲۳$ می‌باشد، بنابراین:

$n(A\cup B')=۳۵+۳۰-۲۳=۴۲$

---

۲۴ طبق فرض داریم:

مجموعهٔ مرجع : $U\Rightarrow n(U)=۷۰$

مجموعهٔ اعضای تیم فوتبال : $A\Rightarrow n(A)=۴۰$

مجموعهٔ اعضای تیم والیبال : $B\Rightarrow n(B)=۲۵$

طبق فرض ۵۵ نفر در حداقل یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند، پس:

$n(A\cup B)=۵۵$

آ) باید $n(A\cap B)$ را به‌دست آوریم:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow ۵۵=۴۰+۲۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$

ب) باید تعداد اعضای مجموعهٔ $(A\cup B)'$ را به‌دست آوریم:

$n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۷۰-۵۵=۱۵$

پ) باید تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ را به‌دست آوریم:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۴۰-۱۰=۳۰$

---

۲۵ مجموعهٔ شامل تمام دانش‌آموزان را U، دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد ریاضی را A و دانش‌آموزان شرکت کننده در المپیاد فیزیک را با B نشان می‌دهیم.

روش اول: $(A\cup B)'$ مجموعهٔ دانش‌آموزانی است که در هیچ‌یک از این دو رشتهٔ المپیاد شرکت نکرده‌اند. داریم:

$n(U)=۳۰$, $n(A)=۱۷$, $n(B)=۱۵$, $n((A\cup B)')=۵$

$\Rightarrow n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۵$

$\Rightarrow n(A\cup B)=۳۰-۵=۲۵$

آ) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B$ را به‌دست آوریم:

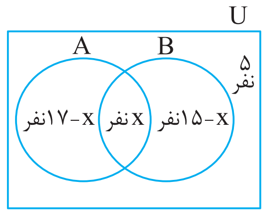
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۲۵=۱۷+۱۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۳۲-۲۵=۷$$

ب) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B'$ را به‌دست آوریم:

$$n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۱۷-۷=۱۰$$

روش دوم: فرض کنیم x نفر در هر دو رشتهٔ المپیاد شرکت کرده باشند. با استفاده از نمودار وِن دو مجموعهٔ A و B، تعداد عضوهای هر چهار ناحیهٔ مجزا را مشخص می‌کنیم:



$$n(U)=۳۰\Rightarrow(۱۷-x)+x+(۱۵-x)+۵=۳۰\Rightarrow x=۷$$

آ) $x=۷$

ب) $۱۷-x=۱۷-۷=۱۰$

---

۲۶ $U\Rightarrow n(U)=۲۰۰$: مجموعهٔ افرادی که در این نظرسنجی شرکت کرده‌اند.

$A\Rightarrow n(A)=۱۲۰$: مجموعهٔ افرادی که از عالی‌قاپو بازدید کرده‌اند.

$B\Rightarrow n(B)=۱۵۰$: مجموعهٔ افرادی که از بازار اصفهان بازدید کرده‌اند.

آ) طبق فرض مجموعهٔ $A-B$، ۴۰ عضو دارد:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۴۰=۱۲۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۸۰$$

ب)

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=۱۲۰+۱۵۰-۸۰=۱۹۰$$

پ) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $(A'\cap B')$ را به‌دست آوریم:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$

$$=۲۰۰-۱۹۰=۱۰$$

ت) باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$n((A\cup B)-(A\cap B))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$$

$$\overset{\text{(آ) و (ب)}}{=\!=\!=}۱۹۰-۸۰=۱۱۰$$

۲۷

$$n(A\cup B)=\underbrace{n(A)+n(B)}_{۵n(A\cap B)}-n(A\cap B)=۴n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{۴n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=۴$$

درسنامه ۳

الگو و دنباله

الگو: الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده، رشدکننده یا ترکیبی از این دو باشند. در این‌جا ما با الگوهای عددی و شکلی سروکار داریم.

الگوی عددی مقابل را در نظر بگیرید: ...,۸,۶,۴,۲

جملهٔ اول این الگو را با $a_۱$ (a اندیس ۱) نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم $a_۱=۲$. همچنین جملهٔ دوم این الگو برابر ۴ است و می‌نویسیم $a_۲=۴$ و به همین ترتیب جملهٔ nاُم این الگو را با a_n نمایش می‌دهیم و داریم $a_n=۲n$

a_n را **جملهٔ عمومی** الگو می‌نامیم. با داشتن جملهٔ عمومی الگو، می‌توان مقدار هر جمله از یک الگو را به‌دست آورد. در واقع جملهٔ عمومی یک الگو، ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند.

مثال

جملهٔ عمومی یک الگو به‌صورت $a_n=\frac{۲n+۱}{n+۴}$ است.

آ) مقدار جملهٔ دهم الگو را مشخص کنید. **ب) جملهٔ چندم الگو برابر $\frac{۷}{۴}$ است؟**

پاسخ: آ) با قرار دادن عدد ۱۰ به جای n در جملهٔ عمومی الگو، جملهٔ دهم الگو به‌دست می‌آید:

$$n=۱۰\,,\,a_n=\frac{۲n+۱}{n+۴}\Rightarrow a_{۱۰}=\frac{۲\times۱۰+۱}{۱۰+۴}=\frac{۲۱}{۱۴}=\frac{۳}{۲}$$

ب) باید n را طوری به‌دست آوریم که $a_n=\frac{۷}{۴}$ شود:

$$a_n=\frac{۷}{۴}\Rightarrow\frac{۲n+۱}{n+۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow۴(۲n+۱)=۷(n+۴)\Rightarrow۸n+۴=۷n+۲۸\Rightarrow۸n-۷n=۲۸-۴\Rightarrow n=۲۴$$

بنابراین جملهٔ بیست و چهارم الگو برابر $\frac{۷}{۴}$ است.

الگوی خطی: الگوهایی که جملهٔ عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n=an+b$ باشد را الگوهای خطی می‌گوییم (زیرا شبیه معادلهٔ خط هستند.) که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. t_n یک عبارت دوجمله‌ای از درجهٔ یک برحسب n می‌باشد.

به عنوان مثال، الگوهای $a_n=-\frac{۱}{۳}n+۲$ و $b_n=۴n+۱۷$، الگوهای خطی هستند.

درسنامه ۳

مثال

در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به‌ترتیب ۹ و ۲۳ می‌باشند. جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

پاسخ: فرض کنیم جملهٔ عمومی الگو $t_n = an + b$ باشد. پس داریم:

$$\begin{matrix} t_5 = a(5) + b = 9 \\ t_{12} = a(12) + b = 23 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 9 \\ 12a + b = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a - b = -9 \\ 12a + b = 23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = \frac{14}{7} = 2 \xrightarrow{5a+b=9} 5(2) + b = 9 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow t_n = an + b = 2n - 1$$

نکته

اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در الگوهای خطی، برابر ضریب n می‌باشد (که همان شیب، در معادلهٔ خط است).

الگوی غیرخطی: هر الگویی که جملهٔ عمومی آن به‌صورت $t_n = an + b$ نباشد را الگوی غیرخطی می‌گوییم. به عنوان مثال، الگوهای $a_n = n^2 - 4n$ و $b_n = \frac{1}{n}$ الگوهای غیرخطی‌اند.

دنباله: هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. به عنوان مثال اعداد ۱،۳،۵،۷،... که از الگوی $a_n = 2n - 1$ به‌دست می‌آیند را یک دنباله می‌گوییم.

هم‌چنین اعداد ۴،۱۰،۱۸،... که از الگوی درجهٔ دوم $a_n = n^2 + 3n$ به‌دست می‌آیند، یک دنباله می‌باشد.

توجه: جملات یک دنباله ممکن است فاقد الگو باشند، مانند دنبالهٔ اعداد اول ۲،۳،۵،۷،...

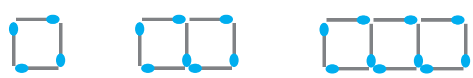
مثال

جملهٔ عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = n^2 - 4n$ است. پنج جملهٔ اول این دنباله را بنویسید.

پاسخ: $a_1 = (1)^2 - 4(1) = -3$ ، $a_2 = 2^2 - 4(2) = -4$ ، $a_3 = 3^2 - 4(3) = -3$ ، $a_4 = 4^2 - 4(4) = 0$ ، $a_5 = 5^2 - 4(5) = 5$

$\Rightarrow$ جملات دنباله : ...،۵،۰،۳-،۴-،۳-

۲۸. **با استفاده از چوب کبریت‌ها، سه شکل زیر ساخته شده است.**



شکل (۱)　　شکل (۲)　　شکل (۳)

آ) شکل بعدی را در الگو رسم کنید و جدول را کامل کنید.

n : شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴
a_n : تعداد چوب کبریت‌ها				

ب) جملهٔ عمومی الگو را مشخص کنید.

پ) در چه مرحله‌ای از الگو، تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۷۰ می‌باشد؟

۲۹. **در یک الگوی خطی، جملات چهارم و یازدهم به ترتیب ۹ و ۳۰ می‌باشند. جملهٔ عمومی الگو را بیابید.**

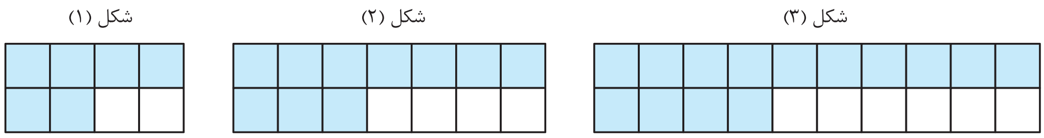
۳۰. **در یک الگوی خطی، جملات پنجم و هفدهم به ترتیب ۳ و ۲۷ می‌باشند.**

آ) جملهٔ عمومی الگو را بنویسید.

ب) جملهٔ پنجاهم الگو را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم الگو ۱۶۵ می‌باشد؟

۳۱. به الگوی زیر توجه کنید:



آ) تعداد مربع‌های رنگی در هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

ب) اگر n شمارهٔ شکل و a_n تعداد مربع‌های سفید باشد، مقدار a_n را برحسب n بنویسید.

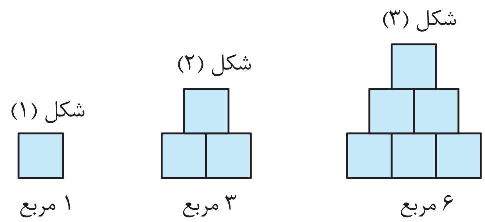
پ) اگر n تعداد مربع‌های سفید و b_n تعداد مربع‌های رنگی باشد، مقدار b_n را برحسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۲ مربع رنگی، چند مربع سفید لازم است؟

ث) در چندمین شکل، نسبت تعداد مربع‌های سفید به تعداد مربع‌های رنگی $\frac{۳۱}{۶۳}$ می‌باشد؟

ج) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۴۶ مربع سفید باشد؟ اگر هست، تعداد مربع‌های رنگی آن چندتا است؟

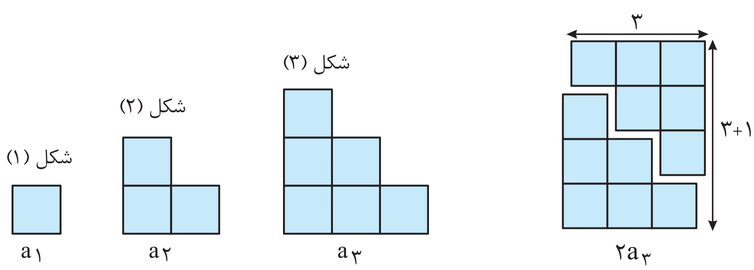
۳۲. الگوی زیر را درنظر بگیرید:



آ) شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد مربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

ب) آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ چرا؟

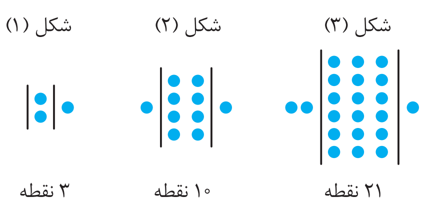
پ) شکل‌های الگوی بالا را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با توجه به تصویر حاصل a_n را برحسب n به‌دست آورید.



$$۲a_۳ = ۳(۳+۱) \Rightarrow a_۳ = \frac{۳(۳+۱)}{۲}$$

ت) به کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت $۱+۲+۳+...+n$ را به‌دست آورید.

۳۳. الگوی مقابل را درنظر بگیرید:



آ) شکل بعدی را رسم کنید و سپس تعداد نقاط هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ پنجم آن بنویسید.

ب) جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل بیستم در این الگو چند نقطه دارد؟

ت) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۱۲۰ نقطه باشد؟

۳۴. چهار جملهٔ اول دنباله‌های زیر داده شده است. در هر مورد، سه جملهٔ بعدی را بنویسید و در صورت امکان جملهٔ عمومی دنباله را حدس بزنید.

آ) $۱, ۳, ۵, ۷, ...$

ب) $\sqrt{۲}, ۲, \sqrt{۶}, ۲\sqrt{۲}, ...$

پ) $۱, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۱۶}, ...$

ت) $۰/۳, ۰/۰۳, ۰/۰۰۳, ۰/۰۰۰۳, ...$

ث) $-۱, ۴, -۹, ۱۶, ...$

ج) $۳, \frac{۵}{۲}, ۲, \frac{۳}{۲}, ...$

چ) $۱, ۲, ۳, ۵, ...$

ح) $۲, ۵, ۱۴, ۴۱, ...$

۳۵. جملهٔ عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = \frac{۵n - ۱}{۳n + ۷}$ است.

آ) چهار جملهٔ اول این دنباله را بنویسید.

ب) جملهٔ هفدهم این دنباله را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم دنباله برابر $\frac{۲۷}{۲۰}$ می‌باشد؟

۳۶. دو جملهٔ اول دنبالهٔ درجه دوم $t_n = an^۲ + bn$ به‌ترتیب ۱- و ۲ می‌باشند.

آ) a و b را به‌دست آورید.　　　ب) جملهٔ هفتم دنباله را مشخص کنید.

۳۷. جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

آ) $a_n = ۳n$　　　ب) $b_n = ۵n - ۲$

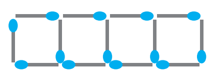
پ) $c_n = n^۲ + ۱$　　　ت) $d_n = n^۲ + ۲n$

۳۸. برای دنباله‌های درجهٔ دوم زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جملهٔ عمومی هر دنباله را بیابید.

آ) ...,۱,۴,۹　　　ب) ...,۲,۶,۱۲

پاسخ‌های تشریحی

۲۸ آ)



n	۱	۲	۳	۴
a_n	۴	۷	۱۰	۱۳

ب) **روش اول:** در هر مرحله، ۳ چوب کبریت اضافه می‌شود، بنابراین:

$a_۱ = ۴ \,،\, a_۲ = ۴ + ۳ \,،\, a_۳ = ۴ + ۲(۳)$

$a_۴ = ۴ + ۳(۳) \,،\, ...، a_n = ۴ + (n - ۱) \times ۳$

بنابراین جملهٔ عمومی الگو به‌صورت $a_n = ۳n + ۱$ است.

روش دوم: در هر مرحله، شمارهٔ شکل (n) در ۳ ضرب شده و حاصل آن به اضافهٔ ۱، a_n را تولید می‌کند، یعنی $a_n = ۳n + ۱$

روش سوم: در هر مرحله، شمارهٔ شکل (n) در ۴ ضرب شده و حاصل آن منهای $(n - ۱)$ برابر a_n شده است، یعنی:

$a_n = ۴n - (n - ۱) = ۴n - n + ۱ = ۳n + ۱$

همان‌طور که می‌بینید از روش‌های مختلفی، توانستیم a_n را پیدا کنیم ولی در نهایت، جواب به‌دست آمده یکی است.

پ) $a_n = ۷۰ \Rightarrow ۷۰ = ۳n + ۱ \Rightarrow ۳n = ۶۹ \Rightarrow n = ۲۳$

---

۲۹ جملهٔ عمومی الگوی خطی $t_n = an + b$ است. طبق فرض $t_۴ = ۹$ و $t_{۱۱} = ۳۰$ می‌باشد:

$$\begin{cases} t_۴ = a(۴) + b = ۹ \\ t_{۱۱} = a(۱۱) + b = ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴a - b = -۹ \\ ۱۱a + b = ۳۰ \end{cases} \Rightarrow ۷a = ۲۱$$

$$\Rightarrow a = \frac{۲۱}{۷} = ۳ \xrightarrow{۴a+b=۹} ۴(۳) + b = ۹ \Rightarrow b = -۳ \Rightarrow t_n = ۳n - ۳$$

۳۰ آ) جملهٔ عمومی الگوی خطی به‌صورت $t_n = an + b$ می‌باشد.

طبق فرض $t_۵ = ۳$ و $t_{۱۷} = ۲۷$ می‌باشد:

$$\begin{cases} t_۵ = a(۵) + b = ۳ \\ t_{۱۷} = a(۱۷) + b = ۲۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۵a - b = -۳ \\ ۱۷a + b = ۲۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۲a = ۲۴ \Rightarrow a = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲ \xrightarrow{۵a+b=۳} ۵(۲) + b = ۳ \Rightarrow b = -۷$$

$$\Rightarrow t_n = ۲n - ۷$$

ب) با قرار دادن عدد ۵۰ به جای n در فرمول $t_n = ۲n - ۷$ ، جملهٔ پنجاهم الگو به‌دست می‌آید:

$t_{۵۰} = ۲(۵۰) - ۷ = ۹۳$

پ) باید n را طوری به‌دست آوریم که $t_n = ۱۶۵$ شود:

$t_n = ۲n - ۷ = ۱۶۵ \Rightarrow ۲n = ۱۷۲ \Rightarrow n = ۸۶$

---

۳۱ جدول زیر را درنظر می‌گیریم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...
تعداد کل مربع‌ها	۸	۱۴	۲۰	...
تعداد مربع‌های رنگی	۶	۱۰	۱۴	...
تعداد مربع‌های سفید	۲	۴	۶	...

آ) تعداد مربع‌های رنگی در هر مرحله از اضافه کردن عدد ثابت ۴ به تعداد مربع‌های رنگی مرحلهٔ قبل به‌دست می‌آید:

$۶ \xrightarrow{+۴} ۱۰ \xrightarrow{+۴} ۱۴ \xrightarrow{+۴} ۱۸ \xrightarrow{+۴} ۲۲ \xrightarrow{+۴} ۲۶$

ب) تعداد مربع‌های سفید یک الگوی خطی است که در آن تفاضل هر دو جملهٔ متوالی برابر عدد ثابت ۲ است:

$$a_n = an+b \;,\; a_۱=۲ \;,\; a_۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} a(۱)+b=۲ \\ a(۲)+b=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a-b=-۲ \\ ۲a+b=۴ \end{cases} \Rightarrow a=۲ \;,\; b=۰ \Rightarrow a_n = ۲n$$

پ) جدول زیر را درنظر می‌گیریم:

n : تعداد مربع‌های سفید	۲	۴	۶	...
b_n : تعداد مربع‌های رنگی	۶	۱۰	۱۴	...

به جای n فقط اعداد زوج می‌توان قرار داد و b_n از دستور $b_n = ۶+۲(n-۲)=۲n+۲$ به‌دست می‌آید.

ت) طبق رابطهٔ (پ)، n را طوری به‌دست می‌آوریم که $b_n=۱۰۲$ شود:

$$b_n = ۱۰۲ = ۲n+۲ \Rightarrow ۲n=۱۰۰ \Rightarrow n = \frac{۱۰۰}{۲}=۵۰$$

طبق قسمت (پ)، $n=۵۰$ همان تعداد مربع‌های سفید است.

ث) تعداد مربع‌های رنگی برحسب شمارهٔ شکل از رابطهٔ $t_n = ۴n+۲$ به‌دست می‌آید. پس نسبت تعداد مربع‌های سفید به تعداد مربع‌های رنگی در شکل nاُم برابر $\frac{۲n}{۴n+۲}$ است. داریم:

$$\frac{۲n}{۴n+۲}=\frac{۳۱}{۶۳} \Rightarrow ۶۳\times ۲n = ۳۱\times(۴n+۲) \Rightarrow ۱۲۶n = ۱۲۴n+۶۲$$

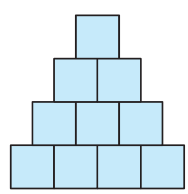
$$\Rightarrow ۲n = ۶۲ \Rightarrow n=۳۱$$

ج) $a_n = ۲n = ۴۶ \Rightarrow n = ۲۳$ (تعداد مربع‌های سفید)

بنابراین در شکل بیست و سوم، ۴۶ مربع سفید وجود دارد. پس در این شکل، تعداد مربع‌های رنگی برابر $t_{۲۳} = ۴(۲۳)+۲=۹۴$ می‌باشند.
یا طبق فرمول قسمت (پ)، تعداد مربع‌های رنگی برابر $b_n=۲(۴۶)+۲=۹۴$ است.

---

۳۲ آ)



۱۰ مربع

دنباله: $۱ \xrightarrow{+۲} ۳ \xrightarrow{+۳} ۶ \xrightarrow{+۴} ۱۰ \xrightarrow{+۵} ۱۵ \xrightarrow{+۶} ۲۱ \xrightarrow{+۷} ۲۸$

ب) خیر، زیرا اختلاف هر دو جملهٔ متوالی عدد ثابت نیست.

پ) در الگوی جدید، می‌توان دو شکل (n) را طوری کنار هم قرار داد که شکل حاصل، یک مستطیل شامل $n\times(n+۱)$ مربع باشد. بنابراین:

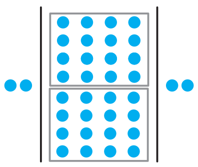
$$۲a_n = n(n+۱) \Rightarrow a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

ت) حاصل عبارت $۱+۲+...+n$ تعداد مربع‌های به کار رفته در a_n است (در ردیف اول، n مربع، در ردیف دوم، $n-۱$ مربع و ... و در ردیف nاُم، یک مربع قرار دارد)، پس:

$$۱+۲+...+n = a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

---

۳۳ آ) در شکل‌های داده شده درون | | به تعداد ۲ برابر $n^۲$، نقطه وجود دارد. همچنین در دو طرف | | در شکل nاُم، n نقطه وجود دارد. بنابراین: دنباله: ۳،۱۰،۲۱،۳۶،۵۵



ب) اگر a_n جملهٔ عمومی الگو باشد، آن‌گاه $a_n = ۲n^۲+n$ می‌باشد.

پ) $a_{۲۰} = ۲(۲۰)^۲+۲۰ = ۸۲۰$

ت) $a_n = ۱۲۰ \Rightarrow ۲n^۲+n=۱۲۰ \Rightarrow ۲n^۲+n-۱۲۰=۰$

به ازای هیچ مقدار طبیعی از n تساوی $۲n^۲+n-۱۲۰=۰$ برقرار نمی‌باشد، پس در این الگو شکلی وجود ندارد که شامل ۱۲۰ نقطه باشد.

---

۳۴ آ) $۱ \xrightarrow{+۲} ۳ \xrightarrow{+۲} ۵ \xrightarrow{+۲} ۷ \xrightarrow{+۲} ۹ \xrightarrow{+۲} ۱۱ \xrightarrow{+۲} ۱۳ , ... \Rightarrow a_n = ۲n-۱$

ب) $\sqrt{۲}, ۲ = \sqrt{۴}, \sqrt{۶}, ۲\sqrt{۲}=\sqrt{۸}, \sqrt{۱۰}, \sqrt{۱۲}, \sqrt{۱۴}, ...$

$\Rightarrow a_n=\sqrt{۲n}$

پ) $۱, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۱۶},\frac{۱}{۲۵},\frac{۱}{۳۶},\frac{۱}{۴۹},... \Rightarrow a_n = \frac{۱}{n^۲}$

ت) $۰/۳ , ۰/۰۳ , ۰/۰۰۳ , ۰/۰۰۰۳ , ۰/۰۰۰۰۳ , ۰/۰۰۰۰۰۳ , ۰/۰۰۰۰۰۰۳ , ...$

$\Rightarrow a_n = ۰/\underbrace{۰...۰}_{n-۱}۳ = a_n = \frac{۳}{(۱۰)^n}$

ث) $-۱,۴,-۹,۱۶,-۲۵,۳۶,-۴۹,.... \Rightarrow a_n = (-۱)^n n^۲$

جملات دنباله یک در میان مثبت و منفی دارد، بنابراین از $(-۱)^n$ برای منفی و مثبت شدن جملات استفاده می‌کنیم.

ج) $۳ \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} \frac{۵}{۲} \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} ۲ \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} \frac{۳}{۲} \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} ۱ \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲} \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} ۰ , ...$

$$\Rightarrow a_n = ۳+(n-۱)\times(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۲}n+\frac{۷}{۲}$$

چ) جملهٔ سوم، مجموع جملات اول و دوم و جملهٔ چهارم، مجموع جملات دوم و سوم می‌باشد. بنابراین:

$۱,۲,۳,۵,۳+۵=۸,۵+۸=۱۳,۸+۱۳=۲۱,...$

$\Rightarrow a_n = a_{n-۱}+a_{n-۲} \;;\; a_۱=۱ \;,\; a_۲=۲ \;,\; n\ge ۳$

ح) با توجه به جملات داده شده، به غیر از جملهٔ اول، هر جمله یک واحد کم‌تر از سه برابر جملهٔ قبل از خود می‌باشد:

$$5=3(2)-1\ ,\ 14=3(5)-1\ ,\ 41=3(14)-1\ ,\ 3(41)-1=122$$
$$3(122)-1=365\ ,\ 3(365)-1=1094$$
$$\Rightarrow a_n=3a_{n-1}-1\ ;\ a_1=2$$

---

۳۵ آ) با قرار دادن اعداد ۱ تا ۴ به جای n در a_n، چهار جملهٔ اول دنباله به‌دست می‌آید:

$$a_1=\frac{5(1)-1}{3(1)+7}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\quad ,\quad a_2=\frac{5(2)-1}{3(2)+7}=\frac{9}{13}$$
$$a_3=\frac{5(3)-1}{3(3)+7}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}\quad ,\quad a_4=\frac{20-1}{12+7}=\frac{19}{19}=1$$

ب) $$a_{17}=\frac{5(17)-1}{3(17)+7}=\frac{84}{58}=\frac{42}{29}$$

پ) $$a_n=\frac{27}{20}=\frac{5n-1}{3n+7}\Rightarrow 27(3n+7)=20(5n-1)$$
$$\Rightarrow 81n+189=100n-20\Rightarrow 209=19n\Rightarrow n=\frac{209}{19}=11$$

---

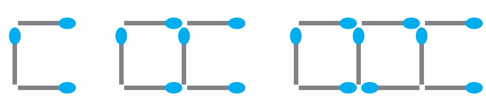
۳۶ آ) طبق فرض $t_1=-1$ و $t_2=2$ می‌باشد. داریم:

$$\begin{cases}t_1=a(1)^2+b(1)=-1\\ t_2=a(2)^2+b(2)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-1\\ 4a+2b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a-2b=2\\ 4a+2b=2\end{cases}$$
$$\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2\xrightarrow{a+b=-1} b=-3$$

ب) $$a=2\ ,\ b=-3\Rightarrow t_n=2n^2-3n\Rightarrow t_7=2(7)^2-3(7)=77$$

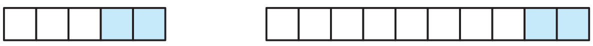
---

۳۷ آ) $a_n=3n:3,6,9,12,\ldots$



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

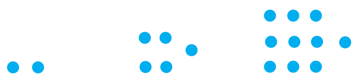
ب) $b_n=5n-2:3,8,13,18,\ldots$



شکل (۱) شکل (۲)

در شکل nاُم تعداد کل مربع‌ها، $5n$ و تعداد مربع‌های سفید شکل (n) برابر $b_n=5n-2$ می‌باشد.

پ) $c_n=n^2+1:2,5,10,17,\ldots$



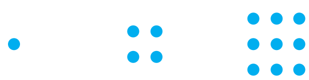
شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

ت) $d_n=n^2+2n:3,8,15,24,\ldots$

شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

---

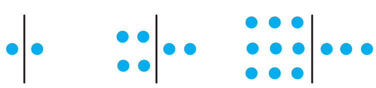
۳۸ آ) تعداد نقطه‌ها در الگوی هندسی زیر، جملات دنبالهٔ ۱،۴،۹،... می‌باشند:



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

جملهٔ عمومی دنباله، $a_n=n^2$ می‌باشد.

ب) تعداد نقطه‌ها در الگوی هندسی زیر، جملات دنبالهٔ ...،۲،۶،۱۲،۲۰ می‌باشند:



جملهٔ عمومی دنباله، $a_n=n^2+n$ است.

درسنامه ۴

دنباله‌های حسابی و هندسی

دنبالهٔ حسابی: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی می‌نامیم و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و آن را با d نمایش می‌دهیم.

نکته

۱- اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی t_n باشد، آن‌گاه: $d = t_۲ - t_۱ = t_۳ - t_۲ = \cdots = t_n - t_{n-۱}$

۲- جملهٔ nاُم یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d به‌صورت مقابل است: $t_n = t_۱ + (n-۱)d$

توجه: شکل دنبالهٔ حسابی، به‌صورت الگوی خطی است.

مثال در دنبالهٔ حسابی زیر، جملهٔ بیست و پنجم را مشخص کنید.

$-۵, -۲, ۱, \ldots$

پاسخ: $t_۱ = -۵ \quad , \quad d = t_۲ - t_۱ = -۲ - (-۵) = ۳ \quad , \quad t_n = t_۱ + (n-۱)d \Rightarrow t_{۲۵} = -۵ + ۲۴ \times ۳ = -۵ + ۷۲ = ۶۷$

نکته

اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه $۲b = a + c$ و عدد b را واسطهٔ حسابی دو عدد a و c می‌گوییم.

به عنوان مثال، واسطهٔ حسابی دو عدد $۱ + \sqrt{۲}$ و $۱ - \sqrt{۲}$ برابر با $b = \frac{(۱ + \cancel{\sqrt{۲}}) + (۱ - \cancel{\sqrt{۲}})}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$ است.

مثال بین دو عدد ۱۱ و ۴۱ با جملهٔ اول ۱۱، پنج واسطهٔ حسابی درج کنید.

پاسخ: می‌خواهیم بین دو عدد ۱۱ و ۴۱، پنج عدد قرار دهیم به طوری که هفت عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند.

$t_۱ = ۱۱ \ , \ t_۷ = ۴۱ \Rightarrow t_۱ + ۶d = ۴۱ \Rightarrow ۱۱ + ۶d = ۴۱ \Rightarrow ۶d = ۳۰ \Rightarrow d = ۵$

بنابراین هفت عدد حاصل به‌صورت روبه‌رو است:

$۱۱ \overset{+۵}{,} ۱۶ \overset{+۵}{,} ۲۱ \overset{+۵}{,} ۲۶ \overset{+۵}{,} ۳۱ \overset{+۵}{,} ۳۶ \overset{+۵}{,} ۴۱$

دنبالهٔ هندسی: دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم و آن را با r نمایش می‌دهیم. جملهٔ اول هم باید غیر صفر باشد.

نکته

۱- در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی t_n، داریم: $\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{t_۳}{t_۲} = \ldots = \frac{t_n}{t_{n-۱}} = r$

۲- جملهٔ nاُم دنبالهٔ هندسی به‌صورت مقابل است که در آن $t_۱$ جملهٔ اول و r قدرنسبت می‌باشد: $t_n = t_۱ r^{n-۱}$

تذکر: اگر $t_۱, r > ۰$، جملات دنبالهٔ هندسی مثبت و اگر $r < ۰$، آن‌گاه جملات دنبالهٔ هندسی، یکی در میان مثبت و منفی و اگر $t_۱ < ۰$ و $r > ۰$، جملات دنبالهٔ هندسی منفی هستند.

مثال در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم $\frac{۱}{۳}$ و جملهٔ پنجم ۹ است. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

پاسخ: جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ است. طبق فرض $t_۲ = \frac{۱}{۳}$ و $t_۵ = ۹$ می‌باشند، پس:

$t_۲ = t_۱ r = \frac{۱}{۳} \quad , \quad t_۵ = t_۱ r^۴ = ۹ \Rightarrow \frac{t_۵}{t_۲} = \frac{t_۱ r^۴}{t_۱ r} = \frac{۹}{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow r^۳ = ۲۷ = ۳^۳ \Rightarrow r = ۳ \quad , \quad t_۱ r = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳t_۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۹}$

نکته

اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^۲ = ac$. اعداد $b = \pm\sqrt{ac}$ را واسطهٔ هندسی دو عدد a و c می‌گوییم.

به عنوان مثال، واسطهٔ هندسی بین دو عدد ۳ و ۴۸، عددهای $\pm۱۲ = \pm\sqrt{۱۴۴} = \pm\sqrt{۳ \times ۴۸}$ می‌باشند.

۳۹. از بین دنباله‌های زیر، کدام‌یک دنبالهٔ حسابی و کدام‌یک دنبالهٔ هندسی می‌باشند؟ قدرنسبت آن‌ها را تعیین کنید. هم‌چنین جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

آ) $۲, ۲/۴, ۲/۸, ۳/۲, ...$

ب) $\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, \frac{۵}{۶}, ...$

پ) $-۱, \sqrt{۳}, -۳, ۳\sqrt{۳}, ...$

ت) $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, ...$

ث) $۳, ۳, ۳, ۳, ...$

ج) $\sqrt{۲}, ۰, -\sqrt{۲}, -۲\sqrt{۲}, ...$

چ) $۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۵, ۲۸, ۳۱, ...$

ح) $-۱, ۱, -۱, ۱, \cdots$

۴۰. جملهٔ عمومی چهار دنباله، داده شده است. کدام‌یک، دنبالهٔ حسابی و کدام‌یک دنبالهٔ هندسی است؟

آ) $a_n = -\frac{n}{۳} + ۴$

ب) $b_n = ۲n^۲ - ۱$

پ) $c_n = ۴\left(-\frac{۲}{۳}\right)^n$

ت) $d_n = \frac{n+۴}{۲n+۳}$

۴۱. کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی

پ) دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{۲}{۵}$ وجود دارد.

ت) بی‌شمار دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۳}$ وجود دارد.

ث) دنبالهٔ هندسی وجود ندارد که فقط چهار جملهٔ اول آن منفی باشد.

ج) دنبالهٔ حسابی وجود ندارد که فقط چهار جملهٔ اول آن منفی باشد.

۴۲. یک دنبالهٔ حسابی مثال بزنید که:

آ) قدرنسبت آن مثبت و جملهٔ سوم آن ۲ باشد.

ب) قدرنسبت آن منفی و جملهٔ چهارم آن ۴- باشد.

پ) فقط چهار جملهٔ منفی داشته باشد.

۴۳. در یک دنبالهٔ حسابی، جملات هفتم و پانزدهم به ترتیب ۲۳ و ۶۳ می‌باشند. جملهٔ چهلم دنباله را به‌دست آورید.

۴۴. در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ یازدهم، بیست واحد کم‌تر از جملهٔ سوم است. اگر جملهٔ نهم دنباله ۱۷ باشد، جملهٔ دهم دنباله را به‌دست آورید.

۴۵. چندمین جملهٔ دنبالهٔ حسابی $-۱, ۵, ۱۱, ...$ برابر ۲۲۱ می‌باشد؟

۴۶. چند جملهٔ دنبالهٔ حسابی $۱۵۷, ۱۵۱, ...$ مثبت هستند؟

۴۷. اعداد $۳x - ۸$، $-x + ۴$ و $۲x + ۱$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند. مقدار x را به‌دست آورید.

۴۸. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات دوم و پنجم برابر $\frac{۱۹}{۲}$ و مجموع جملات چهارم و دهم برابر ۲۰ می‌باشد. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

۴۹. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع چهار جملهٔ اول ۱۸ و مجموع پنج جملهٔ بعدی ۱۳۵ می‌باشد. جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

۵۰. در یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مثبت، مجموع سه جملهٔ اول ۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۴۸- می‌باشد. جملهٔ هفتم دنباله را مشخص کنید.

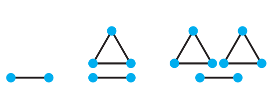
۵۱. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات هفتم و بیستم برابر ۴۱ است. مجموع جملات دوازدهم و پانزدهم این دنباله را به‌دست آورید.

۵۲. بین دو عدد ۱- و ۴۷ ، هفت واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ها را مشخص کنید.

۵۳. واسطهٔ حسابی بین جمله‌های بیست و یکم و چهل و نهم دنبالهٔ حسابی مقابل را به‌دست آورید.

$-۴, -\frac{۱۳}{۴}, -\frac{۵}{۲}, ...$

۵۴. با توجه به الگوی مقابل:



آ) دو جملهٔ بعدی الگو را با رسم شکل بیابید.

ب) جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم این دنباله برابر ۲۹۹ می‌باشد؟

۵۵. پنج عدد که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند را طوری مشخص کنید که مجموع آن‌ها برابر ۸۰ و بزرگ‌ترین عدد، دو برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر باشد.

۵۶. در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی t_n ، حاصل $\frac{t_۴ + ۲t_{۱۰} - t_۷}{t_۸ + t_۹}$ را به‌دست آورید.

۵۷. زوایای یک پنج‌ضلعی محدب که اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ آن ۶۰° می‌باشد، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اندازهٔ زوایای این پنج‌ضلعی را به‌دست آورید.

۵۸. در یک دنبالهٔ هندسی، جمله‌های دوم و هفتم به ترتیب $\frac{۳}{۲}$ و ۴۸ می‌باشند. جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

۵۹. جملات سوم و پنجم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۲۴ و $\frac{۳۲}{۳}$ می‌باشند. جملهٔ هفتم دنباله را مشخص کنید.

۶۰. در یک دنبالهٔ هندسی با جمله‌های مثبت و جملهٔ عمومی t_n ، $t_۱t_۳ = ۴$ و $t_۴t_۵ = ۱۶$ می‌باشند. جملات دنباله را مشخص کنید.

۶۱. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱۷ و مجموع جملات دوم و چهارم برابر ۶۸ می‌باشد. جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

۶۲. بین دو عدد ۱ و ۶۴ با جملهٔ اول ۱، پنج واسطهٔ هندسی درج شده است. جملات دنباله را مشخص کنید.

۶۳. بین دو عدد ۱ و ۸۱ با جملهٔ اول ۱، هفت واسطهٔ هندسی درج شده است. قدرنسبت دنبالهٔ حاصل را مشخص کنید.

۶۴. واسطهٔ هندسی مثبت دو عدد $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

۶۵. در دنبالهٔ هندسی روبه‌رو، جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید. $x - ۴, ۲x - ۴, ۴x + ۴, ...$

۶۶. در دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, ۴, ۸, ...$، حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنباله را به‌دست آورید.

۶۷. قیمت یک خودرو به دلیل استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می‌یابد. اگر قیمت اولیهٔ یک خودرو ۴۰ میلیون تومان باشد و قیمت آن در هر سال ۳ درصد کاهش پیدا کند:

آ) قیمت این خودرو را بعد از ۳ سال مشخص کنید.

ب) قیمت این خودرو بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

۶۸. جمعیت یک کشور، اکنون ۸۰ میلیون نفر است. فرض کنید در هر سال به میزان ۲ درصد به جمعیت آن اضافه می‌شود:

آ) جمعیت این کشور را پس از گذشت ۳ سال به‌دست آورید.

ب) جمعیت این کشور پس از گذشت n سال چقدر خواهد بود؟

پ) این دنباله، یک دنبالهٔ حسابی است یا یک دنبالهٔ هندسی؟

۶۹. مقدار یک مادهٔ رادیواکتیو پس از گذشت ۲۰۰ سال نصف می‌شود. اگر مقدار اولیهٔ آن ۱۰ گرم باشد، آن‌گاه:

آ) بعد از ۲۰۰، ۴۰۰ و ۶۰۰ سال چه مقداری از آن باقی می‌ماند؟

ب) بعد از گذشت ۲۰۰n سال، چه مقدار از این مادهٔ رادیواکتیو باقی می‌ماند؟

پاسخ‌های تشریحی

۳۹ آ) هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه شدن عدد ۰/۴ به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید. بنابراین دنباله، یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱=۲$ و قدرنسبت $d=۰/۴$ می‌باشد.

$$t_n=t_۱+(n-۱)d=۲+۰/۴(n-۱)=۰/۴n+۱/۶$$

ب) دنبالهٔ $\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۶},...$ نه دنبالهٔ حسابی و نه دنبالهٔ هندسی است.

$\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}\neq\frac{۵}{۶}-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی نمی‌باشد.

$\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{۲}\neq\frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۱۰}{۹}\Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی نمی‌باشد.

پ) هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب عدد $-\sqrt{۳}$ در جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید. بنابراین دنباله، یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $t_۱=-۱$ و $r=-\sqrt{۳}$ می‌باشد.

$$t_n=t_۱r^{n-۱}=-۱(-\sqrt{۳})^{n-۱}=-(-\sqrt{۳})^{n-۱}=(-۱)^n(\sqrt{۳})^{n-۱}$$

ت) این دنباله، یک دنبالهٔ هندسی است:

$$\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{t_۳}{t_۲}=\frac{t_۴}{t_۳}=...=\frac{۱}{۲}=r$$

$$t_۱=\frac{۱}{۲}\ ,\ r=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow t_n=t_۱r^{n-۱}=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱+۱}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^n=\frac{۱}{۲^n}$$

ث) این دنباله، هم یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت صفر و با جملهٔ عمومی $t_n=۳$ و هم یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت یک و جملهٔ عمومی $t_n=۳$ می‌باشد.

ج) این دنباله، یک دنبالهٔ حسابی است:

$$۰-\sqrt{۲}=-\sqrt{۲}-۰=-۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=...=-\sqrt{۲}=d$$

$$t_۱=\sqrt{۲}\ ,\ d=-\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow t_n=t_۱+(n-۱)d=\sqrt{۲}-\sqrt{۲}(n-۱)=۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲}n$$

چ) این دنباله، نه دنبالهٔ حسابی و نه دنبالهٔ هندسی می‌باشد، زیرا:

$۲۱-۱۸\neq۲۵-۲۱\Rightarrow$ دنبالهٔ حسابی نمی‌باشد.

$\frac{۱۵}{۱۲}\neq\frac{۱۸}{۱۵}\Rightarrow$ دنبالهٔ هندسی نمی‌باشد.

توجه کنیم که فقط جملهٔ پنجم از اضافه شدن چهار واحد به جملهٔ چهارم به‌دست آمده است و بقیهٔ جملات از اضافه شدن سه واحد به جملات قبل از خود به‌دست آمده‌اند.

ح) این دنباله، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $r=-۱$ است، زیرا:

$$\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{t_۳}{t_۲}=\cdots=r=-۱\ ,\ t_۱=-۱$$

$$\Rightarrow t_n=t_۱r^{n-۱}=(-۱)^۱(-۱)^{n-۱}=(-۱)^{۱+n-۱}=(-۱)^n$$

۴۰ آ) a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی است (a_n یک عبارت درجهٔ یک برحسب n است.):

$$a_n: a_۱=-\frac{۱}{۳}+۴=\frac{۱۱}{۳}\quad,\quad a_۲=-\frac{۲}{۳}+۴=\frac{۱۰}{۳}$$

$$a_۳=-۱+۴=۳\quad,\quad ...\quad\Rightarrow d=\frac{۱۰}{۳}-\frac{۱۱}{۳}=-\frac{۱}{۳}$$

ب) b_n جملهٔ عمومی هیچ‌یک از دنباله‌های حسابی (b_n یک عبارت درجهٔ دوم برحسب n است.) و هندسی (جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n=t_۱r^{n-۱}$ است.) نمی‌باشد.

پ) c_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی است:

$$c_n: -\frac{۸}{۳}, \frac{۱۶}{۹}, -\frac{۳۲}{۲۷}, ...\Rightarrow c_۱=-\frac{۸}{۳}\ ,\ r=-\frac{۲}{۳}$$

ت) d_n جملهٔ عمومی هیچ‌یک از دنباله‌های حسابی و هندسی نمی‌باشد.

$$d_n: ۱, \frac{۶}{۷}, \frac{۷}{۹}, ...$$

---

۴۱ آ) نادرست است، دنبالهٔ ...، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱، نه دنبالهٔ حسابی و نه دنبالهٔ هندسی است.

ب) نادرست است، تمام دنباله‌ها به‌صورت ...، a، a، a هم دنبالهٔ حسابی $(d=۰)$ و هم دنبالهٔ هندسی $(r=۱)$ می‌باشند.

پ) درست است، دنبالهٔ $\frac{۱}{۵},\frac{۳}{۵},۱,\frac{۷}{۵},...$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{۲}{۵}$ می‌باشد.

ت) درست است، هر عدد حقیقی را می‌توان به عنوان جملهٔ اول درنظر گرفت و با قدرنسبت $\frac{۱}{۳}$ دنبالهٔ هندسی ساخت. بنابراین بی‌شمار دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۳}$ وجود دارد.

ث) درست است، اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مثبت باشد، آن‌گاه تمام جملات مثبت (اگر جملهٔ اول مثبت باشد.) یا تمام جملات منفی (اگر جملهٔ اول منفی باشد.) می‌باشند.

$$r=۲\ ,\ t_۱=-۱\Rightarrow -۱, -۲, -۴, -۸, ...$$

$$r=۳\ ,\ t_۱=\sqrt{۲}\Rightarrow \sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}, ۹\sqrt{۲}, ...$$

و اگر قدرنسبت منفی باشد، آن‌گاه جملات دنباله یک در میان مثبت و منفی خواهند شد.

$$r=-۲\ ,\ t_۱=۴\Rightarrow ۴, -۸, ۱۶, -۳۲, ...$$

$$r=-۲\ ,\ t_۱=-۲\Rightarrow -۲, ۴, -۸, ۱۶, ...$$

ج) نادرست است، در دنبالهٔ حسابی زیر، فقط چهار جملهٔ اول، منفی است:

$$-۱۵, -۱۱, -۷, -۳, ۱, ...$$

---

۴۲ آ) قدرنسبت را ۴ درنظر می‌گیریم و دو جملهٔ قبل از عدد ۲ را پیدا می‌کنیم:

$$-۶, -۲, ۲, ...$$

ب) قدرنسبت را ۱- و سه عدد قبل از ۴- را می‌نویسیم:

$$-۱, -۲, -۳, -۴, ...$$

پ) جملهٔ پنجم دنباله را صفر و قدرنسبت را ۲ درنظر می‌گیریم:

$-۸, -۶, -۴, -۲, ۰, ...$

---

۴۳ اگر جملهٔ عمومی دنباله $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} t_۷ = ۲۳ \\ t_{۱۵} = ۶۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ + ۶d = ۲۳ \\ t_۱ + ۱۴d = ۶۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_۱ - ۶d = -۲۳ \\ t_۱ + ۱۴d = ۶۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۸d = ۴۰ \Rightarrow d = ۵ \Rightarrow t_۱ = -۷ \Rightarrow t_{۴۰} = -۷ + (۴۰ - ۱) \times ۵ = ۱۸۸$$

---

۴۴ اگر t_n جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} t_{۱۱} - t_۳ = -۲۰ \\ t_۹ = ۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t_۱ + ۱۰d) - (t_۱ + ۲d) = -۲۰ \\ t_۱ + ۸d = ۱۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۸d = -۲۰ \Rightarrow d = -\frac{۲۰}{۸} = -\frac{۵}{۲} \\ t_۱ + ۸d = ۱۷ \end{cases} \Rightarrow t_۱ - ۲۰ = ۱۷ \Rightarrow t_۱ = ۳۷$$

$$\Rightarrow t_{۱۰} = t_۱ + ۹d = ۳۷ + ۹ \times \left(-\frac{۵}{۲}\right) = ۳۷ - ۲۲/۵ = ۱۴/۵$$

---

۴۵ جملهٔ اول دنباله ۱-، قدرنسبت دنبالـه $d = ۵ - (-۱) = ۶$ و جملـهٔ عمومی دنباله $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ می‌باشنـد. n را باید طـوری به‌دست آوریم که $t_n = ۲۲۱$ شود:

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d = -۱ + ۶(n-۱) = ۶n - ۷ = ۲۲۱$$

$$\Rightarrow ۶n = ۲۲۸ \Rightarrow n = \frac{۲۲۸}{۶} = ۳۸$$

بنابراین سی و هشتمین جملهٔ دنباله برابر ۲۲۱ است.

---

۴۶ ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$t_۱ = ۱۵۷ \ , \ d = ۱۵۱ - ۱۵۷ = -۶$$

$$\Rightarrow t_n = t_۱ + (n-۱)d = ۱۵۷ - ۶(n-۱) = -۶n + ۱۶۳$$

باید حدود n را طوری پیدا کنیم که $t_n > ۰$ شود:

$$t_n > ۰ \Rightarrow -۶n + ۱۶۳ > ۰ \Rightarrow ۶n < ۱۶۳$$

$$\Rightarrow n < \frac{۱۶۳}{۶} \simeq ۲۷/۱۶ \Rightarrow n \le ۲۷$$

بنابراین بیست و هفت جملهٔ اول دنباله مثبت هستند.

---

۴۷ می‌دانیم اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشنـد، آن‌گاه: $۲b = a + c$

اعداد $۳x - ۸$، $-x + ۴$ و $۲x + ۱$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسـابی‌اند، بنابراین:

$$۲(-x + ۴) = (۳x - ۸) + (۲x + ۱) \Rightarrow -۲x + ۸ = ۵x - ۷$$

$$\Rightarrow ۸ + ۷ = ۵x + ۲x \Rightarrow ۷x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۷}$$

---

۴۸ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ است. طبق فـرض داریم:

$$\begin{cases} t_۲ + t_۵ = \frac{۱۹}{۲} \\ t_۴ + t_{۱۰} = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t_۱ + d) + (t_۱ + ۴d) = \frac{۱۹}{۲} \\ (t_۱ + ۳d) + (t_۱ + ۹d) = ۲۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲t_۱ + ۵d = \frac{۱۹}{۲} \\ ۲t_۱ + ۱۲d = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲t_۱ - ۵d = -\frac{۱۹}{۲} \\ ۲t_۱ + ۱۲d = ۲۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۷d = ۲۰ - \frac{۱۹}{۲} = \frac{۲۱}{۲} \Rightarrow d = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{۲t_۱ + ۱۲d = ۲۰} ۲t_۱ + ۱۲ \times \frac{۳}{۲} = ۲۰$$

$$\Rightarrow ۲t_۱ = ۲ \Rightarrow t_۱ = ۱$$

---

۴۹ طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} t_۱ + t_۲ + t_۳ + t_۴ = ۱۸ \\ t_۵ + t_۶ + t_۷ + t_۸ + t_۹ = ۱۳۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ + (t_۱ + d) + (t_۱ + ۲d) + (t_۱ + ۳d) = ۱۸ \\ (t_۱ + ۴d) + (t_۱ + ۵d) + (t_۱ + ۶d) + (t_۱ + ۷d) + (t_۱ + ۸d) = ۱۳۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow^{(-۵)\times} \begin{cases} ۴t_۱ + ۶d = ۱۸ \\ ۵t_۱ + ۳۰d = ۱۳۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲۰t_۱ - ۳۰d = -۹۰ \\ ۵t_۱ + ۳۰d = ۱۳۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۱۵t_۱ = ۴۵ \Rightarrow t_۱ = -۳$$

$$\xrightarrow{۴t_۱ + ۶d = ۱۸} ۴(-۳) + ۶d = ۱۸ \Rightarrow ۶d = ۳۰ \Rightarrow d = ۵$$

$$\Rightarrow t_n = t_۱ + (n-۱)d = -۳ + ۵(n-۱) = ۵n - ۸$$

---

۵۰ فرض کنیم $a - d$، a و $a + d$ به‌ترتیب سه جملهٔ اول دنباله باشـد، در این‌صورت:

مجموع سه جمله $= (a - d) + a + (a + d) = ۹$

$$\Rightarrow ۳a = ۹ \Rightarrow a = ۳$$

جملات دنباله: $۳ - d, ۳, ۳ + d, \dots$

حاصلضرب جملات $= -۴۸ \Rightarrow (۳ - d) \times \cancel{۳} \times (۳ + d) = \overset{-۱۶}{\cancel{-۴۸}}$

$$\Rightarrow ۹ - d^۲ = -۱۶ \Rightarrow d^۲ = ۲۵ \xrightarrow{d > ۰} d = ۵$$

بنابراین جملات دنباله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$-۲, ۳, ۸, \dots \Rightarrow t_۷ = t_۱ + (۷ - ۱)d = -۲ + ۶ \times ۵ = ۲۸$$

---

۵۱ جملـهٔ عمـومی دنبالـهٔ حسـابی $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ اسـت. طبـق فرض $t_۷ + t_{۲۰} = ۴۱$ می‌باشند، پس:

$$(t_۱ + ۶d) + (t_۱ + ۱۹d) = ۴۱ \Rightarrow ۲t_۱ + ۲۵d = ۴۱ \qquad (*)$$

$$t_{۱۲} + t_{۱۵} = (t_۱ + ۱۱d) + (t_۱ + ۱۴d) = ۲t_۱ + ۲۵d \overset{(*)}{=} ۴۱$$

۵۲ اگر هفت واسطهٔ حسابی بین دو عدد ۱- و ۴۷ قرار دهیم، آن‌گاه ۹ جملهٔ یک دنبالهٔ حسابی را خواهیم داشت که در آن:

$$t_۱=-۱ \;،\; t_۹=۴۷ \Rightarrow t_۱+۸d=۴۷$$

$$\Rightarrow -۱+۸d=۴۷ \Rightarrow ۸d=۴۸ \Rightarrow d=۶$$

بنابراین جملات دنباله به‌صورت زیر می‌باشند:

$$-۱،۵،۱۱،۱۷،۲۳،۲۹،۳۵،۴۱،۴۷$$

---

۵۳ ابتدا جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی داده شده را به‌دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن جملات بیست‌ویکم و چهل‌ونهم دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$t_۱=-۴ \;،\; d=-\frac{۱۳}{۴}-(-۴)=\frac{۳}{۴}$$

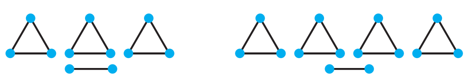
$$\Rightarrow t_n=t_۱+(n-۱)d=-۴+\frac{۳}{۴}(n-۱)=\frac{۳}{۴}n-\frac{۱۹}{۴}$$

$$\Rightarrow t_{۲۱}=\frac{۶۳}{۴}-\frac{۱۹}{۴}=\frac{۴۴}{۴}=۱۱ \;،\; t_{۴۹}=\frac{۱۴۷}{۴}-\frac{۱۹}{۴}=\frac{۱۲۸}{۴}=۳۲$$

$$\Rightarrow b=\frac{t_{۲۱}+t_{۴۹}}{۲}=\frac{۱۱+۳۲}{۲}=۲۱/۵$$

---

۵۴ آ) در هر مرحله یک مثلث به شکل اضافه می‌شود. بنابراین دو جملهٔ بعدی الگو به‌صورت زیر می‌باشند:



ب) دنبالهٔ حاصل از این الگو به‌صورت ...،۲،۵،۸،۱۱ می‌باشد که یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱=۲$ و قدرنسبت $d=۳$ می‌باشد. بنابراین:

$$t_n=t_۱+(n-۱)d=۲+۳(n-۱)=۳n-۱$$

پ) باید n را طوری به‌دست آوریم که $t_n=۲۹۹$ شود:

$$t_n=۳n-۱=۲۹۹ \Rightarrow ۳n=۳۰۰ \Rightarrow n=۱۰۰$$

پس جملهٔ صدم دنباله برابر ۲۹۹ است.

---

۵۵ فرض کنیم کوچک‌ترین عدد $t_۱$ و قدرنسبت دنبالهٔ حسابی d باشد، در این صورت پنج عدد به‌صورت زیر می‌باشند:

$$t_۱،t_۱+d،t_۱+۲d،t_۱+۳d،t_۱+۴d$$

مجموع پنج عدد $=۸۰$

$$\Rightarrow t_۱+(t_۱+d)+(t_۱+۲d)+(t_۱+۳d)+(t_۱+۴d)=۸۰$$

$$\Rightarrow ۵t_۱+۱۰d=۸۰ \xrightarrow{\div ۵} t_۱+۲d=۱۶ \quad (۱)$$

از طرفی $t_۱+۴d$ ، دو برابر مجموع دو عدد $t_۱$ و $t_۱+d$ می‌باشد، پس داریم:

$$t_۱+۴d=۲(t_۱+(t_۱+d)) \Rightarrow t_۱+۴d=۴t_۱+۲d$$

$$\Rightarrow ۲d=۳t_۱ \quad (۲)$$

$$(۱)،(۲) \Rightarrow \begin{cases} t_۱+۲d=۱۶ \\ ۲d=۳t_۱ \end{cases} \Rightarrow t_۱+۳t_۱=۱۶$$

$$\Rightarrow t_۱=۴ \xrightarrow{(۱)} ۴+۲d=۱۶ \Rightarrow ۲d=۱۲ \Rightarrow d=۶$$

بنابراین پنج عدد به‌صورت روبه‌رو می‌باشند: $۴،۱۰،۱۶،۲۲،۲۸$

---

۵۶ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d به‌صورت $t_n=t_۱+(n-۱)d$ می‌باشد. پس داریم:

$$\frac{t_۴+۲t_{۱۰}-t_۷}{t_۸+t_۹}=\frac{(t_۱+۳d)+۲(t_۱+۹d)-(t_۱+۶d)}{(t_۱+۷d)+(t_۱+۸d)}$$

$$=\frac{۲t_۱+۱۵d}{۲t_۱+۱۵d}=۱$$

---

۵۷ فرض کنیم d قدرنسبت دنبالهٔ زوایای این پنج‌ضلعی باشد، در این صورت:

اندازهٔ زوایای پنج‌ضلعی : $۶۰^\circ ، ۶۰^\circ+d ، ۶۰^\circ+۲d ، ۶۰^\circ+۳d ، ۶۰^\circ+۴d$

مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.

بنابراین مجموع زوایای داخلی پنج‌ضلعی برابر $(۵-۲)\times ۱۸۰^\circ=۵۴۰^\circ$ می‌باشد. پس داریم:

$$۶۰^\circ+(۶۰^\circ+d)+(۶۰^\circ+۲d)+(۶۰^\circ+۳d)+(۶۰^\circ+۴d)=۵۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳۰۰^\circ+۱۰d=۵۴۰^\circ \Rightarrow ۱۰d=۲۴۰^\circ \Rightarrow d=۲۴^\circ$$

اندازهٔ زوایای پنج‌ضلعی : $۶۰^\circ ، ۸۴^\circ ، ۱۰۸^\circ ، ۱۳۲^\circ ، ۱۵۶^\circ$

---

۵۸ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n=t_۱r^{n-۱}$ می‌باشد. طبق فرض $t_۲=\frac{۳}{۲}$ و $t_۷=۴۸$ می‌باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} t_۷=t_۱r^۶=۴۸ \\ t_۲=t_۱r=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۷}{t_۲}=\frac{t_۱r^۶}{t_۱r}=\frac{۴۸}{\frac{۳}{۲}}=۳۲ \Rightarrow r^۵=۳۲=۲^۵$$

$$\Rightarrow r=۲ \xrightarrow{t_۱r=\frac{۳}{۲}} ۲t_۱=\frac{۳}{۲} \Rightarrow t_۱=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow t_n=\frac{۳}{۴}\times ۲^{n-۱}$$

---

۵۹ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n=t_۱r^{n-۱}$ می‌باشد. طبق فرض داریم:

$$t_۳=۲۴ \;،\; t_۵=\frac{۳۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} t_۱r^۲=۲۴ \\ t_۱r^۴=\frac{۳۲}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۱r^۴}{t_۱r^۲}=\frac{\frac{۳۲}{۳}}{\frac{۲۴}{۱}} \Rightarrow r^۲=\frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow{t_۱r^۲=۲۴} t_۱\times\frac{۴}{۹}=۲۴ \Rightarrow t_۱=۵۴ \Rightarrow t_۷=t_۱r^۶=t_۱(r^۲)^۳$$

$$=۵۴\times(\frac{۴}{۹})^۳=۵۴\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۱۲۸}{۲۷}$$

---

۶۰ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n=t_۱r^{n-۱}$ است. بنابراین:

$$t_۱t_۳=t_۱\times(t_۱r^۲)=۴ \Rightarrow t_۱^۲r^۲=۴ \quad (۱)$$

$$t_۲t_۵=(t_۱r^۲)(t_۱r^۴)=t_۱^۲r^۶=۱۶ \quad (۲)$$

با تقسیم رابطهٔ (۲) بر رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{(۲)}{(۱)} = \frac{t_۱^۲ r^۶}{t_۱^۲ r^۲} = \frac{۱۶}{۴} = ۴ \Rightarrow r^۴ = ۴ \Rightarrow r^۲ = ۲ \Rightarrow r = \pm\sqrt{۲}$$

با توجه به این‌که جملات دنباله همگی مثبت می‌باشند، $r = \sqrt{۲}$ قابل قبول است. از رابطهٔ (۱) برای به‌دست آوردن جملهٔ اول دنباله استفاده می‌کنیم:

$$t_۱^۲ r^۲ = ۴ \Rightarrow t_۱^۲ \times (\sqrt{۲})^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow t_۱^۲ = ۲ \Rightarrow t_۱ = \pm\sqrt{۲} \xrightarrow{t_۱>۰} t_۱ = \sqrt{۲}$$

جملات دنبالهٔ هندسی : $\sqrt{۲}, ۲, ۲\sqrt{۲}, ۴, \ldots$

---

۶۱ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ می‌باشد. طبق فرض:

$$t_۱ + t_۳ = ۱۷ \Rightarrow t_۱ + t_۱ r^۲ = ۱۷ \Rightarrow t_۱(۱+r^۲) = ۱۷ \qquad (۱)$$

$$t_۲ + t_۴ = ۶۸ \Rightarrow t_۱ r + t_۱ r^۳ = ۶۸ \Rightarrow t_۱ r(۱+r^۲) = ۶۸ \qquad (۲)$$

$$\frac{(۲)}{(۱)} = \frac{\cancel{t_۱} r \cancel{(۱+r^۲)}}{\cancel{t_۱} \cancel{(۱+r^۲)}} = \frac{۶۸}{۱۷} \Rightarrow r = ۴ \xrightarrow{(۱)} t_۱(۱+۱۶) = ۱۷$$

$$\Rightarrow t_۱ = ۱ \Rightarrow t_n = ۱ \times ۴^{n-۱} = ۴^{n-۱}$$

---

۶۲ اگر پنج عدد بین ۱ و ۶۴ قرار دهیم، آن‌گاه جملهٔ اول دنباله برابر ۱ و جملهٔ هفتم دنباله برابر ۶۴ خواهد شد:

$$t_۱ = ۱ \quad , \quad t_۷ = t_۱ r^۶ = ۶۴ \Rightarrow r^۶ = ۶۴ = (\pm ۲)^۶ \Rightarrow r = \pm ۲$$

اگر $r = ۲$ باشد، جملات دنباله به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴$

اگر $r = -۲$ باشد، جملات دنباله به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$۱, -۲, ۴, -۸, ۱۶, -۳۲, ۶۴$

---

۶۳ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ می‌باشد. اگر بخواهیم هفت واسطهٔ هندسی بین ۱ و ۸۱ قرار دهیم، آن‌گاه:

$$t_۱ = ۱ \,,\, t_۹ = ۸۱ \Rightarrow t_۱ r^۸ = r^۸ = ۳^۴$$

$$\Rightarrow (r^۲)^۴ = ۳^۴ \Rightarrow r^۲ = ۳ \Rightarrow r = \pm\sqrt{۳}$$

---

۶۴ می‌دانیم عدد b که در آن $b^۲ = ac$ باشد، واسطهٔ هندسی دو عدد a و c می‌باشد. بنابراین:

$$b^۲ = (۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳}) = ۴ - ۳ = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱ \xrightarrow{b>۰} b = ۱$$

---

۶۵ می‌دانیم اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^۲ = ac$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$(۲x-۴)^۲ = (x-۴)(۴x+۴)$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۱۶x + ۱۶ = ۴x^۲ + ۴x - ۱۶x - ۱۶$$

$$\Rightarrow ۴x = ۳۲ \Rightarrow x = \frac{۳۲}{۴} = ۸$$

دنبالهٔ هندسی : $۴, ۱۲, ۳۶, \ldots \Rightarrow t_۱ = ۴ \;,\; r = \frac{t_۲}{t_۱} = ۳$

---

۶۶ جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $t_n = ۲^{n-۲}$ می‌باشد، داریم:

$$t_۱ t_۲ t_۳ \cdots t_{۲۰} = ۲^{-۱} \times ۲^۰ \times ۲^۱ \times ۲^۲ \times \cdots \times ۲^{۱۸}$$

$$= ۲^{-۱+۰+۱+۲+\cdots+۱۸}$$

داریم $۱+۲+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$، پس:

$$۱+۲+\cdots+۱۸ = \frac{۱۸ \times ۱۹}{۲} = ۱۷۱$$

$$\Rightarrow ۲^{-۱+۰+۱+\cdots+۱۸} = ۲^{-۱+۱۷۱} = ۲^{۱۷۰}$$

---

۶۷ آ) بعد از یک سال ۳ درصد از قیمت اولیهٔ آن کم می‌شود، پس قیمت خودرو بعد از یک سال $۹۷ = ۳ - ۱۰۰$ درصد قیمت اولیه است. اگر قیمت خودرو بعد از n سال برابر t_n باشد، آن‌گاه: $t_۱ = ۰/۹۷ \times ۴۰۰۰۰۰۰۰$

قیمت خودرو بعد از دو سال برابر $۰/۹۷ t_۱$ خواهد شد، بنابراین:

$$t_۲ = ۰/۹۷ t_۱ = ۰/۹۷ \times ۰/۹۷ \times ۴۰۰۰۰۰۰۰ = (۰/۹۷)^۲ \times ۴۰۰۰۰۰۰۰ = ۳۷۶۳۶۰۰۰$$

قیمت خودرو بعد از سه سال برابر $۰/۹۷ t_۲$ خواهد شد، بنابراین:

$$t_۳ = ۰/۹۷ t_۲ = ۰/۹۷ \times (۰/۹۷)^۲ \times ۴۰۰۰۰۰۰۰$$

$$= (۰/۹۷)^۳ \times ۴۰۰۰۰۰۰۰ = ۳۶۵۰۶۹۲۰$$

ب) طبق قسمت (آ) می‌توان گفت که قیمت خودرو بعد از n سال از دستور $t_n = (۰/۹۷)^n \times ۴۰۰۰۰۰۰۰$ به‌دست می‌آید.

---

۶۸ آ) بعد از هر سال به میزان ۲ درصد به جمعیت سال قبل اضافه می‌شود، بنابراین اگر P_n جمعیت این کشور بعد از n سال باشد، آن‌گاه:

$$P_۱ = ۸۰۰۰۰۰۰۰ + ۰/۰۲ \times ۸۰۰۰۰۰۰۰ = ۱/۰۲ \times ۸۰۰۰۰۰۰۰ = ۸۱۶۰۰۰۰۰$$

$$P_۲ = P_۱ + ۰/۰۲ P_۱ = ۱/۰۲ P_۱ = ۱/۰۲ \times ۱/۰۲ \times ۸۰۰۰۰۰۰۰$$

$$= (۱/۰۲)^۲ \times ۸۰۰۰۰۰۰۰ = ۸۳۲۳۲۰۰۰$$

$$P_۳ = P_۲ + ۰/۰۲ P_۲ = ۱/۰۲ P_۲ = ۱/۰۲ \times (۱/۰۲)^۲ \times ۸۰۰۰۰۰۰۰$$

$$= (۱/۰۲)^۳ \times ۸۰۰۰۰۰۰۰ = ۸۴۸۹۶۶۴۰$$

ب) جمعیت این کشور بعد از n سال برابر $P_n = (۱/۰۲)^n \times ۸۰۰۰۰۰۰۰$ است.

پ) این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $r = ۱/۰۲$ می‌باشد.

---

۶۹ آ) پس از گذشت هر ۲۰۰ سال، نصف مادهٔ رادیواکتیو باقی می‌ماند. بنابراین مقدار مادهٔ رادیواکتیو باقی‌مانده به‌صورت زیر می‌باشد:

مقدار مادهٔ رادیواکتیو باقی‌مانده بعد از ۲۰۰ سال $= ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۵$

مقدار مادهٔ رادیواکتیو باقی‌مانده بعد از ۴۰۰ سال $= \frac{۵}{۲} = ۱۰ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲$

مقدار مادهٔ رادیواکتیو باقی‌مانده بعد از ۶۰۰ سال $= \frac{۵}{۴} = ۱۰ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$

ب) مقدار مادهٔ رادیواکتیو باقی‌مانده بعد از $۲۰۰n$ سال $= ۱۰ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^n$