درسنامه ۳

بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

شمارنده

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی شیء بدون آن‌که باقی‌مانده‌ای داشته باشد، «عاد کردن» یا شمارش آن اشـیاء توسط شمارنده‌ها می‌نامیم. به عنوان مثال ۱۸ شیء را می‌توان توسط شمارنده‌های ۱۸ یعنی ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ و ۱۸ شمارش کرد. برای نمایش این مفهوم از نماد « | » به معنی عاد کردن یا همان شمردن استفاده می‌کنیم. به طوری‌که می‌نویسیم ۱۸|۳ و می‌خوانیم:

آ) ۳ می‌شمارد عدد ۱۸ را

ب) ۳ عاد می‌کند عدد ۱۸ را

پ) عدد ۱۸ بر ۳ بخش‌پذیر است. (باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است.)

عاد کردن

عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است (یا a، b را می‌شمارد یا b بر a بخش‌پذیر است یا $a\mid b$)، هرگاه عـدد صـحیحی چـون q وجود داشته باشد به طوری‌که $b = aq$. (اگر b بر a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند، آن را به‌صورت $a \nmid b$ نمایش می‌دهیم.)

قرارداد: چون بی‌شمار عدد صحیح مانند q وجود دارد که در $0 \times q = 0$ صدق می‌کند، به معنی آن است که صفر عدد صفر را می‌شمارد و این به‌صـورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

نکته

اگر a عددی طبیعی باشد، داریم $1\mid a$ و $a\mid a$ یعنی هر عدد بر خودش و عدد ۱ بخش‌پذیر است، مانند :

$$1\mid 7 \xleftrightarrow{(q=7)} 7 = 1\times 7 \quad , \quad 5\mid 5 \xleftrightarrow{(q=1)} 5 = 5\times 1$$

مثال

با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، دلیل درستی رابطه‌های زیر را بیان کنید.

آ) $5\mid 45$ ب) $-3\mid 39$ پ) $4\mid -32$ ت) $5\nmid 17$

پاسخ:

آ) $5\mid 45 \xleftrightarrow{q=9} 45 = 5\times 9$

ب) $-3\mid 39 \xleftrightarrow{q=-13} 39 = (-3)\times(-13)$

پ) $4\mid -32 \xleftrightarrow{q=-8} -32 = 4\times(-8)$

ت) $5\nmid 17 \Rightarrow \frac{17}{5} \notin \mathbb{Z}$

خواص و ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

۱) اگر a عاد کند عدد ۱ را آن‌گاه $a = 1$ یا $a = -1$

$$\boxed{a\mid 1 \Rightarrow a = \pm 1}$$

۲) برای هر عدد طبیعی m و n که n بزرگ‌تر یا مساوی m باشد، داریم $a^m \mid a^n$

$$\boxed{\forall m,n \in \mathbb{N}, m \le n \Rightarrow a^m \mid a^n}$$

مثال : $2^4 \mid 2^9 \xrightarrow{q=2^5} 2^9 = 2^4 \times 2^5$

۳) اگر عدد a عدد b را بشمارد، آن‌گاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد، یعنی:

$$\boxed{a\mid b \Rightarrow a\mid mb}$$

مثال : $7\mid 14 \Rightarrow 7\mid 14\times 5 \,,\, 7\mid 14\times(-3) \,,\, 7\mid 14\times 12$

۴) اگر a عدد b را بشمارد، آن‌گاه b^2 را می‌شمارد و در حالت کلی $(n\in\mathbb{N})$، b^n را می‌شمارد.

$$\boxed{a\mid b \Rightarrow a\mid b^2} \quad , \quad \boxed{a\mid b \Rightarrow a\mid b^n}$$

مثال : $3\mid 6 \Rightarrow 3\mid 6^2 \quad , \quad 3\mid 6 \Rightarrow 3\mid 6^n$

۱- تا پایان این فصل، منظور از عدد، عدد صحیح است.

درسنامه ۳

۵) اگر عدد a، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن‌گاه a، عدد c را می‌شمارد. این خاصیت را خاصیت تعدی برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

$$\boxed{a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c}$$

مثال: $۳|۹ \wedge ۹|۱۸ \Rightarrow ۳|۱۸$

۶) هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c}$$

مثال: $۷|۱۴ \wedge ۷|۲۱ \Rightarrow \begin{cases} ۷|۱۴+۲۱ \Rightarrow ۷|۳۵ \\ ۷|۱۴-۲۱ \Rightarrow ۷|-۷ \end{cases}$

۷) اگر $a|b$ و $b \neq ۰$ در این‌صورت $|a| \leq |b|$

$$\boxed{a|b \wedge b\neq ۰ \Rightarrow |a|\leq|b|}$$

از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که اگر $a|b$ و $b|a$، آن‌گاه $a=\pm b$

مثال: $۵|-۲۵ \Rightarrow |۵|\leq|-۲۵| \Rightarrow ۵\leq ۲۵$ ، $-۵|۲۵ \Rightarrow |-۵|\leq|۲۵| \Rightarrow ۵\leq ۲۵$ ، $-۵|-۲۵ \Rightarrow |-۵|\leq|-۲۵| \Rightarrow ۵\leq ۲۵$

۸) اگر $a|b$، آن‌گاه داریم $a^n|b^n$

$$\boxed{a|b \Rightarrow a^n|b^n}$$

مثال: $۳|-۶ \Rightarrow \begin{cases} ۳^۲|(-۶)^۲ \Rightarrow ۹|۳۶ \\ ۳^۳|(-۶)^۳ \Rightarrow ۲۷|-۲۱۶ \end{cases}$

۹) اگر $a|b$ و $c|d$، آن‌گاه داریم $ac|bd$

(دو طرف بخش‌پذیری را می‌توان در هم ضرب کرد.)

$$\boxed{a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd}$$

مثال: $۴|۱۲ \text{ ، } ۵|۱۵ \Rightarrow ۴\times ۵|۱۲\times ۱۵ \Rightarrow ۲۰|۱۸۰$

۱۰) اگر $a|b$ و $a|c$، آن‌گاه $a|mb\pm nc$ (m و n اعداد صحیح‌اند.)

$$\boxed{a|b \wedge a|c \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a|mb\pm nc \text{ , } (n,m\in\mathbb{Z})}$$

مثال: $۲|۶ \text{ , } ۲|۴ \xrightarrow{n=۵,m=۳} \begin{cases} ۲|۳\times۶+۵\times۴ \Rightarrow ۲|۱۸+۲۰ \Rightarrow ۲|۳۸ \\ ۲|۳\times۶-۵\times۴ \Rightarrow ۲|۱۸-۲۰ \Rightarrow ۲|-۲ \end{cases}$

مثال

از رابطهٔ $۵n^۲-۸n+۴|۱$ چند مقدار طبیعی برای n به‌دست می‌آید؟

پاسخ: با توجه به ویژگی شمارهٔ یک داریم:

$$۵n^۲-۸n+۴=\pm۱ \Rightarrow \begin{cases} ۵n^۲-۸n+۴=+۱ \\ ۵n^۲-۸n+۴=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵n^۲-۸n+۳=۰ \xrightarrow{\Delta=۶۴-۴(۵)(۳)=۴} n_۱=۱ \text{ , } n_۲=\frac{۳}{۵}\notin\mathbb{N} \text{ (غ‌ق‌ق)} \\ ۵n^۲-۸n+۵=۰ \xrightarrow{\Delta=۶۴-۴(۵)(۵)=-۳۶} \Delta=-۳۶<۰ \text{ معادله جواب ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین فقط یک مقدار عدد طبیعی یعنی $n=۱$ به‌دست می‌آید.

عدد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. این مجموعه که مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,\dots\}$ نمایش داده می‌شود.

نکته

اگر p عددی اول و a عددی طبیعی باشد و $a|p$، در این‌صورت $a=۱$ یا $a=p$

درسنامه ۳

مثال اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $(7k+8)$ و $(6k+5)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=13$

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} a\mid 7k+8 \xrightarrow{(\times 6)} a\mid 6(7k+8)\Rightarrow a\mid 42k+48 \\ a\mid 6k+5 \xrightarrow{(\times 7)} a\mid 7(6k+5)\Rightarrow a\mid 42k+35 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ویژگی ۱۰}]{\text{ترکیب خطی}} a\mid (42k+48)-(42k+35)$$

$$\Rightarrow a\mid \cancel{42k}+48-\cancel{42k}-35 \Rightarrow a\mid 13 \xrightarrow{\text{۱۳ عددی اول است.}} a=13 \text{ یا } a=1$$

سؤالات امتحانی

۶۵. در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

آ) اگر $a\mid 1$ آن‌گاه a برابر .... یا .... است.

ب) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a\mid p$، در این‌صورت a برابر .... یا .... است.

پ) اگر $a\mid b$ و $b\mid a$، آن‌گاه a برابر .... یا .... است.

ت) اگر $a\mid b$ و .... ، آن‌گاه $ac\mid bd$

ث) اگر $a\mid 0$ آن‌گاه a برابر .... است.

۶۶. درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را با دلیل بیان کنید.

آ) اگر $a\mid 17$، آن‌گاه $a\mid 51$

ب) اگر $a\mid 24$، آن گاه $a\mid 6$ یا $a\mid 8$

پ) اگر $a\mid 19$، آن‌گاه $4a\mid 76$

ت) اگر $a\mid 3$، آن‌گاه $a\mid 243$

ث) از این‌که $a\mid b+c$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a\mid c$ یا $a\mid b$

۶۷. اگر فرض کنیم $ab=cd$ (a، b، c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این‌صورت سه رابطهٔ عاد کردن را از این تساوی نتیجه بگیرید.

(مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۶۸. از رابطهٔ $2n^2-7n+4\mid 1$ چند مقدار طبیعی برای n به‌دست می‌آید؟

۶۹. اگر $a\mid b$ ثابت کنید $a\mid -b$ ، $-a\mid b$ و $-a\mid -b$ (تمرین ۲ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۷۰. ثابت کنید اگر a عدد b را بشمارد، آن‌گاه b^2 را می‌شمارد و در حالت کلی $(n\in\mathbb{N})$، b^n را می‌شمارد.

آ) $a\mid b\Rightarrow a\mid b^2$

ب) $a\mid b\Rightarrow a\mid b^n$

۷۱. در صورت درست بودن عبارت‌های زیر، آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض برای آن‌ها بیاورید.

آ) آیا از این‌که $a\mid bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ چرا؟

ب) آیا از این‌که $a\mid b$ و $c\mid d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c\mid b+d$؟ چرا؟

۷۲. آیا از این‌که $a\mid b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka\mid kb$؟ آیا از $ka\mid kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a\mid b$؟ $(k\neq 0)$

۷۳. ثابت کنید اگر عدد a، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن‌گاه a، عدد c را می‌شمارد. $(a\mid b \wedge b\mid c\Rightarrow a\mid c)$

۷۴. ثابت کنید هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد. $(a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c)$

آیا عکس این مطلب درست است؟ $(a|b\pm c \Rightarrow a|b ، a|c)$

۷۵. ثابت کنید اگر $a|b$ و $b\neq 0$ در این صورت $|a|\le|b|$ $\quad(a ، b\in\mathbb{Z})$

۷۶. ثابت کنید اگر $a|b$ و $b|a$، آن‌گاه $a=\pm b$

۷۷. اگر $a|b$، نشان دهید $a^n|b^n$ (تمرین ۲ کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

۷۸. اگر $a\neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(6m+5)$ و $(5m+4)$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a=\pm 1$ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۷۹. اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷۰ که به‌صورت $5n+2$ و $2n-3$ بوده و نسبت به هم اول نیستند را به‌دست آورید.

۸۰. اگر $a>1$ و $a|4k+5$ و $a|7k+6$، ثابت کنید a عددی اول است. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۸۱. اگر kای در $\mathbb{Z}$ باشد که داشته باشیم $5|4k+2$، ثابت کنید $25|16k^2+36k+14$ (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۸۲. اگر $m،n\in\mathbb{Z}$ و $a،b\in\mathbb{Z}$ در این‌صورت ثابت کنید: $m\le n ، a|b \Rightarrow a^m|b^n$

(تمرین ۸ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۸۳. اگر $a|b$ و $c|d$ ثابت کنید $ac|bd$

۸۴. اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb\pm nc$

۸۵. ابتدا نشان دهید که $10!+3$ بر ۳ بخش‌پذیر است و سپس ۹ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند.

پاسخ‌های تشریحی

۶۵ آ) اگر $a|1$ آن‌گاه a برابر **+۱** یا **-۱** است.

ب) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$، در این‌صورت a برابر **۱** یا **p** است.

پ) اگر $a|b$ و $b|a$، آن‌گاه a برابر **+b** یا **-b** است.

ت) اگر $a|b$ و $c|d$، آن‌گاه $ac|bd$

ث) اگر $a|0$، آن‌گاه a برابر **صفر** است.

۶۶ آ) درست است، زیرا اگر a، ۱۷ را عاد کند، هر مضربی از ۱۷ را عاد می‌کند:
$a|17\Rightarrow a|3\times 17\Rightarrow a|51$

ب) نادرست است، زیرا به عنوان مثال اگر $a=12$، آن‌گاه $12|24$ ولی هیچ‌یک از دو رابطهٔ $12|6$ و $12|8$ درست نیست.

پ) درست است، زیرا می‌توانیم طرفین رابطهٔ عاد کردن را در یک عدد صحیح ضرب کنیم:
$a|19\Rightarrow 4a|4\times 19\Rightarrow 4a|76$

ت) درست است، زیرا اگر $a|b$ و $b|b^n$، آن‌گاه $a|b^n$

$a|3 ، 3|3^5 \Rightarrow a|3^5\Rightarrow a|243$

ث) نادرست است، زیرا: $10|6+14 \Rightarrow 10\nmid 6$ و $10\nmid 14$

۶۷ هر یک از a، b، c و d را می‌توانیم به جای q در نظر بگیریم:

۱) $ab=cd \xrightarrow{d=q} ab=cq\Rightarrow c|ab$

۲) $ab=cd \xrightarrow{c=q} ab=qd\Rightarrow d|ab$

۳) $ab=cd \xrightarrow{b=q} aq=cd\Rightarrow a|cd$

۶۸

$$2n^2-7n+4|1\Rightarrow 2n^2-7n+4=\pm 1\Rightarrow \begin{cases}2n^2-7n+4=+1\\ 2n^2-7n+4=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2n^2-7n+3=0 \xrightarrow{\Delta=49-4(2)(3)=25}\\ 2n^2-7n+5=0 \xrightarrow{\Delta=49-4(2)(5)=9}\end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3 ، n_2=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\ \text{(غقق)}\\ n_1=\frac{7+3}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}\ \text{(غقق)} ، n_2=\frac{7-3}{4}=\frac{4}{4}=1\end{cases}$$

بنابراین دو عدد طبیعی $n=1$ و $n=3$ به‌دست می‌آید.

۶۹ با توجه به فرض آن‌که $a|b$، داریم: $(q\in\mathbb{Z})$

$$a|b\Rightarrow b=aq\xrightarrow{\times(-1)} -b=a\overbrace{(-q)}^{q'}\Rightarrow -b=aq'\Rightarrow a|-b$$

$$a|b\Rightarrow b=aq\longrightarrow b=(-a)\overbrace{(-q)}^{q'}\Rightarrow b=(-a)q'\Rightarrow -a|b$$

$$a|b\Rightarrow b=aq\xrightarrow{\times(-1)} -b=(-a)(q)\Rightarrow -a|-b$$

۷۰ آ) $a|b\Rightarrow a|mb\xrightarrow{m=b} a|b\times b\Rightarrow a|b^2$

ب) روش اول: $a|b\Rightarrow a|mb\xrightarrow{m=b^{n-1}} a|b^{n-1}\times b\Rightarrow a|b^n$

روش دوم:

$$\begin{array}{l} a|b \quad \text{طبق فرض}\\ b|b^n \quad \text{خاصیت (۱)}\end{array}\Rightarrow a|b\wedge b|b^n \xrightarrow{\text{خاصیت تعدی}} a|b^n$$

۷۱ آ) خیر $12|24 \Rightarrow 12|3\times 8$ ، $12\nmid 3$ ، $12\nmid 8$: مثال نقض

ب) خیر : مثال نقض $2|4$ ، $9|9 \Rightarrow 11\nmid 13$

۷۲
$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\text{در } k \text{ ضرب}} kb=kaq \Rightarrow ka|kb$$
$$ka|kb \Rightarrow kb=kaq \xrightarrow{\text{بر } k \text{ تقسیم}} b=aq \Rightarrow a|b$$

---

۷۳ برای اثبات این خاصیت که به خاصیت تعدی برای رابطهٔ عاد کردن معروف است به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:
$$\left.\begin{matrix} a|b \Rightarrow b=aq\ \ (1)\\ b|c \Rightarrow c=bq' \end{matrix}\right\} \Rightarrow c=bq' \xrightarrow{(1)} c=(aq)q'$$
$$\Rightarrow c=a\overbrace{qq'}^{q''} \Rightarrow c=aq'' \Rightarrow a|c$$

۷۴
$$\begin{matrix} a|b \Rightarrow b=aq\\ a|c \Rightarrow c=aq' \end{matrix} \xrightarrow[\text{جمع و تفریق می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی را}} b\pm c=aq\pm aq'$$
$$\Rightarrow b\pm c=a(\overbrace{q\pm q'}^{q''}) \Rightarrow a|b\pm c$$

عکس این مطلب برقرار نیست زیرا: $6|6 \Rightarrow 6|4+2 \Rightarrow 6\nmid 4$ و $6\nmid 2$

$6|6 \Rightarrow 6|8-2 \Rightarrow 6\nmid 8$ و $6\nmid 2$

---

۷۵ چون $a|b$ پس $b=aq$ و چون $b\neq 0$ پس $q\neq 0$ و چون $q\in\mathbb{Z}$ لذا $|q|\geq 1$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت:
$$1\leq |q| \Rightarrow |a|\times 1\leq |a||q| \Rightarrow |a|\leq |aq| \xrightarrow{b=aq} |a|\leq |b|$$

۷۶
$$\left.\begin{matrix} a|b \xrightarrow{\text{خاصیت (۷)}} |a|\leq |b|\\ b|a \xrightarrow{\text{خاصیت (۷)}} |b|\leq |a| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$$

۷۷
$$a|b \Rightarrow b=aq \Rightarrow b^n=a^nq^n \xrightarrow{q^n=q'} b^n=a^nq'$$
$$\Rightarrow a^n|b^n$$

۷۸
$$\left.\begin{matrix} a|6m+5 \Rightarrow a|30m+25\\ a|5m+4 \Rightarrow a|30m+24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a|(30m+25)-(30m+24)$$
$$\Rightarrow a|\cancel{30m}+25-\cancel{30m}-24 \Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۷۹
$$\begin{cases} d|5n+2\\ d|2n-3 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|2(5n+2)-5(2n-3)$$
$$\Rightarrow d|\cancel{10n}+4-\cancel{10n}+15 \Rightarrow d|19$$

$d=19$ را در یکی از عادکردن‌های $d|2n-3$ یا $d|5n+2$ قرار می‌دهیم.
$$d=19 \Rightarrow 19|2n-3 \Rightarrow 2n-3=19k$$

چون n یک عدد طبیعی است، k باید فرد باشد.
$$\Rightarrow 2n=19k+3 \Rightarrow n=\frac{19k+3}{2}$$
$$\xrightarrow[k'\in\mathbb{Z}]{k=2k'+1\ \text{فرد}} n=\frac{19(2k'+1)+3}{2} \Rightarrow n=\frac{38k'+22}{2}$$
$$\Rightarrow n=19k'+11 \Rightarrow \begin{cases} k'=0 \Rightarrow n=11\\ k'=1 \Rightarrow n=30\\ k'=2 \Rightarrow n=49\\ k'=3 \Rightarrow n=68 \end{cases}$$

۸۰
$$\begin{cases} a|4k+5\\ a|7k+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|7(4k+5)\\ a|4(7k+6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|28k+35\\ a|28k+24 \end{cases}$$
$$\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a|(28k+35)-(28k+24) \Rightarrow a|\cancel{28k}+35-\cancel{28k}-24$$
$$\Rightarrow a|11 \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 11\\ a=\pm 1 \end{cases} \xrightarrow{(a>1)} a=11 \Rightarrow$$
$a=11$ عددی اول است.

---

۸۱ با توجه به فرض مسأله $5|4k+2$ طبق ویژگی عاد کردن $(a|b \Rightarrow a^n|b^n)$ داریم:
$$5|4k+2 \Rightarrow 5^2|(4k+2)^2 \Rightarrow 25|16k^2+16k+4 \quad (1)$$
از طرفی داریم:
$$5|4k+2 \Rightarrow 4k+2=5q \xrightarrow{\times 5} 5(4k+2)=25q$$
$$\Rightarrow 20k+10=25q \Rightarrow 25|20k+10 \quad (2)$$
$$\xrightarrow{\text{ترکیب خطی (۱) و (۲)}} 25|16k^2+16k+4+20k+10$$
$$\Rightarrow 25|16k^2+36k+14$$

---

۸۲ طبق ویژگی عاد کردن داریم:
$$a|b \Rightarrow a^m|b^m \quad (1)$$
از طرفی داریم:
$$(m\leq n) \Rightarrow b^n=b^m\times\underbrace{b^{n-m}}_{q} \Rightarrow b^n=b^m q \Rightarrow b^m|b^n \quad (2)$$
$$\xrightarrow{(1),(2)} a^m|b^m\ ,\ b^m|b^n \Rightarrow a^m|b^n$$

۸۳
$$\left.\begin{matrix} a|b \Rightarrow b=aq_1\\ c|d \Rightarrow d=cq_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b\times d=(aq_1)\times(cq_2)$$
$$\Rightarrow b\times d=(a\times c)\underbrace{(q_1\times q_2)}_{q} \Rightarrow b\times d=(a\times c)q \Rightarrow ac|bd$$

۸۴
$$\left.\begin{matrix} \text{طبق فرض}\ a|b \xrightarrow{\text{ویژگی (۳)}} a|mb\\ \text{طبق فرض}\ a|c \xrightarrow{\text{ویژگی (۳)}} a|\pm nc \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{(ویژگی ۶)}]{\text{ترکیب خطی}} a|mb\pm nc$$

۸۵ برای آن‌که نشان دهیم $۱۰!+۳$ بر ۳ بخش‌پذیر است به دو روش زیر می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

روش اول: $۱۰!+۳=۱۰\times۹\times\cdots\times۳\times۲\times۱+۳$

$$\xlongequal{\text{فاکتورگیری}} ۳(\underbrace{۱۰\times۹\times\cdots\times۴\times۲\times۱+۱}_{q})$$

$$\Rightarrow ۱۰!+۳=۳q \Rightarrow ۳\mid ۱۰!+۳$$

پس $۱۰!+۳$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

روش دوم:

$$\begin{cases} ۳\mid ۱۰! \\ ۳\mid ۳ \end{cases} \Rightarrow ۳\mid ۱۰!+۳$$

پس $۱۰!+۳$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

عدد $۱۰!+۲$ عددی غیراول است و همین‌طور عدد $۱۰!+۳$ عددی غیراول است و تا عدد $۱۰!+۱۰$ نیز غیراول می‌باشد. بنابراین با توجه به این‌که اعداد $(۱۰!+۲)$، $(۱۰!+۳)$، ... و $(۱۰!+۱۰)$، ۹ عدد طبیعی متوالی‌اند که هیچ کدام اول نیستند.

درسنامه ۴

مقسوم‌علیه مشترک

مقسوم‌علیه مشترک

مقسوم‌علیه همان شمارنده است، اگر بنویسیم $a\mid b$ یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است.

هم‌چنین می‌گوییم b مضرب a است یعنی $b=aq$ یا $a\mid b$

به عنوان مثال؛ وقتی می‌نویسیم $۷\mid ۲۸$ عبارت‌های زیر از آن استنتاج می‌شود:

۱) ۷ شمارندهٔ ۲۸ است. ۲) ۲۸ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۳) ۷ مقسوم‌علیه ۲۸ است. ۴) ۲۸ مضرب ۷ است، یعنی $۲۸=۷\times۴$

مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b: عدد صحیح c را یک مقسوم‌علیه مشترک a و b می‌گوییم هرگاه $c\mid a$ و $c\mid b$

مثال **مقسوم‌علیه‌های مشترک مثبت دو عدد ۱۸ و ۱۲ را به‌دست آورید.**

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۸} = \{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\} \\ \text{مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۲} = \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد ۱۸ و ۱۲} = \{۱,۲,۳,۶\}$$

مثال **اگر n عدد طبیعی و دو عدد $n-۵$ و $۸n+۱$ دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر از ۱ باشند، اعداد دو رقمی n را به‌دست آورید.**

پاسخ:

$$\begin{cases} d\mid ۸n+۱ \\ d\mid n-۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d\mid ۸n+۱-۸(n-۵) \Rightarrow d\mid \cancel{۸n}+۱-\cancel{۸n}+۴۰ \Rightarrow d\mid ۴۱ \Rightarrow d=۱\ (\text{غ‌ق‌ق}) \ \text{یا}\ d=۴۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴۱\mid n-۵ \Rightarrow n-۵=۴۱k \Rightarrow n=۴۱k+۵ \\ ۴۱\mid ۸n+۱ \end{cases} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \begin{cases} k=۰ \Rightarrow n=۵\ (\text{غیرقابل قبول}) \\ \left.\begin{array}{l} k=۱ \Rightarrow n=۴۶ \\ k=۲ \Rightarrow n=۸۷ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{جواب‌ها} \end{cases}$$

ب‌م‌م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک)

تعریف: عدد طبیعی d را ب‌م‌م دو عدد صحیح a و b می‌گوییم (a و b هر دو با هم صفر نیستند.) هرگاه دو شرط (آ) و (ب) برقرار باشند؛ می‌نویسیم $(a,b)=d$

آ) $d\mid a\ ,\ d\mid b$ ب) $\forall m>۰\ ;\ m\mid a\ ,\ m\mid b \Rightarrow m\le d$

شرط (آ) مقسوم‌علیه مشترک بودن d را مشخص می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواه دیگری چون m، بزرگ‌تر است.

درسنامه ۴

مثال **ب‌م‌م دو عدد ۲۴ و ۶۰ را به‌دست آورید.**

پاسخ: با در نظر داشتن این‌که ب‌م‌م، یک عدد طبیعی است و دو شرط (آ) و (ب) را دارد، آن عدد را به‌دست می‌آوریم.

مقسوم‌علیه‌های مثبت ۲۴ $=\{۱،۲،۳،۴،۶،۸،۱۲،۲۴\}$

مقسوم‌علیه‌های مثبت ۶۰ $=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۱۰،۱۲،۱۵،۲۰،۳۰،۶۰\}$

بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها ۱۲ است که هر دو شرط را دارد.

$$\begin{cases} \text{آ)}\ ۱۲|۲۴\ ,\ ۱۲|۶۰ \\ \text{ب)}\ m|۲۴\ ,\ m|۶۰ \Rightarrow m|۱۲ \end{cases} \Rightarrow (۲۴،۶۰)=۱۲$$

تعریف: اگر $(a،b)=۱$ در این‌صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اولند.

نکته

با توجه به تعریف ب‌م‌م داریم: $a|b \Rightarrow (a،b)=|a|$

۱) a و b نسبت به هم اولند. یعنی $(a،b)=۱$

مثال: $(۵،۶)=۱\ ,\ (۱،۱۴)=۱\ ,\ (-۲،۷)=۱\ ,\ (۴،۹)=۱$

۲) a و b نسبت به هم اول نیستند. $(a،b)=d،\ (d\geq ۲)$

مثال: $(۹،۱۲)=۳\ ,\ (۴،۸)=۴\ ,\ (-۸،-۱۲)=۴\ ,\ (-۳،۶)=۳$

طبق نکتهٔ بالا داریم: $a|b \Rightarrow (a،b)=|a|$ و $(۰،۵)=۵ \Rightarrow ۵|۰ \Rightarrow (۰،۵)=|۵|=۵$

نکته

اگر p عددی اول باشد و $a\in \mathbb{Z}$ و $p\nmid a$، آن‌گاه $(p،a)=۱$، دقت کنید که در مورد اعدادی که اول نباشند این نکته برقرار نیست مانند:

$$۸\nmid ۱۲ \xrightarrow{\text{ولی}} (۸،۱۲)=۴\neq ۱$$

مثال **ثابت کنید که $۸n+۷$ و $۹n+۸$ نسبت به هم اولند.**

پاسخ: برای اثبات $(۹n+۸،۸n+۷)=۱$ ابتدا d را ب‌م‌م آن در نظر می‌گیریم.

$$(۹n+۸،۸n+۷)=d \Rightarrow \begin{cases} d|۹n+۸ \\ d|۸n+۷ \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|۸(۹n+۸)-۹(۸n+۷)$$

$$\Rightarrow d|\cancel{۷۲n}+۶۴-\cancel{۷۲n}-۶۳ \xrightarrow{d>۰} d|۱ \Rightarrow d=۱$$

ک‌م‌م (کوچک‌ترین مضرب مشترک)

تعریف: عدد طبیعی c را ک‌م‌م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a،b]=c$ هرگاه دو شرط (آ) و (ب) برقرار باشند و اگر دو شرط (آ) و (ب) برقرار باشند، آن‌گاه $[a،b]=c$

آ) $a|c\ ,\ b|c$ ب) $\forall m>۰،\ a|m\ ،\ b|m \Rightarrow c\leq m$

شرط (آ) مضرب مشترک بین a و b که برابر c است را مشخص می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که c از هر مضرب مشترک دلخواه دیگری چون m، کوچک‌تر است.

مثال **ک‌م‌م دو عدد ۶ و ۱۰ را به‌دست آورید.**

پاسخ: با توجه به مضارب مثبت عدد ۶ و مضارب مثبت عدد ۱۰، کوچک‌ترین مضرب مشترک را با دو شرط (آ) و (ب) به‌دست می‌آوریم.

مضرب‌های مثبت ۶ $=\{۶،۱۲،۱۸،۲۴،۳۰،۳۶،۴۲،۴۸،۵۴،۶۰،...\}$

مضرب‌های مثبت ۱۰ $=\{۱۰،۲۰،۳۰،۴۰،۵۰،۶۰،...\}$

بنابراین کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۳۰ است که هر دو شرط را دارد.

$$\begin{cases} \text{آ)}\ ۶|۳۰\ ,\ ۱۰|۳۰ \\ \text{ب)}\ ۶|m\ ،\ ۱۰|m \Rightarrow ۳۰\leq m \end{cases} \Rightarrow [۶،۱۰]=۳۰$$

درسنامه ۴

قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این‌صورت (با تقسیم a بر b) اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$

(در یک تقسیم وقتی a را بر b تقسیم می‌کنیم، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.)

مثال

در معادله‌های زیر مقدار باقی‌مانده را به‌دست آورید.

آ) $a = 11q + 39$ ب) $a = 8q - 5$

پاسخ: در قضیهٔ تقسیم، برای باقی‌مانده باید رابطهٔ $0 \le r < b$ را داشته باشیم:

آ) $a = 11q + 39 \Rightarrow a = 11q + 33 + 6 \Rightarrow a = 11\underbrace{(q+3)}_{q'} + 6 \Rightarrow a = 11q' + 6 \Rightarrow r = 6$ باقی‌مانده

ب) در قضیهٔ تقسیم، باقی‌مانده باید مثبت باشد.

$a = 8q - 5 \Rightarrow a = 8q - 8 + 3 \Rightarrow a = 8\underbrace{(q-1)}_{q''} + 3 \Rightarrow a = 8q'' + 3 \Rightarrow r = 3$ باقی‌مانده

مثال

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۴ به ترتیب ۶ و ۴ باشند، در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $3m - 5n$ را بر ۱۴ به‌دست آورید.

پاسخ: طبق قضیهٔ تقسیم و فرض‌های مسئله داریم:

$$\begin{cases} m = 14q_1 + 6 \\ n = 14q_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 3 \times 14q_1 + 18 \\ 5n = 5 \times 14q_2 + 20 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3m - 5n = 14(3q_1 - 5q_2) + 18 - 20 = 14(\underbrace{3q_1 - 5q_2}_{q_3} \overbrace{+1-1}^{\text{اضافه و کم}}) - 2 = 14\underbrace{(q_3 - 1)}_{q} + 14 - 2 = 14q + 12 \Rightarrow r = 12$ باقی‌مانده

رابطهٔ بین (ک‌م‌م) و (ب‌م‌م)

اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $[a, b](a, b) = |ab|$

مثال

ک‌م‌م دو عدد ۴۲ و ۵۶ را با استفاده از ب‌م‌م دو عدد به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به آن‌که $42 = 3 \times 14$ و $56 = 4 \times 14$ پس ب‌م‌م این دو عدد برابر ۱۴ می‌باشد.

$(42, 56) = 14$

طبق فرمول داریم:

$[a, b](a, b) = |ab|$

$[42, 56] \times 14 = |42 \times 56| \Rightarrow [42, 56] = \frac{\overset{3}{\cancel{42}} \times 56}{\underset{1}{\cancel{14}}} = 3 \times 56$

$[42, 56] = 168$: ک‌م‌م دو عدد ۴۲ و ۵۶

یادآوری افراز یک مجموعه

فرض کنیم A یک مجموعهٔ غیرتهی باشد، گوییم A به $n(n \in \mathbb{N})$ زیرمجموعهٔ $A_1, A_2, \dots$ و A_n افراز شده است، اگر:

۱) برای هر $(1 \le i \le n)$، $A_i \ne \varnothing$ (هیچ‌یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشند.)

۲) برای هر $i \ne j$، $A_i \cap A_j = \varnothing$ (دو به دو جدا از هم باشند.)

۳) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ (اجتماع همهٔ زیرمجموعه‌ها برابر خود مجموعهٔ اصلی است.)

درسنامه ۴

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b و با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $\circ \le r < b$ صدق می‌کند، برای a بر حسب r، دقیقاً b حالت وجود دارد. به عنوان مثال اگر عدد صحیح a را به ۴ تقسیم کنیم، در این‌صورت یا a بر ۴ بخش‌پذیر است، یعنی $r = \circ$ یا باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴ عدد ۱، عدد ۲ یا عدد ۳ است، به عبارت دیگر $a = ۴k + ۳$ ، $a = ۴k + ۲$ ، $a = ۴k + ۱$ یا $a = ۴k$. پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از چهار صورت فوق نوشت:

چهار مجموعهٔ $A_۱ = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = ۴k\}$ ، $A_۲ = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = ۴k + ۱\}$ ، $A_۳ = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = ۴k + ۲\}$ و $A_۴ = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = ۴k + ۳\}$، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کند. پس هر عدد صحیح دلخواه حتماً و فقط در یکی از مجموعه‌های $A_۱$ تا $A_۴$ است.

مثال

اگر $a \in \mathbb{Z}$، نشان دهید که a را به یکی از دو صورت زوج یا فرد ($۲k + ۱$ یا $۲k$) می‌توان نوشت و سپس نشان دهید که حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است.

پاسخ: طبق قضیهٔ تقسیم کافی است که a را بر ۲ تقسیم کنیم که در این‌صورت داریم:

$\forall a \in \mathbb{Z} ؛ a = ۲k + r ، \circ \le r < ۲ \Rightarrow a = ۲k$ یا $a = ۲k + ۱ \ (k \in \mathbb{Z})$

پس هر عدد صحیح را به‌صورت اعداد زوج یا فرد می‌توان نوشت.

حال اگر a و $a + ۱$ را دو عدد صحیح متوالی در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} a = ۲k \Rightarrow a(a+۱) = ۲k(۲k+۱) = ۲\underbrace{(۲k^۲ + k)}_{k'} = ۲k' \\ a = ۲k+۱ \Rightarrow a(a+۱) = (۲k+۱)((۲k+۱)+۱) = (۲k+۱)(۲k+۲) = (۲k+۱)(۲(k+۱)) = ۲\underbrace{(۲k+۱)(k+۱)}_{k''} = ۲k'' \end{cases}$$

پس در هر دو حالت، حاصل‌ضرب دو عدد متوالی زوج است.

مثال

ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ می‌باشد.

پاسخ: هر عدد فرد را می‌توان به‌صورت $a = ۴k + ۱$ و $a = ۴k + ۳$ نوشت، پس مربع هر یک را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a = ۴k+۱ \Rightarrow a^۲ = (۴k+۱)^۲ = ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ = ۸\underbrace{(۲k^۲ + k)}_{k'} + ۱ = ۸k' + ۱ \\ a = ۴k+۳ \Rightarrow a^۲ = (۴k+۳)^۲ = ۱۶k^۲ + ۲۴k + ۹ = ۱۶k^۲ + ۲۴k + ۸ + ۱ = ۸\underbrace{(۲k^۲ + ۳k + ۱)}_{k''} + ۱ = ۸k'' + ۱ \end{cases}$$

پس در هر دو حالت، مربع عدد فرد به شکل $۸k + ۱$ نوشته می‌شود.

سـؤالات امتحـانی

۸۶. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

آ) اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، به طوری‌که $p \nmid a$، آن‌گاه $(a،p)$ برابر .... است.

ب) هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم ....

پ) هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم ....

ت) حاصل $[۹۶،۳۶]$ برابر .... است.

ث) حاصل $(۵۴،۱۹۲)$ برابر .... است.

ج) حاصل $[۳۲،(۱۲،۱۸)]$ برابر .... است.

۸۷. درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) حاصل‌ضرب چهار عدد طبیعی متوالی بر !۴ بخش‌پذیر است.

ب) اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $(a،b) \ne (b،a)$

پ) اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $(a،b) = (\pm a،\pm b)$

ت) اگر $a \mid b$ و حداقل یکی از a و b ناصفر باشند، $(a،b) = |a|$

ث) اگر $a \mid b$ و a و b دو عدد صحیح باشند، $[a،b] = |b|$

۸۸. با توجه به تعریف‌های ب‌م‌م و ک‌م‌م و با فرض این‌که a و b دو عدد صحیح باشند، ثابت کنید: (تمرین ۱ کار در کلاس صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

آ) $a \mid b \Rightarrow (a,b) = |a|$ ب) $a \mid b \Rightarrow [a,b] = |b|$

۸۹. اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$، ثابت کنید $(p,a) = ۱$ (تمرین ۲ کار در کلاس صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

۹۰. ثابت کنید: (تمرین ۶ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

آ) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌ند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌ند.

۹۱. اگر p و q هر دو عدد اول باشند $(p \neq q)$، ثابت کنید $(p,q) = ۱$ (تمرین ۷ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۹۲. اگر $d = (a-۵, a^۲ - ۶a + ۳)$ و $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه d را محاسبه کنید.

۹۳. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۹ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۷۲ بیابید.
(مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۹۴. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۸ به ترتیب ۴ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۲۴ بیابید.
(مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۹۵. ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند a را می‌توان به یکی از دو صورت $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ نوشت.

۹۶. اگر a و b دو عدد فرد باشند، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^۲ + b^۲ + ۳$ را بر ۸ بیابید. (مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۹۷. اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $۳ \mid n^۳ - n$ (مشابه تمرین ۱۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۹۸. اگر n عددی صحیح و فرد باشد، ثابت کنید $۸ \mid n^۳ - n$

۹۹. اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است. (مشابه تمرین ۱۲ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱۰۰. اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a، $a + ۲$ یا $a + ۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.
(مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱۰۱. ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است. (مشابه تمرین ۱۴ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱۰۲. ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است. (مشابه تمرین ۱۵ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱۰۳. حاصل هریک را به‌دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$ (مشابه تمرین ۱۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

آ) $([m^۳, m], m^۷)$ ب) $(۱۲m^۲, ۸m^۴)$ پ) $[m^{۱۲}, (m^۴, m^۶)]$

ت) $(۴m + ۲, ۴m + ۱)$ ث) $[(۹۰,۵۴), ۱۶۲]$

۱۰۴. ک‌م‌م دو عدد ۷۲ و ۹۶ را با استفاده از ب‌م‌م دو عدد به‌دست آورید.

پاسخ‌های تشریحی

۸۶ آ) اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، به طوری‌که $p \nmid a$، آن‌گاه (a,p) برابر **یک** است.

ب) هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم **اول‌اند.**

پ) هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم **اول‌اند.**

ت) ک‌م‌م دو عدد، $۳^۲ \times ۲^۲ = ۳۶$ و $۳ \times ۲^۵ = ۹۶$ برابر $\mathbf{۲۸۸ = ۳^۲ \times ۲^۵}$ است.

ث) ب‌م‌م دو عدد، $۳ \times ۲^۶ = ۱۹۲$ و $۲ \times ۳^۳ = ۵۴$ برابر $\mathbf{۶ = ۳ \times ۲}$ است.

ج) ابتدا ب‌م‌م دو عدد، $۲ \times ۳^۲ = ۱۸$ و $۳ \times ۲^۲ = ۱۲$ که برابر $۶ = ۳ \times ۲$ است را به‌دست می‌آوریم و سپس ک‌م‌م $۲^۵ = ۳۲$ و $۶ = ۳ \times ۲$ که برابر $\mathbf{۹۶ = ۳ \times ۲^۵}$ است، محاسبه می‌کنیم.

۸۷ آ) درست است، زیرا حاصل‌ضرب n عدد طبیعی متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

ب) نادرست است، زیرا اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $(b,a) = (a,b)$

پ) درست است، زیرا در ب‌م‌م دو عدد صحیح جواب همواره مثبت است و به مثبت یا منفی بودن a و b بستگی ندارد.

ت) درست است، زیرا اگر $a \mid b$ یعنی b بر a بخش‌پذیر است و در ب‌م‌م دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از a و b ناصفر باشند، جواب برابر $|a|$ است.

ث) نادرست است. زیرا اگر $a \mid b$ باید هر دو عدد a و b ناصفر باشند تا $[a,b] = |b|$ باشد.

۸۸ آ) برای اثبات باید دو شرط موجود در تعریف ب‌م‌م را برای $|a|$ بررسی کنیم. چون $a\,\big|\,|a|$ و طبق فرض $a|b$، پس $|a|$ یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است (شرط اول تعریف ب‌م‌م). حال فرض کنید m یک مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد، در این‌صورت $m|a$ و $m|b$. اما از $m|a$ می‌توان نتیجه گرفت $m \le |a|$، پس $|a|$ از هر مقسوم‌علیه مشترک دیگر a و b بزرگ‌تر است (شرط دوم تعریف ب‌م‌م).
بنابراین $(a,b)=|a|$

ب) برای اثبات باید دو شرط موجود در تعریف ک‌م‌م را برای $|b|$ بررسی کنیم. از $a|b$ فرض مسئله نتیجه می‌شود $a|\pm b$، بنابراین $a\,\big|\,|b|$ و از طرفی می‌دانیم $b\,\big|\,|b|$، پس $|b|$ یک مضرب مشترک a و b است (شرط اول). هم‌چنین اگر عدد طبیعی m یک مضرب مشترک a و b باشد، آن‌گاه $a|m$ و $b|m$. اما از $b|m$، نتیجه می‌شود $|b|\le|m|$، در نتیجه در بین مضارب مثبت مشترک a و b، عدد $|b|$ کوچک‌ترین عدد است (شرط دوم)، پس $[a,b]=|b|$

۸۹ با توجه به فرض‌های مسئله که $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$، فرض می‌کنیم که $d=(p,a)$، آن‌گاه داریم:

$$(p,a)=d \Rightarrow \begin{cases} d|p \xrightarrow{\text{عدد اول } p} d=1 \text{ یا } d=p \\ d|a \quad (1) \end{cases}$$

اگر $d=p$ با توجه به رابطهٔ (۱) داریم: $p|a$ که این با فرض $p\nmid a$ تناقض دارد. پس فقط $d=1$ و $(p,a)=1$

۹۰ آ) اگر m و $m+1$ را دو عدد صحیح متوالی در نظر بگیریم و فرض کنیم که $d=(m,m+1)$، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d|m \\ d|m+1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|m+1-m \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=\pm1 \Rightarrow d=1$$

بنابراین هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند.

ب) اگر $2m+1$ و $2m+3$ را دو عدد صحیح متوالی فرد در نظر بگیریم و فرض کنیم که $d=(2m+1,2m+3)$ آن‌گاه:

$$\begin{cases} d|2m+1 \\ d|2m+3 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|(2m+3)-(2m+1)$$

$$\Rightarrow d|\cancel{2m}+3-\cancel{2m}-1 \Rightarrow d|2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ d=2 \quad \text{عدد ۲ زوج است و غیرقابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین $d=1$ و هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند.

۹۱ فرض می‌کنیم p و q هر دو عدد اول و $p\neq q$ است.
اگر $d=(p,q)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d|p \xrightarrow{\text{عدد اول } p} \begin{cases} d=p \\ \text{یا} \\ d=1 \end{cases} \\ d|q \xrightarrow{\text{عدد اول } q} \begin{cases} d=q \\ \text{یا} \\ d=1 \end{cases} \end{cases}$$

p و q مخالف یکدیگر می‌باشند، پس تنها عامل مشترک $d=1$ است و نتیجه می‌شود $(p,q)=1$

۹۲

$$d=(a-5,\ a^2-6a+3)$$

$$\begin{cases} d|a-5 \xrightarrow{\times a} d|a^2-5a \\ d|a^2-6a+3 \rightarrow d|a^2-6a+3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d|(a^2-5a)-(a^2-6a+3) \Rightarrow d|a-3$$

$$\xrightarrow[d|a-5]{\text{ترکیب خطی}} d|(a-3)-(a-5) \Rightarrow d|2 \xrightarrow{d>0} \begin{cases} d=1 \\ \text{یا} \\ d=2 \end{cases}$$

۹۳ طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\left.\begin{aligned} a=9q+5 &\xrightarrow{\times 8} 8a=72q+40 \\ a=8q'+7 &\xrightarrow{\times 9} 9a=72q'+63 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a=72q'+63-72q-40$$

$$\Rightarrow a=72\overbrace{(q'-q)}^{q''}+23 \Rightarrow a=72q''+23 \Rightarrow r=23 \ (\text{باقی‌مانده})$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۷۲ برابر ۲۳ است.

۹۴ طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\left.\begin{aligned} a=6q+4 &\xrightarrow{\times 8} 8a=48q+32 \\ a=8q'+7 &\xrightarrow{\times 6} 6a=48q'+42 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 2a=48q+32-48q'-42$$

$$\Rightarrow 2a=48(q-q')-10 \Rightarrow 2a=48q''-48+38$$

$$\Rightarrow 2a=48(q''-1)+38 \Rightarrow 2a=48t+38$$

$$\Rightarrow a=24t+19 \Rightarrow r=19$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۴ برابر ۱۹ است.

۹۵ فرض می‌کنیم که $a\in\mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a=4k+r\ ,\ 0\le r<4$

$$\Rightarrow a=4k \ (1)\ ,\ a=4k+1 \ (2)\ ,\ a=4k+2 \ (3)\ ,\ a=4k+3 \ (4)$$

حالت‌های (۱) و (۳) زوج می‌باشند، بنابراین هر عدد صحیح فرد را می‌توان به‌صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشت.

۹۶ می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به‌صورت مضرب ۸ به اضافهٔ یک نوشت، پس مربع دو عدد فرد را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$a^2=8q+1\ ,\ b^2=8q'+1$$

در نتیجه داریم:

$$a^2+b^2+3=8q+1+8q'+1+3=8q+8q'+5$$

$$=8\underbrace{(q+q')}_{q''}+5=8q''+5 \Rightarrow r=5$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2+b^2+3 بر ۸ برابر $r=5$ می‌باشد.

۹۷ **روش اول (اشباع):** عدد صحیح n را به سه حالت $n=۳k$، $n=۳k+۱$ و $n=۳k+۲$ افراز می‌کنیم و در سه حالت بررسی می‌کنیم که $n^۳-n$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

حالت اول: $n=۳k\Rightarrow ۳|n\Rightarrow ۳|n(n-۱)(n+۱)$

$\Rightarrow ۳|n(n^۲-۱)\Rightarrow ۳|n^۳-n$

حالت دوم: $n=۳k+۱\Rightarrow n-۱=۳k\Rightarrow ۳|n-۱\Rightarrow ۳|(n-۱)n(n+۱)$

$\Rightarrow ۳|n(n^۲-۱)\Rightarrow ۳|n^۳-n$

حالت سوم: $n=۳k+۲\Rightarrow n+۱=۳k+۳\Rightarrow ۳(k+۱)=۳k'\Rightarrow ۳|n+۱$

$\Rightarrow ۳|(n+۱)n(n-۱)\Rightarrow ۳|n(n^۲-۱)\Rightarrow ۳|n^۳-n$

بنابراین در سه حالت بررسی‌شده، $n^۳-n$ همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

روش دوم (مستقیم): با توجه به این‌که:

$$A=n^۳-n=n(n^۲-۱)=n(n-۱)(n+۱)$$

پس A به‌صورت حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی نوشته‌شده که بر ۳ بخش‌پذیر است.

---

۹۸ همان‌طور که در درسنامه ثابت شد هر عدد صحیح فرد را می‌توان به‌صورت $n=۴k+۱$ و $n=۴k+۳$ نوشت. پس در دو حالت بررسی می‌کنیم که $n^۳-n=n(n^۲-۱)=n(n-۱)(n+۱)$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

حالت اول: $n=۴k+۱\Rightarrow\begin{cases}n-۱=۴k\\ n+۱=۴k+۲\end{cases}$

$\Rightarrow n(n-۱)(n+۱)=(۴k+۱)(۴k)(۴k+۲)$

$\Rightarrow n(n-۱)(n+۱)=(۴k+۱)۴(k)۲(k+۱)$

$=۸\underbrace{(۴k+۱)(k)(k+۱)}_{k'}=۸k'$

$\Rightarrow ۸|n(n-۱)(n+۱)\Rightarrow ۸|n^۳-n$

حالت دوم: $n=۴k+۳\Rightarrow\begin{cases}n+۱=۴k+۴\\ n-۱=۴k+۲\end{cases}$

$\Rightarrow n(n-۱)(n+۱)=(۴k+۳)(۴k+۲)(۴k+۴)$

$\Rightarrow n(n-۱)(n+۱)=(۴k+۳)۲(۲k+۱)۴(k+۱)$

$=۸\underbrace{(۴k+۳)(۲k+۱)(k+۱)}_{k'}=۸k'$

$\Rightarrow ۸|n(n-۱)(n+۱)\Rightarrow ۸|n^۳-n$

بنابراین $n^۳-n$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

---

۹۹ در تقسیم $a=bq+r$ به a مقسوم، به b مقسوم‌علیه، به q خارج‌قسمت و به r باقی‌مانده می‌گوییم. اگر a و b هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشد، یعنی:

$a=nk\Rightarrow n|a$

$b=nk'\Rightarrow n|b$ ، $a=bq+r\Rightarrow nk=(nk')q+r$

$\Rightarrow r=nk-nk'q=n\overbrace{(k-k'q)}^{q'}=nq'\Rightarrow n|r$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

---

۱۰۰ عدد صحیح a را به سه حالت $a=۳k$، $a=۳k+۱$ و $a=۳k+۲$ افراز می‌کنیم. در این‌صورت داریم:

حالت اول: $a=۳k\Rightarrow ۳|a$

حالت دوم: $a=۳k+۱\xrightarrow{+۲}a+۲=۳k+۱+۲$

$\Rightarrow a+۲=۳k+۳=۳\overbrace{(k+۱)}^{k'}=۳k'\Rightarrow ۳|a+۲$

حالت سوم: $a=۳k+۲\xrightarrow{+۴}a+۴=۳k+۲+۴$

$\Rightarrow a+۴=۳k+۶=۳\overbrace{(k+۲)}^{k''}=۳k''\Rightarrow ۳|a+۴$

طبق سه حالت، همواره یکی از اعداد صحیح a، $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

---

۱۰۱ اگر دو عدد صحیح متوالی را n و $n+۱$ در نظر بگیریم، تفاضل مکعب‌های دو عدد برابر است با:

$$(n+۱)^۳-n^۳=\cancel{n^۳}+۳n^۲+۳n+۱-\cancel{n^۳}=(۳n^۲+۳n)+۱$$

$$\overset{\text{فاکتور}}{=\!=}۳\underbrace{n(n+۱)}_{۲k}+۱=۳\times۲k+۱=۲\underbrace{(۳k)}_{k'}+۱$$

$\Rightarrow(n+۱)^۳-n^۳=۲k'+۱$ (عددی فرد)

---

۱۰۲ اگر سه عدد متوالی را n، $n+۱$ و $n+۲$ در نظر بگیریم، برای اثبات بخش‌پذیری $n(n+۱)(n+۲)$ بر $۳\times۲\times۱=۳!$، ثابت می‌کنیم بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است.

۱) بخش‌پذیری بر ۲:

$$\begin{cases}n=۲k\Rightarrow ۲|n\Rightarrow ۲|n(n+۱)(n+۲)\\ n=۲k+۱\Rightarrow n+۱=۲k+۲=۲(k+۱)=۲k'\\ \qquad\Rightarrow ۲|n+۱\Rightarrow ۲|n(n+۱)(n+۲)\end{cases}$$

بنابراین $n(n+۱)(n+۲)$ همواره بر ۲ بخش‌پذیر است.

۲) بخش‌پذیری بر ۳:

$$\begin{cases}n=۳k\Rightarrow ۳|n\Rightarrow ۳|n(n+۱)(n+۲)\\ n=۳k+۱\Rightarrow n+۲=۳k+۳=۳(k+۱)=۳k'\\ \qquad\Rightarrow ۳|(n+۲)\Rightarrow ۳|n(n+۱)(n+۲)\\ n=۳k+۲\Rightarrow n+۱=۳k+۳=۳(k+۱)=۳k''\\ \qquad\Rightarrow ۳|(n+۱)\Rightarrow ۳|n(n+۱)(n+۲)\end{cases}$$

بنابراین $n(n+۱)(n+۲)$ همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

پس با توجه به این‌که $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است، بر ۶ نیز بخش‌پذیر است.

---

۱۰۳ برای محاسبهٔ ب‌م‌م دو عدد a و b، عامل‌های مشترک را به‌دست می‌آوریم و با کوچک‌ترین توان می‌نویسیم و برای محاسبهٔ ک‌م‌م دو عدد a و b، حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عامل‌های غیرمشترک را محاسبه می‌کنیم.

آ) عامل مشترک با بزرگ‌ترین توان $[m^۳,m]=m^۳\quad(*)$

عامل مشترک با کوچک‌ترین توان $([m^۳,m],m^۷)\overset{(*)}{=\!=}(m^۳,m^۷)=m^۳$

ب) $(۱۲m^۲,۸m^۴)=(۲^۲\times۳m^۲,۲^۳m^۴)=۲^۲m^۲=۴m^۲$

پ) $(m^۴,m^۶)=m^۴\quad(*)$

$[m^{۱۲},(m^۴,m^۶)]\overset{(*)}{=\!=}[m^{۱۲},m^۴]=m^{۱۲}$