

درسنامه ۱

مجموع جملات دنباله حسابی

یادآوری از دنباله‌های حسابی

اگر از سال گذشته به یاد داشته باشید، جملات دنباله‌های حسابی از جمع عددی ثابت با جمله قبل آن، به دست می‌آیند:

$$a_1, \underbrace{a_1 + d}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3}, \underbrace{a_1 + 3d}_{a_4}, \dots \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

(a_n ، جمله عمومی و d ، قدرنسبت دنباله می‌باشد).

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n - a_m = (n-m)d$$

بنابراین اختلاف هر دو جمله متوالی در دنباله‌های حسابی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

نکته

$$2b = a + c \text{ یا } b = \frac{a+c}{2}$$

اگر a ، b و c سه جمله متوالی از دنباله حسابی باشند، b واسطه حسابی بین a و c است و در نتیجه:

مثال

مقدار a را از دنباله حسابی $1, a, 5, \dots$ بیابید. سپس قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

$$-1, a, 5, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2a = (-1) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2, d = 2 - (-1) = 3$$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

برای پیدا کردن مجموع n عدد طبیعی متوالی اولیه یعنی $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ، جناب گاوس یک ابتکار به خرج دادند و به روش زیر، این حاصل جمع را محاسبه کردند:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots + & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ (n) & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots + & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n} = n(n+1) \Rightarrow 2(1+2+\dots+n) = n(n+1)$$

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و در نتیجه داریم:

مثال

مجموع چه تعداد از اعداد طبیعی اولیه، برابر با 210 می‌گردد؟

پاسخ:

$$1+2+3+\dots+n = 210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 210 \Rightarrow n(n+1) = 420 \Rightarrow n(n+1) = 20 \times 21 \Rightarrow n = 20$$

حالا می‌توانیم از همین ابتکار الگو بگیریم و مجموع n جمله متوالی یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و جمله n ام a_n را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \underbrace{(a_1 + d)}_{a_2} + \underbrace{(a_1 + 2d)}_{a_3} + \dots + \underbrace{(a_1 + (n-2)d)}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_1 + (n-1)d)}_{a_n} \\ &= (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \dots + (a_1 + d) + a_1 = S_n \\ \Rightarrow 2S_n &= \underbrace{(2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \dots + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d)}_{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = a_1 + \dots + a_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

درستنامه ۱

و در نتیجه اگر از فرمول جمله n ام دنباله حسابی یعنی $a_n = a_1 + (n-1)d$ کمک بگیریم، داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + \overbrace{(a_1 + (n-1)d)}^{a_n}) \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

مثال مجموع چند جمله اول از دنباله حسابی $12, 9, 6, 3, \dots$ برابر صفر است؟

پاسخ: با یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = -3$ مواجه ایم، پس داریم:

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = 0 \xrightarrow{\substack{a_1=12 \\ d=-3}} n(2(12) + (n-1)(-3)) = 0 \Rightarrow 24 - 3n + 3 = 0 \Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین مجموع ۹ جمله اول این دنباله حسابی برابر صفر است.

مثال در یک دنباله حسابی اگر $a_7 + a_9 = 15$ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بیابید.

$$a_7 + a_9 = (a_1 + 6d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 14d \Rightarrow 2a_1 + 14d = 15 \quad (*)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \stackrel{(*)}{=} 10(15) = 150$$

نکته

اگر a, b, c سه جمله متوالی از دنباله حسابی باشند، b واسطه حسابی بین a و c است و در نتیجه:

$$1) a_1 = S_1$$

$$2) S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

زیرا:

مثال اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از فرمول $S_n = 5n^2 + 3n$ به دست آید، قدرنسبت و جمله عمومی دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a_1 = S_1 = 5(1)^2 + 3(1) = 8, & S_2 = a_1 + a_2 = 5(2)^2 + 3(2) = 20 + 6 = 26 \\ a_2 = S_2 - S_1 = 26 - 8 = 18 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 18 - 8 = 10 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + 10(n-1) = 10n - 2$$

توجه کنید که جمله عمومی دنباله را به طور مستقیم از فرمول S_n هم می توانستیم بیابیم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 3n - (5(n-1)^2 + 3(n-1))$$

$$= 5n^2 + 3n - (5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3) = 5n^2 + 3n - 5n^2 + 10n - 5 - 3n + 3 = 10n - 2 \Rightarrow a_n = 10n - 2$$

مثال مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۶ را بیابید.

پاسخ:

$$۶ \text{ اعداد دو رقمی مضرب } ۶: ۱۲, ۱۸, ۲۴, \dots, a_n = 12 + 6(n-1) = 6n + 6$$

$$\begin{matrix} +6 & +6 \\ \curvearrowright & \curvearrowright \end{matrix}$$

$$a_n = 6n + 6 < 100 \Rightarrow 6n < 94 \Rightarrow n < \frac{94}{6} \approx 15.6 \Rightarrow n \leq 15$$

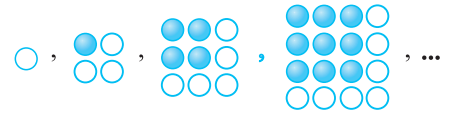
اولاً باید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \stackrel{n=15}{=} \frac{15}{2}(2(12) + (15-1)(6)) = \frac{15}{2} \times 108 = 810$$

و بنابراین:



۱. به کمک شکل‌های روبه‌رو، مجموع n عدد طبیعی اولیه (از ۱ تا n) را به‌دست آورید. (مشابه فعالیت صفحه ۲ کتاب درسی)



۲. به کمک شکل روبه‌رو ثابت کنید مجموع n عدد فرد متوالی اولیه، برابر با n^2 است. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۶ کتاب درسی)

- در هر یک از دنباله‌های حسابی زیر، مجموع بیست جمله اول را بیابید.

۳. (نهایی- شهریور ۹۲)

$$-5, 0, 5, \dots$$

۴. (نهایی- دی ۹۱)

$$-5, -3, -1, \dots$$

۵. (نهایی شهرستان- دی ۹۵)

مجموع جملات دنباله $4, 7, 10, \dots, 100$ را بیابید.

۶. (مشابه تمرین ۳ صفحه ۶ کتاب درسی)

مجموع اعداد فرد مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰ چقدر است؟

۷. مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۱۵ چقدر است؟

۸. در یک دنباله حسابی هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{4}$ بیش‌تر است. اگر جمله هفتم برابر ۱۳ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول دنباله چقدر است؟

۹. در یک دنباله حسابی جملات هفتم و دوازدهم به ترتیب ۳۲ و ۱۲ می‌باشد. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله را بیابید.

۱۰. در دنباله حسابی $3, 9, 15, \dots$ حداقل چند جمله آن را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیش‌تر شود؟

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۶ کتاب درسی و نهایی- دی ۹۳)

۱۱. در یک دنباله حسابی جمله چهارم برابر با ۳ و جمله هفتم برابر با ۱۲ است.

(آ) جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

(ب) حداکثر چند جمله از آن را با هم جمع کنیم، تا حاصل کم‌تر از ۴۵۰ شود؟

۱۲. در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 3 - 2n$ ، مجموع n جمله اولیه دنباله (S_n) را بیابید، سپس مجموع ۱۵ جمله اول آن را به‌دست آورید.

۱۳. اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = \frac{6n^2 - 5n}{12}$ باشد،

(آ) قدرنسبت و جمله اول آن را به‌دست آورید. (ب) مجموع ۱۰ جمله اول آن چقدر است؟

۱۴. در یک دنباله حسابی با ۲۰ جمله، مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲۴۰ و مجموع جملات ردیف زوج برابر با ۲۷۰ می‌باشد، جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۶ کتاب درسی)

۱۵. در یک دنباله حسابی با ۱۰ جمله، مجموع ۵ جمله اول برابر ۲۵ و مجموع ۵ جمله آخر برابر ۱۰۰ می‌باشد، جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

۱۶. در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 :

(آ) اگر قدرنسبت یک واحد افزایش یابد، به مجموع ۱۰ جمله اول آن چند واحد افزوده می‌شود؟

(ب) اگر همه جملات دو برابر شوند، مجموع ۱۰ جمله اول آن چند برابر می‌شود؟

۱۷. مجموع چند عدد طبیعی اولیه، $\frac{3}{5}$ مربع تعداد آن‌ها می‌باشد؟

۱۸. بر روی محیط یک دایره n نقطه قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. اگر تعداد کل پاره‌خط‌های ایجادشده برابر ۵۵ باشد، تعداد این

نقاط چند تا است؟ (این مسئله را به دو روش حل کنید.) (مشابه مثال صفحه ۳ کتاب درسی)

۱۹. یک موسسه خیریه در اولین سال فعالیت خود ۵۰۰ خانوار را تحت پوشش خود دارد. اگر هدف این موسسه آن باشد که هر سال ۴۰ خانوار را

به اعضای تحت پوشش خود بیفزاید، پس از ۱۰ سال مجموعاً چند خانوار را تحت پوشش خواهد داشت؟

۲۰. یک مسابقه دو، طوری طراحی شده که از کنار یک سبده شروع به دویدن کرده، در ایستگاه اول یک توپ برداشته، برمی‌گردیم و در سبده می‌اندازیم و

سپس تا ایستگاه دوم رفته و دو توپ برمی‌داریم و در سبده می‌اندازیم و به همین ترتیب تا ایستگاه n ام رفته، n توپ برمی‌داریم و در سبده

می‌اندازیم. اگر دوندۀای در مجموع ۵۵ توپ در سبده انداخته باشد و فاصله بین هر دو ایستگاه متوالی و هم‌چنین ایستگاه اول تا سبده، ۲ متر باشد،

مجموع مسافت‌های طی شده توسط این دوندۀای را بیابید. (مشابه مثال صفحه ۴ کتاب درسی)

مجموع مسافت‌های طی شده توسط این دوندۀای را بیابید.

پاسخ‌های تشریحی

۶ دنباله حسابی با $a_1=3$ و قدرنسبت $d=6$: $3, 9, 15, \dots, 99$ اعداد فرد مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰
حال تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n = 99 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 3 + (n-1)(6) = 99 \Rightarrow 6(n-1) = 96$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{96}{6} = 16 \Rightarrow n = 17$$

و بنابراین مجموع این جملات برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_n) = \frac{17}{2}(3 + 99) = \frac{17 \times 102}{2} = 867$$

۷ اعداد بخش‌پذیر بر ۱۵، بر ۳ و ۵ هم بخش‌پذیرند و اولین عدد سه‌رقمی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، ۱۰۵ است.

برای یافتن تعداد اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۱۵ داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d < 1000 \Rightarrow 105 + (n-1)(15) < 1000$$

$$\Rightarrow 15n + 90 < 1000 \Rightarrow 15n < 910 \Rightarrow n < \frac{910}{15} = 60.6 \Rightarrow n \leq 60$$

بنابراین داریم:

$$S_{60} = \frac{60}{2}(2a_1 + 59d) = \frac{60}{2}(2(105) + 59(15))$$

$$= 30(210 + 885) = 32850$$

۸ چون هر جمله از جمله قبلی به اندازه $\frac{1}{2}$ بیش‌تر است، پس

قدرنسبت دنباله حسابی برابر $d = \frac{1}{2}$ است و چون $a_7 = 13$ ، پس داریم:

$$a_7 = a_1 + 6d = 13 \xrightarrow{d = \frac{1}{2}} a_1 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 13$$

$$\Rightarrow a_1 + 3 = 13 \Rightarrow a_1 = 13 - 3 = 10$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = \frac{20}{2}(2(10) + 19\left(\frac{1}{2}\right))$$

$$= 10(20 + 9.5) = 295$$

۹

$$\begin{cases} a_7 = 32 \\ a_{12} = 12 \end{cases} \xrightarrow{a_n - a_m = (n-m)d} a_7 - a_{12} = (7-12)d$$

$$\Rightarrow 32 - 12 = -5d \Rightarrow d = -4$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 32 \xrightarrow{d = -4} a_1 + 6(-4) = 32 \Rightarrow a_1 = 32 + 24 = 56$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2}(2(56) + 14(-4))$$

$$= \frac{15}{2}(112 - 56) = \frac{15}{2} \times 56 = 420$$

۱

$$2(1) = 1 \times 2$$

$$2(1+2) = 2 \times 3$$

$$2(1+2+3) = 3 \times 4$$

:

$$2(1+2+\dots+n) = n \times (n+1) \Rightarrow 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲

$$1 = 1^2$$

$$1+3 = 2^2$$

$$1+3+5 = 3^2$$

$$1+3+5+7 = 4^2$$

$$1+3+5+7+9 = 5^2$$

:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

مجموع n عدد فرد اولیه

۳ با یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = -5$ و قدرنسبت $d = 0 - (-5) = 5$ مواجهه‌ایم. بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\xrightarrow{n=20} S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = \frac{a_1 = -5}{d=5} \frac{20}{2}(2(-5) + 19(5))$$

$$\Rightarrow S_{20} = 10(-10 + 95) = 10 \times 85 = 850$$

۴ با یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = -5$ و قدرنسبت $d = -3 - (-5) = 2$ مواجهه‌ایم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\xrightarrow{n=20} S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = \frac{a_1 = -5}{d=2} \frac{20}{2}(2(-5) + 19(2))$$

$$\Rightarrow S_{20} = 10(-10 + 38) = 10 \times 28 = 280$$

۵

$$4, 7, 10, \dots, 100$$

دنباله حسابی با $a_1=4$ و قدرنسبت $d=3$

حال تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$a_n = 100 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 4 + (n-1)(3) = 100 \Rightarrow 3(n-1) = 96$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{96}{3} = 32 \Rightarrow n = 33$$

$$\Rightarrow S_{33} = 4 + 7 + \dots + 100 = \frac{33}{2}(a_1 + a_n) = \frac{33}{2}(4 + 100)$$

$$\Rightarrow S_{33} = \frac{33 \times 104}{2} = 1716$$

$$a_7 = S_7 - S_1 = \frac{14}{12} - \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$$

$$d = a_7 - a_1 = \frac{13}{12} - \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$S_{10} = \frac{6(10)^2 - 5(10)}{12} = \frac{600 - 50}{12} = \frac{550}{12} = \frac{275}{6}$$

(ب)

$$a_1, a_7, a_7 + d, a_7 + 2d, \dots, a_7 + (n-1)d$$

۱۴

۱۰ جمله از دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$

$$\begin{cases} a_1 + a_7 + a_{11} + \dots + a_{19} = 240 \\ a_7 + a_9 + a_{11} + \dots + a_{19} = 270 \end{cases}$$

۱۰ جمله از دنباله حسابی با جمله اول a_7 و قدرنسبت $2d$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{2}(2a_1 + 9(2d)) = 240 \\ \frac{10}{2}(2a_7 + 9(2d)) = 270 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(2a_1 + 18d) = 240 \\ 5(2a_7 + 18d) = 270 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 18d = 48 \\ 2a_7 + 18d = 54 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} 20d - 18d = 54 - 48$$

$$\Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$$

$$\xrightarrow{2a_1 + 18d = 48} 2a_1 + 18(3) = 48 \Rightarrow 2a_1 = 48 - 54 = -6$$

$$\Rightarrow a_1 = -3$$

۱۵

$$\begin{cases} a_1 + a_7 + \dots + a_{15} = 25 \Rightarrow \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = 25 \\ a_7 + \dots + a_{15} = 100 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_7 + 8d) = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{15}{2} \times 2(a_1 + 7d) = 25 \Rightarrow 15(a_1 + 7d) = 25 \\ \frac{9}{2} \times 2(a_7 + 4d) = 100 \Rightarrow 9(a_7 + 4d) = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 7d = \frac{5}{3} \\ a_7 + 4d = \frac{100}{9} \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} 7d - 3d = \frac{5}{3} - \frac{100}{9} \Rightarrow 4d = \frac{5 - 100}{9} = -\frac{95}{9}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{4} \times \frac{a_1 + 7d = \frac{5}{3}}{a_1 + 7(\frac{5}{3})} = \frac{5}{3} - \frac{35}{12} = \frac{20 - 35}{12} = -\frac{15}{12} = -\frac{5}{4}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 5(2a_1 + 9d)$$

۱۶

$$S'_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9(d+1)) = 5(2a_1 + 9d + 9) = 5(2a_1 + 9d) + 45$$

$$\Rightarrow S'_{10} - S_{10} = 45 \Rightarrow \text{۴۵ واحد افزوده می‌شود.}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$$

(ب)

$$S'_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 2a_{10}) = 2(\frac{10}{2}(a_1 + a_{10})) = 2S_{10} \Rightarrow \text{۲ برابر می‌شود.}$$

فاکتور از ۲

$+6 +6$

دنباله حسابی با $a_1 = 3$ و $d = 6$ $3, 9, 15, \dots$

$$S_n > 300 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) > 300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(2(3) + (n-1)(6)) > 300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(6 + 6(n-1)) > 300 \xrightarrow{\text{فاکتور از ۶}} \frac{6n}{2}(1+n-1) > 300$$

$$\Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

حداقل ۱۱ جمله را باید با هم جمع کنیم.

۱۱

$$\begin{cases} a_7 = 3 \\ a_n - a_m = (n-m)d \\ a_7 = 12 \end{cases} \rightarrow a_7 - a_7 = (7-7)d$$

$$\Rightarrow 3 - 12 = (-3)d \Rightarrow d = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$\Rightarrow a_7 = a_1 + 6d = 3 \Rightarrow a_1 + 6(3) = 3 \Rightarrow a_1 = 3 - 18 = -15$$

$$S_n < 450 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) < 450$$

(ب)

$$\xrightarrow{\frac{a_1 = -15}{d = 3}} \frac{n}{2}(2(-15) + (n-1)(3)) < 450$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از ۳}} \frac{3n}{2}(n-5) < 450$$

$$\div \frac{3}{2} \rightarrow n(n-5) < 300 \Rightarrow n^2 - 5n - 300 < 0$$

$$\Rightarrow (n-20)(n+15) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -15 < n < 20$$

$$\xrightarrow{n > 0} n < 20 \Rightarrow n \leq 19$$

حداکثر ۱۹ جمله را می‌توانیم با هم جمع کنیم.

۱۲

$$a_n = 3 - 2n \Rightarrow a_1 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2}(1 + 3 - 2n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(-2n + 4) \xrightarrow{\text{فاکتور از ۲}} \frac{2n}{2}(-n + 2) = n(2 - n)$$

$$\Rightarrow S_{15} = 15(2 - 15) = 15 \times (-13) = -195$$

روش اول:

$$a_n = 3 - 2n \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = 3 - 2 = 1 \\ n=15 \rightarrow a_{15} = 3 - 2(15) = 3 - 30 = -27 \end{cases}$$

روش دوم:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}(1 - 27) = \frac{15 \times (-26)}{2} = -195$$

۱۳

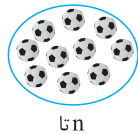
$$S_n = \frac{6n^2 - 5n}{12} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = a_1 = \frac{6-5}{12} = \frac{1}{12} \\ S_7 = a_1 + a_7 = \frac{6(49) - 5(7)}{12} = \frac{14}{12} \end{cases}$$

$$a_1 = 500, d = 40$$

۱۹

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times 500 + 9 \times 40)$$

$$\Rightarrow S_{10} = 5(1000 + 360) = 1360 \times 5 = 6800 \text{ خانوار}$$



۲۰

مجموع توپ‌هایی که دونده در سبد انداخته ۵۵ تاست، بنابراین داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 55 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 110 = 10 \times 11 \Rightarrow n = 10$$

یعنی دونده تا ایستگاه ۱۰ م دویده است و مسافت طی شده توسط او برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{برای ایستگاه اول} &= 2 \times 2 \\ \text{برای ایستگاه دوم} &= 4 \times 2 \\ \text{برای ایستگاه سوم} &= 6 \times 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{دنباله حسابی} \rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2(4) + 9(4)) = 5 \times 44 = 220 \text{ متر}$$

$$a_1 = 40, d = 4$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{3}{5}n^2 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2}{5}$$

۱۷

$$\Rightarrow \frac{n^2 + n}{2} = \frac{3n^2}{5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5n^2 + 5n = 6n^2$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n = 0 \xrightarrow{n \neq 0} n = 5$$

۱۸ روش اول: از نقطه اول به $(n-1)$ نقطه دیگر وصل

می‌کنیم $\leftarrow (n-1)$ پاره خط

از نقطه دوم به $(n-2)$ نقطه دیگر (همه به غیر از نقطه اول) وصل

می‌کنیم. $\leftarrow (n-2)$ پاره خط

از نقطه سوم به $(n-3)$ نقطه دیگر (همه به غیر از نقاط اول و دوم) وصل

می‌کنیم. $\leftarrow (n-3)$ پاره خط

با ادامه این روند، تعداد پاره‌خط‌های ایجادشده برابر است با:

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1$$

$$= \frac{(n-1)}{2} \left(\overbrace{(n-1) + 1}^n \right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n(n-1) = 110$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 11 \times 10 \Rightarrow n = 11$$

روش دوم (ترکیبیات): برای داشتن هر پاره‌خط کافی است دو نقطه از آن

را انتخاب کنیم، در نتیجه:

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها} = \binom{n}{2} = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 110 = 11 \times 10 \Rightarrow n = 11$$

درسنامه ۲

مجموع جملات دنباله هندسی

یادآوری از دنباله‌های هندسی

جملات دنباله‌های هندسی از ضرب عددی ثابت در جمله قبل آن به دست می‌آیند:

$$\begin{array}{ccccccc} \times q & & \times q & & \times q & & \\ \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\ a_1 & , & a_1 q & , & a_1 q^2 & , & a_1 q^3, \dots \end{array} \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$$

(a_n جمله عمومی (n ام) و q قدرنسبت دنباله می‌باشد).

بنابراین نسبت هر دو جمله متوالی در دنباله هندسی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$

نکته

اگر a ، b و c سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند، b را واسطه هندسی a و c می‌گویند و داریم:

$$b^2 = ac \quad \text{یا} \quad b = \pm \sqrt{ac}$$

۲ در ستاره

مثال

مقادیر x و y را در دنباله هندسی $\frac{1}{4}, x, y, \frac{1}{2}, \dots$ بیابید.

پاسخ: روش اول:

$$4, x, y, \frac{1}{4}, \dots \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \begin{cases} x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} \\ y^2 = \frac{1}{4}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x^4}{16} = \frac{x}{4} \Rightarrow 4x^4 = 16x \xrightarrow{\div(4x)} x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4} \xrightarrow{y = \frac{x^2}{4}} y = \frac{4}{4} = 1$$

روش دوم:

$$q^{4-1} = \frac{a_4}{a_1} \Rightarrow q^3 = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \\ y = x\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

مجموع جملات دنباله‌های هندسی

اگر $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی باشد، به کمک روش زیر می‌توان فرمولی برای S_n یافت:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad (*)$$

طرفین رابطه بالا را در q ضرب می‌کنیم:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad (**)$$

حالا اگر طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{(**) - (*)} qS_n - S_n = (a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n) - (a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-1})$$

$$\Rightarrow \underbrace{qS_n - S_n}_{\text{فاکتور از } S_n} = \underbrace{a_1q^n - a_1}_{\text{فاکتور از } a_1} \Rightarrow S_n(q-1) = a_1(q^n-1) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

مثال

مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ چند برابر جمله اول آن است؟

پاسخ:

دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{2}, q = 2, \dots$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{2}(2^{10}-1)}{2-1} = \frac{1}{2}(1024-1) = \frac{1023}{2} \Rightarrow \frac{S_{10}}{a_1} = \frac{\frac{1023}{2}}{\frac{1}{2}} = 1023$$

مثال

در یک دنباله هندسی، مجموع 10 جمله اول برابر 66 و مجموع 5 جمله اول برابر 64 است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} S_{10} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = 66 \\ S_5 = \frac{a_1(q^5-1)}{q-1} = 64 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.}} \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}} = \frac{66}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{a_1(q^{10}-1)(q-1)}{a_1(q^5-1)(q-1)} = \frac{66}{64} \rightarrow \frac{(q^5-1)(q^5+1)}{q^5-1} = \frac{66}{64}$$

$$\Rightarrow q^5 + 1 = \frac{66}{64} \Rightarrow q^5 = \frac{66}{64} - 1 \Rightarrow q^5 = \frac{2}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

۲ در ستاره

نکته

برای مجموع n جمله اول دنباله هندسی، یعنی S_n ، نیز رابطه‌های روبه‌رو برقرار است: ۲) $S_n - S_{n-1} = a_n$ ۱) $S_1 = a_1$

مثال

اگر مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی برابر با $S_n = 2^n - 1$ باشد، جمله اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1}$$

روش اول:

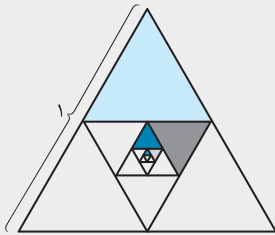
$$a_n = a_1 q^{n-1} \xrightarrow{a_1=1} \xrightarrow{a_n=2^{n-1}} 2^{n-1} = 1 \times q^{n-1} \Rightarrow q = 2$$

$$S_n = 2^n - 1 \begin{cases} \rightarrow S_1 = a_1 = 2 - 1 = 1 \\ \rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 1 + a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 2 \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$$

روش دوم:

مثال

اگر هر بار وسط اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع روبه‌رو را به هم وصل کنیم، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



پاسخ: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ برابر است با: $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

در هر مرحله مساحت رنگ‌شده $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ایجادشده است و مساحت مثلث ایجادشده $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث قبلی است:

$$a_1 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} S \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} S \right) \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

⋮

بنابراین با دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\left(\frac{1}{4}\right)$ مواجه‌ایم و مساحت قسمت رنگی ایجادشده برابر است با:

$$S_\infty = a_1 + a_2 + \dots + a_\infty = \frac{a_1(q^\infty - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\infty - 1 \right)}{\left(\frac{1}{4} - 1 \right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4^2} \times \frac{1 - 4^\infty}{4^\infty}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4^2} \times \frac{1 - 4^\infty}{4^\infty}}{-\frac{3}{4}} = \frac{341}{-4^6 \times 4^2} \sqrt{3} = \frac{341\sqrt{3}}{4096}$$

- در هر یک از دنباله‌های هندسی زیر، مجموع $10^{\text{ام}}$ جمله اول را بیابید.

(نهایی - فرداد ۹۱، با کمی تغییر)

$$.۲۱ \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

(نهایی - شهریور ۹۵، با کمی تغییر)

$$.۲۲ \quad \frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{80}, \dots$$

$$.۲۳ \quad \frac{1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$.۲۴ \quad \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \dots + 2048$$

$$.۲۵ \quad -1 - 3 - 9 \dots - 729$$

$$.۲۶ \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{729} - \frac{1}{128}$$

۲۷. مجموع چند جمله اول از دنباله هندسی $۱۲۰۲۴۰۰۰-۱۲۶$ برابر ۶ خواهد شد؟ (نهایی- فرداد ۹۰)
۲۸. در یک دنباله اعداد، هر جمله دو برابر جمله قبلی آن است. اگر مجموع ۵ جمله اول آن برابر $۴۶/۵$ باشد، جمله اول دنباله را بیابید.
۲۹. در یک دنباله هندسی جمله پانزدهم ۸ برابر جمله دوازدهم است. مجموع ۸ جمله اول این دنباله، چند برابر جمله اول آن است؟
۳۰. مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی ۹ برابر مجموع ۶ جمله اول آن است. قدرنسبت را بیابید.
۳۱. مجموع ۱۰ جمله دوم دنباله هندسی ۱۰۲۰۴۰۰۰ چند برابر مجموع ۱۰ جمله اول آن است؟

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۴ کتاب درسی)

۳۲. جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = 3 \times 2^n$ است،
(ب) مجموع ۵ جمله اول آن را بیابید. (مجموع چند جمله از این دنباله برابر با ۳۰۶۶ است؟)

۳۳. در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q ، مجموع ۱۰ جمله اول S می باشد.

(ا) اگر جمله اول را دو برابر کنیم، مجموع ۱۰ جمله اول چند برابر می شود؟

(ب) اگر قدرنسبت را به توان ۲ برسانیم، مجموع ۱۰ جمله اول را بر حسب S و q بیابید.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۴ کتاب درسی)

- درستی هر یک از تساوی های زیر را اثبات کنید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} \quad ۳۴$$

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1); \quad (n \text{ فرد}) \quad ۳۵$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad ۳۶$$

۳۷. اگر ضلع مربع ۱ واحد باشد و در هر مرحله وسط اضلاع مربع را به هم وصل کنیم تا مربع جدیدی حاصل شود، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



۳۸. طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از مرحله قبل را رنگ می کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است؟

(تمرین ۴ صفحه ۴ کتاب درسی و نهایی- دی ۹۴)

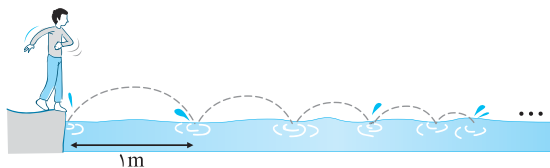
۳۹. برای از بین بردن ذرات معلق در یک محلول، آن را از صافی هایی عبور می دهیم. اگر در اثر عبور از هر صافی تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف شود، حداقل چند صافی نیاز است تا ذرات معلق موجود در محلول، حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد؟

(مشابه مثال صفحه ۵ کتاب درسی و نهایی- مدارس تهران)

۴۰. یک مثلث با محیط p را در نظر بگیرید و وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید تا مثلث کوچک تری ایجاد شود. این عمل را به طور متوالی انجام دهید. مجموع محیط مثلث های به دست آمده از مثلث اول تا مثلث مرحله دهم، چند برابر p است؟ (نهایی- فرداد ۹۴، با کمی تغییر)

۴۱. تویی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی زمین بخورد، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه اش بالا می رود. فرض کنید این توپ را به طور قائم از زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد. این توپ پس از شروع پرتاب تا ۶ امین برخورد به زمین در کل مسافت عمودی طی شده چه قدر است؟ (نهایی- فرداد ۹۰، با کمی تغییر)

۴۲. علی می خواهد پول خود را پس انداز کند. او روز اول ۳۰۰۰۰ تومان پس انداز می کند و روزهای دیگر میزان آن را ۱۰ درصد نسبت به روز قبل افزایش می دهد، پس از یک هفته چند تومان پس انداز می کند؟ $((1/1)^7 \approx 1/95)$



۴۳. کودکی سنگی را بر روی سطح آب پرتاب می کند. این سنگ در مسیر نیمه دایره هایی روی سطح آب حرکت می کند. اگر اولین برخورد سنگ با سطح آب ۱ متر جلوتر از کودک باشد و پس از هر برخورد سنگ با آب، قطر نیمه دایره ۵۰ درصد کاهش یابد، پس از ۵ امین برخورد با سطح آب:

(ب) سنگ چه مسافتی را پیموده است؟ $(\pi \approx 3/2)$

(آ) فاصله سنگ تا کودک چقدر است؟ (تا دو رقم اعشار)

۴۴. پدری برای کادوی سالگرد تولد فرزندش، سال اول ۱ سکه، سال دوم ۲ سکه، سال سوم ۴ سکه و به همین ترتیب هر سال دو برابر سال قبل سکه برای او پس انداز می‌کند. اگر بهای هر سکه ۱۰۰۰۰ تومان باشد، وقتی این فرزند به ۱۰ سالگی می‌رسد، چند سکه کادو گرفته و بهای کل آن‌ها چقدر است؟

۴۵. در مسئلهٔ مخترع شطرنج، اگر وزن هر دانهٔ گندم ۱ گرم باشد، نشان دهید این مخترع بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم جایزه دریافت خواهد کرد.

پاسخ‌های تشریحی

$$a_n = 2048 \Rightarrow a_1 q^{n-1} = 2048 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2048 \Rightarrow 2^{n-2} = 2^{11}$$

$$\Rightarrow n-2=11 \Rightarrow n=13$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \dots + 2048 = \frac{a_1(q^{13}-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{2}(2^{13}-1)}{2-1} = \frac{2^{13}-1}{2}$$

$$= \frac{8192-1}{2} = \frac{8191}{2} = 4095.5$$

۲۵ دنبالهٔ هندسی با $a_1 = -1$ و $q = 3$ و $-1, -3, -9, \dots, -729 \Rightarrow q = 3$ و $a_1 = -1$

$$a_n = -729 \Rightarrow a_1 q^{n-1} = -729 \Rightarrow (-1)3^{n-1} = -729 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^6$$

$$\Rightarrow n-1=6 \Rightarrow n=7$$

$$\Rightarrow -1 - 3 - 9 - \dots - 729 = \frac{a_1(q^7-1)}{q-1} = \frac{(-1)(3^7-1)}{3-1}$$

$$= -\frac{1}{2}(2187-1) = -\frac{2186}{2} = -1093$$

۲۶

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{729} - \frac{1}{128}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{729}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128}\right)$$

$$q = \frac{1}{3}, n=7 \quad q = \frac{1}{2}, n=7$$

$$= \frac{1(1-(\frac{1}{3})^7)}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{3^7}}{\frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^7})}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3-\frac{1}{3^6}}{2} - \left(1-\frac{1}{2^7}\right) = \frac{3^7-1}{2 \times 3^6} - \frac{2^7-1}{2^7}$$

۲۷

$$6, -12, 24, \dots \Rightarrow q = -2, a_1 = 6$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = -126 \Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = -126$$

$$\Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{3} = -126 \Rightarrow 1-(-2)^n = \frac{-126}{2} = -63$$

$$\Rightarrow (-2)^n = 1 - (-63) \Rightarrow (-2)^n = 64 \Rightarrow n=6$$

۲۱

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

دنبالهٔ هندسی با $a_1 = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{3}((\frac{1}{3})^{10}-1)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3^{10}}-1)}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(\frac{1-3^{10}}{3^{10}})}{-\frac{2}{3}} = \frac{1-3^{10}}{3^{10} \times (-2)} = -\frac{3^{10}-1}{2 \times 3^{10}}$$

۲۲

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{80}, \dots$$

دنبالهٔ هندسی با $a_1 = \frac{1}{5}$ و $q = \frac{1}{4}$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{5}((\frac{1}{4})^{10}-1)}{\frac{1}{4}-1} = \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{4^{10}}-1)}{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}(\frac{1-4^{10}}{4^{10}})}{-\frac{3}{4}} = \frac{4^{10}-1}{15 \times 4^9}$$

۲۳

$$\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

دنبالهٔ هندسی با $a_1 = \frac{1}{8}$ و $q = -2$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{8}((-2)^{10}-1)}{-2-1} = \frac{\frac{1}{8}(2^{10}-1)}{-3}$$

$$= \frac{1024-1}{-3 \times 8} = -\frac{1023}{24} = -\frac{341}{8}$$

۲۴

$$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots, 2048$$

دنبالهٔ هندسی با $a_1 = \frac{1}{2}$ و $q = 2$

۳۲ (آ)

$$a_1 = 6, a_r = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow q = \frac{a_r}{a_1} = 2$$

$$S_5 = \frac{6(1-2^5)}{1-2} = \frac{6(1-32)}{-1} = (-6)(-31) = 6 \times 31 = 186$$

$$S_n = 3066 \Rightarrow \frac{6(1-2^n)}{1-2} = 3066 \Rightarrow 6(2^n - 1) = 3066$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 = \frac{3066}{6} = 511 \Rightarrow 2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

(ب)

۳۳

$$S = \frac{a_1(1-q^1)}{1-q}$$

$$S_{1^0} = \frac{(2a_1)(1-q^1)}{1-q} = 2 \frac{a_1(1-q^1)}{1-q} = 2S \Rightarrow \text{برابر می شود.}$$

$$S_{1^0} = \frac{a_1(1-(q^r)^1)}{1-q^r} = \frac{a_1(1-(q^1)^r)}{1-q^r}$$

$$\frac{a_1(1-q^1)(1+q^1)}{(1-q)(1+q)} = \frac{1+q^1}{1+q} S$$

(آ)

(ب)

۳۴

جمله n

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} \xrightarrow{q=a} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{1(a^n - 1)}{a - 1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

۳۵ روش اول: با توجه به درستی تساوی مسئله قبل کافی است به جای a، (-a) قرار دهیم:

$$1 + (-a) + (-a)^2 + \dots + (-a)^{n-2} + (-a)^{n-1} = \frac{1 - (-a)^n}{1 - (-a)}$$

$$\xrightarrow{\text{فرد n}} 1 - a + a^2 + \dots - a^{n-2} + a^{n-1} = \frac{1 + a^n}{1 + a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots + a^2 - a + 1)$$

روش دوم:

$$1 - a + a^2 + \dots - a^{n-2} + a^{n-1} \xrightarrow{q=(-a)} \frac{1(1 - (-a)^n)}{1 - (-a)}$$

$$\xrightarrow{\text{فرد n}} \frac{1 + a^n}{1 + a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n + 1 = (a + 1)(1 - a + a^2 + \dots - a^{n-2} + a^{n-1})$$

۲۸ با یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ و سر و کار داریم، بنابراین:

$$S_5 = 46/5 \Rightarrow \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1} = 46/5 \xrightarrow{q=2} \frac{a_1(2^5 - 1)}{2 - 1} = 46/5$$

$$\Rightarrow a_1(32 - 1) = 46/5 \Rightarrow 31a_1 = 46/5$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{46/5}{31} = \frac{2}{5} = \frac{93}{2 \times 31} = \frac{3}{2}$$

۲۹

$$a_{15} = \lambda a_{12} \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^{14} = \lambda a_1 q^{11} \xrightarrow{\frac{a_1 \neq 0}{\div a_1}} q^{14} = \lambda q^{11}$$

$$\Rightarrow \frac{q^{14}}{q^{11}} = \lambda \Rightarrow q^3 = \lambda \Rightarrow q^3 = 2^3 \Rightarrow q = 2$$

$$S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{a_1(1-2^8)}{1-2} = -a_1(1-256)$$

$$= -(255)a_1 = 255a_1$$

۳۰

$$S_{12} = 9S_6 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = 9 \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1 - q^{12} = 9(1 - q^6) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (1 - q^6)(1 + q^6) = 9(1 - q^6)$$

$$\Rightarrow 1 + q^6 = 9 \Rightarrow q^6 = 8 \Rightarrow q = \pm \sqrt[6]{8}$$

۳۱

دنباله هندسی با $a_1 = 1$ و $q = 2$

$$1, 2, 4, \dots$$

$$S_{1^0} = \frac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^1 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 2^1 - 1 = 1024 - 1 = 1023$$

روش اول: ۱۰ جمله دوم از a_{11} شروع و به a_2 ختم می‌گردد، پس داریم:

$$\text{مجموع } 1^0 \text{ جمله دوم} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_2 \xrightarrow{q=2} \frac{a_{11}(2^1 - 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{a_1 q^{10}(1024 - 1)}{1} = 1 \times 2^{10}(1023) = 1024 \times 1023$$

روش دوم:

$$S_{2^0} = \frac{a_1(q^{2^0} - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^{2^0} - 1)}{2 - 1} = 2^{2^0} - 1$$

$$\text{مجموع } 1^0 \text{ جمله اول} - \text{مجموع } 2^0 \text{ جمله اول} = \text{مجموع } 1^0 \text{ جمله دوم}$$

$$= (2^{2^0} - 1) - (2^{1^0} - 1) = 2^{2^0} - 2^{1^0} = 2^{10} - 2^1 = 1024 \times 1023$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع } 1^0 \text{ جمله دوم}}{\text{مجموع } 1^0 \text{ جمله اول}} = \frac{1024 \times 1023}{1023} = 1024$$

مرحله n مجموع مساحت‌های رنگ‌شده در $S_n = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \dots + (\frac{1}{4})^n$

$$\frac{a_1 = \frac{1}{4}}{q = \frac{1}{4}} \cdot \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{4}((\frac{1}{4})^n - 1)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4^n} - 1)}{-\frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{4^n}$$

$$S_n \geq \frac{99}{100} \times 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{4^n} \leq 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

پس از ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است.

۳۹ میزان کاهش ذرات در هر مرحله به صورت زیر است:

مرحله اول: $\frac{1}{4}$ ، مرحله دوم: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ ، مرحله سوم: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ ، ...

$$\Rightarrow \text{مرحله } n \text{ ام} = (\frac{1}{4})^n$$

بنابراین پس از n مرحله میزان کاهش ذرات برابر است با:

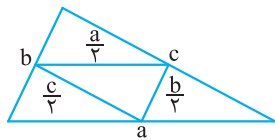
$$S_n = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots + (\frac{1}{4})^n \frac{a_1 = \frac{1}{4}}{q = \frac{1}{4}} \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 1 - (\frac{1}{4})^n$$

$$S_n > \frac{96}{100} \Rightarrow 1 - (\frac{1}{4})^n \geq \frac{96}{100} \Rightarrow (\frac{1}{4})^n \leq \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{25} \Rightarrow 2^n \geq 25 \Rightarrow n \geq 5$$

۴۰ بنابه قضیه تالس، در هر بار طول اضلاع مثلث ایجادشده نصف طول اضلاع مثلث قبل است، بنابراین:



محیط مثلث اول: $a_1 = p$

محیط مثلث دوم: $a_2 = \frac{1}{2}p$

محیط مثلث سوم: $a_3 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}p) = (\frac{1}{4})^2 p$

⋮

محیط مثلث n ام: $a_n = (\frac{1}{4})^{n-1} p$

$$S_{10} = p + \frac{1}{4}p + \dots + (\frac{1}{4})^9 p \frac{a_1 = p}{q = \frac{1}{4}} \frac{p(1 - (\frac{1}{4})^{10})}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 2p(1 - \frac{1}{4^{10}})$$

$$S_{10} = 2p(\frac{4^{10} - 1}{4^{10}}) = \frac{4^{10} - 1}{4^9} p = \frac{1024 - 1}{512} p = \frac{1023}{512} p$$

۳۶

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

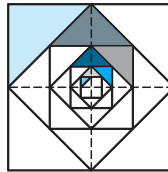
$$\frac{x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}}{q = \frac{y}{x}} = \frac{x^{n-1}((\frac{y}{x})^n - 1)}{\frac{y}{x} - 1} = \frac{x^{n-1}(\frac{y^n - x^n}{x^n})}{\frac{y-x}{x}}$$

$$= \frac{y^n - x^n}{x} \frac{x(y^n - x^n)}{x(y-x)} = \frac{x^n - y^n}{x - y}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

۳۷ در مربع اول (بزرگ‌ترین مربع) مساحت قسمت رنگی $\frac{1}{8}$ مساحت مربع است. به همین ترتیب در هر مرحله، مساحت قسمت رنگی از هر

مربع، $\frac{1}{8}$ مساحت همان مربع است.



بنابراین اگر a_n مساحت مثلث رنگی در مربع n ام باشد، چون مساحت مربع‌ها هر بار نصف می‌گردد، داریم:

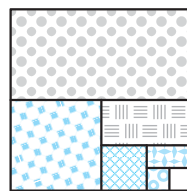
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{8} & (1) \\ a_2 = \frac{1}{8}(\frac{1}{2} \times 1) \\ a_3 = \frac{1}{8}(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1) \\ \vdots \end{cases}$$

دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{8}$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{مساحت رنگی} = S_7 = a_1 + a_2 + \dots + a_7 = \frac{a_1(q^7 - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}((\frac{1}{2})^7 - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{8}(\frac{1}{2^7} - 1)}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{8}(\frac{1 - 2^7}{2^7})$$

$$= -\frac{1}{4}(\frac{1 - 128}{128}) = -\frac{1}{4}(\frac{-127}{128}) = \frac{127}{4 \times 128} = \frac{127}{512}$$



$$a_1 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{باقی مانده}} \frac{1}{4}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = (\frac{1}{4})^2 \xrightarrow{\text{باقی مانده}} \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = (\frac{1}{4})^3$$

⋮

$$a_n = (\frac{1}{4})^n$$

۳۸

$$P_1 = \frac{1}{2}(\pi d_1) = \frac{\pi}{2} d_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(\pi d_2) = \frac{\pi}{2} d_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right) \leftarrow \times (\frac{1}{2})$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(\pi d_3) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leftarrow \times (\frac{1}{2})$$

⋮

$$\Rightarrow \text{مسافت پیموده شده} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$= S_\Delta = \frac{\frac{\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{31}{16}$$

$$= \frac{31}{32} \pi = \frac{31 \times 3.14}{32} = 3.1 \text{ متر}$$

۴۴ دنباله تعداد سکه‌های کادو گرفته برابر است با:

۱، ۲، ۴، ۸، ...

$$\Rightarrow \text{تعداد کل سکه‌ها} = S_{a_1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^n)}{1-2}$$

$$= -\frac{1-2^n}{-1} = 2^n - 1$$

تومان بهای کل = $2^{23} \times 10000 = 10,230,000$

۴۵ وزن کل گندم‌های جایزه مخترع برابر است با:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{64} = \frac{1(2^{65} - 1)}{2 - 1} = 2^{65} - 1$$

n = 65 و q = 2 دنباله هندسی با

از طرفی داریم:

$$2^{10} \approx 1000 \Rightarrow 2^{30} \approx 10^9 \xrightarrow{\text{توان } 6} 2^{60} \approx (10^3)^6 = 10^{18}$$

$$\Rightarrow 2^{65} - 1 \approx 2^5 \times 10^{18} = 32 \times 10^{18}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$10^{15} \text{ گرم} = 10^9 \times 1000 \times 1000 = 1 \text{ میلیارد تن}$$

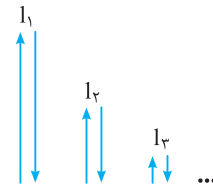
بنابراین جایزه مخترع تقریباً ۳۲۰۰۰ میلیارد تن گندم است.

(ب)

۴۱ ارتفاع‌هایی که توپ پس از هر بار زمین خوردن بالا می‌آید، تشکیل

یک دنباله هندسی با قدرنسبت $q = \frac{1}{3}$ می‌دهد:

$$\begin{cases} l_1 = 9 \\ l_2 = \frac{1}{3} l_1 \\ l_3 = \frac{1}{3} l_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 l_1 \\ \vdots \\ l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} l_1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{مسافت طی شده} = 2(l_1 + l_2 + \dots + l_n) = 2S_\ell = 2 \times \frac{l_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$q = \frac{1}{3} \Rightarrow 2 \times \frac{9 \left(\left(\frac{1}{3} \right)^6 - 1 \right)}{\frac{1}{3} - 1} = 2 \times 9 \times \frac{1 - 3^6}{3^6} = 2 \times 9 \times \frac{1 - 3^6}{3^6}$$

$$= -\frac{1 - 729}{27} = \frac{729 - 1}{27} = \frac{728}{27} \approx 26.96 \text{ متر}$$

$$a_1 = 30000$$

$$a_2 = a_1 + 0.1a_1 = (1.1)a_1$$

$$a_3 = a_2 + 0.1a_2 = (1.1)a_2 = (1.1)^2 a_1$$

⋮

$$a_n = (1.1)^{n-1} a_1$$

بنابراین با یک دنباله هندسی با $a_1 = 30000$ و $q = (1.1)$ مواجه هستیم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - (1.1)^n)}{1 - 1.1} = \frac{30000(1 - (1.1)^n)}{-0.1} = 300000((1.1)^n - 1)$$

$$= 300000(1.1^{95} - 1) = 300000 \times 0.95 = 30000 \times 95 = 285000 \text{ تومان}$$

$$\text{قطر } d_1 = 1$$

$$d_2 = d_1 - 0.5d_1 = 0.5d_1 = 0.5$$

$$d_3 = d_2 - 0.5d_2 = 0.5d_2 = (0.5)^2$$

⋮

بنابراین قطر نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنباله هندسی با قدرنسبت $q = 0.5$ می‌دهند.

$$\text{فاصله سنگ و کودک} = d_1 + d_2 + \dots + d_n = S_\Delta = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$= \frac{1(1 - (0.5)^5)}{1 - 0.5} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{16} \approx 1.93 \text{ متر}$$