

درسنامه ۱

منطق ریاضی و گزاره‌ها

تعریف منطق ریاضی: از نظر دانشمندان علم منطق، منطق در واقع مجموعه‌ای از روش‌ها و قانون‌های درست فکر کردن و درست استدلال کردن می‌باشد و اولین دانشمند این علم، ارسطو بوده است. منطق ریاضی، شاخه‌ای از علم منطق است که به کمک یک سری از قانون‌ها و نمادها روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را نشان می‌دهد؛ ضمناً به کمک منطق ریاضی، ارزش گزاره‌ها را نیز تعیین می‌کنیم.

تعریف گزاره: گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش آن، می‌تواند درست یا نادرست باشد. مثلاً جمله «۳ عددی اول است.» یک گزاره با ارزش درست است؛ چون می‌دانیم عدد ۳ اول است.

تذکر مهم: جملات امری مانند «از عدد ۷۳ جذر بگیر.»، جملات پرسشی مثل «آیا عدد ۲ اول است؟» و جملات عاطفی مثل «چه دانشمند بزرگی!»، گزاره محسوب نمی‌شوند؛ ضمناً جملات خبری که نتوانیم اصلاً درستی یا نادرستی آن‌ها را بررسی کنیم هم، گزاره نیستند مانند جمله خبری «۱۰۰۰ عدد بزرگی است.» چون قانونی برای بزرگ یا کوچک بودن اعداد در ریاضی نداریم و امری سلیقه‌ای است.

مثال

مشخص کنید کدام‌یک از قسمت‌های زیر، گزاره هستند؟ سپس ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

(آ) عدد $۳/۵۶$ عددی گنگ نیست.

(ب) آیا ۱۲۰ بر ۳ بخش پذیر است؟

(ث) $۳ - ۴^۲ > ۵ + ۲^۳$

پاسخ: (آ) گزاره است و ارزش آن درست است.

(ب) گزاره نیست چون یک موضوع سلیقه‌ای است.

(پ) گزاره نیست چون جمله پرسشی است.

(ت) گزاره است و ارزش آن نادرست است، چون $۲n$ زوج است، لذا حاصل $(-۵)^{۲n}$ عددی مثبت می‌شود.

(ث) گزاره است و ارزش آن نادرست است، زیرا $۵ + ۲^۳ = ۱۳$ و $۴^۲ - ۳ = ۱۳$ پس گزاره $۱۳ > ۱۳$ نادرست است.

(ج) گزاره است و ارزش آن درست است، چون ۱۰۰ مربع کامل است و ضمناً کوچک‌ترین عدد ۳ رقمی و طبیعی است که مربع کامل است.

جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها): به منظور کم کردن حجم محاسبات، معمولاً گزاره‌ها را با یکی از حروف لاتین کوچک مثل p, q, r, s و ... نمایش

می‌دهند. به کمک جبر گزاره‌ها می‌توانیم گزاره‌های مرکبی بسازیم که از دو یا چند گزاره ساده تشکیل شده‌اند و سپس ارزش این گزاره‌های مرکب را تعیین می‌کنیم. بسیاری مواقع برای تعیین ارزش یک گزاره مرکب، باید نحوه قرار دادن گزاره‌های ساده تشکیل‌دهنده آن را در جدول ارزش‌گذاری بلد باشیم. به جدول‌های زیر دقت کنید:

در جدول‌های زیر، ارزش درست یک گزاره را با «د» و ارزش نادرست را با «ن» نمایش داده‌ایم.

p
د
ن

۱ = تعداد گزاره‌ها

۲ = تعداد حالت‌های جدول (ردیف‌های جدول)

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

۲ = تعداد گزاره‌ها

۴ = ۲^۲ = تعداد حالت‌های جدول

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

۳ = تعداد گزاره‌ها

۸ = ۲^۳ = تعداد حالت‌های جدول

درسنامه ۱

از جدول‌های قبل نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی اگر k گزاره داشته باشیم تعداد حالت‌های جدول (ردیف‌های جدول) برابر 2^k خواهد بود. مثلاً اگر ۵ گزاره داشته باشیم، در جدول ارزش‌گذاری آن‌ها به تعداد $2^5 = 32$ ردیف وجود خواهد داشت.

مثال یک جدول ارزش‌گذاری دارای ۶۴ ردیف می‌باشد. در این جدول، چند گزاره ساده وجود دارد؟

پاسخ: اگر n تعداد گزاره‌های ساده باشد خواهیم داشت:

$$n = 6 \Rightarrow 2^n = 2^6 = 64 \Rightarrow 2^n = \text{تعداد ردیف‌ها}$$

نقیض یک گزاره: نقیض گزاره‌ای مثل p ، گزاره‌ای است که ارزش آن، دقیقاً مخالف ارزش p باشد. نقیض p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم. برای ساختن نقیض گزاره‌های فارسی، کافی است فعل جمله را نفی کنیم؛ یعنی مثلاً اگر فعل جمله «است» بود به «نیست» تبدیل می‌شود یا اگر فعل جمله «نیست» بود به «است» تبدیل خواهد شد. روش دیگر این است که عبارت «چنین نیست که» را به ابتدای گزاره اضافه کنیم.

مثال نقیض گزاره «۱۲ بر ۳ بخش پذیر است.» را بنویسید.

پاسخ: نقیض این گزاره را به دو حالت می‌توان نوشت:

حالت اول: ۱۲ بر ۳ بخش پذیر نیست.

حالت دوم: چنین نیست که ۱۲ بر ۳ بخش پذیر است (البته به جای «است» از «باشد» هم می‌توان استفاده کرد).

تذکر مهم: اگر گزاره داده شده، شامل یک نماد ریاضی باشد، برای نقیض کردن آن به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱- نمادهای $<$ و \geq نقیض هم هستند. \Leftarrow **مثال:** گزاره‌های $x < y$ و $x \geq y$ نقیض هم هستند.

۲- نمادهای $>$ و \leq نقیض هم هستند. \Leftarrow **مثال:** گزاره‌های $5 > 7$ و $5 \leq 7$ نقیض هم هستند.

۳- نمادهای $=$ و \neq نقیض هم هستند. \Leftarrow **مثال:** گزاره‌های $x^2 = 4$ و $x^2 \neq 4$ نقیض هم هستند.

۴- نمادهای \in و \notin نقیض هم هستند. \Leftarrow **مثال:** گزاره‌های $2 \in \mathbb{N}$ و $2 \notin \mathbb{N}$ نقیض هم هستند.

۵- نمادهای \subseteq و $\not\subseteq$ نقیض هم هستند. \Leftarrow **مثال:** گزاره‌های $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$ نقیض هم هستند.

مثال نقیض عبارات و گزاره‌های زیر را نوشته و سپس ارزش هر گزاره و ارزش نقیضش را مشخص کنید.

(آ) عددی مربع کامل است. (ب) $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$

(پ) x عددی منفی است. (ت) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

پاسخ: (آ) عددی مربع کامل است. (نادرست) \leftarrow نقیض عددی مربع کامل نیست. (درست)

(ب) می‌دانیم که $3^0 = 1$ ، $3^2 = 9$ ، $4^2 = 16$ ، در نتیجه $3^0 + 2^1 + 3^2 = 1 + 2 + 9 = 12$ و چون $12 \neq 16$ ، گزاره $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$ درست است.

(پ) x عددی منفی است. (نادرست) \leftarrow نقیض $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$ (درست)

(ت) x عددی منفی است.

\downarrow نقیض

x عددی منفی نیست.

تذکر مهم: اگر کسی بگوید نقیض جمله « x عددی منفی است.» می‌شود « x عددی مثبت است.» اشتباه کرده؛ چون اگر x منفی نباشد ممکن است صفر یا مثبت باشد پس نمی‌توانیم بگوییم حتماً مثبت است.

(ت) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ (درست) \leftarrow نقیض $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ (نادرست)

جدول نقیض

اگر p گزاره‌ای دلخواه و $\sim p$ نقیض آن باشد، آن‌گاه جدول مربوط به این دو گزاره به شکل زیر است:

p	$\sim p$
د	د
د	ن

درسنامه ۱

دو گزاره هم‌ارز: دو گزاره p و q را در صورتی هم‌ارز می‌گوییم که ارزش یکسان داشته باشند (هم‌ارزش باشند) یعنی هر دو «درست» یا هر دو «نادرست» باشند. نماد هم‌ارزی به شکل \equiv می‌باشد، پس هم‌ارزی p و q را به صورت $p \equiv q$ نشان می‌دهیم. مثلاً گزاره‌های «همه اعداد منفی، از صفر کوچک‌ترند.» و «۲۵ مربع کامل است.» هم‌ارزند، چون هر دو ارزش درست دارند.

نمونه: $\sim(3 \in \mathbb{N}) \equiv (3 \notin \mathbb{N})$

(ب) $\sim(x + y = z) \equiv ?$

$\sim(\frac{1}{3} < \frac{1}{4}) \equiv (\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4})$

$\sim(x + y = z) \equiv (x + y \neq z)$

$\sim(W \subseteq Q) \equiv (W \not\subseteq Q)$

هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه حل شده، کامل کنید.

(آ) $\sim(\frac{1}{3} < \frac{1}{4}) \equiv ?$

(پ) $\sim(W \subseteq Q) \equiv ?$

پاسخ: (آ)

(ب)

(پ)

تذکره: اگر از یک گزاره، دو بار نقیض بگیریم، خود آن گزاره به دست می‌آید؛ یعنی: $\sim(\sim p) \equiv p$

مثال: $\sim[\sim(3 \in \mathbb{N})] \equiv (3 \in \mathbb{N})$

مثال: $\sim[\sim(5 > 3)] \equiv (5 > 3)$

۱. جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$2^5 \times 2^8 = 2^{12}$			
		$+120 \geq -1200$	
میانگه داده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ عدد ۲/۵ است.			
		مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد، کوچک‌تر است.	
معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.			
		در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل «۱۳۳۱» نیستند.	

۲. کدام یک از جملات یا عبارات‌های زیر گزاره محسوب می‌شوند؟ ارزش هر گزاره را مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۴ کتاب درسی)

(ب) عدد طبیعی x ، مربع کامل است.

(ت) دامنه تابع $f = \{(1, 5), (6, 2), (3, 10)\}$ برابر است با $D_f = \{1, 3, 6\}$

(ج) تعداد دندان‌های خراب هر فرد، متغیر کمی نسبتی است.

(ح) عدد $(-2)^n$ همیشه عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

(د) عدد 2^8 عدد بسیار بزرگی است.

(ر) رابطه $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ همواره درست است. ($a, b \in \mathbb{R}$)

(آ) کسر $\frac{2x+1}{\sqrt{x}-3}$ عبارتی گویا است.

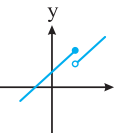
(پ) رشته مورد علاقه شما در دانشگاه چیست؟

(ث) کوچک‌ترین عدد اول طبیعی عدد ۱ است.

(چ) رابطه $f = \{(5, 6), (7, 8), (9, 10)\}$ تابع است.

(خ) روزی ۲ ساعت ریاضی بخوان.

(ذ) $-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}$

(ژ) نمودار  بیانگر یک تابع است.

(ز) نمودار خط $y = 2x - 1$ از نواحی اول و سوم نمی‌گذرد.

۳. هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

نمونه $\sim(x > y) \equiv x \leq y$

(آ) $\equiv ? (24 \text{ عددی مرکب است.}) \sim$

(ب) $\equiv ? (\sqrt{25+9} \neq 5+3)$

(پ) $\equiv ? (\sim(-12 \leq -8))$

(ت) $\equiv ? (\sim(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}))$

(ث) $\equiv ? (\sim[\sim(2^4 \leq 4^2)])$

پاسخ‌های تشریحی

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$2^5 \times 2^8 = 2^{12}$	ن چون $2^5 \times 2^8 = 2^{13}$	$2^5 \times 2^8 \neq 2^{12}$	د
$120 < -1200$	ن	$+120 \geq -1200$	د
میانۀ داده‌های ۱۰۲، ۳۰۴، عدد ۲/۵ است.	د	میانۀ داده‌های ۱۰۲، ۳۰۴، عدد ۲/۵ نیست.	ن
مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر نیست.	د	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر است.	ن
معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.	د چون دلتای معادله مثبت است.	معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز ندارد.	ن
در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل «۱۳۳۱» هستند.	د	در مثلث خیام، اعداد سطر چهارم به شکل «۱۳۳۱» نیستند.	ن

۲ (آ) گزاره است و ارزش نادرست دارد؛ چون x زیر رادیکال است و لذا عبارت مذکور، گویا محسوب نمی‌شود.

(ب) گزاره نیست چون مقدار x را نمی‌دانیم پس نمی‌توانیم ارزش جمله داده‌شده را تعیین کنیم.

(پ) گزاره نیست (جمله پرسشی است).

(ت) گزاره درست است؛ زیرا می‌دانیم دامنه تابع، شامل عضوهای اول زوج‌مرتبه‌ها می‌باشد.

(ث) گزاره نادرست است کوچک‌ترین عدد اول طبیعی، عدد ۲ است نه ۱.

(ج) گزاره درست است (نسبت تعداد دندان‌های خراب هر دو نفر، با معنی است).

(چ) گزاره درست است (عضوهای اول زوج‌مرتبه‌ها متفاوت‌اند، پس f تابع است).

(ح) گزاره نادرست است؛ چون اگر n زوج باشد حاصل $(-2)^n$ عددی مثبت می‌شود. مثلاً $(-2)^2 = +4$

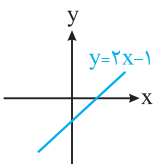
(خ) گزاره نیست (جمله امری است).

(د) گزاره نیست (جمله خبری است، ولی قابل ارزش‌گذاری نیست).

(ذ) گزاره نادرست است؛ زیرا می‌دانیم که $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$ است.

(ر) گزاره درست است (اتحاد مربع دوجمله‌ای است).

(ز) گزاره نادرست است؛ زیرا نمودار این خط از نواحی اول، سوم و چهارم می‌گذرد؛ پس فقط از ناحیه دوم نمی‌گذرد. (مطابق شکل)



(ژ) گزاره درست است؛ چون هر خط عمودی دلخواه، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

$\sim(24 \text{ عددی مرکب نیست.}) \equiv (24 \text{ عددی مرکب است.})$

۳ (آ)

$\sim(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv (\sqrt{25+9} = 5+3)$

(ب)

$\sim(-12 \leq -8) \equiv (-12 > -8)$

(پ)

$\sim(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv (\sqrt{3} \in \mathbb{Q})$

(ت)

$\sim[\sim(2^4 \leq 4^2)] \equiv (2^4 \leq 4^2)$

(ث)

درسنامه ۲

گزاره‌های عطفی و فصلی

گزاره‌های مرکب (ترکیب گزاره‌ها با هم): به کمک منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها، دو یا چند گزاره ساده را به ۴ حالت می‌توانیم با هم ترکیب کنیم تا گزاره‌های مرکب ساخته شوند. دو حالت از این ۴ حالت در این درسنامه و ۲ حالت دیگر را در درسنامه (۳) بررسی می‌کنیم.

ترکیب عطفی دو گزاره: اگر دو گزاره ساده p و q را با حرف ربط «و» به هم اتصال دهیم، گزاره مرکب $p \wedge q$ حاصل می‌شود که آن را « p و q » می‌خوانیم. البته دقت کنید که گزاره‌های p و q ممکن است هیچ ارتباطی با هم نداشته باشند.

به عنوان مثال گزاره «۲ عددی اول است و تهران پایتخت ایران است.» یک ترکیب عطفی است. واضح

است که ترکیب عطفی $p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هم p درست باشد و هم q . پس گزاره بالا درست است، چون می‌دانیم ۲ عددی اول است و تهران پایتخت ایران است. جدول ارزش درستی $p \wedge q$ در حالت کلی به شکل مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ملاحظه می‌کنید که اگر حتی یکی از گزاره‌های p یا q نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

نتیجه بسیار مهم از جدول: اگر گزاره‌ای همیشه درست و T گزاره‌ای همیشه نادرست باشد و p گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$$

$$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$$

$$(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F$$

ارزش گزاره‌های عطفی زیر را تعیین کنید.

(آ) $\frac{1}{3}$ عددی گویا است و انحراف معیار، جذر واریانس است.

$$(B) [-3 \notin \mathbb{Z}] \wedge \left[\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} > \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

(پ) a^2 عددی نامنفی است و ۱۲۱ عددی مربع کامل است.

$$(T) (\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}) \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{Z}$$

پاسخ: (آ) $\frac{1}{3}$ عددی گویا است و انحراف معیار، جذر واریانس است.

درست درست درست

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15} > \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \quad \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15} > \frac{1}{4}$$

(ب) ابتدا حاصل $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ و $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ را به دست می‌آوریم و سپس آن‌ها را مقایسه می‌کنیم:

می‌دانیم $\frac{4}{3}$ از $\frac{1}{3}$ بزرگ‌تر است، لذا گزاره $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ درست است.

$$[-3 \notin \mathbb{Z}] \wedge \left[\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} > \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

نادرست درست نادرست

(پ) a^2 عددی نامنفی است و ۱۲۱ عددی مربع کامل است. (a هر عددی که باشد حاصل a^2 صفر یا مثبت است پس نامنفی است.)

درست درست درست

$$(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}) \wedge (\sqrt{2} \in \mathbb{Z})$$

نادرست نادرست نادرست

(ت)

درسنامه ۲

ترکیب فصلی دو گزاره: اگر دو گزاره ساده p و q را با حرف ربط «یا» به هم اتصال دهیم، گزاره مرکب $p \vee q$ حاصل می‌شود که آن را « p یا q » می‌خوانیم. مثلاً گزاره « $\frac{3}{5}$ عددی طبیعی است یا 5^0 مضرب ۵ است.» یک ترکیب فصلی است.

واضح است که اگر هم p نادرست باشد و هم q ، گزاره $p \vee q$ نادرست است و در بقیه حالاتها درست است. پس گزاره اخیر درست است؛ چون p نادرست است ($\frac{3}{5}$ عدد طبیعی نیست) ولی q درست است. (5^0 بر ۵ بخش پذیر است).

جدول ارزش درستی $p \vee q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نتیجه مهم از جدول: اگر T گزاره‌ای همیشه درست و F گزاره‌ای همیشه نادرست و p گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$$

$$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$$

$$(p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$$

مثال

ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (در قسمت‌های پ و ت متغیر x عدد طبیعی است.)

(آ) 125 عددی فرد یا مربع کامل است.

(ب) (100 مضرب ۵ است.) \vee ($-3 \geq -10$)

(پ) $[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2] \vee (x^2 \geq x)$

(ت) معادله $x^2 - 4 = 0$ ریشه ندارد یا حاصل $(x-1)^3$ منفی است.

پاسخ: (آ) 125 عددی فرد است یا 125 عددی مربع کامل است.

نادرست
درست

↓

درست

(ب) (100 مضرب ۵ است.) \vee ($-3 \geq -10$)

درست
درست

↓

درست

(پ) $[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2] \vee (x^2 \geq x)$

درست (اتحاد مزدوج)
درست

↓

درست

(ت) معادله $x^2 - 4 = 0$ ریشه ندارد یا حاصل $(x-1)^3$ منفی است.

نادرست
نادرست

↓

نادرست

$$(x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = 2) \text{ جذر طبیعی } x$$

درسنامه ۲

نکته

گاهی لازم است نقیض یک گزاره عطفی یا فصلی را تعیین کنیم. برای این منظور از قوانین دمورگان به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

یعنی برای پیدا کردن نقیض $p \vee q$ تک‌تک گزاره‌های p و q را نقیض می‌کنیم و علامت « \vee » به « \wedge » تبدیل می‌شود. به طریق مشابه می‌توان گفت برای نقیض کردن $p \wedge q$ تک‌تک گزاره‌های p و q را نقیض کرده و علامت « \wedge » را به « \vee » تبدیل می‌کنیم یعنی حرف «و» به «یا» و حرف «یا» به «و» تبدیل می‌شود.

مثال

نقیض گزاره‌های زیر را به دست آورید:

(آ) $(3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})$

(ب) $(\frac{1}{5} < \frac{1}{4}) \vee (\sqrt{3} > \sqrt{2})$

(پ) ۳ عددی اول است و ۶۳ مضرب ۲ است.

(ت) ۵ مقسوم‌علیه ۱۰۰ نیست یا درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی است.

(پاسخ: آ) $\sim[(3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})] \equiv [(3 \notin \mathbb{Z}) \vee \sim(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})] \equiv (3 \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{W})$

(ب) $\sim[(\frac{1}{5} < \frac{1}{4}) \vee (\sqrt{3} > \sqrt{2})] \equiv \sim(\frac{1}{5} < \frac{1}{4}) \wedge \sim(\sqrt{3} > \sqrt{2}) \equiv (\frac{1}{5} \geq \frac{1}{4}) \wedge (\sqrt{3} \leq \sqrt{2})$

(پ) نقیض گزاره داده شده به صورت مقابل است: ۳ عددی اول نیست یا ۶۳ مضرب ۲ نیست.

(ت) نقیض گزاره داده شده به صورت مقابل است: ۵ مقسوم‌علیه ۱۰۰ است و درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی نیست.

مثال

اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، جدول ارزش درستی گزاره $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$ را رسم کنید.

(پاسخ:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge \sim p$
د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	د	د	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

مثال

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)$ را بدون رسم جدول تعیین کنید.

(پاسخ: $(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p) \equiv (\sim T \wedge \sim F) \vee (r \wedge T) \equiv (\underbrace{F \wedge T}_F) \vee (\underbrace{r \wedge T}_r) \equiv r$)

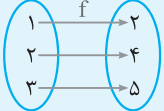
۴. جدول زیر را کامل کنید.

(مشابه فعالیت صفحه ۵ کتاب درسی)

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	در تابع $f(x) = x^2 - 5x$ متغیر مستقل برابر $f(x)$ است و درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی است.		
۲	حاصل $(-5)^4$ عددی منفی نیست و رنگ پیراهن افراد، متغیر کیفی اسمی نیست.		
۳	۱۸ مضرب ۹ است و	✓	
۴ و شیب هر خط عمودی (موازی محور عرض‌ها) تعریف نشده است.		✓
۵	طول رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 1$ برابر -۲ است و $\mathbb{Z} \not\subseteq \{0, 1, 2\}$		
۶	مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۰ عبارتند از $1, 2, 5, 10$ و میانه یک سری از داده‌ها همان چارک دوم است.		
۷	$(\sqrt{100 - 25} = 10 - 5) \wedge \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{-4} \neq \left(\frac{3}{2} \right)^4 \right)$		
۸	مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچک‌تر است و مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.		

۵. جدول زیر را کامل کنید.

(مشابه فعالیت صفحه ۶ کتاب درسی)

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	عدد ۲۳ زوج یا اول است.		
۲	عدد ۵۸ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.		
۳	کسر $\frac{x^2}{ x -1}$ عبارتی گویا است یا ۸۰ عددی مرکب	✓	
۴	$(\sqrt{3} \in \mathbb{Z}) \vee ((-2)^4 \geq (-4)^2)$		
۵	اندازه قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست.		
۶	نمودار ون  تابع نیست یا	✓	
۷	تجزیه شده عبارت $4x^2 - 4x + 1$ به صورت $(2x - 1)^2$ است یا	✓	
۸	معکوس هر عدد حقیقی مثبت، کوچک‌تر از خود آن عدد است یا مجموع هر عدد طبیعی زوج با هر عدد طبیعی فرد، عددی فرد است.		

۶. با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی یا نادرستی هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

$(p \vee \sim p) \equiv F$ (ب)	$(p \wedge \sim p) \equiv F$ (ا)
$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ (ت)	$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ (پ)
$[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$ (ج)	$[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$ (ث)
$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$ (ح)	$[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$ (چ)

$$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \text{ (د)}$$

$$[p \wedge (\sim p \wedge \sim q)] \equiv F \text{ (ر)}$$

$$[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r] \text{ (خ)}$$

$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)] \text{ (ذ)}$$

$$[\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] \equiv p \text{ (ز)}$$

۷. بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به‌دست آورید.

$$(\sim p \vee T) \wedge (F \wedge \sim p) \equiv ? \text{ (ب)}$$

$$\sim(\sim p) \vee \sim(\sim T) \equiv ? \text{ (ا)}$$

$$\sim(p \vee \sim p) \wedge \sim(q \wedge \sim q) \equiv ? \text{ (پ)}$$

۸. اگر فرض کنیم که گزاره $p \wedge q$ گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ را تعیین کنید.

۹. بدون رسم جدول، طرف دیگر هم‌ارزی‌های زیر را به‌دست آورید. (T گزاره همواره درست و F گزاره همواره نادرست است.)

$$(p \wedge \sim p) \vee (q \vee T) \equiv ? \text{ (ب)}$$

$$\sim p \wedge \sim F \equiv ? \text{ (ا)}$$

۱۰. اگر ارزش گزاره $p \vee q$ نادرست و ارزش $\sim r$ درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p \wedge q) \vee r$ را تعیین کنید.

۱۱. اگر گزاره $p \vee (\sim q \vee p)$ نادرست باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r) \equiv ? \text{ (ب)}$$

$$\sim p \vee (q \wedge r) \equiv ? \text{ (ا)}$$

۱۲. نقیض گزاره‌های زیر را به‌دست آورید سپس ارزش آن‌ها را تعیین کنید:

(ا) ۱۳ مضر ۲ نیست و میانه یک سری از داده‌ها همان چارک اول است.

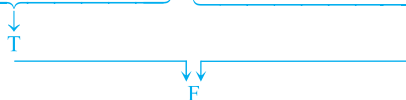
(ب) ۴ عدد مرکب است یا مسکو پایتخت روسیه نیست.

$$\text{(پ)} \quad (-6 < -10) \wedge (\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq \mathbb{R})$$

$$\text{(ت)} \quad (\frac{1}{8} \notin \mathbb{Z}) \vee (\sqrt{5} \neq 1)$$

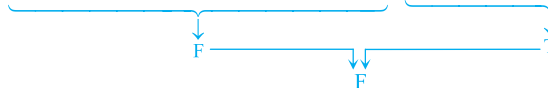
پاسخ‌های تشریحی

۴. ردیف ۱: در تابع $f(x) = x^2 - 5x$ متغیر مستقل $f(x)$ است و درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی است.

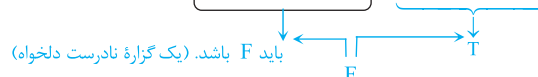


تذکر: توجه کنید که در تابع ذکرشده، x متغیر مستقل و $f(x)$ متغیر وابسته است.

ردیف ۲: حاصل $(-5)^4$ عددی منفی نیست و رنگ پیراهن افراد، متغیر کیفی اسمی نیست.



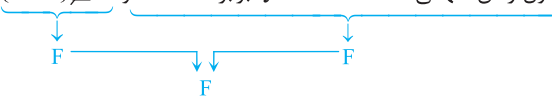
ردیف ۳: ۱۸ مضر ۹ است و ۲ عددی فرد است.



ردیف ۴: ۲ عددی اول است و شیب هر خط عمودی، تعریف نشده است.



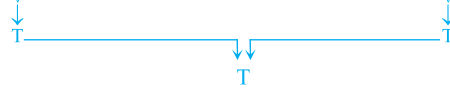
ردیف ۵: طول رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 1$ برابر -2 است و $\{0, 1, 2\} \not\subseteq \mathbb{Z}$



$$x = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

یادآوری: طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است. بنابراین داریم:

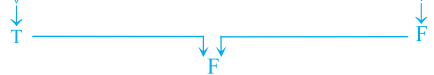
ردیف ۶: مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۰ عبارتند از $10 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10$ و میانهٔ یک‌سری از داده‌ها همان چارک دوم است.



ردیف ۷: $(\sqrt{100-25} = 10-5) \wedge \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \neq \left(\frac{3}{2}\right)^4 \right)$



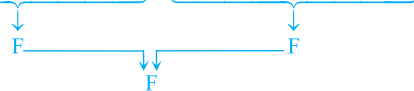
ردیف ۸: مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچک‌تر است و مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.



ردیف ۱: عدد ۲۳ زوج است یا ۲۳ عدد اول است.



ردیف ۲: عدد ۵۸ بر ۳ بخش‌پذیر است یا عدد ۵۸ بر ۵ بخش‌پذیر است.



ردیف ۳: کسر $\frac{x^2}{|x|-1}$ گویا است یا 8^0 عددی مرکب است.



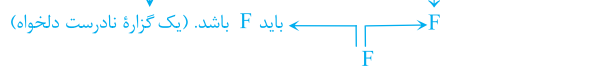
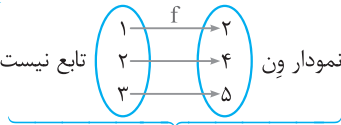
ردیف ۴: $(\sqrt{3} \in \mathbb{Z}) \vee ((-2)^4 \geq (-4)^2)$



ردیف ۵: اندازهٔ قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است یا ارسطو نویسندهٔ کتاب ارغنون نیست.



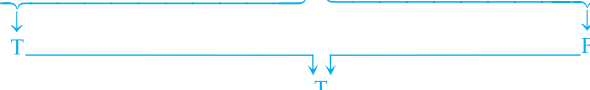
ردیف ۶: نمودار ون تابع نیست یا ۲ عددی فرد است.



ردیف ۷: تجزیه‌شدهٔ عبارت $4x^2 - 4x + 1$ به صورت $(2x-1)^2$ است یا ۲ عددی فرد است.



ردیف ۸: معکوس هر عدد حقیقی مثبت، کوچک‌تر از خود آن عدد است یا مجموع هر عدد طبیعی زوج با هر عدد طبیعی فرد، عددی فرد است.



دقت کنید که معکوس عدد $\frac{1}{5}$ می‌شود ۵ که از خود $\frac{1}{5}$ بزرگ‌تر است، پس گزارهٔ اول نادرست است.

۶

(آ) هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

p	~p	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

(ب) هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

p	~p	$p \vee \sim p$
د	ن	د
ن	د	د

سمت راست هم‌ارزی سمت چپ هم‌ارزی

(پ)

p	q	~p	~q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

پس هم‌ارزی داده‌شده درست است. ضمناً به این هم‌ارزی، قانون دمورگان می‌گوییم.

(ت)

سمت راست هم‌ارزی سمت چپ هم‌ارزی

p	q	~p	~q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د

پس هم‌ارزی داده‌شده درست است. به این هم‌ارزی هم، دمورگان می‌گوییم.

(ث)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

این دو ستون، یکسان هستند پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

سمت راست هم‌ارزی سمت چپ هم‌ارزی

(ج)

p	q	~p	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$	$p \vee q$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(ج)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$p \wedge q$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(ح)

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee q$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(خ)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge q$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(د)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(ذ)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(ر)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	ن

هم‌ارزی، داده‌شده، درست است.

(ز)

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
د	د	ن	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	ن	د	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	د	د

هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

۷

$$[\sim(\sim p) \vee \sim(\sim T)] \equiv (p \vee T) \equiv T$$

(آ)

$$[\underbrace{(\sim p \vee T)}_T \wedge \underbrace{(F \wedge \sim p)}_F] \equiv (T \wedge F) \equiv F$$

(ب)

$$[\sim(\underbrace{p \vee \sim p}_T) \wedge \sim(\underbrace{q \wedge \sim q}_F)] \equiv (\sim T \wedge \sim F) \equiv (F \wedge T) \equiv F$$

(پ)

۸ چون $p \wedge q$ درست است، لذا هم p و هم q درست هستند. بنابراین:

$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [T \vee (\underbrace{T \wedge r}_r)] \equiv (T \vee r) \equiv T$$

$$(\sim p \wedge \sim F) \equiv (\sim p \wedge T) \equiv \sim p$$

(آ) ۹

$$[(\underbrace{p \wedge \sim p}_F) \vee (\underbrace{q \vee T}_T)] \equiv (F \vee T) \equiv T$$

(ب)

۱۰ ارزش $p \vee q$ نادرست است، پس هم p نادرست است و هم q ، از طرفی ارزش $\sim r$ درست است، پس ارزش خود r نادرست است.

$$[(\sim p \wedge q) \vee r] \equiv [(\sim F \wedge F) \vee F] \equiv [(T \wedge F) \vee F] \equiv F$$

۱۱ گزاره $p \vee (\sim q \vee p)$ نادرست است، پس هم p نادرست است و هم $\sim q \vee p$. برای آن که $\sim q \vee p$ نادرست باشد، باید هم p نادرست باشد و هم $\sim q$ پس خود q درست است. لذا:

(آ)

$$[\sim p \vee (q \wedge r)] \equiv [\sim F \vee (\underbrace{T \wedge r}_r)] \equiv (T \vee r) \equiv T$$

(ب)

$$[\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)] \equiv [\sim(\underbrace{F \vee T}_T) \wedge r] \equiv (\sim T \wedge r) \equiv (F \wedge r) \equiv F$$

۱۲ (آ) نقیض این گزاره با توجه به قوانین دمورگان به صورت زیر است:

۱۳ مضرب ۲ است یا میانه یک سری از داده‌ها همان چارک اول نیست.

درست
نادرست

درست

(ب) نقیض این گزاره به صورت زیر است:

۴ عدد مرکب نیست و مسکو پایتخت روسیه است.

درست
نادرست

نادرست

(پ) نقیض گزاره داده شده عبارت است از:

$$(\underbrace{-6 \geq -10}_{\text{درست}}) \vee (\underbrace{\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \not\subseteq \mathbb{R}}_{\text{نادرست}})$$

درست

$$(\underbrace{\frac{1}{8} \in \mathbb{Z}}_{\text{نادرست}}) \wedge (\underbrace{\sqrt{5} = 1}_{\text{درست}})$$

نادرست

(ت) نقیض این گزاره عبارت است از: